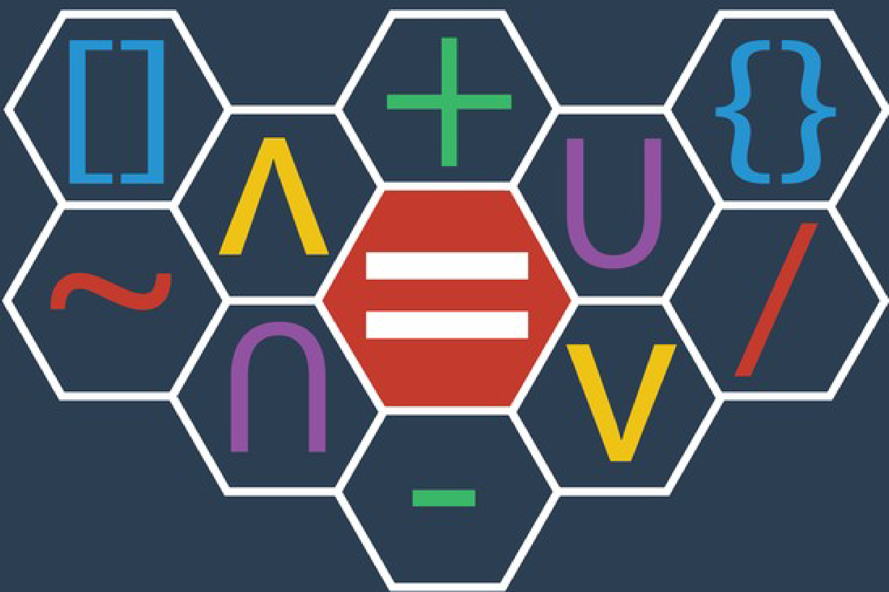
М. П. Філіпчук

ПРАКТИКУМ З ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ



Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

М.П. Філіпчук

ПРАКТИКУМ
З ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник

ЧНУ РУТА
Чернівці
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича
2024

УДК 510.3, 519.1, 510.6, 519.7
Ф 53

Друкується за ухвалою Вченої ради
Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича
(протокол № 9 від 26 червня 2024 р.)

Рецензенти:

Бомба А.Я., доктор технічних наук, професор, професор кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування;

Кузенков О.О., кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри обчислювальної математики та математичної кібернетики Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара.

Філіпчук М.П.

Ф 53 Практикум з дискретної математики : навч. посібник. Чернівці : Чернівец. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2024. 228 с.

ISBN 978-966-423-871-4

Викладено основні теоретичні відомості з класичних розділів дискретної математики, наведено методи та приклади розв'язування типових задач, запропоновано велику кількість завдань для самостійної роботи.

Для студентів спеціальностей 113 «Прикладна математика», 122 «Комп'ютерні науки», 124 «Системний аналіз».

ISBN 978-966-423-871-4 **УДК 510.3, 519.1, 510.6, 519.7**

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Дискретна математика – фундаментальна математична дисципліна, що застосовується в математичній кібернетиці, комп'ютерній математиці та програмуванні, при створенні автоматизованих систем керування та проєктування, засобів передачі й обробки інформації, а також при розв'язуванні багатьох технічних та економічних задач.

Пропонований навчальний посібник, який увібрав в себе понад двадцятирічний досвід викладання автором курсу дискретної математики на факультеті математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича для студентів першого курсу спеціальностей "Прикладна математика", "Комп'ютерні науки" та "Системний аналіз", ставить за мету розгляд класичних розділів дискретної математики з головним акцентом на вивченні методів і набутті практичних навичок розв'язування відповідних типових задач.

При розгляді кожної теми коротко викладено необхідні теоретичні відомості та детально розглянуто приклади розв'язування ретельно підібраних типових задач. Формулювання понять, означень і математичних тверджень при цьому наведено *курсивом*, а терміни, що вводяться, виділено **напівжирним** шрифтом. Закінчення розв'язування задач позначається символом "■". Для кращого засвоєння матеріалу в кожній темі запропоновано велику кількість завдань для самостійної роботи, а для самоконтролю в кінці посібника наведено відповіді до більшості з них.

У списку рекомендованої літератури подано джерела, де, за потреби, можна знайти детальний виклад теоретичного матеріалу, зокрема, строгі доведення наведених у посібнику теоретичних фактів, і додаткові задачі для самостійного розв'язування.

Автор сподівається, що посібник буде цікавим для читачів і сприятиме успішному та ефективному вивченню ними курсу дискретної математики. Відгуки, зауваження, побажання та пропозиції можна надіслати на адресу m.filipchuk@chnu.edu.ua.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ АБРЕВІАТУР

БВ	–	бінарне відношення
ГЧЗ	–	голівка читання-запису
ДД	–	декартовий добуток
ДНФ	–	диз’юнктивна нормальна форма
ДДНФ	–	досконала диз’юнктивна нормальна форма
ДКНФ	–	досконала кон’юнктивна нормальна форма
ЕД	–	елементарна диз’юнкція
ЕК	–	елементарна кон’юнкція
КНФ	–	кон’юнктивна нормальна форма
КП	–	керуючий пристрій
ЛНРРСК	–	лінійне неоднорідне рекурентне рівняння зі сталими коефіцієнтами
ЛОРРСК	–	лінійне однорідне рекурентне рівняння зі сталими коефіцієнтами
МДНФ	–	мінімальна диз’юнктивна нормальна форма
МНР	–	машина з необмеженими регістрами
МТ	–	машина Тюрінга
ОДЗ	–	область допустимих значень
ОПК	–	основний принцип комбінаторики
ПЖ	–	поліном Жегалкіна
РР	–	рекурентне рівняння
СДНФ	–	скорочена диз’юнктивна нормальна форма
ТДНФ	–	тупикова диз’юнктивна нормальна форма
ХР	–	характеристичне рівняння

ТЕМА 1. МНОЖИНИ ТА ВІДНОШЕННЯ

1.1. Основні поняття теорії множин. Операції над множинами

Інтуїтивне поняття множини: ***множина*** *– сукупність деяких різних об'єктів, яким властиве дещо спільне і які можна розглядати як єдине ціле.*

*Об'єкти, з яких складається множина, називаються **елементами множини**.*

Множини позначають великими латинськими літерами A, B, X, Y, ..., а їх елементи – малими латинськими літерами a, b, x, y, ...

*Множина, що не містить жодного елемента, називається **порожньою** і позначається символом $\varnothing$.*

Задати множину – вказати правило, яке дозволяє з'ясувати, чи є певний об'єкт елементом даної множини.

Найпростіший спосіб задання множини – **безпосередній перелік** усіх її елементів всередині фігурних дужок через кому, наприклад,

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\},\ B = \{1,2,3,4,5\},\ \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots n,\ldots\},\ \varnothing = \{\,\}.$$

При цьому порядок розташування елементів у множині неістотний.

Множину також можна задати, вказавши **характерну властивість**, якою володіють усі елементи множини. При цьому множину X з елементів x, що задовольняють деяку умову $p(x)$, позначають так:

$$X = \{x \mid p(x)\} \quad \text{або} \quad X = \{x : p(x)\}.$$

Наприклад,

$$A = \{x \mid x - \textit{просте число}\} \qquad (A = \{2,3,5,7,11,13,17,\ldots\}),$$

$$B = \{x \mid x^2 + 2x - 15 = 0\} \qquad (B = \{-5,3\}).$$

*Якщо елемент a входить до складу множини A (елемент a **належить** множині A), то це позначають $a \in A$, інакше – $a \notin A$.*

Нехай, наприклад, $A=\{1,2,3\}$, тоді $3 \in A$, $7 \notin A$.

Множина A називається ***підмножиною*** *множини B (позначається $A \subseteq B$), якщо кожен елемент множини A належить також і множині B.*

Нехай, наприклад, $A=\{1,3,5\}$, $B=\{1,2,3,4,5\}$, тоді $A \subseteq B$.

Для будь-якої множини A виконуються співвідношення:

$$A \subseteq A, \quad \varnothing \subseteq A.$$

Множини A і B називаються ***рівними*** *(позначається $A=B$), якщо вони складаються з однакових елементів. Якщо ж множини A і B не рівні, то це позначають $A \neq B$.*

Нехай, наприклад, $A=\{1,3,5\}$, $B=\{3,1,5\}$, тоді $A=B$.

Очевидно, що $A=B$ тоді і тільки тоді, коли $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$:

$$A=B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Множина A називається ***власною підмножиною*** *множини B (позначається $A \subset B$), якщо $A \subseteq B$, але $A \neq B$.*

Нехай, наприклад, $A=\{1,3,5\}$, $B=\{1,2,3,4,5\}$, тоді $A \subset B$, а $B \not\subset A$.

Якщо всі множини, що розглядаються в процесі вивчення певного питання, є підмножинами деякої іншої множини, то вона називається ***універсальною множиною*** *у даному процесі. Універсальну множину позначають символом U.*

Для будь-якої множини A виконується співвідношення:

$$A \subseteq U.$$

Для наочного зображення множин використовують графічні **діаграми Ейлера–Венна**, на яких універсальну множину U зображають у вигляді прямокутника, а всі інші множини – у вигляді кругів всередині цього прямокутника.

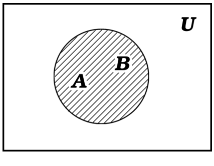


Рис. 1.1.1. Ілюстрація поняття рівності множин

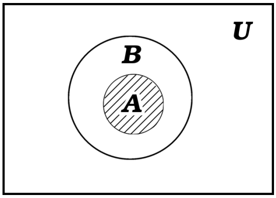


Рис. 1.1.2. Ілюстрація поняття власної підмножини

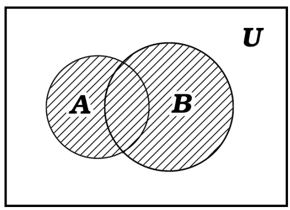
Наприклад, на рис. 1.1.1 і 1.1.2 наведено діаграми Ейлера–Венна для ілюстрації понять $A = B$ і $A \subset B$ відповідно.

Над множинами можна виконувати наступні операції:

- операцію об'єднання (позначається символом $\cup$);
- операцію перетину (позначається символом $\cap$);
- операцію різниці (позначається символом $\setminus$);
- операцію доповнення (позначається символом $\overline{\ \ }$);
- операцію симетричної різниці (позначається символом Δ).

Визначення цих операцій подано у таблиці 1.1.1, де A і B – довільні підмножини універсальної множини U. Результуючі множини на діаграмах Ейлера–Венна при цьому заштриховано.

Таблиця 1.1.1. Визначення операцій над множинами

Означення операції	**Діаграма Ейлера–Венна, приклад**
Об'єднанням *множин* A *і* B *називається множина* $A \cup B$, *що складається з елементів, які належать хоча б одній із цих множин:* $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}$. Аналогічним чином визначають об'єднання довільної скінченної кількості множин $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \equiv \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.	 Нехай $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,5,6\}$, тоді $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$.

<table>
<tr>
<td>

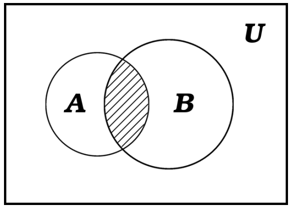
Перетином *множин* A *і* B *називається множина* $A \cap B$, *що складається з елементів, які одночасно належать обом цим множинам:*

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ і } x \in B \}.$$

Аналогічним чином визначають перетин довільної скінченної кількості множин

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \equiv \bigcap_{i=1}^{n} A_i .$$

</td>
<td>



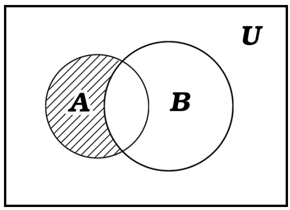
Нехай
$A = \{1,2,3,4\}$,
$B = \{3,4,5,6\}$,
тоді $A \cap B = \{3,4\}$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Різницею *множин* A *і* B *називається множина* $A \setminus B$, *що складається з таких елементів множини* A, *які не належать множині* B:

$$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ і } x \notin B \}.$$

</td>
<td>



Нехай
$A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,5,6\}$,
тоді $A \setminus B = \{1,2\}$,
$B \setminus A = \{5,6\}$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Доповненням *множини* A *називається множина* $\overline{A}$, *що складається з таких елементів універсальної множини* U, *які не належать множині* A:

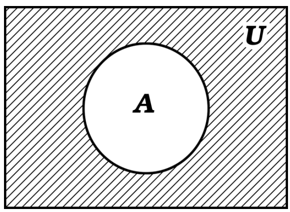
$$\overline{A} = \{ x \mid x \in U \text{ і } x \notin A \}.$$

Очевидно,

$$\overline{A} = U \setminus A,$$

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

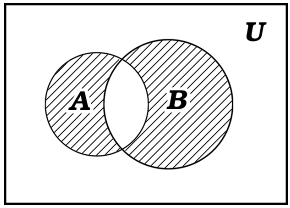
</td>
<td>



Нехай
$U = \{1,2,3,4,5\}$, $A = \{1,3,5\}$,
тоді $\overline{A} = \{2,4\}$,
$\overline{\overline{A}} = \{1,3,5\} = A$.

</td>
</tr>
</table>

Продовження таблиці 1.1.1

Симетричною різницею *множин A і B називається множина $A \Delta B$, що визначається наступним чином:* $$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$ Очевидно, що симетричну різницю можна визначати і так: $$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$	 Нехай $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,5,6\}$, тоді $A \Delta B = \{1,2,5,6\}$.

Розглянемо тепер **властивості операцій над множинами.** Нехай A, B і C – довільні підмножини універсальної множини U.

1. Властивості операції об'єднання

1.1. $A \cup B = B \cup A$ (***комутативність***)

1.2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (***асоціативність***)

1.3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (***дистрибутивність відносно перетину***)

1.4. $A \cup A = A$ (***ідемпотентність***)

1.5. $A \cup \varnothing = A$

1.6. $A \cup U = U$

1.7. $A \cup \overline{A} = U$

1.8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (***закон де Моргана***)

1.9. $A \cup (A \cap B) = A$ (***закон поглинання***)

2. Властивості операції перетину

2.1. $A \cap B = B \cap A$ (***комутативність***)

2.2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (***асоціативність***)

2.3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (***дистрибутивність відносно об'єднання***)

2.4. $A \cap A = A$ (***ідемпотентність***)

2.5. $A \cap \varnothing = \varnothing$

2.6. $A \cap U = A$

2.7. $A \cap \overline{A} = \varnothing$

2.8. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (***закон де Моргана***)

2.9. $A \cap (A \cup B) = A$ (***закон поглинання***)

3. Властивості операції доповнення

3.1. $\overline{\overline{A}} = A$ (***властивість інволюції***)

3.2. $\overline{\varnothing} = U$

3.3. $\overline{U} = \varnothing$

3.4. $\overline{A} = U \setminus A$

4. Властивості операції різниці

4.1. $A \setminus B \neq B \setminus A$, якщо $A \neq B$

4.2. Якщо $A \setminus B = \varnothing$, то $A \subseteq B$

4.3. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

4.4. $A \setminus A = \varnothing$

4.5. $A \setminus \varnothing = A$

4.6. $A \setminus U = \varnothing$

4.7. $A \setminus \overline{A} = A$

5. Властивості операції симетричної різниці

5.1. $A \Delta B = B \Delta A$ (***комутативність***)

5.2. $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$ (***асоціативність***)

5.3. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

(***дистрибутивність перетину відносно симетричної різниці***)

5.4. $A \Delta A = \varnothing$

5.5. $A \Delta \varnothing = A$

5.6. $A \Delta U = \overline{A}$

5.7. $A \Delta \overline{A} = U$

Наведені властивості операцій над множинами використовують для спрощення різних виразів і доведення різноманітних рівностей.

Із властивості 4.3 та означення симетричної різниці випливає, що операції різниці та симетричної різниці можуть бути виражені через більш прості операції об’єднання, перетину та доповнення:

$$A \setminus B = A \cap \overline{B},$$

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}),$$

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}).$$

Задача 1.1.1. Задано підмножини A, B, C множини арабських цифр $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Знайти множини $D = (\overline{C \setminus B}) \cap A$, $E = A \Delta (B \cup C)$.

$$A=\{1,2,3,5\},\ B=\{1,3,5\},\ C=\{1,2,5,8\}.$$

Розв'язання.

З умови випливає, що

$$\{0,1,2,...,9\} = U.$$

Знаходимо множину $D=(\overline{C \setminus B}) \cap A$:

$C \setminus B = \{1,2,5,8\} \setminus \{1,3,5\} = \{2,8\}$,

$\overline{C \setminus B} = U \setminus (C \setminus B) = \{0,1,2,...,9\} \setminus \{2,8\} = \{0,1,3,4,5,6,7,9\}$,

$D = (\overline{C \setminus B}) \cap A = \{0,1,3,4,5,6,7,9\} \cap \{1,2,3,5\} = \{1,3,5\}$.

Знаходимо множину $E = A \,\Delta\, (B \cup C)$:

$B \cup C = \{1,3,5\} \cup \{1,2,5,8\} = \{1,2,3,5,8\}$,

$E = A \,\Delta\, (B \cup C) = (A \setminus (B \cup C)) \cup ((B \cup C) \setminus A)$,

$A \setminus (B \cup C) = \{1,2,3,5\} \setminus \{1,2,3,5,8\} = \{\} = \varnothing$,

$(B \cup C) \setminus A = \{1,2,3,5,8\} \setminus \{1,2,3,5\} = \{8\}$,

$E = (A \setminus (B \cup C)) \cup ((B \cup C) \setminus A) = \varnothing \cup \{8\} = \{8\}$.

Відповідь: $D = \{1,3,5\}$, $E = \{8\}$. ■

Завдання для самостійної роботи

Задача 1.1.2. Задано множини A, B, U. З'ясувати, чи $A=B$, чи $A \subseteq B$, чи $B \subseteq A$, чи $A \subset B$, чи $B \subset A$. Знайти множини $A \cup B$, $B \cup A$, $A \cap B$, $B \cap A$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \,\Delta\, B$, $B \,\Delta\, A$.

1) $A=\{2,3,7,8,10\}$, $B=\{1,3,5,6,8\}$, $U=\{1,2,3, \dots,10\}$;

2) $A=\{1,2,6,7,9\}$, $B=\{2,3,4,5,9\}$, $U=\{1,2,3, \dots,10\}$.

Задача 1.1.3. Задано підмножини A, B, C множини арабських цифр $\{0,1,2,...,9\}$. Знайти множини $D=(\overline{C \setminus B}) \cap A$, $E = A \,\Delta\, (B \cup C)$.

$A=\{1,2,5,6,9\}$, $B=\{1,2,4,5,6\}$, $C=\{0,2,5,7,9\}$.

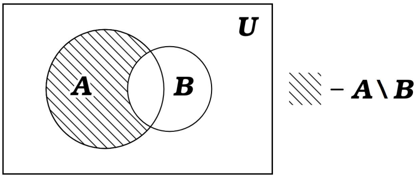
1.2. Перевірка та доведення рівностей з множинами

Найпростішим методом перевірки рівностей є **графічний метод.** Він полягає у порівнянні діаграм Ейлера–Венна для результуючих множин, що задаються відповідно правою і лівою частинами досліджуваної рівності. Якщо ці діаграми повністю співпадають (визначають одну й ту саму множину), досліджувана рівність є правильною, інакше – ні.

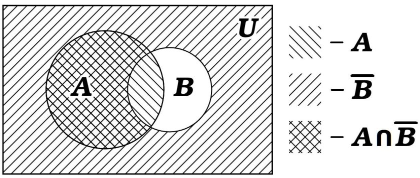
Задача 1.2.1. Графічним методом перевірити, чи має місце рівність:

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}.$$

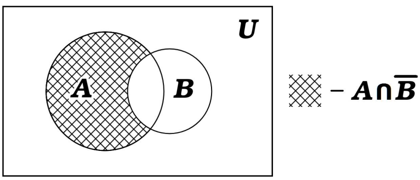
Розв'язання. Діаграма Ейлера–Венна для результуючої множини $A \setminus B$ із лівої частини має вигляд:



Процес побудови діаграми Ейлера–Венна для множини $A \cap \overline{B}$ із правої частини має вигляд:



тобто результуючій множині $A \cap \overline{B}$ відповідає діаграма



Очевидно, діаграми для результуючих множин повністю співпадають, отже, досліджувана рівність справді має місце.

Зауважимо, що в цій задачі, по суті, ми переконалися в правильності властивості 4.3 операції різниці. ■

Універсальним методом строгого доведення рівностей з множинами є **метод двостороннього включення**, який базується на співвідношенні (1.1.1), тобто для доведення рівності вигляду $X = Y$ необхідно і досить показати, що $X \subseteq Y$ і $Y \subseteq X$.

Задача 1.2.2. Методом двостороннього включення довести рівність:

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}.$$

Розв'язання.

1) Покажемо, що $A \setminus B \subseteq A \cap \overline{B}$.

Візьмемо довільний елемент x із множини $A \setminus B$. Необхідно показати, що тоді обов'язково $x \in A \cap \overline{B}$. Маємо:

$$x \in A \setminus B \;\Rightarrow\; x \in A \text{ } i \text{ } x \notin B \;\Rightarrow\; x \in A \text{ } i \text{ } x \in \overline{B} \;\Rightarrow\; x \in A \cap \overline{B}.$$

2) Покажемо, що $A \cap \overline{B} \subseteq A \setminus B$.

Візьмемо довільний елемент x із множини $A \cap \overline{B}$. Необхідно показати, що тоді обов'язково $x \in A \setminus B$. Маємо:

$$x \in A \cap \overline{B} \;\Rightarrow\; x \in A \text{ } i \text{ } x \in \overline{B} \;\Rightarrow\; x \in A \text{ } i \text{ } x \notin B \;\Rightarrow\; x \in A \setminus B.$$ ■

Задача 1.2.3. Методом двостороннього включення довести закон де Моргана для операції об'єднання:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Розв'язання.

1) $x \in \overline{A \cup B} \;\Rightarrow\; x \notin A \cup B \;\Rightarrow\; x \notin A \text{ } i \text{ } x \notin B \;\Rightarrow\; x \in \overline{A} \text{ } i \text{ } x \in \overline{B} \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; x \in \overline{A} \cap \overline{B}.$

2) $x \in \overline{A} \cap \overline{B} \;\Rightarrow\; x \in \overline{A} \text{ } i \text{ } x \in \overline{B} \;\Rightarrow\; x \notin A \text{ } i \text{ } x \notin B \;\Rightarrow\; x \notin A \cup B \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; x \in \overline{A \cup B}.$ ■

Задача 1.2.4. Методом двостороннього включення довести дистрибутивність операції перетину відносно операції об'єднання:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Розв'язання.

1) $x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A \ i \ x \in (B \cup C) \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in A \ i \ (x \in B \ або \ x \in C) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x \in A \ i \ x \in B) \ або \ (x \in A \ i \ x \in C) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x \in A \cap B) \ або \ (x \in A \cap C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$

2) $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow (x \in A \cap B) \ або \ (x \in A \cap C) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x \in A \ i \ x \in B) \ або \ (x \in A \ i \ x \in C) \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in A \ i \ (x \in B \ або \ x \in C) \Rightarrow x \in A \ i \ x \in (B \cup C) \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in A \cap (B \cup C).$ ■

Графічним методом і методом двостороннього включення можуть бути перевірені та строго доведені властивості 1.1 – 5.7 операцій над множинами.

Незважаючи на універсальність, недоліком останнього методу є те, що для складних рівностей він стає досить громіздким.

Ефективним методом строгого доведення рівностей з множинами є **метод еквівалентних перетворень.** Його суть полягає у використанні властивостей 1.1 – 5.7 операцій над множинами для зведення однієї частини рівності до іншої чи спрощення обох частин до одного й того ж самого проміжного виразу.

Задача 1.2.5. Методом еквівалентних перетворень довести рівності:

1) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$;
2) $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$;
3) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;
4) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$;
5) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
6) $A \setminus (A \setminus (B \cap C)) = A \cap B \cap C$.

Розв'язання.

1) $A \cap (B \setminus C) \overset{4.3}{=} A \cap (B \cap \overline{C}) \overset{2.2}{=} (A \cap B) \cap \overline{C} \overset{4.3}{=}$
$\overset{4.3}{=} (A \cap B) \setminus C$. ■

2) $A \setminus (A \cap B) \overset{4.3}{=} A \cap \overline{(A \cap B)} \overset{2.8}{=} A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \overset{2.3}{=}$
$\overset{2.3}{=} (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \overset{2.7}{=} \varnothing \cup (A \cap \overline{B}) \overset{1.1}{=} (A \cap \overline{B}) \cup \varnothing \overset{1.5}{=}$
$\overset{1.5}{=} A \cap \overline{B} \overset{4.3}{=} A \setminus B$. ■

3) $A \setminus (B \cup C) \overset{4.3}{=} A \cap \overline{(B \cup C)} \overset{1.8}{=} A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \overset{2.2}{=}$
$\overset{2.2}{=} (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} \overset{4.3}{=} (A \setminus B) \cap \overline{C} \overset{4.3}{=} (A \setminus B) \setminus C$. ■

4) $A \setminus (A \setminus B) \overset{4.3}{=} A \cap \overline{(A \setminus B)} \overset{4.3}{=} A \cap \overline{(A \cap \overline{B})} \overset{2.8}{=} A \cap (\overline{A} \cup \overline{\overline{B}}) \overset{2.3}{=}$
$\overset{2.3}{=} (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{\overline{B}}) \overset{2.7}{=} \varnothing \cup (A \cap \overline{\overline{B}}) \overset{3.1}{=} \varnothing \cup (A \cap B) \overset{1.1}{=}$
$\overset{1.1}{=} (A \cap B) \cup \varnothing \overset{1.5}{=} A \cap B$. ■

5) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \overset{4.3}{=} (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C}) \overset{2.2}{=}$
$\overset{2.2}{=} ((A \cap \overline{B}) \cap A) \cap \overline{C} \overset{2.1}{=} ((\overline{B} \cap A) \cap A) \cap \overline{C} \overset{2.2}{=}$
$\overset{2.2}{=} (\overline{B} \cap (A \cap A)) \cap \overline{C} \overset{2.4}{=} (\overline{B} \cap A) \cap \overline{C} \overset{2.1}{=}$
$\overset{2.1}{=} (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} \overset{2.2}{=} A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \overset{1.8}{=} A \cap \overline{(B \cup C)} \overset{4.3}{=}$
$\overset{4.3}{=} A \setminus (B \cup C)$. ■

6) $A \setminus (A \setminus (B \cap C)) \overset{4.3}{=} A \setminus (A \cap \overline{(B \cap C)}) \overset{4.3}{=}$
$\overset{4.3}{=} A \cap \overline{(A \cap \overline{(B \cap C)})} \overset{2.8}{=} A \cap (\overline{A} \cup \overline{\overline{(B \cap C)}}) \overset{3.1}{=}$
$\overset{3.1}{=} A \cap (\overline{A} \cup (B \cap C)) \overset{2.3}{=} (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap (B \cap C)) \overset{2.7}{=}$
$\overset{2.7}{=} \varnothing \cup (A \cap (B \cap C)) \overset{1.1}{=} (A \cap (B \cap C)) \cup \varnothing \overset{1.5}{=}$
$\overset{1.5}{=} A \cap (B \cap C) \overset{2.2}{=} A \cap B \cap C$. ■

Задача 1.2.6. Методом еквівалентних перетворень довести рівносильність обох означень операції симетричної різниці, тобто довести рівність:

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Розв'язання.

$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \overset{4.3}{=} (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \overset{1.3}{=} ((A \cap \overline{B}) \cup B) \cap$
$\cap ((A \cap \overline{B}) \cup \overline{A}) \overset{1.1}{=} (B \cup (A \cap \overline{B})) \cap (\overline{A} \cup (A \cap \overline{B})) \overset{1.3}{=}$
$\overset{1.3}{=} ((B \cup A) \cap (B \cup \overline{B})) \cap ((\overline{A} \cup A) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})) \overset{1.7}{=}$
$\overset{1.7}{=} ((B \cup A) \cap U) \cap (U \cap (\overline{A} \cup \overline{B})) \overset{2.6}{=} (B \cup A) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \overset{1.1}{=}$
$\overset{1.1}{=} (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \overset{2.8}{=} (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) \overset{4.3}{=}$
$\overset{4.3}{=} (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. ■

У рівностях, що містять операцію симетричної різниці, слід користуватися властивостями 5.1 – 5.7, якщо це можливо, а якщо ні – позбутися її згідно з будь-яким із означень (вдалий вибір при цьому може значно спростити подальші викладки).

Задача 1.2.7. Методом еквівалентних перетворень довести рівності:

1) $A \Delta (A \cap B) = A \setminus B$;
2) $(A \Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B$;
3) $A \Delta (A \Delta B) = B$.

Розв'язання.

1) $A \Delta (A \cap B) = (A \cup (A \cap B)) \setminus (A \cap (A \cap B)) \overset{1.9}{=}$
$\overset{1.9}{=} A \setminus (A \cap (A \cap B)) \overset{2.2}{=} A \setminus ((A \cap A) \cap B) \overset{2.4}{=} A \setminus (A \cap B) =$
$= A \setminus B$ (дивись задачу 1.2.5). ■

2) $(A \Delta B) \cup (A \cap B) = ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \cup (A \cap B) \overset{1.2}{=} (A \setminus B) \cup$
$\cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) \overset{4.3}{=} (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) \overset{1.1}{=}$
$\overset{1.1}{=} (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \overset{2.3}{=} (A \cap (B \cup \overline{B})) \cup$
$\cup (B \cap \overline{A}) \overset{1.7}{=} (A \cap U) \cup (B \cap \overline{A}) \overset{2.6}{=} A \cup (B \cap \overline{A}) \overset{1.3}{=}$

$$\overset{1.3}{=} (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) \overset{1.7}{=} (A \cup B) \cap U \overset{2.6}{=} A \cup B. \ \blacksquare$$

3)

<u>Перший спосіб</u> (оптимальний, із використанням властивостей операції симетричної різниці)

$$A \Delta (A \Delta B) \overset{5.2}{=} (A \Delta A) \Delta B \overset{5.4}{=} \varnothing \Delta B \overset{5.1}{=} B \Delta \varnothing \overset{5.5}{=} B. \ \blacksquare$$

<u>Другий спосіб</u> (без використання властивостей операції симетричної різниці)

$$A \Delta (A \Delta B) = (A \setminus (A \Delta B)) \cup ((A \Delta B) \setminus A).$$

Оскільки

$$A \setminus (A \Delta B) = A \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \overset{4.3}{=} A \cap \overline{((A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}))} \overset{1.8}{=}$$
$$\overset{1.8}{=} A \cap (\overline{(A \cap \overline{B})} \cap \overline{(B \cap \overline{A})}) \overset{2.8}{=} A \cap ((\overline{A} \cup \overline{\overline{B}}) \cap (\overline{B} \cup \overline{\overline{A}})) \overset{3.1}{=}$$
$$\overset{3.1}{=} A \cap ((\overline{A} \cup B) \cap (\overline{B} \cup A)) \overset{2.2}{=} A \cap (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{B} \cup A) \overset{2.1}{=}$$
$$\overset{2.1}{=} A \cap (\overline{B} \cup A) \cap (\overline{A} \cup B) \overset{1.1}{=} A \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B) \overset{2.9}{=}$$
$$\overset{2.9}{=} A \cap (\overline{A} \cup B) \overset{2.3}{=} (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) \overset{2.7}{=} \varnothing \cup (A \cap B) \overset{1.1, 1.5}{=} A \cap B,$$

$$(A \Delta B) \setminus A = ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \setminus A \overset{4.3}{=} ((A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})) \cap \overline{A} \overset{2.1}{=}$$
$$\overset{2.1}{=} \overline{A} \cap ((A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})) \overset{2.3}{=} (\overline{A} \cap (A \cap \overline{B})) \cup (\overline{A} \cap (B \cap \overline{A})) \overset{2.2}{=}$$
$$\overset{2.2}{=} (\overline{A} \cap A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{A}) \overset{2.1}{=} (A \cap \overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{A} \cap B) \overset{2.7}{=}$$
$$\overset{2.7}{=} (\varnothing \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{A} \cap B) \overset{2.4}{=} (\varnothing \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \overset{2.1, 2.5}{=}$$
$$\overset{2.1, 2.5}{=} \varnothing \cup (\overline{A} \cap B) \overset{1.1, 1.5}{=} \overline{A} \cap B \overset{2.1}{=} B \cap \overline{A},$$

остаточно отримуємо:

$$(A \setminus (A \Delta B)) \cup ((A \Delta B) \setminus A) = (A \cap B) \cup (B \cap \overline{A}) \overset{2.1}{=}$$
$$\overset{2.1}{=} (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) \overset{2.3}{=} B \cap (A \cup \overline{A}) \overset{1.7}{=} B \cap U \overset{2.6}{=} B. \ \blacksquare$$

Завдання для самостійної роботи

Задача 1.2.8. Графічним методом перевірити, чи мають місце рівності:

1) $B \setminus A = \overline{A} \cup B$;
2) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
3) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
4) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
5) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
6) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;
7) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;
8) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$;
9) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus (A \setminus C)$.

Задача 1.2.9. Методом двостороннього включення довести рівності:

1) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
3) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;
4) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
5) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

Задача 1.2.10. Методом еквівалентних перетворень довести рівності:

1) $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$;
2) $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \cup B$;
3) $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$;
4) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$;
5) $A \cap (B \setminus C) = B \cap (A \setminus C)$;
6) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$;
7) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
8) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;
9) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;
10) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$;
11) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;

12) $B \setminus ((B \setminus A) \cup B) = \varnothing$;

13) $A \setminus (A \setminus (A \cap B)) = A \cap B$;

14) $(A \cup B) \setminus (A \setminus B) = B$;

15) $(A \cap B) \setminus (B \setminus A) = A \cap B$;

16) $(A \setminus B) \setminus (B \setminus A) = A \setminus B$;

17) $(A \setminus B) \setminus (\overline{A} \setminus B) = A \setminus B$;

18) $A \setminus (A \setminus (A \setminus B)) = A \setminus B$;

19) $A \setminus (B \setminus (A \setminus B)) = A \setminus B$;

20) $(A \cup B) \Delta B = A \setminus B$;

21) $(A \setminus B) \Delta (B \setminus A) = A \Delta B$;

22) $(A \cup B) \Delta (A \cap B) = A \Delta B$;

23) $(A \cap B) \Delta (B \setminus A) = B$;

24) $(A \cup B) \Delta (A \setminus B) = B$;

25) $A \Delta (B \setminus A) = A \cup B$;

26) $A \Delta (A \setminus B) = A \cap B$;

27) $B \setminus (A \Delta B) = A \cap B$;

28) $(A \Delta B) \setminus A = B \setminus A$.

Задача 1.2.11. Використовуючи властивості операцій над множинами, спростити вирази:

1) $(A \cup B) \cup (A \cup \overline{B})$;

2) $(\overline{A \cap \overline{B}}) \cap B$;

3) $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$;

4) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$;

5) $(A \cap B \cap M) \cup (A \cap B \cap C \cap M \cap N) \cup (A \cap M \cap \overline{A})$;

6) $((A \cup B) \cap B) \cup (A \cap (A \cap B))$;

7) $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (\overline{B} \cap C)$;

8) $(A \cap B \cap C \cap \overline{D}) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (\overline{B} \cap C) \cup (C \cap D)$;

9) $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup \overline{B} \cup C$;

10) $A \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (C \setminus (A \cap C))$;

11) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C)$.

1.3. Формули включення-виключення

Множина називається ***скінченною****, якщо вона містить скінченну кількість елементів.*

Потужністю *скінченої множини називається кількість елементів у цій множині.*

Потужність множини A позначатимемо $|A|$. Нехай, наприклад, $A=\{2,3,7,15\}$, тоді $|A| = 4$.

Формули включення-виключення – формули, що дозволяють знаходити потужність об'єднання кількох скінченних множин.

Формули включення-виключення для двох і трьох скінченних множин мають відповідно вигляд:

$$|A \cup B| = |A|+|B|-|A \cap B|,$$

$$|A \cup B \cup C| = |A|+|B|+|C|-|A \cap B|-$$
$$-|A \cap C|-|B \cap C|+|A \cap B \cap C|.$$

Задача 1.3.1. У науково-дослідному інституті працюють 67 осіб. З них 47 осіб знають англійську мову, 35 – німецьку мову, 23 – обидві мови. Скільки осіб в інституті не знають ні англійської, ні німецької мови? Скільки знають тільки англійську мову? Скільки знають тільки німецьку мову?

Розв'язання. У даній задачі множина всіх працюючих є універсальною множиною U.

Нехай A – множина осіб, що знають англійську мову, N – множина осіб, що знають німецьку мову. Тоді $A \cap N$ – множина осіб, що знають обидві мови, $A \cup N$ – множина осіб, що знають хоча б одну із мов. За умовою, $|U| = 67$, $|A| = 47$, $|N| = 35$, $|A \cap N| = 23$. Тоді хоча б одну мову знають

$$|A \cup N| = |A|+|N|-|A \cap N| = 47+35-23=59 \text{ (осіб)},$$

і, відповідно, жодної мови не знають

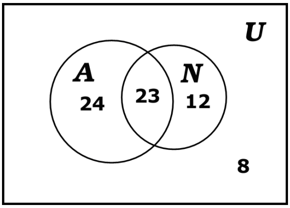
$$|U|-|A \cup N| = 67-59=8 \text{ (осіб)}.$$

Лише англійську мову знають

$$|A|-|A \cap N| = 47-23=24 \text{ (особи)},$$

а лише німецьку

$$|N|-|A \cap N| = 35-23=12 \text{ (осіб)}.$$



На рисунку зліва наведено інший, графічний, спосіб розв'язання цієї ж задачі, де всередині кожної замкненої області вказано її потужність. При графічному розв'язанні заповнення діаграми завжди починають із розгляду перетину всіх введених множин, а далі на кожному кроці аналізують перетини, в яких кількість множин стає на одиницю меншою. Відповідно, на передостанньому кроці аналізуватимуть вже самі множини, а на останньому – всю універсальну множину. ■

Задача 1.3.2. У науково-дослідному інституті працюють 67 осіб. З них 47 осіб знають англійську мову, 35 – німецьку, 20 – французьку, 23 – англійську і німецьку, 12 – англійську і французьку, 11 – німецьку і французьку, 5 – усі три іноземні мови. Скільки осіб в інституті не знають жодної із цих іноземних мов? Скільки знають тільки англійську мову? Скільки знають тільки німецьку мову? Скільки знають тільки французьку мову?

Розв'язання. Аналогічно попередній задачі, U – множина всіх працюючих, A, N, F – множини осіб, що знають відповідно англійську, німецьку та французьку мови.

Хоча б одну мову знають

$$|A\cup N\cup F| = |A|+|N|+|F|-|A\cap N|-|A\cap F|-$$
$$-|N\cap F|+|A\cap N\cap F| = 47+35+20-23-12-11+5=$$
$$=61 \text{ (особа)},$$

жодної мови не знають

$$|U|-|A\cup N\cup F| = 67-61 = 6 \text{ (осіб)},$$

лише англійську знають

$$|A|-|A\cap N|-|A\cap F|+|A\cap N\cap F| = 47-23-12+5=$$
$$=17 \text{ (осіб)},$$

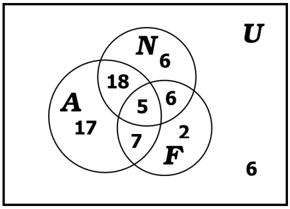
лише німецьку

$$|N|-|N\cap A|-|N\cap F|+|N\cap A\cap F| = 35-23-11+5=$$
$$=6 \text{ (осіб)},$$

лише французьку

$$|F| - |F \cap A| - |F \cap N| + |F \cap A \cap N| = 20 - 12 - 11 + 5 =$$
$$= 2 \text{ (особи)}.$$

Графічне розв’язання цієї задачі має вигляд:



■

Завдання для самостійної роботи

Задача 1.3.3. В школі навчаються 1400 учнів. Із них 1250 вміють кататися на лижах, а 952 – на ковзанах. Ні на лижах, ні на ковзанах не вміють кататися 60 учнів. Скільки учнів вміють кататися і на лижах, і на ковзанах?

Задача 1.3.4. Кожен учень класу – або дівчина, або особа-блондин, або любить математику. В класі 20 дівчат, з них 12 блондинок, причому лише одна блондинка любить математику. Всього в класі 24 особи-блондини, 12 з них люблять математику. В класі 17 учнів, які люблять математику, з них 6 дівчат. Скільки всього учнів у цьому класі?

Задача 1.3.5. На пікнік поїхали 92 студенти. При цьому бутерброди з ковбасою взяли 47 студентів, з сиром – 38, з маслом – 42, з сиром і ковбасою – 28, з ковбасою і маслом – 31, з сиром і маслом – 26. Всі три види бутербродів взяли 25 студентів, а кілька студентів брали на пікнік не бутерброди, а пиріжки. Скільки студентів брали з собою на пікнік пиріжки?

Задача 1.3.6. У відділі НДІ працюють декілька осіб, кожна з яких знає хоча б одну іноземну мову. При цьому 6 осіб знають англійську мову, 6 – німецьку, 7 – французьку, 4 – англійську і німецьку, 3 – німецьку і французьку, 2 – англійську і французьку, 1 – всі три мови. Скільки осіб працюють у відділі? Скільки з них знають лише англійську мову? А лише французьку? А лише німецьку?

Задача 1.3.7. На уроці літератури вчитель зацікавився, хто із 40 учнів класу читав книги A, B і C. Результати виявилися такими: книгу A прочитали 25 учнів, книгу B – 22 учні, книгу C – 22 учні, книгу A або книгу B – 33 учні, книгу A або книгу C – 32 учні, книгу B або книгу C – 31 учень, всі три книги – 10 учнів. Скільки учнів не читали жодної книги? Скільки учнів прочитали тільки 1 книгу?

Задача 1.3.8. Серед абітурієнтів, які склали вступні іспити до ВНЗ, оцінку "5" отримали: з математики – 48, з фізики – 37, з української мови – 42, з математики або фізики – 75, з математики або української мови – 76, з фізики або української мови – 66, з усіх трьох предметів – 4. Скільки абітурієнтів отримали хоча б одну п’ятірку? Скільки з них отримали рівно одну п’ятірку? А рівно дві п’ятірки?

Задача 1.3.9. Протягом тижня в кінотеатрі демонструвались фільми X, Y, Z. Кожен із 40 студентів групи бачив або всі три фільми, або тільки якийсь один. При цьому фільм X бачили 13 студентів, фільм Y – 16 студентів, фільм Z – 19 студентів. Скільки студентів бачили усі три фільми?

Задача 1.3.10. Кожен із учнів класу на канікулах два рази був у театрі і бачив дві різні вистави. При цьому вистави I, II, III бачили відповідно 25, 12 і 23 учні. Скільки учнів у класі? Скільки з них бачили вистави I і II, I і III, II і III?

Задача 1.3.11. Скільки натуральних чисел із першої сотні (1, 2, ..., 100) не діляться на жодне із чисел 2, 3, 5?

Задача 1.3.12. Завербований Росією американський дипломат повідомив: “У вищих колах армії США – деградація та моральне розкладання. Серед 75 чотиризіркових генералів є 30 алкоголіків, 28 наркоманів і аж 35 розпусників. Шестеро є алкоголіками та наркоманами, одинадцятеро – наркоманами та розпусниками, восьмеро – алкоголіками та розпусниками. Немає жодного генерала без жодної з цих вад!”. Доведіть, що це дезінформація.

Задача 1.3.13. У трансконтинентальному літаку знаходяться 9 хлопчиків, 5 українських дітей, 9 дорослих чоловіків, 7 хлопчиків-іноземців, 14 українців, 6 українців чоловічої статі та 7 іноземок жіночої статі. Скільки загалом осіб знаходяться в літаку?

1.4. Декартовий добуток множин. Бінарні відношення

Декартовим добутком (ДД) двох множин A *і* B *називається множина* $A \times B$, *елементами якої є всеможливі впорядковані пари вигляду* (a,b), *де* $a \in A$, $b \in B$:

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A,\ b \in B\}.$$

Нехай, наприклад, $A = \{2,3,4\}$, $B = \{5,6\}$, тоді

$$A \times B = \{(2,5),(2,6),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6)\},$$

$$B \times A = \{(5,2),(5,3),(5,4),(6,2),(6,3),(6,4)\}.$$

Операція ДД не є комутативною: $A \times B \neq B \times A$ при $A \neq B$.

Декартовим добутком n ***множин*** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *називається множина* $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, *що визначається наступним чином:*

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Якщо $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, *то множина* $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ *називається* n***-тим декартовим степенем множини*** A *і позначається* A^n.

Наприклад, множина

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y,z) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\},$$

де $\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел, є множиною всіх точок простору.

Бінарним відношенням (БВ) між елементами множин A ***і*** B *називається будь-яка підмножина* R *множини* $A \times B$ *(*$R \subseteq A \times B$*). Якщо ж при цьому* $A = B$, *тобто* $R \subseteq A^2$, *то бінарне відношення* R *називається* ***бінарним відношенням на множині*** A.

Нехай, наприклад, $A = \{2,3,4\}$, $B = \{5,6\}$, тоді $R_1 = \{(2,6), (3,5),(3,6)\}$ – БВ між елементами множин A і B, а $R_2 = \{(2,2), (3,4),(4,2),(4,3)\}$ – БВ на множині A.

Якщо $R \subseteq A \times B$ *і* $(a,b) \in R$, *то кажуть, що елементи* $a \in A$ *і* $b \in B$ ***перебувають у відношенні*** R, *і це ще позначають* aRb.

Якщо $R = \varnothing$, то бінарне відношення R називається ***порожнім****, а якщо $R = A \times B$, то бінарне відношення R називається* ***повним*** *або* ***універсальним*** *і позначається через U.*

Бінарне відношення $R = \{(a,a) : a \in A\}$ на множині A називається ***тотожним*** *або* ***діагональним*** *і позначається через E.*

БВ $R \subseteq A \times B$ можна задавати наступними способами:

1) **явно** – безпосереднім переліком усіх його пар, наприклад, $A = \{2,3,4\}$, $B = \{5,6\}$, $R = \{(2,6),(3,5),(3,6)\}$;
2) **неявно** – вказуванням характерної властивості, якою володіють усі його пари, наприклад, $A = \{2,3,4\}$, $B = \{5,6\}$, $R_3 = \{(a,b) : a \in A, b \in B, a \le b\}$;
3) **матрицею** розмірності $m \times n$, де $m = |A|$, $n = |B|$, елементи c_{ij} якої визначаються наступним чином:
$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (a_i, b_j) \in R, \\ 0, & \text{якщо } (a_i, b_j) \notin R; \end{cases}$$
4) спеціальною **діаграмою Хассе**, на якій елементи множин A і B зображають по різні боки у вигляді точок на площині і для кожної пари $(a_i, b_j) \in R$ елементи a_i і b_j з'єднують стрілкою від a_i до b_j.

Областю визначення *бінарного відношення R називається множина $D_R = \{a : \text{існує } b, \text{ для якого } (a,b) \in R\}$.*

Областю значень *бінарного відношення R називається множина $E_R = \{b : \text{існує } a, \text{ для якого } (a,b) \in R\}$.*

Для бінарних відношень звичним чином визначені теоретико-множинні операції $\cup, \cap, \setminus, \Delta$.

Оберненим відношенням *до бінарного відношення R називається множина (відношення) $R^{-1} = \{(a,b) : (b,a) \in R\}$.*

Доповненням *до бінарного відношення R ($R \subseteq A \times B$) називається множина (відношення)*

$$\overline{R} = U \setminus R = (A \times B) \setminus R = \{(a,b) : a \in A, b \in B, (a,b) \notin R\}.$$

Нехай, наприклад, $A = \{2,3,4\}$, $B = \{5,6\}$, $R = \{(2,6), (3,5), (3,6)\}$, тоді $D_R = \{2,3\}$, $E_R = \{5,6\}$, $R^{-1} = \{(6,2),(5,3),(6,3)\}$, $\overline{R} = \{(2,5),(4,5),(4,6)\}$.

Для будь-якого БВ $R \subseteq A \times B$ мають місце співвідношення:

- $D_R \subseteq A$, а $E_R \subseteq B$;
- $R^{-1} \subseteq B \times A$;
- $\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$;
- $\overline{R} \subseteq A \times B$;
- $\overline{\overline{R}} = R$.

Очевидно також, що $\overline{\varnothing} = U$, а $\overline{U} = \varnothing$. Всі елементи матриці порожнього відношення $\varnothing$ є нулями, а всі елементи матриці повного відношення U – одиницями. Матриця тотожного відношення E на головній діагоналі всюди містить одиниці, а решта її елементів є нулями.

Композицією *бінарних відношень R_1 і R_2 називається відношення*

$$R_1 \circ R_2 = \{(a,b) : \textit{існує } c, \textit{ для якого } (a,c) \in R_1 \textit{ і } (c,b) \in R_2\}.$$

Нехай, наприклад,

$$R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,3)\},\ R_2 = \{(1,2),(2,2),(3,1)\},$$

тоді $R_1 \circ R_2 = \{(1,2),(2,1)\}$, а $R_2 \circ R_1 = \{(1,3), (2,3), (3,1), (3,2)\}$, звідки випливає, що операція композиції не є комутативною.

Задача 1.4.1. Задано БВ $R = \{(a,b) : a \in A, b \in B, b - a \geq 3\}$ між елементами множин $A = \{2,3,4,5\}$ і $B = \{4,5,6,7\}$. Задати його переліком відповідних пар, побудувати матрицю відношення та діаграму Хассе. Знайти область визначення D_R, область значень E_R, обернене відношення R^{-1} та доповнення $\overline{R}$.

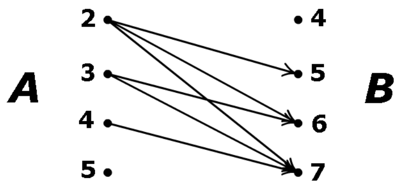
Розв'язання. Послідовно перебираючи всеможливі пари (a,b) з декартового добутку $A \times B$ та з'ясовуючи, які з них задовольняють умову $b - a \geq 3$, маємо:

$$R = \{(2,5),(2,6),(2,7),(3,6),(3,7),(4,7)\}.$$

Матриця відношення R:

	4	5	6	7
2	0	1	1	1
3	0	0	1	1
4	0	0	0	1
5	0	0	0	0

Діаграма Хассе відношення R:



$D_R = \{2,3,4\}$,

$E_R = \{5,6,7\}$,

$$R^{-1} = \{(a,b):(b,a) \in R\} = \{(a,b): b \in A, a \in B, a-b \geq 3\} =$$
$$= \{(a,b): a \in B, b \in A, a-b \geq 3\} =$$
$$= \{(5,2),(6,2),(7,2),(6,3),(7,3),(7,4)\},$$

$$\overline{R} = (A \times B) \setminus R = \{(a,b): a \in A, b \in B, (a,b) \notin R\} =$$
$$= \{(a,b): a \in A, b \in B, b-a < 3\} =$$
$$= \{(2,4),(3,4),(3,5),(4,4),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(5,7)\}. \ \blacksquare$$

Задача 1.4.2. Довести, що $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$.

Розв'язання.

Доведемо дану рівність методом двостороннього включення.

Нехай (a,b) – довільна впорядкована пара, така, що $(a,b) \in (R_1 \circ R_2)^{-1}$. Тоді пара $(b,a) \in R_1 \circ R_2$. Це означає, що існує c, для якого $(b,c) \in R_1$ і $(c,a) \in R_2$. А тоді $(c,b) \in R_1^{-1}$ і $(a,c) \in R_2^{-1}$, звідки випливає, що $(a,b) \in R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$. Отже, $(R_1 \circ R_2)^{-1} \subseteq R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$.

Аналогічно встановлюється, що $R_2^{-1} \circ R_1^{-1} \subseteq (R_1 \circ R_2)^{-1}$. $\blacksquare$

Завдання для самостійної роботи

Задача 1.4.3. Задано бінарне відношення R між елементами множин A і B. Побудувати матрицю відношення та діаграму Хассе.

1) $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5\}$,
$R=\{(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,3),(3,4),(4,4)\}$;
2) $A=B=\{1,2,3,4\}$,
$R=\{(1,1),(1,3),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(4,2),(4,4)\}$.

Задача 1.4.4. Задано бінарне відношення R між елементами множин $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ і $B=\{2,9,11,17,18,19,20\}$. Задати його переліком відповідних пар, побудувати матрицю відношення та діаграму Хассе.

1) $R=\{(a,b): a\in A, b\in B,\ b\,\vdots\, a\}$;
2) $R=\{(a,b): a\in A, b\in B,\ a^2-b>0\}$.

Задача 1.4.5. Задано бінарне відношення R між елементами множин A і B. Задати його переліком відповідних пар, побудувати матрицю відношення та діаграму Хассе.

$$A=B=\{2,3,4,5,6\},\ R=\{(a,b): a\in A, b\in B,\ (a-b)\,\vdots\, 3\}.$$

Задача 1.4.6. Для заданого бінарного відношення R знайти область визначення D_R, область значень E_R, обернене відношення R^{-1} та доповнення $\overline{R}$.

1) $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{2,3,4,5\}$, $R=\{(1,2),(2,3),(3,4),(3,3)\}$;
2) $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{1,2,3,4\}$,
$R=\{(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4),(1,4)\}$;
3) $R=\{(x,y): x,y\in\mathbb{N},\ x+y\le 10\}$;
4) $R=\{(x,y): x,y\in[0,1],\ y\le x^2\}$;
5) $R=\{(x,y): x,y\in\mathbb{R},\ x^2\ne y^2\}$.

Задача 1.4.7. Задано бінарні відношення R_1 і R_2. Знайти відношення $R_1\cup R_2$, $R_1\cap R_2$, $R_1\setminus R_2$, $R_2\setminus R_1$, $R_1\Delta R_2$, R_1^{-1}, R_2^{-1}, $R_1\circ R_2$, $R_2\circ R_1$, $R_1^{-1}\circ R_2$, $R_1\circ R_2^{-1}$, $R_1^{-1}\circ R_2^{-1}$.

1) $R_1 = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$, $R_2 = \{(0,0),(1,1),(1,2)\}$;

2) $R_1 = \{(1,3),(3,5),(4,2)\}$, $R_2 = \{(1,1),(2,4),(3,5),(5,5)\}$.

Задача 1.4.8. Для заданого бінарного відношення R знайти D_R, E_R, R^{-1}, $R \circ R$, $R \circ R^{-1}$, $R^{-1} \circ R$.

1) $R = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{N}, y \vdots x\}$;

2) $R = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}, 2x \geq 3y\}$;

3) $R = \{(x,y) : x, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], y \geq \sin x\}$;

4) $R = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\ , x + y \leq 0\}$.

Задача 1.4.9. Виписати всеможливі бінарні відношення R на множині $A = \{1,2\}$ та знайти серед них ті, що задовольняють вказану умову:

1) $E \subset R$;

2) $R = R^{-1}$;

3) $R \cap R^{-1} = E$;

4) $R \cap R^{-1} = \varnothing$;

5) $R \circ R = R$;

6) $R \circ R^{-1} = E$.

Задача 1.4.10. Довести, що якщо $R_1 \subseteq R_2$, то:

1) $R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}$;

2) $R_1 \circ Q \subseteq R_2 \circ Q$;

3) $Q \circ R_1 \subseteq Q \circ R_2$.

Задача 1.4.11. Довести, що:

1) $(\overline{R})^{-1} = \overline{R^{-1}}$;

2) $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$;

3) $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$;

4) $(\bigcup R_i) \circ Q = \bigcup (R_i \circ Q)$;

5) $Q \circ (\bigcup R_i) = \bigcup (Q \circ R_i)$;

6) $Q \circ (\bigcap R_i) \subseteq \bigcap (Q \circ R_i)$;

7) $(\bigcap R_i) \circ Q \subseteq \bigcap (R_i \circ Q)$.

Задача 1.4.12. Можна було б очікувати, що для довільного бінарного відношення R виконуватиметься рівність $R \circ R^{-1} = R^{-1} \circ R = E$. Однак, загалом, це не так. Навести приклад, який це підтверджує.

1.5. Властивості бінарних відношень

Тут і надалі розглядатимемо відношення на множині A.

*Бінарне відношення R на множині A називається **рефлексивним**, якщо $(a,a) \in R$ для всіх $a \in A$, тобто якщо кожен із елементів множини A перебуває у відношенні сам із собою.*

Наприклад, на будь-якій числовій множині відношення "$\leq$" є рефлексивним, а відношення "$<$" не є рефлексивним.

Головна діагональ матриці рефлексивного бінарного відношення складається лише з одиниць.

*Бінарне відношення R на множині A називається **антирефлексивним**, якщо $(a,a) \notin R$ для всіх $a \in A$, тобто якщо жоден з елементів множини A не перебуває у відношенні сам із собою.*

Наприклад, на будь-якій числовій множині відношення "$<$" є антирефлексивним, а відношення "$\leq$" не є антирефлексивним.

Головна діагональ матриці антирефлексивного бінарного відношення складається лише з нулів.

Довільне бінарне відношення не обов'язково повинно бути або рефлексивним, або антирефлексивним. Існують відношення, що одночасно не є ні рефлексивними, ні антирефлексивними.

Відношення R є рефлексивним тоді і тільки тоді, коли відношення $\overline{R}$ є антирефлексивним.

*Бінарне відношення R на множині A називається **симетричним**, якщо для довільних $a,b \in A$ із того, що $(a,b) \in R$, випливає, що і $(b,a) \in R$.*

Наприклад, на множині фігур відношення подібності "$\sim$" є симетричним.

Матриця симетричного бінарного відношення є симетричною відносно головної діагоналі.

Відношення R є симетричним тоді і тільки тоді, коли відношення $\overline{R}$ є симетричним.

Бінарне відношення R на множині A називається ***антисиметричним****, якщо для довільних $a,b \in A$ із того, що $(a,b) \in R$ і $(b,a) \in R$, випливає, що $a = b$ (інакше кажучи, при $a \neq b$ впорядковані пари (a,b) і (b,a) ніколи не можуть одночасно належати R).*

Наприклад, на будь-якій числовій множині відношення "$\leq$" є антисиметричним.

Довільне бінарне відношення не обов'язково повинно бути або симетричним, або антисиметричним. Існують відношення, що одночасно не є ні симетричними, ні антисиметричними, а також відношення (наприклад, тотожне відношення E), що одночасно є симетричними та антисиметричними.

Бінарне відношення R на множині A називається ***транзитивним****, якщо для довільних $a,b,c \in A$ із того, що $(a,b) \in R$ і $(b,c) \in R$, випливає, що і $(a,c) \in R$.*

Наприклад, на будь-якій числовій множині відношення "$<$" і "$\leq$" є транзитивними.

Завдання для самостійної роботи

Задача 1.5.1. З'ясувати, якими із властивостей володіє задане бінарне відношення:

1) $A = \{1,2,3,4\}$, $R = \{(1,1),(1,4),(2,3),(3,3),(4,1),(4,2)\}$;
2) відношення "$>$" на множині $\mathbb{R}$;
3) відношення паралельності на множині прямих;
4) відношення перпендикулярності на множині прямих;
5) відношення подібності на множині фігур;
6) відношення "$\subseteq$" на множині множин;
7) відношення "є сином" на множині людей;

8) відношення подільності націло на множині $\mathbb{N}$;
9) відношення подільності націло на множині $\mathbb{Z}$.

Задача 1.5.2. Навести приклад бінарного відношення, яке є:

1) рефлексивним, симетричним, транзитивним;
2) рефлексивним, симетричним, нетранзитивним;
3) нерефлексивним, антисиметричним, транзитивним;
4) рефлексивним, несиметричним, транзитивним;
5) рефлексивним, антисиметричним, нетранзитивним;
6) рефлексивним, несиметричним, нетранзитивним.

Задача 1.5.3. Довести, що якщо бінарні відношення R_1 і R_2 є рефлексивними, то рефлексивними також будуть і відношення $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, R_1^{-1}, $R_1 \circ R_2$.

Задача 1.5.4. Довести, що якщо бінарні відношення R_1 і R_2 є антирефлексивними, то антирефлексивними також будуть і відношення $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, R_1^{-1}. Показати, що композиція $R_1 \circ R_2$ при цьому може не бути антирефлексивним відношенням.

Задача 1.5.5. Довести, що якщо бінарні відношення R_1 і R_2 є симетричними, то симетричними також будуть і відношення $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, R_1^{-1}, $R_1 \circ R_1^{-1}$.

Задача 1.5.6. Довести, що якщо бінарні відношення R_1 і R_2 є симетричними, то композиція $R_1 \circ R_2$ також буде симетричною тоді і тільки тоді, коли $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

Задача 1.5.7. Довести, що якщо бінарні відношення R_1 і R_2 є антисиметричними, то антисиметричними також будуть і відношення $R_1 \cap R_2$, R_1^{-1}.

1.6. Спеціальні бінарні відношення

У математиці важливу роль відіграють два типи спеціальних бінарних відношень: відношення еквівалентності та відношення порядку.

Бінарне відношення R на множині A називається ***відношенням еквівалентності****, якщо воно рефлексивне, симетричне та транзитивне.*

Наприклад, відношення $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$ на множині $A = \{1,2,3\}$ є відношенням еквівалентності.

Класом еквівалентності елемента *x за відношенням еквівалентності R називається множина $[x]_R = \{y : (x, y) \in R\}$.*

Наприклад, для вищенаведеного відношення еквівалентності R

$$[1]_R = \{1,2\},\ [2]_R = \{1,2\},\ [3]_R = \{3\}.$$

Будь-які два класи еквівалентності або не мають спільних елементів, або співпадають.

Множина всіх класів еквівалентності за відношенням еквівалентності утворює ***розбиття*** *вихідної множини A на систему класів $A_1, A_2, \ldots$, таку, що $\bigcup_i A_i = A$ і $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$. При цьому елементи, що належать одному класу, є* ***еквівалентними****, а елементи з різних класів – не еквівалентними.*

Наприклад, для вищенаведеного відношення еквівалентності R маємо розбиття множини A на систему класів

$$A_1 = \{1,2\},\ A_2 = \{3\},$$

де $A_1 \cup A_2 = A$, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

Бінарне відношення R на множині A називається ***відношенням порядку****, якщо воно антисиметричне і транзитивне. Множину A при цьому називають* ***впорядкованою відношенням*** *R.*

Наприклад, відношення $R_1 = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\}$ на множині $A = \{1,2,3\}$ є відношенням порядку.

Рефлексивне відношення порядку називається ***відношенням нестрогого порядку*** *і позначається символом* $\preccurlyeq$.

Наприклад, відношення $R_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$ на множині $A = \{1,2,3\}$ є відношенням нестрогого порядку.

Антирефлексивне відношення порядку називається ***відношенням строгого порядку*** *і позначається символом* $\prec$.

Наприклад, відношення $R_3 = \{(1,2),(2,3),(1,3)\}$ на множині $A = \{1,2,3\}$ є відношенням строгого порядку.

Зауважимо, що відношення порядку R_1 не є ні відношенням нестрогого порядку, ні відношенням строгого порядку.

Якщо R є відношенням строгого (або нестрогого) порядку, то R^{-1} теж є відношенням строгого (або нестрогого) порядку.

Елементи $a,b \in A$ *називаються* ***порівнюваними*** *за відношенням порядку* R, *якщо* $(a,b) \in R$ *або* $(b,a) \in R$.

Зауважимо, що, взагалі кажучи, не всі елементи множини A, на якій задано певне відношення порядку R, можна порівнювати за R.

Наприклад, відношення $R_4 = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(1,4)\}$ на множині $A = \{1,2,3,4\}$ є відношенням порядку, але елементи 2 і 4 не є порівнюваними за цим відношенням: $(2,4) \notin R_4$, $(4,2) \notin R_4$.

Відношення порядку R *на множині* A *називається* ***відношенням лінійного порядку****, якщо будь-які два різні елементи множини* A *порівнювані за відношенням* R.

Наприклад, відношення R_1, R_2, R_3 є відношеннями лінійного порядку, а відношення R_4 не є відношенням лінійного порядку.

Лінійний порядок може бути як нестрогим (якщо відношення рефлексивне), так і строгим (якщо відношення антирефлексивне).

Наприклад, відношення R_2 є відношенням нестрогого лінійного порядку, а відношення R_3 є відношенням строгого лінійного порядку. Відношення R_1 є відношенням лінійного порядку, але цей порядок не є ні нестрогим, ні строгим.

Задача 1.6.1. Довести, що на множині $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ бінарне відношення $R = \{(1,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,4),(4,5),$ $(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}$ є відношенням еквівалентності. Знайти класи еквівалентності та розбиття множини A.

Розв'язання. Легко перевірити, що дане бінарне відношення R є рефлексивним, симетричним та транзитивним, тому воно справді є відношенням еквівалентності на множині A.

Класи еквівалентності елементів множини A мають вигляд:

$[1]_R = \{y : (1, y) \in R\} = \{1\}$, $[2]_R = \{y : (2, y) \in R\} = \{2,3\}$,

$[3]_R = \{y : (3, y) \in R\} = \{2,3\}$, $[4]_R = \{y : (4, y) \in R\} = \{4,5,6\}$,

$[5]_R = \{y : (5, y) \in R\} = \{4,5,6\}$, $[6]_R = \{y : (6, y) \in R\} = \{4,5,6\}$,

тому розбиття множини A має вигляд:

$A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2,3\}$, $A_3 = \{4,5,6\}$,

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$. ■

Задача 1.6.2. Довести, що на множині $A = \{1,2,3,4\}$ бінарне відношення $R = \{(1,2),(2,3),(1,3),(4,3),(1,4),(4,2)\}$ є відношенням строгого порядку. Вказати цей порядок.

Розв'язання. Оскільки $(1,2) \in R$, а $(2,1) \notin R$, $(2,3) \in R$, а $(3,2) \notin R$, $(1,3) \in R$, а $(3,1) \notin R$, $(4,3) \in R$, а $(3,4) \notin R$, $(1,4) \in R$, а $(4,1) \notin R$, $(4,2) \in R$, а $(2,4) \notin R$, то бінарне відношення R є антисиметричним на A.

Крім цього,

$(1,2) \in R$, $(2,3) \in R \Rightarrow (1,3) \in R$,

$(1,4) \in R$, $(4,3) \in R \Rightarrow (1,3) \in R$,

$(1,4) \in R$, $(4,2) \in R \Rightarrow (1,2) \in R$,

$$(4,2) \in R,\ (2,3) \in R \ \Rightarrow\ (4,3) \in R,$$
тому відношення R є транзитивним на A.

Отже, R є відношенням порядку на множині A.

Оскільки
$$(1,1) \notin R,\ (2,2) \notin R,\ (3,3) \notin R,\ (4,4) \notin R,$$
то відношення порядку R є ще й антирефлексивним на A, тому R є відношенням строгого порядку на A.

Воно визначає наступний порядок на множині A:
$$1 \prec 2,\ 2 \prec 3,\ 1 \prec 3,\ 4 \prec 3,\ 1 \prec 4,\ 4 \prec 2,$$
тобто порядок $1 \prec 4 \prec 2 \prec 3$. ■

Задача 1.6.3. Довести, що на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$ бінарне відношення
$$R = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{N}, b \vdots a\}$$
є відношенням нестрогого порядку.

Розв'язання. Відношення R є антисиметричним, бо якщо одночасно $(a,b) \in R$ і $(b,a) \in R$, тобто $b \vdots a$ і $a \vdots b$, то це можливо лише тоді, коли $a = b$.

Відношення R є транзитивним, бо дільник дільника числа сам є дільником цього числа (якщо $(a,b) \in R$ і $(b,c) \in R$, тобто $b \vdots a$ і $c \vdots b$, то $b = ap$ і $c = bq$, де p і q – деякі натуральні числа, звідки випливає, що $c = apq$, тому $c \vdots a$, тобто $(a,c) \in R$).

Відношення R є рефлексивним, бо кожне натуральне число ділиться націло само на себе ($(a,a) \in R$, бо $a \vdots a = 1$).

Отже, R справді є відношенням нестрогого порядку на множині $\mathbb{N}$. ■

Завдання для самостійної роботи

Задача 1.6.4. З'ясувати, чи буде відношенням еквівалентності на множині прямих відношення:

1) паралельності прямих;
2) перпендикулярності прямих?

Задача 1.6.5. Довести, що на множині $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ бінарне відношення

$R = \{(a,b) : a, b \in A,\ a\ i\ b\ –\ \text{мають однакову кількість натуральних дільників}\}$

є відношенням еквівалентності. Знайти класи еквівалентності та розбиття множини A.

Задача 1.6.6. Довести, що на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ бінарне відношення

$$R = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R},\ (a-b)\ –\ \text{раціональне число}\}$$

є відношенням еквівалентності.

Задача 1.6.7. Довести, що на множині $A = \{1,2,3,4\}$ бінарне відношення

$$R = \{(1,2),(2,2),(2,3),(1,3),(4,3)\}$$

є відношенням порядку, але цей порядок не є ні нестрогим, ні строгим.

Задача 1.6.8. Довести, що на множині $A = \{1,2,3,4\}$ бінарне відношення

$$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(4,3),(4,4)\}$$

є відношенням нестрогого порядку. Вказати цей порядок.

Задача 1.6.9. Довести, що на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ відношення "$\leq$" є відношенням нестрогого порядку.

Задача 1.6.10. Довести, що на множині множин відношення "$\subseteq$" є відношенням нестрогого порядку.

Задача 1.6.11. Довести, що на множині цілих чисел $\mathbb{Z}$ бінарне відношення

$$R = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{Z},\ b \,\vdots\, a\}$$

є транзитивним, але не є антисиметричним, тобто не є відношенням порядку.

Задача 1.6.12. Довести, що на множині множин відношення "$\subseteq$" не є відношенням лінійного порядку.

Задача 1.6.13. Довести, що на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ відношення "$\leq$" є відношенням нестрогого лінійного порядку, а відношення "$<$" є відношенням строгого лінійного порядку.

ТЕМА 2. КОМБІНАТОРИКА

Комбінаторика – розділ дискретної математики, що вивчає розташування об'єктів скінченної множини згідно зі спеціальними правилами і методи підрахунку кількості таких всеможливих розташувань.

2.1. Загальні правила комбінаторики

Базовими правилами комбінаторики є правило суми та правило добутку.

Правило суми. *Нехай* A *і* B *– скінченні множини,* $|A| = n$, $|B| = m$, $A \cap B = \varnothing$. *Очевидно, один елемент* x *із множини* A *можна вибрати* n *різними способами, а один елемент* y *із множини* B *можна вибрати* m *різними способами. Тоді вибрати один елемент або із множини* A, *або із множини* B *(здійснити вибір "або* x, *або* y*") можна* $n + m$ *різними способами.*

Задача 2.1.1. В одному ящику містяться 8 пронумерованих білих кульок, а в іншому – 6 пронумерованих чорних. Випадковим чином вибирають одну кульку з будь-якого ящика. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання. Нехай A – множина білих кульок першого ящика, B – множина чорних кульок другого ящика. Тоді білу кульку можна вибрати 8 способами, чорну – 6 способами, а тому, за правилом суми, маємо 8 + 6 = 14 способів вибрати якунебудь кульку. ■

Правило суми узагальнюється на випадок будь-якої скінченної кількості множин:

якщо $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *– деякі скінченні множини,* $|A_1| = n_1$, $|A_2| = n_2$, ..., $|A_k| = n_k$, *причому* $A_i \cap A_j = \varnothing$ *для всіх* $i \neq j$, *то вибрати якийсь один елемент із множин* A_1, A_2, ..., A_k *можна*

$$N = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k| = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

різними способами.

Правило добутку. *Нехай* A *і* B *– скінченні множини,* $|A|=n$, $|B|=m$. *Тоді кількість всеможливих впорядкованих пар вигляду* (x,y), *де* $x\in A$, $y\in B$, *обчислюється за формулою:*

$$N=|A|\cdot|B|=n\cdot m.$$

Правило добутку інколи більш просто формулюють так:

якщо об'єкт x *можна вибрати* n *різними способами і після кожного такого вибору об'єкт* y *можна вибрати* m *різними способами, то одночасний вибір об'єктів* x і y *у зазначеному порядку можна здійснити* $n\cdot m$ *різними способами.*

Задача 2.1.2. Із міста M в місто N ведуть 7 доріг, а із міста N в місто P – 5 доріг. Скільки шляхів, що проходять через місто N, ведуть із міста M в місто P?

Розв'язання. Нехай A – множина доріг із міста M в місто N, B – множина доріг із міста N в місто P.

Тоді будь-який шлях, що веде із міста M в місто P, можна розглядати як впорядковану пару (x,y), де $x\in A$, $y\in B$, а тому, за правилом добутку, кількість шуканих шляхів дорівнюватиме: $N=7\cdot 5=35$. ■

Узагальненням правила добутку на випадок будь-якої скінченної кількості множин є ***основний принцип комбінаторики (ОПК)***:

якщо $A_1,A_2,\ldots,A_k$ *– деякі скінченні множини і* $|A_1|=n_1$, $|A_2|=n_2$, ..., $|A_k|=n_k$, *то кількість всеможливих впорядкованих* k*-ток вигляду* $(a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{ik})$, *де* $a_{ij}\in A_j$ *(* $j=\overline{1,k}$ *), обчислюється за формулою:*

$$N=|A_1|\cdot|A_2|\cdot\ldots\cdot|A_k|=n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_k.$$

Задача 2.1.3. Скільки різних цілих невід'ємних чотиризначних чисел можна скласти з цифр 0-5, якщо:

1) всі цифри числа мають бути різними;
2) цифри в числі можуть повторюватись;
3) число має бути парним;
4) число має бути парним і всі його цифри – різними?

Розв'язання. $A = \{0,1,2,3,4,5\}$ – множина допустимих цифр розглядуваних чотиризначних чисел.

Будь-яке чотиризначне число є впорядкованою послідовністю чотирьох цифр, тому йому можна взаємно однозначно поставити у відповідність впорядковану четвірку, елементами якої є цифри цього числа:

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \leftrightarrow (a_1, a_2, a_3, a_4).$$

1) Маємо:

$$a_1 \in A_1 = A \setminus \{0\} = \{1,2,3,4,5\}, \quad |A_1| = 5,$$

(перша цифра чотиризначного числа не може бути нулем),

$$a_2 \in A_2 = A \setminus \{a_1\}, \quad |A_2| = 5,$$

(за умовою, друга цифра не може співпадати з першою),

$$a_3 \in A_3 = A \setminus \{a_1, a_2\}, \quad |A_3| = 4,$$

(за умовою, третя цифра не може співпадати з першою і другою),

$$a_4 \in A_4 = A \setminus \{a_1, a_2, a_3\}, \quad |A_4| = 3,$$

(за умовою, четверта цифра не може співпадати з першою, другою і третьою).

Тоді, за ОПК, шуканих чисел існує

$$N_1 = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdot |A_4| = 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300. \ ■$$

2) В цьому випадку маємо:

$$a_1 \in A_1 = A \setminus \{0\} = \{1,2,3,4,5\}, \quad |A_1| = 5,$$

$$a_2 \in A_2 = A, \ |A_2| = 6,$$

$$a_3 \in A_3 = A, \ |A_3| = 6,$$

$$a_4 \in A_4 = A, \ |A_4| = 6,$$

тому, за ОПК, шуканих чисел існує

$$N_2 = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdot |A_4| = 5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1080.$$

Зазначимо, що, по суті, щойно ми порахували кількість всеможливих чотиризначних чисел, які можна скласти з цифр 0-5. Згідно з 1), у 300 із них всі цифри будуть різними, а тому, відповідно, у $1080 - 300 = 780$ числах обов'язково будуть повторення цифр. ■

3) Щоб число було парним, його остання цифра повинна бути парною. Міркування в цьому випадку аналогічні випадку

2) з єдиною відмінністю: $a_4 \in A_4 = \{0,2,4\}$, $|A_4| = 3$, тому, за ОПК, шуканих чисел існує

$$N_3 = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdot |A_4| = 5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 540. \ \blacksquare$$

4) Цей випадок суттєво складніший за попередні, оскільки, здійснюючи викладки за вищенаведеною традиційною схемою, отримуємо:

$$a_1 \in A_1 = A \setminus \{0\} = \{1,2,3,4,5\}, \quad |A_1| = 5,$$
$$a_2 \in A_2 = A \setminus \{a_1\}, \quad |A_2| = 5,$$
$$a_3 \in A_3 = A \setminus \{a_1, a_2\}, \quad |A_3| = 4,$$
$$a_4 \in A_4 = \{0,2,4\} \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$$

і неможливо однозначно вказати потужність множини A_4 ("проблема останньої цифри"):

$|A_4| = 3$, якщо раніше не була вибрана жодна з цифр 0, 2, 4;

$|A_4| = 2$, якщо раніше була вибрана якась одна з цифр 0, 2, 4;

$|A_4| = 1$, якщо раніше були вибрані якісь дві з цифр 0, 2, 4;

$|A_4| = 0$, якщо раніше були вибрані всі три цифри 0, 2, 4.

Щоб уникнути цієї проблеми, необхідно спочатку обирати для числа останню (четверту) цифру, яка є парною, а потім всі інші (першу, другу, третю) цифри.

При цьому необхідно окремо розглядати два випадки: $a_4 = 0$ і $a_4 \neq 0$, оскільки в кожному з них по-різному рахується кількість способів вибору перших трьох цифр.

а) Розглянемо випадок $a_4 = 0$. Маємо:

$$a_4 \in A_4 = \{0\}, \ |A_4| = 1,$$
$$a_1 \in A_1 = A \setminus \{a_4\} = \{1,2,3,4,5\}, \quad |A_1| = 5,$$
$$a_2 \in A_2 = A \setminus \{a_4, a_1\} = \{1,2,3,4,5\} \setminus \{a_1\}, \quad |A_2| = 4,$$
$$a_3 \in A_3 = A \setminus \{a_4, a_1, a_2\} = \{1,2,3,4,5\} \setminus \{a_1, a_2\}, \quad |A_3| = 3,$$

$N_{41} = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdot |A_4| = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 60$ (парних чисел, що закінчуються на нуль, у яких всі цифри різні).

б) Розглянемо випадок $a_4 \neq 0$. Маємо:

$$a_4 \in A_4 = \{2,4\}, \ |A_4| = 2,$$
$$a_1 \in A_1 = A \setminus \{a_4, 0\}, \quad |A_1| = 4,$$

$$a_2 \in A_2 = A \setminus \{a_4, a_1\}, \quad |A_2| = 4,$$
$$a_3 \in A_3 = A \setminus \{a_4, a_1, a_2\}, \quad |A_3| = 3,$$
$N_{42} = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdot |A_4| = 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$ (парних чисел, що закінчуються не на нуль, у яких всі цифри різні).

Остаточно, за правилом суми, отримуємо, що парних чисел, у яких всі цифри різні, існує:
$$N_4 = N_{41} + N_{42} = 60 + 96 = 156.$$

Наведемо ще один спосіб розв'язання цієї задачі. Для цього скористаємося очевидним ***правилом різниці***:

якщо N – загальна кількість способів, а N_1 – кількість способів, що не володіють певною властивістю, то $N - N_1$ – кількість способів, що володіють цією властивістю.

Тоді, щоб знайти N_4 – кількість чотиризначних парних чисел, у яких всі цифри різні, необхідно від N_1 – раніше підрахованої кількості всеможливих чотиризначних чисел, у яких всі цифри різні, відняти N_5 – кількість чотиризначних непарних чисел, у яких всі цифри різні:
$$N_4 = N_1 - N_5.$$

Підрахуємо число N_5 (уникаючи "проблеми останньої цифри", яка тут теж виникає):
$$a_4 \in A_4 = \{1,3,5\}, \; |A_4| = 3,$$
$$a_1 \in A_1 = A \setminus \{a_4, 0\}, \quad |A_1| = 4,$$
$$a_2 \in A_2 = A \setminus \{a_4, a_1\}, \quad |A_2| = 4,$$
$$a_3 \in A_3 = A \setminus \{a_4, a_1, a_2\}, \quad |A_3| = 3,$$
$$N_5 = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdot |A_4| = 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 144.$$

Тоді, за правилом різниці, маємо:
$$N_4 = N_1 - N_5 = 300 - 144 = 156. \;\blacksquare$$

Завдання для самостійної роботи

Задача 2.1.4. Скільки словників потрібно видати, щоб можна було безпосередньо виконувати переклади з будь-якої із п'яти мов – української, англійської, французької, німецької, італійської – на будь-яку іншу з цих мов?

Задача 2.1.5. В ящику лежать 12 різних білих кульок і 10 різних чорних. З нього вибирається біла або чорна кулька, після чого беруть і білу, і чорну кульки. В якому випадку є більша можливість вибору: якщо спочатку було взято білу кульку чи якщо спочатку було взято чорну кульку?

Задача 2.1.6. Є тканини п'яти кольорів: білого, червоного, зеленого, синього та жовтого. Скількома способами з них можна скласти триколірний прапор з горизонтальними смугами однакової ширини? Ця ж задача, якщо одна зі смуг повинна бути зеленою?

Задача 2.1.7. У англійців прийнято давати дітям декілька різних імен. Скількома способами можна назвати дитину, якщо для вибору є 300 імен, а їй дають не більше трьох?

Задача 2.1.8. Автомобільні номери деякої країни складаються з однієї, двох або трьох букв на початку номера та чотирьох цифр у його кінці. Скільки різних номерів можна утворити, якщо алфавіт країни містить 33 букви?

Задача 2.1.9. Скільки існує всеможливих цілих невід'ємних дев'ятизначних чисел? У скількох із них всі цифри будуть різними? У скількох із них обов'язково будуть повторення цифр?

Задача 2.1.10. Скільки цілих невід'ємних чотиризначних чисел, у яких всі цифри різні і серед них обов'язково присутня цифра 1, можна скласти з цифр 0-7?

2.2. Вибірки та їх класифікація

За допомогою загальних правил комбінаторики можна розв'язувати різноманітні комбінаторні задачі. Однак, для найбільш типових випадків, досить зручно вивести готові формули знаходження кількості способів розташування об'єктів скінченної множини.

Введемо поняття вибірки, яке буде фундаментальним для всіх подальших міркувань.

Нехай задано деяку скінченну множину потужності n:

$$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}.$$

Виконаємо наступну процедуру:

1) на першому кроці з множини A виберемо деякий елемент a_{i1};
2) на другому кроці із множини $A\setminus\{a_{i1}\}$ виберемо деякий елемент a_{i2};
3) на третьому кроці із множини $A\setminus\{a_{i1},a_{i2}\}$ виберемо деякий елемент a_{i3};

……………………………………………………………………………

k) на k-му кроці із множини $A\setminus\{a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{i(k-1)}\}$ виберемо деякий елемент a_{ik}.

Тоді сукупність $\{a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{ik}\}$ усіх обраних елементів називається k-вибіркою. Згідно з процедурою вибору, у розглядуваній k-вибірці всі елементи обов'язково будуть різними (не можуть повторюватися). Тому таку вибірку називають ***k*** ***-вибіркою без повторень***.

Якщо ж на кожному кроці відповідний елемент a_{ij} ($j=\overline{1,k}$) вибирати з усієї множини A, в отриманій k-вибірці можуть бути однакові елементи (елементи можуть повторюватися). Тому таку вибірку називають ***k*** ***-вибіркою з повтореннями***.

Досить часто зустрічається не зовсім правильне розуміння терміна "вибірка з повтореннями". Тому явно наголосимо, що термін "вибірка з повтореннями" означає, що у такій вибірці повторення елементів можуть бути, але не обов'язково повинні бути. Саме тому серед всеможливих вибірок з повтореннями будуть і такі, що формально співпадають зі всеможливими вибірками без повторень. Звідси одразу ж випливає, що кількість всеможливих k-вибірок із повтореннями буде більшою, ніж кількість всеможливих k-вибірок без повторень.

Вибірка, у якій порядок розташування елементів *неістотний, називається* ***невпорядкованою.***

Вибірка, у якій задано порядок розташування елементів, називається ***впорядкованою***.

Таким чином, загалом існує чотири різних типи вибірок:

- невпорядковані вибірки без повторень;
- невпорядковані вибірки з повтореннями;
- впорядковані вибірки без повторень;
- впорядковані вибірки з повтореннями.

Надалі для кожного з цих чотирьох типів вибірок буде введена відповідна спеціальна назва і наведена формула для підрахунку їх кількості.

Щоб розрізняти впорядковані і невпорядковані вибірки, елементи невпорядкованої вибірки задаватимемо у квадратних дужках, наприклад, $[a,b]$, а елементи впорядкованої – у круглих, наприклад, (a,b).

Розглянемо приклад. Нехай $A=\{a,b,c\}$, тоді:

$[a,b]$, $[a,c]$, $[b,c]$ – всеможливі невпорядковані 2-вибірки без повторень;

(a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (b,c), (c,b) – всеможливі впорядковані 2-вибірки без повторень;

$[a,b]$, $[a,c]$, $[b,c]$, $[a,a]$, $[b,b]$, $[c,c]$ – всеможливі невпорядковані 2-вибірки з повтореннями;

(a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (b,c), (c,b), (a,a), (b,b), (c,c) – всеможливі впорядковані 2-вибірки з повтореннями.

На завершення введемо також потрібне в подальшому поняття факторіала:

факторіалом *натурального числа* n *називається добуток всіх натуральних чисел від* 1 *до* n *включно:*

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n.$$

Оскільки при $n>1$ виконується рівність

$$n! = (n-1)!\cdot n,$$

то для того, щоб вона виконувалась і при $n=1$, формально вважають, що

$$0! = 1.$$

2.3. Сполуки

Розглянемо деяку скінченну множину потужності n, наприклад, $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$. Нехай k – довільне ціле число, таке, що $0\le k\le n$.

Сполукою із n ***по*** k *називається невпорядкована* k*-вибірка без повторень із множини потужності* n.

Нехай, наприклад, $A=\{a,b,c\}$, тоді всеможливі сполуки із 3 по 2 мають вигляд: $[a,b]$, $[a,c]$, $[b,c]$.

Очевидно, кожна сполука із n по k є деякою звичайною (невпорядкованою) k-елементною підмножиною вихідної n-елементної множини.

Будь-які дві сполуки із n по k відрізняються хоча б одним елементом (оскільки порядок розташування елементів у них неістотний).

Кількість всеможливих сполук із n *по* k *позначається* C_n^k *і обчислюється за формулою:*

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Властивості сполук:

1) $C_n^k=C_n^{n-k}$ для будь-якого $0\le k\le n$;

2) $C_n^k=\dfrac{n-k+1}{k}C_n^{k-1}$ для будь-якого $1\le k\le n$;

3) $C_n^k=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k$ для будь-якого $1\le k\le n-1$.

Задача 2.3.1. Із 52 осіб треба утворити делегацію, яка складається з 5 осіб. Скількома способами це можна зробити?

Розв’язання. Для утворення будь-якої делегації необхідно вибрати 5 різних осіб із 52, причому порядок їх вибору неістотний. Тоді кожна делегація буде невпорядкованою 5-вибіркою без повторень із 52 (сполукою із 52 по 5), а тому існуватиме $C_{52}^5=\dfrac{52!}{5!\cdot 47!}=\dfrac{48\cdot 49\cdot 50\cdot 51\cdot 52}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=2598960$ різних способів утворити делегацію. ■

Задача 2.3.2. Скількома способами з натуральних чисел від 1 до 31 можна вибрати 3 різних числа так, щоб їх сума була парною?

Розв'язання. Серед натуральних чисел від 1 до 31 є 16 непарних і 15 парних.

Сума трьох вибраних із них чисел буде парною лише у двох випадках:

1) всі три числа є парними;
2) одне число – парне, а інші два – непарні.

Підрахуємо спочатку, скількома різними способами можна здійснювати вибір у кожному із цих випадків.

1) Вибрати 3 різні парні числа можна

$$N_1 = C_{15}^3 = 455 \text{ способами.}$$

2) Вибрати одне парне число можна $C_{15}^1 = 15$ способами, а два різні непарні – $C_{16}^2 = 120$ способами. Тому, за правилом добутку, одночасно вибрати одне парне і два непарні числа можна

$$N_2 = C_{15}^1 C_{16}^2 = 1800 \text{ способами.}$$

Тоді остаточно, за правилом суми, загальна кількість шуканих способів дорівнює:

$$N = N_1 + N_2 = C_{15}^3 + C_{15}^1 C_{16}^2 = 2255. \ \blacksquare$$

Завдання для самостійної роботи

Задача 2.3.3. Скількома способами з 30 спортсменів можна сформувати команду з 4 осіб для участі в забігу на 100 м?

Задача 2.3.4. У одного студента є 7 різних книг з математики, а у іншого – 9. Скількома способами вони можуть обмінятися:

1) однією книгою (кожен дає одну свою книгу іншому);
2) двома книгами (кожен дає дві свої книги іншому)?

Задача 2.3.5. 5 дівчат і 3 юнаки хочуть грати у футбол. Скількома способами вони можуть поділитися на 2 команди по 4 гравці, якщо у кожній команді повинен бути хоча б 1 юнак?

Задача 2.3.6. Скількома способами із повної колоди (52 карти) можна витягнути 10 карт так, щоб серед них були:

1) рівно 1 туз;
2) хоча б 1 туз;
3) рівно 2 тузи;
4) не менше 2 тузів?

Задача 2.3.7. При грі в доміно чотири гравці ділять порівну 28 кісточок. Скількома способами вони можуть це зробити?

Задача 2.3.8. Скількома способами можна вибрати 12 осіб із 17, якщо задані дві особи не можуть бути обрані одночасно?

Задача 2.3.9. Із групи, що містить 7 чоловіків і 4 жінки, треба вибрати 6 осіб так, щоб серед них було не менше 2 жінок. Скількома способами це можна зробити?

Задача 2.3.10. Скількома способами із неповної колоди (36 карт) можна витягнути 5 карт так, щоб серед них були туз, король і дама однієї масті?

Задача 2.3.11. Скількома способами з 15 осіб можна сформувати бригаду для роботи (до складу бригади можуть входити від 1 до 15 осіб)?

Задача 2.3.12. Скільки різних дільників (враховуючи 1 і 2310) має число 2310? (Вказівка: скористатися розкладом цього числа на прості множники).

Задача 2.3.13. Скільки різних добутків, кратних 10, можна утворити з чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13, якщо кожне число може входити у добуток не більше одного разу?

Задача 2.3.14. Скільки діагоналей має опуклий n-кутник?

2.4. Розміщення

Розглянемо деяку скінченну множину потужності n, наприклад, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Нехай k – довільне ціле число, таке, що $0 \le k \le n$.

***Розміщенням із n по k** називається впорядкована k-вибірка без повторень із множини потужності n.*

Нехай, наприклад, $A=\{a,b,c\}$, тоді всеможливі розміщення із 3 по 2 мають вигляд: (a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (b,c), (c,b).

Очевидно, кожне розміщення із n по k є деякою впорядкованою k-елементною підмножиною вихідної n-елементної множини.

Будь-які два розміщення із n по k відрізняються або самими елементами, або порядком їх розташування.

Кількість всеможливих розміщень із n по k позначається A_n^k і обчислюється за формулою:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

Задача 2.4.1. Скільки словників потрібно видати, щоб можна було безпосередньо виконувати переклади з будь-якої із п'яти мов – української, англійської, французької, німецької, італійської – на будь-яку іншу з цих мов?

Розв'язання. По суті, необхідно підрахувати кількість всеможливих відповідних двомовних словників.

Кожен словник однозначно визначається його назвою.

Для утворення назви довільного словника необхідно вибрати 2 різні мови із 5, причому надалі буде істотним порядок їх розташування в назві цього словника. Тоді назва кожного словника буде впорядкованою 2-вибіркою без повторень із 5 (розміщенням із 5 по 2), а тому існуватиме $N=A_5^2=\frac{5!}{3!}=4\cdot 5=20$ всеможливих різних двомовних словників. ■

Задача 2.4.2. Скільки існує всеможливих цілих невід'ємних п'ятизначних чисел, у яких всі цифри різні?

Розв'язання. З умови випливає, що для утворення п'ятизначних чисел можна використовувати всі 10 існуючих цифр: 0, 1, 2, ..., 9.

П'ятизначні числа, у яких всі цифри різні, будуть отримуватися як розміщення із цих 10 цифр по 5.

Кількість таких всеможливих розміщень дорівнюватиме $N = A_{10}^{5} = \frac{10!}{5!} = 30240$, однак серед них будуть і такі, де нуль потрапив на перше місце, а тому відповідні числа насправді будуть уже чотиризначними.

Кількість розміщень із 10 по 5, де нуль потрапив на перше місце (кількість отриманих чотиризначних чисел), дорівнюватиме кількості розміщень із 9 цифр (1, 2, ..., 9) по 4: $N_1 = A_9^4 = \frac{9!}{5!} = 3024$, тому, за правилом різниці, остаточно знаходимо кількість шуканих чисел:

$$N - N_1 = A_{10}^{5} - A_9^4 = 30240 - 3024 = 27216. \ \blacksquare$$

Завдання для самостійної роботи

Задача 2.4.3. Скількома способами з 30 спортсменів можна сформувати команду з 4 осіб для участі в естафеті 100 + 200 + 400 + 800 м?

Задача 2.4.4. У англійців прийнято давати дітям декілька різних імен. Скількома способами можна назвати дитину, якщо для вибору є 300 імен, а їй дають не більше трьох?

Задача 2.4.5. Є тканини п'яти кольорів: білого, червоного, зеленого, синього та жовтого. Скількома способами з них можна скласти триколірний прапор із горизонтальними смугами однакової ширини? Ця ж задача, якщо одна зі смуг повинна бути зеленою?

Задача 2.4.6. У трьох студентів є 4 різних чашки, 5 різних блюдечок і 6 різних чайних ложечок. Скількома способами вони можуть накрити стіл для чаювання (кожен студент має отримати одну чашку, одне блюдечко та одну ложечку)?

Задача 2.4.7. Автомобільні номери деякої країни складаються з однієї, двох або трьох різних букв на початку номера та чотирьох різних цифр у його кінці. Скільки різних номерів можна утворити, якщо алфавіт країни містить 33 букви?

Задача 2.4.8. Скільки цілих невід'ємних шестизначних чисел, у яких всі цифри різні, можна скласти з цифр:

1) 1-7;
2) 0-7?

2.5. Перестановки

Розглянемо деяку скінченну множину потужності n, наприклад, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

n***-перестановкою*** *називається впорядкована* n*-вибірка без повторень із множини потужності* n.

Нехай, наприклад, $A = \{a, b, c\}$, тоді всеможливі 3-перестановки мають вигляд:

$$(a,b,c),\ (a,c,b),\ (b,a,c),\ (b,c,a),\ (c,a,b),\ (c,b,a).$$

Очевидно, кожна n-перестановка є певним способом впорядкування вихідної n-елементної множини.

Будь-які дві n-перестановки відрізняються лише порядком розташування елементів (оскільки кожна з них містить усі n елементів вихідної множини).

По суті, n-перестановки є розміщеннями із n по n.

Кількість всеможливих n*-перестановок позначається* P_n *і обчислюється за формулою:*

$$P_n = A_n^n = n!.$$

Задача 2.5.1. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1,2,3,\dots,2n+1\}$ так, щоб парні числа стояли на парних місцях?

Розв'язання. В розглядуваній множині маємо n парних і $n+1$ непарних чисел, n парних і $n+1$ непарних місць. n парних чисел можна розставити на n парних місцях $P_n = n!$ способами, а $n+1$ непарних чисел можна розставити на $n+1$ непарних місцях $P_{n+1} = (n+1)!$ способами. Оскільки будь-який спосіб розстановки парних чисел можна поєднувати з будь-яким способом розстановки непарних, то, згідно з ОПК, всеможливих способів шуканого впорядкування розглядуваної множини існує $N = P_n \cdot P_{n+1} = n!(n+1)! = (n!)^2 (n+1)$. ■

Задача 2.5.2. Скількома способами можна скласти список виступу 5 ораторів А, Б, В, Г, Д, якщо:

1) Б не повинен виступати попереду А;
2) А повинен виступити безпосередньо перед В?

Розв'язання. Якщо не накладати жодних обмежень, то список виступу 5 ораторів А, Б, В, Г, Д є 5-перестановкою, а тому його можна скласти $P_5 = 5! = 120$ різними способами.

1) Назвемо "двійниками" пару списків, у яких повністю співпадає розташування ораторів В, Г, Д, а оратори А і Б розташовуються на одній і тій самі парі місць, але в різному порядку (наприклад, ВАДБГ і ВБДАГ, ВГАБД і ВГБАД, АБДВГ і БАДВГ, ГДВАБ і ГДВБА). При цьому в кожній парі "двійників" потрібну умову задовольнятиме лише один список.

Оскільки 120 всеможливих списків можна розбити на 60 пар "двійників", отримуємо, що існує 60 списків, де Б не виступатиме попереду А. ■

2) За умовою, нас цікавлять всеможливі списки, де після виступу оратора А одразу ж виступає оратор В, тобто списки зі фрагментом АВ (наприклад, ДАВБГ, АВБДГ, ГБДАВ). Тоді можна розглядати фрагмент АВ як одного оратора і, відповідно, усі потрібні списки отримувати з допомогою всеможливих перестановок чотирьох ораторів: Б, Г, Д і АВ. Таким чином, шуканих списків існуватиме $P_4 = 4! = 24$. ■

Задача 2.5.3. Скількома способами 15 хлопців і 10 дівчат можна вишикувати так, щоб усі дівчата стояли поряд?

Розв'язання. Якщо усі дівчата стоять поряд, їх можна розглядати як єдине ціле (як один елемент). Тоді цей елемент і 15 хлопців можна вишикувати $P_{16} = 16!$ способами. Оскільки 10 дівчат поряд можна вишиковувати $P_{10} = 10!$ різними способами, остаточно отримуємо $P_{16} P_{10} = 16! \cdot 10!$ шуканих способів. ■

Задача 2.5.4. Скільки різних "слів", у яких друга, четверта і шоста букви – приголосні, можна отримати, переставляючи букви в слові "логарифм"?

Розв'язання. Слово "логарифм" містить 8 букв: 5 приголосних ("л", "г", "р", "ф", "м") і 3 голосні ("о", "а", "и"). Тому шукані слова отримуватимуться внаслідок відповідного заповнення цими буквами 8 пронумерованих місць.

Вибрати 3 приголосні букви із п'яти і розставити їх на вказаних (другому, четвертому і шостому) місцях можна $A_5^3 = 60$ способами. Якщо певним способом це виконано, залишається розставити на п'яти вільних місцях (першому, третьому, п'ятому, сьомому і восьмому) 5 букв (2 приголосні, що залишилися, і 3 голосні), а це можна зробити $P_5 = 5! = 120$ способами. Тоді, за ОПК, існуватиме $A_5^3 P_5 = 60 \cdot 120 = 7200$ шуканих слів. ■

Задача 2.5.5. Скількома способами можна розсадити за круглий стіл 8 осіб так, щоб вказані дві особи не сиділи поруч?

Розв'язання. Пронумеруємо всі 8 місць за столом. Тоді будь-який спосіб розсаджування восьми осіб за столом є 8-перестановкою, а тому кількість всеможливих способів розсаджування восьми осіб дорівнюватиме $N = P_8 = 8! = 40320$.

Підрахуємо тепер N_1 – кількість таких способів розсаджування восьми осіб, щоб вказані дві особи сиділи поруч. Перш за все, сусідні місця за столом для цих двох осіб можна вибрати 8 способами (1 і 2, 2 і 3, 3 і 4, ..., 7 і 8, 8 і 1). Оскільки при цьому на двох обраних місцях їх можна розсаджувати $P_2 = 2$ способами, то матимемо $8 \cdot P_2 = 16$ способів посадити двох вказаних осіб поруч за столом. Якщо їх посаджено поруч, решту 6 осіб на шести вільних місцях за столом можна розсаджувати $P_6 = 720$ способами. Тоді, за ОПК, $N_1 = 8 \cdot P_2 \cdot P_6 = 11520$.

Використовуючи правило різниці, знаходимо кількість способів розсаджування восьми осіб за столом так, щоб вказані дві особи не сиділи поруч:

$$N - N_1 = P_8 - 8 \cdot P_2 \cdot P_6 = 40320 - 11520 = 28800 . \blacksquare$$

Завдання для самостійної роботи

Задача 2.5.6. Скількома способами можна розставити на шахівниці 8 однакових тур? А розставити їх так, щоб вони не били одна одну?

Задача 2.5.7. Скількома способами можна впорядкувати множину {1,2,3,4,5,6,7} так, щоб усі парні цифри стояли поряд? А впорядкувати так, щоб усі непарні цифри стояли поряд?

Задача 2.5.8. Скільки існує перестановок з n різних елементів a, b, c, ..., у яких:

1) елементи a і b не стоять поряд;
2) елементи a, b і c не стоять одночасно поряд?

Задача 2.5.9. Скільки цілих невід'ємних семизначних чисел, у яких всі цифри різні і всі парні цифри не стоять одночасно поруч, можна скласти з цифр 1-7?

Задача 2.5.10. Скільки цілих невід'ємних шестизначних чисел, у яких всі цифри різні і серед них обов'язково присутні 2, 7, 9, можна скласти з цифр 1-9?

Задача 2.5.11. Скільки цілих невід'ємних семизначних чисел, у яких всі цифри різні і серед них обов'язково присутні 1, 3, 5, можна скласти з цифр 0-9?

Задача 2.5.12. У купе залізничного вагону є 2 протилежних дивани по 5 місць. З 10 пасажирів 4 бажають сидіти обличчям до тепловозу, 3 – спиною, іншим трьом – байдуже, як сидіти. Скількома способами можуть розміститися пасажири?

Задача 2.5.13. На шкільному вечорі присутні 12 дівчат і 15 юнаків. Скількома способами з них можна скласти 4 пари для танцю?

Задача 2.5.14. Скількома способами можна розсадити за круглий стіл 5 чоловіків і 5 жінок так, щоб ніякі дві особи однієї статі не сиділи поруч? Ця ж задача, якщо вони сідають на карусель, і способи, що переходять один в одного при обертанні каруселі, вважаються співпадаючими?

Задача 2.5.15. Скільки різних намист можна складати з семи різних намистин, якщо у кожному намисті повинні бути використані всі 7 намистин?

2.6. Сполуки з повтореннями

Розглянемо деяку скінченну множину потужності n, наприклад, $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$. Нехай $k\geq 0$ – довільне ціле число.

Сполукою з повтореннями із n ***по*** k *називається невпорядкована* k*-вибірка з повтореннями із множини потужності* n.

Нехай, наприклад, $A=\{a,b,c\}$, тоді всеможливі сполуки з повтореннями із 3 по 2 мають вигляд:

$$[a,b],\ [a,c],\ [b,c],\ [a,a],\ [b,b],\ [c,c].$$

Будь-які дві сполуки з повтореннями із n по k відрізняються хоча б одним елементом.

Зауважимо, що число k може бути навіть більшим за число n. Нехай, як і вище, $A=\{a,b,c\}$, тоді $[a,b,c,c,b]$ – одна із можливих сполук з повтореннями із 3 по 5.

Кількість всеможливих сполук з повтореннями із n *по* k *позначається* $\overline{C}_n^k$ *і обчислюється за формулою:*

$$\overline{C}_n^k=C_{n+k-1}^k=\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Число $\overline{C}_n^k$ має також і інші комбінаторні тлумачення.

Твердження 2.6.1. $\overline{C}_n^k$ *– кількість способів, якими можна розподілити* k *однакових об'єктів (предметів) між* n *різними ящиками (особами).*

Твердження 2.6.2. $\overline{C}_n^k$ *– кількість розв'язків рівняння* $x_1+x_2+\ldots+x_n=k$ *в цілих невід'ємних числах.*

Задача 2.6.1. В кондитерському магазині продаються 4 сорти пиріжків. Скількома способами можна купити 7 пиріжків?

Розв'язання. Щоб купити 7 пиріжків, по суті, необхідно 7 разів здійснити вибір сорту із чотирьох можливих. При цьому порядок вибору неістотний і при виборі можна повторюватися (більше того, оскільки $7>4$, повторення будуть гарантовано). Тоді кожен спосіб покупки 7 пиріжків буде невпорядкованою 7-вибіркою з повтореннями із 4 (сполукою з повтореннями із 4 по 7), а тому існуватиме $\overline{C}_4^7 = C_{10}^7 = 120$ різних способів здійснити покупку. ■

Задача 2.6.2. Скількома способами можна поділити 10 білих грибів, 15 підберезників і 8 підосичників між 4 людьми, якщо гриби кожного сорту вважаються між собою однаковими?

Розв'язання. Згідно з твердженням 2.6.1, четверо людей можуть окремо розподілити між собою:

- 10 однакових білих грибів – $\overline{C}_4^{10} = C_{13}^{10}$ способами,
- 15 однакових підберезників – $\overline{C}_4^{15} = C_{18}^{15}$ способами,
- 8 однакових підосичників – $\overline{C}_4^{8} = C_{11}^{8}$ способами.

Оскільки будь-який спосіб розподілу білих грибів можна поєднувати з будь-яким способом розподілу підберезників і будь-яким способом розподілу підосичників, то, за ОПК, існуватиме $\overline{C}_4^{10}\overline{C}_4^{15}\overline{C}_4^{8} = C_{13}^{10}C_{18}^{15}C_{11}^{8} = 38507040$ шуканих способів одночасного розподілу всіх грибів. ■

Задача 2.6.3. Скількома способами 12 однакових яблук можна розкласти у 5 різних пакетів, якщо жоден з них не повинен бути порожнім?

Розв'язання. Якби не накладалося обмеження на відсутність порожніх пакетів, то кількість всеможливих способів розподілу 12 однакових яблук між 5 різними пакетами, згідно з твердженням 2.6.1, дорівнювала б $\overline{C}_5^{12} = C_{16}^{12} = 1820$.

Щоб при розподілах гарантувати відсутність порожніх пакетів, виберемо 5 однакових яблук із 12 (очевидно, це можна зробити єдиним чином) і покладемо по одному у кожен пакет (внаслідок однаковості яблук, це теж можна зробити єдиним чином). Тоді задача зводиться уже до всеможливих способів розподілу 7 однакових яблук, що залишилися, між п'ятьма різними пакетами, а це, згідно з твердженням 2.6.1, можна зробити $\overline{C}_5^7 = C_{11}^7 = 330$ різними способами. ■

Завдання для самостійної роботи

Задача 2.6.4. У поштовому відділенні продаються листівки 10 сортів. Скількома способами можна придбати:

1) 12 листівок;
2) 8 листівок;
3) 8 різних листівок?

Задача 2.6.5. 30 депутатів голосують за 5 пропозицій. Скількома способами можуть розподілитися голоси, якщо кожний депутат голосує лише за одну пропозицію і враховується тільки кількість голосів, поданих за кожну пропозицію?

Задача 2.6.6. Скільки різних неправильних дробів (у яких чисельник ≥ знаменника) можна скласти з чисел 3, 5, 7, 8, 11, 13, 17?

Задача 2.6.7. Двоє дівчат зібрали 10 однакових ромашок, 15 однакових волошок і 14 однакових фіалок. Скількома способами вони можуть їх розподілити між собою?

Задача 2.6.8. У книжковому магазині продаються книги чотирьох різних назв. Скількома способами можна купити 8 книг, якщо купується хоча б одна книга кожної назви?

Задача 2.6.9. Скількома способами можна розкласти k однакових куль у n різних урн ($k \geq n$) так, щоб не було порожніх урн?

Задача 2.6.10. Скількома способами число 100 можна подати у вигляді суми трьох невід'ємних цілих чисел? А у вигляді суми трьох натуральних?

2.7. Розміщення з повтореннями

Розглянемо деяку скінченну множину потужності n, наприклад, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Нехай $k \geq 0$ – довільне ціле число.

Розміщенням з повтореннями із n ***по*** k *називається впорядкована* k*-вибірка з повтореннями із множини потужності* n.

Нехай, наприклад, $A = \{a, b, c\}$, тоді всеможливі розміщення з повтореннями із 3 по 2 мають вигляд:

$$(a,b),\ (b,a),\ (a,c),\ (c,a),\ (b,c),\ (c,b),\ (a,a),\ (b,b),\ (c,c).$$

Зауважимо, що число k може бути навіть більшим за число n. Нехай, як і вище, $A = \{a, b, c\}$, тоді (a, b, a, c, b) – одне із можливих розміщень з повтореннями із 3 по 5.

Кількість всеможливих розміщень з повтореннями із n *по* k *позначається* $\overline{A}_n^k$ *і обчислюється за формулою:*

$$\overline{A}_n^k = n^k.$$

Число $\overline{A}_n^k$ має також і інше комбінаторне тлумачення.

Твердження 2.7.1. $\overline{A}_n^k$ *– кількість способів, якими можна розподілити* k *різних об'єктів (предметів) між* n *різними ящиками (особами).*

Задача 2.7.1. Камера схову містить 5 дисків, на кожний з яких нанесено 12 букв. Секретне слово при закриванні камери утворюється шляхом вибору на кожному із дисків однієї букви. Яку найбільшу кількість невдалих спроб відкрити камеру може виконати людина, що не знає секретного слова?

Розв'язання. Кожне секретне слово є впорядкованою 5-вибіркою з повтореннями із 12 букв (розміщенням з повтореннями із 12 по 5), а тому існуватиме $\overline{A}_{12}^5 = 12^5 = 248832$ всеможливих різних секретних слів. Отже, в найгіршому випадку, невдалих спроб може бути виконано $\overline{A}_{12}^5 - 1 = 248831$. ■

Задача 2.7.2. У деякій країні немає двох жителів із однаковим набором зубів. Якою може бути максимальна чисельність населення цієї країни, якщо найбільша кількість зубів у людини дорівнює 32?

Розв'язання. Скористаємось принципом кодування: ставитимемо кожному зубу у відповідність 1, якщо він присутній у наборі, і 0 – якщо відсутній. Тоді кожний набір зубів буде розміщенням з повтореннями із 2 по 32, кількість яких дорівнює $\overline{A}_2^{32} = 4294967296$. Отже, максимальна чисельність населення розглядуваної країни може дорівнювати 4294967296 осіб. ■

Задача 2.7.3. Автомобільні номери деякої країни складаються з однієї, двох або трьох букв на початку номера та чотирьох цифр у його кінці. Скільки різних номерів можна утворити, якщо алфавіт країни містить 33 букви?

Розв'язання. За умовою, в розглядуваній країні є допустимими три типи автомобільних номерів:

1) номери, що складаються з трьох букв і чотирьох цифр;
2) номери, що складаються з двох букв і чотирьох цифр;
3) номери, що складаються з однієї букви і чотирьох цифр.

Підрахуємо спочатку кількість всеможливих номерів першого типу. Окремо сформувати 3-буквенну і 4-цифрову складові для номера, очевидно, можна $\overline{A}_{33}^{3} = 33^3$ і $\overline{A}_{10}^{4} = 10^4$ способами відповідно. Тоді, за правилом добутку, існуватиме $N_1 = \overline{A}_{33}^{3} \cdot \overline{A}_{10}^{4} = 33^3 \cdot 10^4$ всеможливих номерів першого типу.

Міркуючи аналогічно, знаходимо кількості всеможливих номерів другого та третього типів:

$$N_2 = \overline{A}_{33}^{2} \cdot \overline{A}_{10}^{4} = 33^2 \cdot 10^4,$$

$$N_3 = \overline{A}_{33}^{1} \cdot \overline{A}_{10}^{4} = 33 \cdot 10^4.$$

Остаточно, за правилом суми, отримуємо загальну кількість всеможливих автомобільних номерів розглядуваної країни:

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = 33^3 \cdot 10^4 + 33^2 \cdot 10^4 + 33 \cdot 10^4 = 370590000.$$ ■

Задача 2.7.4. Поїзд з n пасажирами робить m зупинок. Скількома способами пасажири можуть розподілитися між зупинками?

Розв'язання. Скориставшись твердженням 2.7.1, отримуємо, що існуватиме $\overline{A}_m^n = m^n$ всеможливих способів розподілу. ■

Завдання для самостійної роботи

Задача 2.7.5. Двійковий набір $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є впорядкованою n-вибіркою з повтореннями із множини $E_2 = \{0,1\}$. Скільки існує таких всеможливих наборів?

Задача 2.7.6. Скільки різних комбінацій сигналів можуть дати m світлофорів, якщо кожен світлофор може перебувати в трьох станах: червоному, жовтому і зеленому?

Задача 2.7.7. Скількома способами із повної колоди (52 карти) можна витягнути по одній карті кожної масті? Те ж саме за умови, що серед витягнутих карт немає жодної пари однакових, тобто двох тузів, двох королів і т.д.

Задача 2.7.8. У змаганнях беруть участь 10 спортсменів, за виступами яких спостерігають троє суддів. Після завершення змагань кожен суддя вказує найкращого на його думку спортсмена. Переможцем змагань оголошується той спортсмен, якого назвуть хоча б двоє суддів. У скількох випадках із всіх можливих переможець буде визначений?

Задача 2.7.9. Кожна буква азбуки Морзе – це послідовність крапок і тире. Скільки різних букв можна скласти, якщо використовувати для кожної із них:

1) 5 символів;
2) не більше, ніж 5 символів?

Задача 2.7.10. Скільки цілих невід'ємних чисел, менших за мільйон, можна скласти з цифр:

1) 7, 8, 9;
2) 7, 8, 9, 0?

2.8. Перестановки з повтореннями

*n-**перестановкою з повтореннями** називається будь-який спосіб впорядкування сукупності з n елементів, що містить n_1 однакових між собою елементів першого типу, n_2 однакових між собою елементів другого типу, ..., n_k однакових між собою елементів k-го типу, де $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.*

Нехай, наприклад, маємо сукупність $\{a, a, b, b\}$ ($n = 4$, $n_1 = 2$, $n_1 = 2$), тоді всеможливі 4-перестановки з повтореннями мають вигляд:

(a, a, b, b), (a, b, a, b), (a, b, b, a), (b, b, a, a), (b, a, b, a), (b, a, a, b).

Кількість різних n-перестановок з повтореннями, які можна утворити з n елементів, серед яких є n_1 однакових елементів першого типу, n_2 однакових елементів другого типу, ..., n_k однакових елементів k-го типу ($n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$), позначається $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ і обчислюється за формулою:

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}.$$

Число $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ має також і інше комбінаторне тлумачення.

Твердження 2.8.1. *$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ – кількість способів, якими можна розподілити n різних об'єктів (предметів) між k різними ящиками (особами) так, щоб до i-го ящика (i-й особі) потрапило (дісталося) рівно n_i об'єктів (предметів) ($i = \overline{1, k}$).*

Задача 2.8.1. Скільки різних "слів" можна отримати, переставляючи букви в слові "Міссісіпі"?

Розв'язання. Слово "Міссісіпі" містить однакові букви, тому шукані слова будуть перестановками з повтореннями. Маємо сукупність із 9 букв ($n = 9$), що містить 4 типи букв: перший тип – буква "і", $n_1 = 4$; другий тип – буква "с", $n_2 = 3$;

третій тип – буква "м", $n_3 = 1$; четвертий тип – буква "п", $n_4 = 1$. Тоді шуканих слів існуватиме $P_9(4,3,1,1) = \frac{9!}{4!\,3!} = 2520$. ■

Задача 2.8.2. Скільки різних "слів", у яких буква "р" йде безпосередньо після букви "о", можна отримати, переставляючи букви в слові "прототип"?

Розв'язання. За умовою, всі шукані слова повинні містити фрагмент "ор", тому його можна розглядати як єдине ціле (як одну букву). Тоді всі шукані слова будуть перестановками з повтореннями із 7 елементів – "ор", "п", "т", "о", "т", "и", "п", а тому їх кількість дорівнюватиме $P_7(1,2,2,1,1) = 1260$. ■

Задача 2.8.3. Скільки різних "слів", у яких 4 букви "о" не стоять одночасно поряд, можна отримати, переставляючи букви в слові "коловорот"?

Розв'язання. Очевидно, переставляючи букви в слові "коловорот", можна отримати $P_9(1,4,1,1,1,1) = 15120$ всеможливих слів.

Міркуючи аналогічно попередній задачі, знаходимо, що у $P_6(1,1,1,1,1,1) = P_6 = 6! = 720$ із них усі 4 букви "о" стоятимуть поряд.

Отже, за правилом різниці, шуканих слів існуватиме:

$$P_9(1,4,1,1,1,1) - P_6 = 15120 - 720 = 14400. \ ■$$

Задача 2.8.4. При грі в доміно чотири гравці ділять порівну 28 кісточок. Скількома різними способами вони можуть це зробити?

Розв'язання. Скориставшись твердженням 2.8.1, отримуємо, що існує $P_{28}(7,7,7,7) = \frac{28!}{(7!)^4}$ всеможливих способів розподілу. ■

Задача 2.8.5. Скількома способами можна розкласти 20 різних книг у книжкову шафу з 5 полицями, якщо кожна полиця може вмістити навіть усі 20 книг і є істотним порядок розташування книг на полицях?

Розв'язання. Додамо до 20 різних книг 4 однакові розділяючі предмети і розглянемо всеможливі перестановки отриманих об'єктів. Їх кількість дорівнюватиме

$$P_{24}(4,\underbrace{1,1,1,1,\ldots,1}_{20}) = \frac{24!}{4!} = 23!.$$

Кожна перестановка даватиме рівно один спосіб шуканого заповнення книжкової шафи: книги, що стоять до першого розділяючого предмета, – в такому ж порядку ставляться на першу полицю, між першим і другим – на другу, між другим і третім – на третю, між третім і четвертим – на четверту, книги, що стоять після четвертого розділяючого предмета – на п'яту полицю:

$$\underbrace{\ldots\ldots}_{I}\ \Delta\ \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{II}\ \Delta\ \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{III}\ \Delta\ \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{IV}\ \Delta\ \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{V}\ .$$

Зауважимо, що розділяючі предмети бралися однаковими, бо важливо лише, на яких місцях у перестановці вони знаходитимуться, а порядок їх розташування на цих місцях неістотний. ■

Задача 2.8.6. Скільки різних чотиризначних чисел можна скласти з цифр числа 123153?

Розв'язання. Задане число містить 4 унікальні цифри – 1, 2, 3, 5, дві з яких (1 і 5) повторюються в ньому двічі. Тому для утворення чотиризначних чисел можна використовувати:

1) чотири різні цифри ($C_4^4 = 1$ варіант: $1,2,3,5$);
2) чотири цифри, серед яких є пара однакових ($C_2^1 C_3^2 = 6$ варіантів: $1,1,2,3$ / $1,1,2,5$ / $1,1,3,5$ / $3,3,1,2$ / $3,3,1,5$ / $3,3,2,5$);
3) чотири цифри, серед яких є дві пари однакових ($C_2^2 = 1$ варіант: $1,1,3,3$).

В кожному з цих випадків можна буде скласти відповідно $N_1 = P_4$, $N_2 = 6P_4(2,1,1)$, $N_3 = P_4(2,2)$ чисел.

Отже, за правилом суми, всього можна скласти

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = P_4 + 6P_4(2,1,1) + P_4(2,2) = 24 + 6 \cdot 12 + 6 = 102$$

шуканих числа. ■

Завдання для самостійної роботи

Задача 2.8.7. Скільки різних "слів" можна отримати, переставляючи букви в слові "паралелепіпед"?

Задача 2.8.8. Скількома способами можна розставити білі фігури (двох тур, двох коней, двох слонів, короля і королеву) на першій лінії шахівниці, якщо дотримуватись шахового принципу при цьому не обов'язково?

Задача 2.8.9. Скільки різних "слів", у яких три букви "о" не стоять одночасно поряд, можна отримати, переставляючи букви в слові "болото"?

Задача 2.8.10. Скільки різних "слів", що містять фрагмент "три", можна отримати, переставляючи букви в слові "трикутник"? У скількох із них букви "у" та "н" не стоятимуть поряд?

Задача 2.8.11. Скількома способами троє картярів можуть розділити між собою неповну колоду (36 карт)? А розділити порівну? А розділити так, щоб перший отримав 10 карт, другий – 12, третій – 14?

Задача 2.8.12. Скільки різних "слів", у яких друга, п'ята і восьма букви – голосні, можна отримати, переставляючи букви в слові "арккосинус"?

Задача 2.8.13. Є 5 однакових смарагдів, 6 однакових рубінів і 7 однакових сапфірів. Скільки різних браслетів, що містять усі 18 каменів, можна виготовити?

Задача 2.8.14. Скількома способами можна одягнути 5 різних обручок на пальці правої руки, за винятком великого пальця?

2.9. Формула бінома Ньютона

Для будь-яких $n \in \mathbb{N}$ *і* $a, b \in \mathbb{R}$ *має місце рівність:*

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

$$\left((a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k\right). \qquad (2.9.1)$$

Рівність (2.9.1) називається ***формулою бінома Ньютона***. Ліва частина цієї рівності – біном (двочлен), права частина – розклад бінома (біноміальний розклад), C_n^k – коефіцієнти розкладу (біноміальні коефіцієнти).

Властивості розкладу бінома $(a+b)^n$ та його біноміальних коефіцієнтів.

1. *Кількість доданків у розкладі дорівнює $n+1$.*
2. *У кожному доданку сума степенів при a та b дорівнює n.*
3. $(k+1)$ *-й член розкладу ($k=\overline{0,n}$) має вигляд:*

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k .$$

4. *Коефіцієнти розкладу, рівновіддалені від його кінців, рівні між собою:*

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \; k=\overline{0,n} .$$

5. *Якщо n – парне, то середній член розкладу має найбільший біноміальний коефіцієнт. Якщо n – непарне, то є два "середні" члени розкладу з одним і тим самим найбільшим біноміальним коефіцієнтом.*
6. *Сума всіх біноміальних коефіцієнтів дорівнює 2^n:*

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n \qquad \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n\right). \qquad (2.9.2)$$

Рівність (2.9.2) отримується із формули (2.9.1) при $a=b=1$.

Оскільки C_n^k – кількість всеможливих k-елементних підмножин n-елементної множини, формула (2.9.2) має також наступне комбінаторне тлумачення.

Нехай A – скінченна множина потужності n. Тоді кількість її всеможливих підмножин, враховуючи порожню множину і саму множину A, дорівнює 2^n.

Задача 2.9.1. Довести рівність:

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0 \qquad \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0\right).$$

Розв'язання. Поклавши у формулі (2.9.1) $a = 1$, $b = -1$, очевидно, отримаємо потрібну рівність.

Зауважимо, що отриману рівність можна записати у вигляді:

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots ,$$

звідки отримуємо, що сума біноміальних коефіцієнтів C_n^k з парними k дорівнює сумі біноміальних коефіцієнтів C_n^k з непарними k. Враховуючи властивість 6, кожна з цих сум дорівнюватиме $\frac{1}{2} 2^n = 2^{n-1}$. ■

Задача 2.9.2. Довести рівність:

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{3n-2k} C_n^k = 10^n .$$

Розв'язання.

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{3n-2k} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} 2^{3n-3k+k} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} 2^{3(n-k)} 2^k C_n^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(2^3\right)^{n-k} 2^k C_n^k \overset{(2.9.1)}{=\!=\!=} (2^3 + 2)^n = 10^n ,$$

що і треба було довести. Таким чином, шукана рівність отримується шляхом безпосередньої підстановки у формулу бінома значень $a = 2^3$, $b = 2$. ■

Задача 2.9.3. Довести рівність:

$$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n = n2^{n-1} \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}\right). \qquad (2.9.3)$$

Розв'язання. Введемо у формулу бінома змінну, поклавши $b = x$:

$$(a + x)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} x + C_n^2 a^{n-2} x^2 \ldots + C_n^n x^n$$

$$\left((a+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} x^k \right). \tag{2.9.4}$$

Диференціюючи обидві частини цієї рівності по x, маємо:

$$n(a+x)^{n-1} = C_n^1 a^{n-1} + 2C_n^2 a^{n-2} x + \ldots + nC_n^n x^{n-1}$$

$$\left(n(a+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k a^{n-k} x^{k-1} \right).$$

Покладаючи у цій рівності $a=1$, $x=1$, очевидно, отримаємо рівність (2.9.3). ■

Задача 2.9.4. Довести рівність:

$$C_n^0 + 3C_n^1 + 5C_n^2 + 7C_n^3 + \ldots + (2n+1)C_n^n = (n+1)2^n$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} (2k+1)C_n^k = (n+1)2^n \right). \tag{2.9.5}$$

Розв'язання.

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)C_n^k = \sum_{k=0}^{n} (2kC_n^k + C_n^k) = \sum_{k=0}^{n} 2kC_n^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k =$$

$$= 2\sum_{k=0}^{n} kC_n^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2\sum_{k=1}^{n} kC_n^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k \overset{(2.9.3),\ (2.9.2)}{=\!=\!=\!=\!=\!=}$$

$$= 2\cdot n2^{n-1} + 2^n = n2^n + 2^n = (n+1)2^n,$$

що і треба було довести. Таким чином, рівність (2.9.5) отримується лінійною комбінацією рівностей (2.9.2) і (2.9.3). ■

Задача 2.9.5. Довести рівність:

$$C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \frac{1}{4}C_n^3 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1) \right). \tag{2.9.6}$$

Розв'язання. Візьмемо рівність (2.9.4), яка отримується введенням змінної у формулу бінома, і проінтегруємо її по x в межах від c до d:

$$\int_c^d (a+x)^n\,dx = \int_c^d \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} x^k\,dx\,,\quad \int_c^d (a+x)^n\,dx = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} \int_c^d x^k\,dx\,,$$

$$\frac{1}{n+1}(a+x)^{n+1}\Big|_c^d = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}\left(\frac{1}{k+1}x^{k+1}\Big|_c^d\right),$$

$$\frac{1}{n+1}\left((a+d)^{n+1}-(a+c)^{n+1}\right)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}\,\frac{1}{k+1}\left(d^{k+1}-c^{k+1}\right).$$

Покладаючи в отриманій рівності $a=1$, $c=0$, $d=1$, отримуємо рівність (2.9.6). Таким чином, шукана рівність отримується шляхом інтегрування по x в межах від 0 до 1 рівності (2.9.4) з подальшою підстановкою $a=1$. ■

Задача 2.9.6. Знайти середній член розкладу бінома $\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$.

Розв'язання. За умовою, $a=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$, $b=-\frac{1}{\sqrt{x}}=-x^{-\frac{1}{2}}$, $n=12$. Тоді розклад міститиме $n+1=13$ доданків і середнім членом буде сьомий, який дорівнює:

$$T_7=T_{6+1}=C_{12}^6\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{12-6}\left(-x^{-\frac{1}{2}}\right)^6=C_{12}^6x^2x^{-3}=C_{12}^6x^{-1}=\frac{924}{x}.\ ■$$

Задача 2.9.7. Знайти член розкладу бінома $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$, який містить x^5, якщо сума всіх біноміальних коефіцієнтів цього розкладу дорівнює 128.

Розв'язання. За умовою, $a=x\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}$, $b=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=x^{-\frac{1}{3}}$ і $2^n=128$, звідки $n=7$. Тоді загальний член розкладу матиме вигляд:

$$T_{k+1} = C_7^k \left(x^{\frac{3}{2}} \right)^{7-k} \left(x^{-\frac{1}{3}} \right)^k = C_7^k x^{\frac{3(7-k)}{2} - \frac{k}{3}} \qquad (k = \overline{0,7}) .$$

Розв'язуючи рівняння $\frac{3(7-k)}{2} - \frac{k}{3} = 5$, знаходимо, що $k = 3$. Отже, шуканим членом є четвертий, і він має вигляд:

$$T_4 = C_7^3 x^5 = 35x^5 . \ ■$$

Завдання для самостійної роботи

Задача 2.9.8. Довести рівності:

1) $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k C_n^k = 3^n$; 2) $\sum\limits_{k=0}^{2n} (-1)^k 10^k C_{2n}^k = 81^n$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k C_n^k = 0$; 4) $\sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1) C_n^k = n(n-1)2^{n-2}$;

5) $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 C_n^k = n(n+1)2^{n-2}$; 6) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{1}{n+1}$.

Задача 2.9.9. Сума біноміальних коефіцієнтів розкладу бінома $\left(x^2 + \frac{1}{x} \right)^n$ дорівнює 1024. Знайти член розкладу, що містить x^{11}.

Задача 2.9.10. Знайти значення x в розкладі бінома $(1 + x^2)^{12}$, якщо різниця між третім і другим членами розкладу дорівнює 54.

Задача 2.9.11. Знайти значення x в розкладі бінома $\left(\frac{1}{\sqrt[7]{x^2}} + x^{\lg \sqrt{x}} \right)^9$, якщо третій член розкладу дорівнює 36000.

2.10. Комбінаторні рівняння

Комбінаторне рівняння – рівняння, де невідома змінна x входить в індекси комбінаторних чисел. Щоб розв'язати таке рівняння, необхідно знайти всі ті значення x, при підстановці яких воно перетворюється в правильну рівність.

Задача 2.10.1. Розв'язати рівняння: $360C_{x-3}^{x-9} = 7A_{x-4}^{4}$.

Розв'язання. Знаходимо область допустимих значень (ОДЗ) змінної x з системи природних обмежень на індекси комбінаторних чисел:

$$\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ x-3 \ge 0 \\ x-9 \ge 0 \\ x-3 \ge x-9 \\ x-4 \ge 0 \\ x-4 \ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ x \ge 3 \\ x \ge 9 \\ x \ge 4 \\ x \ge 8 \end{cases} \Rightarrow \text{ОДЗ: } x \in \mathbb{Z}, x \ge 9.$$

Розглянемо задане рівняння та розпишемо в ньому відповідні комбінаторні числа:

$$360C_{x-3}^{x-9} = 7A_{x-4}^{4},$$

$$360\frac{(x-3)!}{(x-9)!((x-3)-(x-9))!} = 7\frac{(x-4)!}{((x-4)-4)!},$$

$$360\frac{(x-3)!}{(x-9)!6!} = 7\frac{(x-4)!}{(x-8)!}.$$

Оскільки факторіал більшого числа завжди можна виразити через факторіал меншого ($n! = (n-1)!n = (n-2)!(n-1)n = \ldots$), маємо:

$$360\frac{(x-9)!(x-8)(x-7)(x-6)(x-5)(x-4)(x-3)}{(x-9)!6!} =$$

$$= 7\frac{(x-8)!(x-7)(x-6)(x-5)(x-4)}{(x-8)!}.$$

Скоротивши у кожному з дробів однакові факторіали в чисельнику та знаменнику, отримуємо:

$$360\frac{(x-8)(x-7)(x-6)(x-5)(x-4)(x-3)}{6!}=$$

$$=7(x-7)(x-6)(x-5)(x-4).$$

Обидві частини отриманої рівності можна поділити на $(x-7)(x-6)(x-5)(x-4)$, бо, згідно з ОДЗ, цей вираз завжди відмінний від нуля. Зробивши це, маємо:

$$\frac{(x-8)(x-3)}{2}=7.$$

Розв'язуємо отримане квадратне рівняння:

$$(x-8)(x-3)=14,$$

$$x^2-11x+10=0,$$

$$\begin{cases} x_1+x_2=11 \\ x_1x_2=10 \end{cases} \Rightarrow \quad x_1=1,\ x_2=10.$$

Оскільки $x_1=1\notin$ ОДЗ, а $x_2=10\in$ ОДЗ, то розв'язком вихідного рівняння є $x=10$.

Відповідь: $x=10$. ■

Завдання для самостійної роботи

Задача 2.10.2. Розв'язати рівняння:

1) $30C_{x-3}^{6}=19A_{x-4}^{4}$;
2) $x\overline{C}_{3}^{x+1}=14C_{x}^{x-2}$;
3) $23A_{x}^{4}=24(A_{x+1}^{3}-C_{x}^{x-4})$;
4) $1/C_{4}^{x}-1/C_{5}^{x}=1/C_{6}^{x}$;
5) $\overline{C}_{3}^{x-2}=4x-10$.

ТЕМА 3. РЕКУРЕНТНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

3.1. Основні поняття та термінологія

Одним із способів, яким можна задавати деяку числову послідовність $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, є рекурентне співвідношення (часто також вживають термін "рекурентне рівняння").

Рекурентне рівняння (РР) *– рівняння, що описує правило для знаходження наступних членів числової послідовності через попередні члени цієї послідовності. При цьому одночасно задається відповідна кількість стартових членів послідовності, які називають* ***початковими умовами****.*

Приклад РР та відповідних початкових умов для нього:

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, \ \ n = 2,3,\ldots, \tag{3.1.1}$$

$$a_0 = 2, \ a_1 = 7. \tag{3.1.2}$$

Розв'язком *РР із заданими початковими умовами називається числова послідовність, що задовольняє це рівняння та задані початкові умови.*

Кожне РР разом із заданими початковими умовами визначає єдину послідовність, що є його розв'язком.

Щоб розв'язати РР із заданими початковими умовами, потрібно знайти формулу, яка дозволятиме безпосередньо (без використання попередніх членів послідовності) обчислювати будь-який потрібний член цієї послідовності, тобто, інакше кажучи, знайти формулу для обчислення a_n на основі n.

Наприклад, безпосередньою перевіркою можна переконатися, що розв'язком задачі (3.1.1), (3.1.2) буде послідовність, яка задається формулою:

$$a_n = 3 \cdot 2^n - (-1)^n, \ \ n = 0,1,2,\ldots. \tag{3.1.3}$$

Порядком *РР називається різниця між найбільшим і найменшим індексами членів послідовності, що входять у це рівняння.*

Наприклад, порядок РР (3.1.1) дорівнює $n-(n-2)=2$.

Порядок РР фактично вказує на потрібну кількість початкових умов для цього РР.

Розв'язок РР k-го порядку називається ***загальним****, якщо він залежить від k довільних сталих $C_1, C_2, \ldots, C_k$ і підбором цих сталих можна задовольняти будь-які задані початкові умови.*

Для того, щоб РР k-го порядку визначало конкретну числову послідовність, необхідно задати k початкових умов:

$$a_0 = A_0,\ a_1 = A_1,\ \ldots,\ a_{k-1} = A_{k-1},$$

де $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$ – відомі (задані) значення.

Початкові умови якраз і дозволятимуть однозначно визначити сталі $C_1, C_2, \ldots, C_k$ із загального розв'язку.

Наприклад, загальний розв'язок РР (3.1.1) має вигляд:

$$a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2(-1)^n,\ \ n = 0,1,2,\ldots,$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі.

Нескладно визначити, що для виконання заданих початкових умов (3.1.2) сталі C_1 і C_2 повинні набувати значень $C_1 = 3$ і $C_2 = -1$, а тому розв'язок РР (3.1.1) із початковими умовами (3.1.2) справді дається формулою (3.1.3).

3.2. Лінійні однорідні рекурентні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Рекурентне рівняння вигляду

$$a_n = r_1 a_{n-1} + r_2 a_{n-2} + \ldots + r_k a_{n-k}, \tag{3.2.1}$$

де $r_1, r_2, \ldots, r_k$ – дійсні числа, $r_k \neq 0$, називається ***лінійним однорідним РР k-го порядку зі сталими коефіцієнтами*** *(ЛОРРСК).*

Наприклад, $a_n = 5a_{n-1} + 4a_{n-2}$ – ЛОРРСК 2-го порядку.

Характеристичним рівнянням *(ХР) для ЛОРРСК називається рівняння, що отримується з нього підстановкою $a_n = \lambda^n$, де $\lambda \neq 0$.*

Знайдемо характеристичне рівняння для ЛОРРСК (3.2.1):

$$\lambda^n = r_1\lambda^{n-1} + r_2\lambda^{n-2} + \ldots + r_k\lambda^{n-k}.$$

Поділивши на λ^{n-k} ($\lambda^{n-k} \neq 0$, бо $\lambda \neq 0$), отримуємо:

$$\lambda^k = r_1\lambda^{k-1} + r_2\lambda^{k-2} + \ldots + r_k. \qquad (3.2.2)$$

(3.2.2) – характеристичне рівняння для ЛОРРСК (3.2.1). Воно є алгебраїчним рівнянням k-го степеня, його корені можуть бути як простими, так і кратними.

Теорема про загальний розв'язок ЛОРРСК у випадку простих коренів ХР. *Якщо усі корені ХР (3.2.2) є простими, тобто рівняння (3.2.2) має k різних розв'язків $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, то загальний розв'язок $a_n^{\text{з.о.}}$ ЛОРРСК (3.2.1) має вигляд:*

$$a_n^{\text{з.о.}} = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \ldots + C_k\lambda_k^n \equiv \sum_{j=1}^{k} C_j\lambda_j^n,$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_k$ – довільні сталі.

Теорема про загальний розв'язок ЛОРРСК у випадку кратних коренів ХР. *Якщо ХР (3.2.2) має l $(l < k)$ різних коренів $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ з кратностями $k_1, k_2, \ldots, k_l$ відповідно, де $k_1 + k_2 + \ldots + k_l = k$, то загальний розв'язок $a_n^{\text{з.о.}}$ ЛОРРСК (3.2.1) має вигляд:*

$$a_n^{\text{з.о.}} = (C_1^{(1)} + C_2^{(1)}n + C_3^{(1)}n^2 + \ldots + C_{k_1}^{(1)}n^{k_1-1})\lambda_1^n +$$

$$+ (C_1^{(2)} + C_2^{(2)}n + C_3^{(2)}n^2 + \ldots + C_{k_2}^{(2)}n^{k_2-1})\lambda_2^n + \ldots +$$

$$+ (C_1^{(l)} + C_2^{(l)}n + C_3^{(l)}n^2 + \ldots + C_{k_l}^{(l)}n^{k_l-1})\lambda_l^n \equiv$$

$$\equiv \sum_{j=1}^{l} (C_1^{(j)} + C_2^{(j)}n + C_3^{(j)}n^2 + \ldots + C_{k_j}^{(j)}n^{k_j-1})\lambda_j^n,$$

де $C_i^{(j)}$ ($j = \overline{1,l}$, $i = \overline{1,k_j}$) – довільні сталі.

Зауваження. Якщо деякий корінь λ_j, є простим, тобто $k_j = 1$, то відповідний доданок суми із загального розв'язку в останній теоремі матиме вигляд

$$C_1^{(j)}\lambda_j^n \equiv C_j\lambda_j^n, \quad \text{де } C_j \text{ – довільна стала.}$$

Задача 3.2.1. Розв'язати РР із заданими початковими умовами:

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}\,,\ n = 2,3,\ldots,$$
$$a_0 = 1\,,\ a_1 = 3\,.$$

Розв'язання. Маємо ЛОРРСК 2-го порядку.

а) Знайдемо загальний розв'язок $a_n^{\text{з.о.}}$ цього ЛОРРСК.

Складаємо його ХР, роблячи підстановку $a_n = \lambda^n$, де $\lambda \neq 0$:

$$\lambda^n = \lambda^{n-1} + 6\lambda^{n-2}$$

Поділивши на λ^{n-2}, отримуємо:

$$\lambda^2 = \lambda + 6 \ \Rightarrow\ \lambda_1 = -2\,,\ \lambda_2 = 3\,.$$

Маємо випадок простих коренів ХР, тому загальний розв'язок розглядуваного ЛОРРСК має вигляд:

$$a_n^{\text{з.о.}} = C_1(-2)^n + C_2 3^n\,,\ \ n = 0,1,2,\ldots,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

б) Використовуючи задані початкові умови, знайдемо значення сталих C_1, C_2.

Зі знайденої формули загального розв'язку отримуємо, що

$$a_0 = C_1 + C_2\,,\ a_1 = -2C_1 + 3C_2\,.$$

Таким чином, враховуючи задані початкові умови ($a_0 = 1$, $a_1 = 3$), маємо:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -2C_1 + 3C_2 = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0, \quad C_2 = 1\,.$$

Отже, розв'язком вихідного ЛОРРСК із заданими початковими умовами є послідовність, що визначається формулою:

$$a_n = 3^n\,, \quad n = 0,1,2,\ldots \ \blacksquare$$

Задача 3.2.2. Розв'язати РР із заданими початковими умовами:

$$a_{n+3} = 7a_{n+2} - 16a_{n+1} + 12a_n\,, \quad n = 0,1,2,\ldots,$$
$$a_0 = 1\,,\ a_1 = 7\,,\ a_2 = 23\,.$$

Розв'язання. Маємо ЛОРРСК 3-го порядку.

а) Знайдемо загальний розв'язок $a_n^{\text{з.о.}}$ цього ЛОРРСК.

Складаємо його ХР, роблячи підстановку $a_n = \lambda^n$, де $\lambda \neq 0$:

$$\lambda^{n+3} = 7\lambda^{n+2} - 16\lambda^{n+1} + 12\lambda^n,$$

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0.$$

Як відомо з алгебри, корені цього ХР повинні бути дільниками числа 12. По черзі перебираючи ці дільники ($\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \ \pm 12$), виявляємо, що $\lambda = 2$ є коренем ХР. Поділивши "стовпчиком" $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12$ на $\lambda - 2$, отримуємо $\lambda^2 - 5\lambda + 6$. Таким чином, маємо:

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0,$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = 2, \quad \lambda_3 = 3.$$

Маємо випадок кратних коренів ХР:

$\lambda_1' = 2$, кратність цього кореня $k_1' = 2$,

$\lambda_2' = 3$, кратність цього кореня $k_2' = 1$,

тому загальний розв'язок розглядуваного ЛОРРСК має вигляд:

$$a_n^{\text{з.о.}} = (C_1 + C_2 n)2^n + C_3 3^n, \ \ n = 0,1,2,\ldots,$$

де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі.

б) Використовуючи задані початкові умови, знайдемо значення сталих C_1, C_2, C_3.

Зі знайденої формули загального розв'язку отримуємо, що

$$a_0 = C_1 + C_3, \ a_1 = 2C_1 + 2C_2 + 3C_3, \ a_2 = 4C_1 + 8C_2 + 9C_3.$$

Таким чином, враховуючи задані початкові умови ($a_0 = 1$, $a_1 = 7$, $a_2 = 23$), маємо:

$$\begin{cases} C_1 + C_3 = 1 \\ 2C_1 + 2C_2 + 3C_3 = 7 \\ 4C_1 + 8C_2 + 9C_3 = 23 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2, \quad C_2 = 3, \quad C_3 = -1.$$

Отже, розв'язком вихідного ЛОРРСК із заданими початковими умовами є послідовність, що визначається формулою:

$$a_n = (2 + 3n)2^n - 3^n, \quad n = 0,1,2,\ldots. \ \blacksquare$$

Завдання для самостійної роботи

Задача 3.2.3. Розв'язати РР із заданими початковими умовами:

1) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, $n = 0,1,2,\ldots$,
$a_0 = 1$, $a_1 = 1$;

2) $a_{n+1} = -2a_n + 3a_{n-1}$, $n = 1,2,3,\ldots$,
$a_0 = 5$, $a_1 = -3$;

3) $a_{n+2} = 5a_n - 4a_{n-2}$, $n = 2,3,4,\ldots$,
$a_0 = 5$, $a_1 = -5$, $a_2 = 5$, $a_3 = -17$;

4) $a_{n+2} = -a_{n+1} + 2a_n$, $n = 0,1,2,\ldots$,
$a_0 = 3$, $a_1 = 9$;

5) $a_n = 4a_{n-2}$, $n = 2,3,4,\ldots$,
$a_0 = 1$, $a_1 = 6$;

6) $a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n - 4a_{n-1}$, $n = 1,2,3,\ldots$,
$a_0 = 5$, $a_1 = 1$, $a_2 = 5$;

7) $a_{n+1} = 10a_{n-1} - 9a_{n-3}$, $n = 3,4,5,\ldots$,
$a_0 = 6$, $a_1 = 2$, $a_2 = 22$, $a_3 = 2$.

Задача 3.2.4. Розв'язати РР із заданими початковими умовами:

1) $a_{n+2} = -20a_{n+1} - 100a_n$, $n = 0,1,2,\ldots$,
$a_0 = -2$, $a_1 = 10$;

2) $a_{n+3} = 8a_{n+1} - 16a_{n-1}$, $n = 1,2,3,\ldots$,
$a_0 = -3$, $a_1 = -2$, $a_2 = 4$, $a_3 = -8$;

3) $a_n = -18a_{n-1} - 81a_{n-2}$, $n = 2,3,4,\ldots$,
$a_0 = 1$, $a_1 = 9$;

4) $a_{n+2} = -3a_{n+1} + 4a_{n-1}$, $n = 1,2,3,\ldots$,
$a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 6$;

5) $a_{n+4} = 2a_{n+2} - a_n$, $n = 0,1,2,\ldots$,
$a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = 3$.

3.3. Лінійні неоднорідні рекурентні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Рекурентне рівняння вигляду

$$a_n = r_1 a_{n-1} + r_2 a_{n-2} + \ldots + r_k a_{n-k} + f(n), \qquad (3.3.1)$$

де $r_1, r_2, \ldots, r_k$ *– дійсні числа,* $r_k \neq 0$*,* $f(n)$ *– відома (задана) функція, називається* ***лінійним неоднорідним РР*** k ***-го порядку зі сталими коефіцієнтами*** *(ЛНРРСК).*

Наприклад, $a_n = 2a_{n-1} + n + 1$ – ЛНРРСК 1-го порядку, а $a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-2} + n2^n$ – ЛНРРСК 2-го порядку.

Теорема про загальний розв'язок ЛНРРСК. *Загальний розв'язок* $a_n^{\text{з.н.}}$ *ЛНРРСК (3.3.1) дорівнює сумі будь-якого часткового розв'язку* $a_n^{\text{ч.н.}}$ *цього ЛНРРСК і загального розв'язку* $a_n^{\text{з.о.}}$ *відповідного ЛОРРСК:*

$$a_n^{\text{з.н.}} = a_n^{\text{з.о.}} + a_n^{\text{ч.н.}}.$$

Розглянемо випадок, який часто зустрічається на практиці, коли

$$f(n) = (B_0 + B_1 n + B_2 n^2 + \ldots + B_p n^p) z^m, \qquad (3.3.2)$$

де $B_0, B_1, \ldots, B_p$ та z – задані дійсні числа.

Теорема про частковий розв'язок ЛНРРСК у випадку неоднорідності вигляду (3.3.2). *Якщо функція* $f(n)$ *у ЛНРРСК (3.3.1) має вигляд (3.3.2) і характеристичне рівняння відповідного ЛОРРСК має* l $(l \leq k)$ *різних коренів* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ *з кратностями* $k_1, k_2, \ldots, k_l$ *відповідно, де* $k_1 + k_2 + \ldots + k_l = k$*, то ЛНРРСК (3.3.1) має частковий розв'язок* $a_n^{\text{ч.н.}}$ *вигляду:*

$$a_n^{\text{ч.н.}} = n^{\gamma}(D_0 + D_1 n + D_2 n^2 + \ldots + D_p n^p) z^m,$$

де

$\gamma = 0$*, якщо* $z \neq \lambda_i$ *для всіх* $i = \overline{1, l}$*,*

і

$\gamma = k_j$*, якщо* $z = \lambda_j$ *при деякому* j

($\gamma = 0$*, якщо число* z *не є коренем ХР, інакше* γ *рівне кратності*

кореня), а $D_0, D_1, \ldots, D_p$ – деякі конкретні дійсні числа.

Задача 3.3.1. Розв'язати РР із заданими початковими умовами:

$$a_n = 2a_{n-1} + 8a_{n-2} + (2n+3)2^{n+1}, \quad n = 2,3,\ldots,$$
$$a_0 = 2,\ a_1 = 2.$$

Розв'язання. Маємо ЛНРРСК 2-го порядку.

а) Знайдемо загальний розв'язок $a_n^{\text{з.о.}}$ відповідного ЛОРРСК:

$$a_n = 2a_{n-1} + 8a_{n-2}.$$

Складаючи і розв'язуючи ХР, отримуємо:

$$\lambda^2 = 2\lambda + 8 \Rightarrow \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 4.$$

Таким чином,

$$a_n^{\text{з.о.}} = C_1(-2)^n + C_2 4^n, \text{ де } C_1, C_2 \text{ – довільні сталі.}$$

б) Знайдемо частковий розв'язок $a_n^{\text{ч.н.}}$ вихідного ЛНРРСК.

За умовою, маємо: $f(n) = (2n+3)2^{n+1} \Rightarrow p = 1,\ z = 2$.

$z \neq \lambda_1$ і $z \neq \lambda_2$, тому $\gamma = 0$ і частковий розв'язок вихідного ЛНРРСК треба шукати у вигляді:

$$a_n^{\text{ч.н.}} = n^0(D_0 + D_1 n)2^{n+1} = (D_0 + D_1 n)2^{n+1},$$

де D_0, D_1 – деякі конкретні дійсні числа, які треба знайти.

Для знаходження D_0, D_1 підставимо $a_n^{\text{ч.н.}}$ у вихідне ЛНРРСК:

$$(D_0 + D_1 n)2^{n+1} = 2(D_0 + D_1(n-1))2^n +$$
$$+ 8(D_0 + D_1(n-2))2^{n-1} + (2n+3)2^{n+1}.$$

Поділивши обидві частини на 2^{n+1} та виконуючи елементарні перетворення, маємо:

$$(D_0 + D_1 n) = (D_0 + D_1(n-1)) + 2(D_0 + D_1(n-2)) + (2n+3),$$
$$D_0 + D_1 n = D_0 + D_1 n - D_1 + 2D_0 + 2D_1 n - 4D_1 + 2n + 3,$$
$$D_0 + D_1 n = 3D_0 + 3D_1 n - 5D_1 + 2n + 3,$$
$$5D_1 - 2D_0 - 2D_1 n - 2n - 3 = 0,$$
$$(5D_1 - 2D_0 - 3) + (-2D_1 - 2)n = 0,$$

$$\begin{cases} 5D_1 - 2D_0 - 3 = 0 \\ -2D_1 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad D_0 = -4,\ D_1 = -1.$$

Таким чином,

$$a_n^{\text{ч.н.}} = (-4-n)2^{n+1} = -(n+4)2^{n+1}.$$

в) Знайдемо загальний розв'язок $a_n^{\text{з.н.}}$ вихідного ЛНРРСК:

$$a_n^{\text{з.н.}} = a_n^{\text{з.о.}} + a_n^{\text{ч.н.}} =$$

$$= C_1(-2)^n + C_2 4^n - (n+4)2^{n+1},\ \ n = 0,1,2,\dots,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

г) Використовуючи задані початкові умови, знайдемо значення сталих C_1, C_2.

Зі знайденої формули загального розв'язку $a_n^{\text{з.н.}}$ отримуємо, що

$$a_0 = C_1 + C_2 - 8,\ a_1 = -2C_1 + 4C_2 - 20.$$

Враховуючи задані початкові умови ($a_0 = 2$, $a_1 = 2$), маємо:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - 8 = 2 \\ -2C_1 + 4C_2 - 20 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 10 \\ -2C_1 + 4C_2 = 22 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 3,\ C_2 = 7.$$

Отже, розв'язком вихідного ЛНРРСК із заданими початковими умовами є послідовність, що визначається формулою:

$$a_n = 3\cdot(-2)^n + 7\cdot 4^n - (n+4)2^{n+1},\quad n = 0,1,2,\dots.\ \blacksquare$$

Задача 3.3.2. Розв'язати РР із заданими початковими умовами:

$$a_n = a_{n-2} + n + 1,\quad n = 2,3,\dots,$$

$$a_0 = 5,\ a_1 = -1.$$

Розв'язання. Маємо ЛНРРСК 2-го порядку.

а) Знайдемо загальний розв'язок $a_n^{\text{з.о.}}$ відповідного ЛОРРСК:

$$a_n = a_{n-2}.$$

Складаючи і розв'язуючи ХР, отримуємо:

$$\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1.$$

Таким чином,

$$a_n^{\text{з.о.}} = C_1(-1)^n + C_2 1^n = C_1(-1)^n + C_2,$$
де C_1, C_2 – довільні сталі.

б) Знайдемо частковий розв'язок $a_n^{\text{ч.н.}}$ вихідного ЛНРРСК.

За умовою, маємо: $f(n) = n + 1 = (n+1)1^n \Rightarrow p = 1,\ z = 1$.

$z = \lambda_2 = 1$, тому $\gamma = k_2 = 1$ і частковий розв'язок вихідного ЛНРРСК треба шукати у вигляді
$$a_n^{\text{ч.н.}} = n^1(D_0 + D_1 n)1^n = n(D_0 + D_1 n),$$
де D_0, D_1 – деякі конкретні дійсні числа, які треба знайти.

Для знаходження D_0, D_1 підставимо $a_n^{\text{ч.н.}}$ у вихідне ЛНРРСК:

$$n(D_0 + D_1 n) = (n-2)(D_0 + D_1(n-2)) + n + 1,$$
$$nD_0 + n^2 D_1 = nD_0 - 2D_0 + n^2 D_1 - 2nD_1 - 2nD_1 + 4D_1 + n + 1,$$
$$4nD_1 + 2D_0 - 4D_1 - n - 1 = 0,$$
$$(2\mathrm{D}_0 - 4D_1 - 1) + (4D_1 - 1)n = 0,$$
$$\begin{cases} 2D_0 - 4D_1 - 1 = 0 \\ 4D_1 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad D_0 = 1,\ D_1 = \frac{1}{4}.$$

Таким чином,
$$a_n^{\text{ч.н.}} = n(1 + \frac{1}{4}n) = n + \frac{1}{4}n^2.$$

в) Знайдемо загальний розв'язок $a_n^{\text{з.н.}}$ вихідного ЛНРРСК:
$$a_n^{\text{з.н.}} = a_n^{\text{з.о.}} + a_n^{\text{ч.н.}} = C_1(-1)^n + C_2 + n + \frac{1}{4}n^2,\quad n = 0,1,2,\ldots,$$
де C_1, C_2 – довільні сталі.

г) Використовуючи задані початкові умови, знайдемо значення сталих C_1, C_2.

Зі знайденої формули загального розв'язку $a_n^{\text{з.н.}}$ отримуємо, що
$$a_0 = C_1 + C_2,\ a_1 = -C_1 + C_2 + \frac{5}{4}.$$

Враховуючи задані початкові умови ($a_0 = 5,\quad a_1 = -1$), маємо:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 5 \\ -C_1 + C_2 + \dfrac{5}{4} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 5 \\ -C_1 + C_2 = -\dfrac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow C_1 = \frac{29}{8},\ C_2 = \frac{11}{8}.$$

Отже, розв'язком вихідного ЛНРРСК із заданими початковими умовами є послідовність, що визначається формулою:

$$a_n = \frac{29}{8}(-1)^n + \frac{11}{8} + n + \frac{1}{4}n^2, \quad n = 0,1,2,\dots \ ■$$

Завдання для самостійної роботи

Задача 3.3.3. Розв'язати РР із заданими початковими умовами:

1) $a_{n+1} = a_n + 20a_{n-1} + 1 - 20n,\ n = 1,2,3,\dots,$
   $a_0 = 1,\ a_1 = -7$;
2) $a_{n+1} = a_n + 20a_{n-1} - 6 \cdot 4^n,\ n = 1,2,3,\dots,$
   $a_0 = 3,\ a_1 = 21$;
3) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n + 10,\ n = 0,1,2,\dots,$
   $a_0 = 5,\ a_1 = 6$;
4) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n + 2n - 9,\ n = 0,1,2,\dots,$
   $a_0 = -4,\ a_1 = -2$;
5) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n + 24 \cdot (-1)^n,\ n = 0,1,2,\dots,$
   $a_0 = 2,\ a_1 = -1$;
6) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n + (12n - 5)(-1)^n,\ n = 0,1,2,\dots,$
   $a_0 = -1,\ a_1 = -1$.

Задача 3.3.4. Розв'язати РР із заданими початковими умовами:

1) $a_{n+2} = 22a_{n+1} - 121a_n + (n - 20)10^n,\ n = 0,1,2,\dots,$
   $a_0 = -2,\ a_1 = -1$;
2) $a_{n+2} = -20a_{n+1} - 100a_n + 121,\ n = 0,1,2,\dots,$
   $a_0 = 0,\ a_1 = 1$;

3) $a_{n+2} = -20a_{n+1} - 100a_n + 121n - 99,\ \ n = 0,1,2,...,$
$a_0 = -3,\ \ a_1 = 10$;

4) $a_{n+2} = -20a_{n+1} - 100a_n + (-9)^n,\ \ n = 0,1,2,...,$
$a_0 = 2,\ \ a_1 = -9$;

5) $a_{n+2} = -20a_{n+1} - 100a_n + (n-18)(-9)^n,\ \ n = 0,1,2,...,$
$a_0 = 2,\ \ a_1 = -19$.

Задача 3.3.5. Розв'язати РР із заданими початковими умовами:

1) $a_{n+1} = a_n + 20a_{n-1} + (18n-8)\cdot 5^n,\ \ n = 1,2,3,...,$
$a_0 = 3,\ \ a_1 = -3$;

2) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n - 2^{n+1},\ \ n = 0,1,2,...,$
$a_0 = 1,\ \ a_1 = 6$;

3) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n + (8-4n)2^n,\ \ n = 0,1,2,...,$
$a_0 = 3,\ \ a_1 = 8$.

Задача 3.3.6. Розв'язати РР із заданими початковими умовами:

1) $a_{n+2} = 22a_{n+1} - 121a_n + 242\cdot 11^n,\ \ n = 0,1,2,...,$
$a_0 = 1,\ \ a_1 = 11$;

2) $a_{n+2} = -20a_{n+1} - 100a_n + 200(-10)^n,\ \ n = 0,1,2,...,$
$a_0 = -2,\ \ a_1 = 0$.

ТЕМА 4. МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА

4.1. Алгебра висловлювань

Висловлюванням *називається будь-яке твердження, про яке з достовірністю можна сказати, є воно істинним чи хибним.*

Наприклад, твердження "0>3" і "паралелограм має 4 сторони" є висловлюваннями (перше – хибне, друге – істинне), а твердження "завтра буде дощ" не є висловлюванням.

В математичній логіці не цікавляться конкретним змістом висловлювань, важливо лише, є вони істинними чи хибними. Якщо висловлювання істинне, йому кладуть у відповідність 1, якщо хибне – 0. Логічні значення "істина" та "хиба" часто також позначають не 1 і 0, а буквами T і F відповідно (першими буквами від англійських слів "True" і "False").

Позначатимемо надалі висловлювання малими латинськими літерами $p, q, r, s, t, \ldots$.

Над висловлюваннями можна виконувати наступні спеціальні логічні операції – заперечення ($\overline{}$), диз'юнкцію ($\vee$), кон'юнкцію ($\wedge$), імплікацію ($\rightarrow$) та еквіваленцію ($\sim$).

Запереченням *висловлювання* p *називається висловлювання* $\overline{p}$*, яке істинне, коли* p *– хибне, і хибне, коли* p *– істинне.*

Кон'юнкцією *висловлювань* p *і* q *називається висловлювання* $p \wedge q$*, що є істинним лише тоді, коли обидва висловлювання* p *і* q *є істинними.*

Диз'юнкцією *висловлювань* p *і* q *називається висловлювання* $p \vee q$*, що є істинним, коли істинним є хоча б одне із висловлювань* p *і* q*.*

Імплікацією *висловлювань* p *і* q *називається висловлювання* $p \rightarrow q$*, що є хибним лише тоді, коли* p *– істинне, а* q *– хибне.*

***Еквіваленцією** висловлювань p і q називається висловлювання $p \sim q$, що є істинним, коли істиннісні значення висловлювань p і q однакові.*

Таблиці істинності цих операцій мають вигляд:

p	$\overline{p}$
0	1
1	0

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \sim q$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Запереченню відповідає логічна зв'язка "***НЕ***", кон'юнкції – "***І***", диз'юнкції – "***АБО***", імплікації – "***ЯКЩО …, ТО***", еквіваленції – "***ТОДІ І ТІЛЬКИ ТОДІ, КОЛИ***".

Легко помітити, що, у випадку позначень логічних значень "істина" та "хиба" саме через 1 і 0,

$$p \wedge q = \min\{p, q\}, \ p \vee q = \max\{p, q\}.$$

Використовуючи введені операції, на основі простих (елементарних) висловлювань $p, q, r, s, t, \ldots$ можна будувати більш складні. Наприклад, $(\overline{p} \vee q) \sim (r \rightarrow (s \wedge t))$ – складне висловлювання (так звана формула алгебри висловлювань), що побудоване на основі п'яти елементарних висловлювань p, q, r, s, t.

Мають місце наступні властивості операцій над висловлюваннями – так звані ***закони алгебри логіки*** (0 і 1 в них позначають відповідно хибне та істинне висловлювання):

1.1. $p \vee q = q \vee p$

1.2. $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$

1.3. $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

1.4. $p \vee p = p$

1.5. $p \vee 0 = p$

1.6. $p \vee 1 = 1$

1.7. $p \vee \overline{p} = 1$

2.1. $p \wedge q = q \wedge p$

2.2. $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$

2.3. $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

2.4. $p \wedge p = p$

2.5. $p \wedge 0 = 0$

2.6. $p \wedge 1 = p$

2.7. $p \wedge \overline{p} = 0$

1.8. $\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$ 1.8. $\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$

1.9. $p \vee (p \wedge q) = p$ 1.9. $p \vee (p \wedge q) = p$

3.1. $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$, $\overline{\overline{p}} = p$

3.2. $p \to q = \overline{p} \vee q$

3.3. $p \sim q = (p \to q) \wedge (q \to p)$

3.4. $p \vee (\overline{p} \wedge q) = p \vee q$,

$p \wedge (\overline{p} \vee q) = p \wedge q$

Закони алгебри логіки перевіряються за допомогою таблиць істинності та надалі використовуються для еквівалентного перетворення формул з метою їх спрощення.

Тавтологія *– складне висловлювання, що є істинним при будь-яких істиннісних значеннях елементарних висловлювань, з яких воно складається.*

Протиріччя *– складне висловлювання, що є хибним при будь-яких істиннісних значеннях елементарних висловлювань, з яких воно складається.*

Задача 4.1.1. Довести рівність:

$$p \to q = \overline{q} \to \overline{p}.$$

Розв'язання. Можливі 2 способи розв'язання.

Перший спосіб **–** порівняння таблиць істинності:

p	q	$p \to q$	$\overline{q}$	$\overline{p}$	$\overline{q} \to \overline{p}$
0	0	**1**	1	1	**1**
0	1	**1**	0	1	**1**
1	0	**0**	1	0	**0**
1	1	**1**	0	0	**1**

Другий спосіб **–** еквівалентні перетворення з використанням законів алгебри логіки:

$$\overline{q} \to \overline{p} \overset{3.2}{=} \overline{\overline{q}} \vee \overline{p} \overset{3.1}{=} q \vee \overline{p} \overset{1.1}{=} \overline{p} \vee q \overset{3.2}{=} p \to q. \ \blacksquare$$

Задача 4.1.2. Довести, що висловлювання

$$(p \wedge q) \to (r \vee p)$$

є тавтологією.

Розв'язання. Як і у попередній задачі, доведення здійснимо двома способами:

p	q	r	$p \wedge q$	$r \vee p$	$(p \wedge q) \to (r \vee p)$
0	0	0	0	0	**1**
0	0	1	0	1	**1**
0	1	0	0	0	**1**
0	1	1	0	1	**1**
1	0	0	0	1	**1**
1	0	1	0	1	**1**
1	1	0	1	1	**1**
1	1	1	1	1	**1**

$$(p \wedge q) \to (r \vee p) \overset{3.2}{=} \overline{(p \wedge q)} \vee (r \vee p) \overset{2.8}{=}$$

$$= (\overline{p} \vee \overline{q}) \vee (r \vee p) \overset{1.1}{=} (\overline{q} \vee \overline{p}) \vee (p \vee r) \overset{1.2}{=}$$

$$= ((\overline{q} \vee \overline{p}) \vee p) \vee r \overset{1.2}{=} (\overline{q} \vee (\overline{p} \vee p)) \vee r \overset{1.1}{=}$$

$$= (\overline{q} \vee (p \vee \overline{p})) \vee r \overset{1.7}{=} (\overline{q} \vee 1) \vee r \overset{1.6}{=} 1 \vee r \overset{1.1,\,1.6}{=} 1. \ \blacksquare$$

Завдання для самостійної роботи

Задача 4.1.3. Відомо, що $p \sim q = 0$. Знайти істиннісні значення висловлювань $p \sim \overline{q}$ і $\overline{p} \sim q$.

Задача 4.1.4. Відомо, що $q \to r = 1$. З'ясувати, чи досить цього, щоб встановити істиннісне значення висловлювання:
1) $p \wedge (q \to r)$; 2) $p \vee (q \to r)$.

Задача 4.1.5. Відомо, що $p = 1$, $p \to q = 1$, $\overline{r} \to \overline{q} = 1$. Знайти істиннісне значення висловлювання r.

Задача 4.1.6. Відомо, що $p \to q = 1$. Що можна сказати про істиннісне значення висловлювання $(\overline{p} \wedge q) \sim (p \vee q)$?

Задача 4.1.7. Побудувати таблицю істинності заданого складного висловлювання. З'ясувати, чи є воно тавтологією або протиріччям.

1) $(\overline{p} \vee q) \sim (q \wedge p)$;

2) $(p \sim (\overline{q} \to r)) \wedge \overline{p}$.

Задача 4.1.8. За допомогою таблиць істинності і методом еквівалентних перетворень довести, що формули

1) $p \to (q \vee p)$;

2) $(p \wedge q) \to p$;

3) $p \to (q \to p)$;

4) $p \to (q \to (p \wedge q))$;

5) $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$;

6) $(q \to p) \to ((q \to r) \to (q \to (p \wedge r)))$;

7) $(q \to r) \to ((p \to r) \to ((q \vee p) \to r)))$

є тавтологіями.

4.2. Логіка предикатів

n-місним предикатом від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *називається функція* $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *областю визначення якої є деяка множина* $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, *а областю значень – множина* $E_2 = \{0,1\}$.

Область визначення предиката називають його предметною областю.

Приклади предикатів: $p(x) =$ "x – просте число", $x \in \mathbb{N}$; $q(x, y) =$ "$x + y = 5$", $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Предикат не є висловлюванням, він перетворюється у висловлювання лише тоді, колі всі його аргументи набувають конкретних значень.

Позначивши $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $M = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, будь-який n-місний предикат $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ з предметною областю $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ можна формально розглядати як одномісний предикат $p(x)$ з предметною областю M.

Оскільки при конкретних значеннях змінних будь-який предикат стає висловлюванням, то на предикати природним чином поширюють операції заперечення, кон'юнкції, диз'юнкції, імплікації та еквіваленції. Розглянемо, наприклад, предикати $p(x) = "x$ – просте число", $q(x) = "x > 3"$. Тоді $\overline{p}(x) = "x$ – число, що не є простим", $\overline{q}(x) = "x \leq 3"$, $r(x) = p(x) \wedge q(x) = "x$ – просте число, що більше $3"$.

Нехай $p(x)$ – одномісний предикат з предметною областю M. Висловлювання "для всіх x із M $p(x)$ істинне" і "існує таке x із M, для якого $p(x)$ істинне" позначають відповідно $\forall x\, p(x)$ і $\exists x\, p(x)$. (Множина M не входить у позначення і повинна бути зрозумілою із контексту). Символи $\forall$ і $\exists$ називаються відповідно квантором загальності і квантором існування. Перехід від предиката $p(x)$ до виразу $\forall x\, p(x)$ або $\exists x\, p(x)$ називається навішуванням квантора на змінну x (або на предикат $p(x)$).

У випадку багатомісного предиката $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ квантори можна навішувати в будь-якому порядку як на всі, так і на частину змінних (при цьому на кожну змінну повинно бути навішано не більше одного квантора). Змінна, на яку навішаний квантор, називається ***зв'язаною***, а незв'язана змінна називається ***вільною***. Вільна змінна – це звичайна змінна, яка може набувати довільних допустимих значень із предметної області. Якщо квантори навішані на всі змінні предиката, він стає висловлюванням, інакше – перетворюється у предикат меншої розмірності. Розглянемо, наприклад, деякий тримісний предикат $p(x_1, x_2, x_3)$, тоді $\exists x_2 \forall x_1 \exists x_3\, p(x_1, x_2, x_3)$ – висловлювання, а $\forall x_3 \exists x_1\, p(x_1, x_2, x_3)$ – одномісний предикат від вільної змінної x_2.

Мають місце наступні закони логіки предикатів:

1. $\overline{\forall x\, p(x)} \sim \exists x\, \overline{p}(x)$, $\overline{\exists x\, p(x)} \sim \forall x\, \overline{p}(x)$ (закони де Моргана)
2. $\forall x\, (p(x) \wedge q(x)) \sim \forall x\, p(x) \wedge \forall x\, q(x)$
3. $\exists x\, (p(x) \vee q(x)) \sim \exists x\, p(x) \vee \exists x\, q(x)$
4. $\exists x\, (p(x) \wedge q(x)) \rightarrow \exists x\, p(x) \wedge \exists x\, q(x)$
5. $\forall x\, (p(x) \vee q(x)) \leftarrow \forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x)$

6. Однакові квантори можна переставляти, тобто тавтологіями будуть, наприклад, формули $\forall x\, \forall y\ p(x,y) \sim \forall y\, \forall x\ p(x,y)$ і $\exists x\, \exists y\ p(x,y) \sim \exists y\, \exists x\ p(x,y)$.
7. Різні квантори, взагалі кажучи, переставляти не можна (наприклад, якщо $p(x,y) =$ " x ділиться націло на y ", де $(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, то $\exists x\, \forall y\ p(x,y) \neq \forall y\, \exists x\ p(x,y)$).

За допомогою предикатів, операцій квантування та законів логіки предикатів може бути формалізована мова математичних означень, тверджень та доведень.

Задача 4.2.1. Ввівши відповідні предикати, формалізувати велику теорему Ферма: "Для будь-якого цілого $n > 2$ не існує натуральних чисел x, y, z, що задовольняють рівняння $x^n + y^n = z^n$ ".

Розв'язання. Введемо предикати: $p(x) =$ " x – натуральне число", $x \in \mathbb{N}$; $q(n) =$ " $n > 2$ ", $n \in \mathbb{N}$; $r(x,y,z,n) =$ " $x^n + y^n = z^n$ ", $(x,y,z,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Тоді теорема Ферма має вигляд:

$$\forall x\, \forall y\, \forall z\, \forall n\ [(p(x) \wedge p(y) \wedge p(z) \wedge q(n)) \to \bar{r}(x,y,z,n)].\ ■$$

Задача 4.2.2. Ввівши відповідні предикати, формалізувати:

1) означення обмеженої та необмеженої функцій;
2) означення парної функції і функції, що не є парною.

Розв'язання.

1) Як відомо, *функція* $f(x)$ *називається* ***обмеженою***, *якщо існує стала* $C > 0$, *така, що* $|f(x)| \le C$ *для будь-якого* $x \in D_f$. Введемо двомісний предикат $p(x,C) =$ " $|f(x)| \le C$ ", $(x,C) \in D_f \times \mathbb{R}_+$. Тоді формалізоване означення обмеженої функції має вигляд: $\exists C\, \forall x\ p(x,C)$. Заперечуючи це означення і скориставшись законами де Моргана, отримуємо формалізоване означення необмеженої функції:

$$\overline{\exists C\, \forall x\ p(x,C)} = \forall C\ \overline{\forall x\ p(x,C)} = \forall C\, \exists x\ \bar{p}(x,C),$$

де $\bar{p}(x,C) =$ " $|f(x)| > C$ ".

Отже, *функція* $f(x)$ *називається* ***необмеженою***, *якщо для будь-якої сталої* $C > 0$ *існує* $x \in D_f$, *таке, що* $|f(x)| > C$. ■

2) Як відомо, *функція* $f(x)$ *називається* ***парною***, *якщо для будь-якого* $x \in D_f$: $-x \in D_f$ *і* $f(-x) = f(x)$. Введемо одномісні предикати $p(x) = "-x \in D_f"$, $q(x) = "f(-x) = f(x)"$, де $x \in D_f$. Тоді означення парної функції має вигляд: $\forall x\,(p(x) \wedge q(x))$. Заперечуючи його, отримуємо означення функції, що не є парною:

$$\overline{\forall x\,(p(x) \wedge q(x))} = \exists x\,(\overline{p(x) \wedge q(x)}) = \exists x\,(\overline{p}(x) \vee \overline{q}(x)),$$

де $\overline{p}(x) = "-x \notin D_f"$, $\overline{q}(x) = "f(-x) \neq f(x)"$.

Отже, *функція* $f(x)$ ***не є парною***, *якщо існує* $x \in D_f$, *таке, що* $-x \notin D_f$ *або* $f(-x) \neq f(x)$. ■

Завдання для самостійної роботи

Задача 4.2.3. Ввести одномісні предикати на відповідних областях і записати з їх допомогою наступні висловлювання:

1) будь-яке натуральне число, що ділиться на 12, ділиться на 2 і 4;
2) жителі Швейцарії обов'язково володіють французькою, італійською або німецькою мовами;
3) на відрізку [0,1] неперервна функція зберігає знак або набуває нульового значення.

Задача 4.2.4. Ввівши відповідні предикати, формалізувати означення:

1) непарної функції;
2) нескінченно малої функції;
3) границі числової послідовності;
4) границі функції в точці;
5) неперервності функції в точці.

Сформулювати означення, які є запереченнями цих означень.

4.3. Булеві функції та способи їх задання

Змінна x, *що набуває значень із множини* $E_2 = \{0,1\}$, *називається* ***логічною змінною*** *або* ***булевою змінною***.

Впорядкований набір $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *де* $x_i \in E_2$, $i = \overline{1,n}$, *називається* ***двійковим набором*** *і позначається* $\tilde{x}^n$.

Кількість всеможливих двійкових наборів $\tilde{x}^n$ *дорівнює* 2^n, *причому вони, по суті, є зображенням десяткових чисел* $0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1$ *у двійковій системі числення.*

Нехай, наприклад, $n = 2$, тоді існує $2^2 = 4$ двійкових набори, які, по суті, зображають у двійковій системі числення десяткові числа $0, 1, 2, 3$:

x_1	x_2	
0	0	$00_2 = 0_{10}$
0	1	$01_2 = 1_{10}$
1	0	$10_2 = 2_{10}$
1	1	$11_2 = 3_{10}$

Нагадаємо, що формула переводу двійкового числа в десяткове має вигляд:

$$(a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n)_2 = (a_n \cdot 2^0 + a_{n-1} \cdot 2^1 + \ldots + a_2 \cdot 2^{n-2} + a_1 \cdot 2^{n-1})_{10}.$$

Булева функція $y = f(\tilde{x}^n)$ *– правило або закон, за яким кожному двійковому набору* $\tilde{x}^n$ *ставиться у відповідність одне цілком визначене значення* $y \in E_2$.

Кількість всеможливих булевих функцій від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *дорівнює* 2^{2^n}.

Найпростіший спосіб задання булевої функції – **табличний** (так званою **таблицею істинності**). При цьому в таблиці спочатку послідовно виписують всеможливі двійкові набори (в порядку зростання відповідних десяткових чисел, котрі вони зображають), а потім навпроти кожного двійкового набору вказують відповідне значення булевої функції.

Приклад таблиці істинності:

x_1	x_2	x_3	$f(\widetilde{x}^3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Оскільки двійкові набори завжди виписуються єдиним чином – в порядку зростання відповідних десяткових чисел, то, очевидно, для задання булевої функції достатньо просто вказати її стовпчик значень. Такий спосіб задання булевої функції називається **векторним заданням**. Наприклад, векторне задання вищенаведеної булевої функції $f(\widetilde{x}^3)$ має вигляд: $f(\widetilde{x}^3) = (10111001)$.

Найважливіший спосіб задання булевої функції – **аналітичний** (**формулою**). Як і в елементарній математиці, формули будуються на основі деякого набору елементарних функцій.

*Булеві функції однієї та двох змінних, що задаються наступними таблицями істинності, вважаються **елементарними**:*

x	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

x_1	x_2	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0

Позначення і назви цих функцій:

1) $f_1(x) \equiv 0$ – ***функція тотожний нуль***

2) $f_2(x) \equiv 1$ – ***функція тотожна одиниця***

3) $f_3(x) = x$ – ***тотожна функція***

4) $f_4(x) = \overline{x}$ – ***функція заперечення*** x

5) $f_5(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2 = x_1 \,\&\, x_2 = x_1 \cdot x_2 = x_1 x_2$ – ***кон'юнкція*** x_1 ***і*** x_2

   ► **Як запам'ятати:** $x_1 \wedge x_2 = \min\{x_1, x_2\}$

   Для компактності записів кон'юнкцію змінних x_1 і x_2, зазвичай, записуватимемо у вигляді $x_1 x_2$ або $x_1 \cdot x_2$.

6) $f_6(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$ – ***диз'юнкція*** x_1 ***і*** x_2

   ► **Як запам'ятати:** $x_1 \vee x_2 = \max\{x_1, x_2\}$

7) $f_7(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ – ***додавання за модулем 2*** x_1 ***і*** x_2

   ► **Як запам'ятати:** *функція набуває значення* 1 *лише тоді, коли значення аргументів різні*

8) $f_8(x_1, x_2) = x_1 \sim x_2$ – ***еквіваленція*** x_1 ***і*** x_2

   ► **Як запам'ятати:** *функція набуває значення* 1 *лише тоді, коли значення аргументів однакові*

9) $f_9(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$ – ***імплікація*** **(** x_1 ***імплікує*** x_2 **)**

   ► **Як запам'ятати:** $1 \to 0 = 0$, *а в решті випадків результатом є* 1

10) $f_{10}(x_1, x_2) = x_1 / x_2$ – ***штрих Шеффера*** x_1 ***і*** x_2

   ► **Як запам'ятати:** $x_1 / x_2 = \overline{x_1 x_2} = \overline{\min\{x_1, x_2\}}$

11) $f_{11}(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2$ – ***стрілка Пірса*** x_1 ***і*** x_2

   ► **Як запам'ятати:** $x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2} = \overline{\max\{x_1, x_2\}}$

Індуктивне означення ***формули****:*

1) 0, 1, *будь-який символ змінної є формулою;*
2) *якщо* U *і* V *– формули, то вирази* $(\overline{U})$, $(\overline{V})$, $(U \wedge V)$, $(U \vee V)$, $(U \oplus V)$, $(U \sim V)$, $(U \to V)$, (U / V), $(U \downarrow V)$ *теж є формулами;*
3) *не існує інших формул, окрім побудованих згідно з 1) та 2).*

Множина операцій $\{\,\overline{\ }\,, \wedge, \vee, \oplus, \sim, \to, /, \downarrow\}$ із позначень елементарних функцій називається множиною **логічних зв'язок**.

Для спрощення запису формул, зокрема, зменшення кількості дужок, приймають наступні домовленості:

1) зовнішні дужки у формулах опускаються;
2) зв'язка $\overline{}$ (заперечення) вважається найсильнішою;
3) зв'язка $\wedge$ (кон'юнкція) вважається сильнішою за будь-яку іншу двомісну зв'язку.

Кожна формула реалізує (задає) деяку булеву функцію.

Формули U і V називаються ***еквівалентними*** *($U = V$), якщо вони реалізують одну і ту ж булеву функцію.*

Нехай задано деякі булеві функції $f_0(\tilde{x}^m)$, $f_1(\tilde{x}^n)$, ..., $f_m(\tilde{x}^n)$, тоді вираз $\Phi(\tilde{x}^n) = f_0(f_1(\tilde{x}^n), f_2(\tilde{x}^n), \ldots, f_m(\tilde{x}^n))$ називається ***суперпозицією*** *булевих функцій $f_0(\tilde{x}^m)$, $f_1(\tilde{x}^n)$, ..., $f_m(\tilde{x}^n)$.*

Булеві функції $f_1(\tilde{x}^n)$ і $f_2(\tilde{x}^n)$ називаються ***рівними*** *($f_1(\tilde{x}^n) = f_2(\tilde{x}^n)$), якщо на всеможливих двійкових наборах $\tilde{x}^n$ значення цих функцій співпадають.*

При перетвореннях формул користуються наступними **основними еквівалентностями**:

1) $x \circ y = y \circ x$ $(\circ \in \{\wedge, \vee, \oplus, \sim, /, \downarrow\})$ – *комутативності*;
2) $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$ $(\circ \in \{\wedge, \vee, \oplus, \sim\})$ – *асоціативності*;
3) $x(y \vee z) = xy \vee xz$, $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$,
   $x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$ – *дистрибутивності*;
4) $\overline{x \vee y} = \bar{x}\,\bar{y}$, $\overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y}$ – *правила де Моргана*;
5) $x \vee xy = x$, $x(x \vee y) = x$ – *правила поглинання*;
6) $\bar{0} = 1$, $\bar{1} = 0$, $\bar{\bar{x}} = x$;
7) $x \vee \bar{x}y = x \vee y$, $x(\bar{x} \vee y) = xy$;
8) $x \cdot 0 = 0$, $x \cdot 1 = x$, $x \cdot x = x$, $x \cdot \bar{x} = 0$;
9) $x \vee 0 = x$, $x \vee 1 = 1$, $x \vee x = x$, $x \vee \bar{x} = 1$;
10) $x \oplus y = \bar{x}y \vee x\bar{y}$, $x \oplus y = (x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})$,
   $x \oplus y = \overline{x \sim y}$,

$x \oplus 0 = x$, $x \oplus 1 = \bar{x}$, $x \oplus x = 0$, $x \oplus \bar{x} = 1$;

11) $x \sim y = \bar{x}\bar{y} \vee xy$, $x \sim y = (\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y})$,

$x \sim y = (x \to y)(y \to x)$,

$x \sim y = \overline{x \oplus y}$, $x \sim y = (x \oplus y) \oplus 1$,

$x \sim 0 = \bar{x}$, $x \sim 1 = x$, $x \sim x = 1$, $x \sim \bar{x} = 0$;

12) $x \to y = \bar{x} \vee y$,

$x \to 0 = \bar{x}$, $x \to 1 = 1$, $x \to x = 1$, $x \to \bar{x} = \bar{x}$;

13) $x / y = \overline{xy}$, $x / y = \bar{x} \vee \bar{y}$,

$x/0 = 1$, $x/1 = \bar{x}$, $x/x = \bar{x}$, $x/\bar{x} = 1$;

14) $x \downarrow y = \overline{x \vee y}$, $x \downarrow y = \bar{x}\bar{y}$,

$x \downarrow 0 = \bar{x}$, $x \downarrow 1 = 0$, $x \downarrow x = \bar{x}$, $x \downarrow \bar{x} = 0$.

В правильності цих еквівалентностей можна переконатися шляхом порівняння таблиць істинності відповідних функцій.

Задача 4.3.1. Побудувати таблицю істинності булевої функції, що реалізується наступною формулою:

$$f = (x \to \bar{y}) \sim (y \downarrow \bar{z}).$$

Розв'язання. Дана формула реалізує булеву функцію трьох змінних $f(x, y, z)$. Для підрахунку стовпчика значень цієї функції необхідно послідовно обчислювати стовпчики значень підформул $\bar{y}$, $A = x \to \bar{y}$, $\bar{z}$, $B = y \downarrow \bar{z}$ та $A \sim B$:

x	y	z	$\bar{y}$	$A = x \to \bar{y}$	$\bar{z}$	$B = y \downarrow \bar{z}$	$f(x,y,z) = A \sim B$
0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1

■

Задача 4.3.2. З'ясувати, чи є правильним співвідношення:

$$x \oplus (y \to z) = (x \oplus y) \to (x \oplus z).$$

Розв'язання. По суті, необхідно перевірити рівність двох булевих функцій: $f(x,y,z)=x\oplus(y\to z)$ і $g(x,y,z)=$ $=(x\oplus y)\to(x\oplus z)$. Позначимо підформули – $A=y\to z$, $B=x\oplus y$, $C=x\oplus z$ – і побудуємо таблиці істинності цих функцій:

x	y	z	A	$f(x,y,z)=x\oplus A$	B	C	$g(x,y,z)=B\to C$
0	0	0	1	**1**	0	0	**1**
0	0	1	1	**1**	0	1	**1**
0	1	0	0	**0**	1	0	**0**
0	1	1	1	**1**	1	1	**1**
1	0	0	1	**0**	1	1	**1**
1	0	1	1	**0**	1	0	**0**
1	1	0	0	**1**	0	1	**1**
1	1	1	1	**0**	0	0	**1**

Оскільки стовпчики значень функцій $f(x,y,z)$ і $g(x,y,z)$ не співпадають, то $f(x,y,z)\neq g(x,y,z)$, тобто

$$x\oplus(y\to z)\neq(x\oplus y)\to(x\oplus z).\ \blacksquare$$

Задача 4.3.3. За функціями $f(x_1,x_2)$ і $g(x_3,x_4)$, які задані векторно, побудувати векторне задання функції h:

$f(x_1,x_2)=(1011)$, $g(x_3,x_4)=(1001)$, $h(x_2,x_3,x_4)=f(g(x_4,x_2),x_3)$.

Розв'язання. Побудуємо таблиці істинності функцій $f(x_1,x_2)$ і $g(x_3,x_4)$:

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

x_3	x_4	$g(x_3,x_4)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$h(x_2,x_3,x_4)$ – функція трьох змінних, яка, за умовою, є суперпозицією функцій $f(x_1,x_2)$ і $g(x_3,x_4)$. Обчислимо значення функції $h(x_2,x_3,x_4)$ на всеможливих двійкових наборах (x_2,x_3,x_4), використовуючи формулу, якою вона задана, та таблиці істинності функцій $f(x_1,x_2)$ і $g(x_3,x_4)$, і заповнимо таблицю істинності функції $h(x_2,x_3,x_4)$:

x_2	x_3	x_4	$h(x_2,x_3,x_4)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$h(0,0,0)=f(g(0,0),0)=f(1,0)=1$$
$$h(0,0,1)=f(g(1,0),0)=f(0,0)=1$$
$$h(0,1,0)=f(g(0,0),1)=f(1,1)=1$$
$$h(0,1,1)=f(g(1,0),1)=f(0,1)=0$$
$$h(1,0,0)=f(g(0,1),0)=f(0,0)=1$$
$$h(1,0,1)=f(g(1,1),0)=f(1,0)=1$$
$$h(1,1,0)=f(g(0,1),1)=f(0,1)=0$$
$$h(1,1,1)=f(g(1,1),1)=f(1,1)=1$$

Отже, векторне задання фунції $h(x_2,x_3,x_4)$ має вигляд:

$$h(x_2,x_3,x_4)=(11101101).\ \blacksquare$$

Задача 4.3.4. Використовуючи основні еквівалентності, довести еквівалентність формул U і V:

1) $U=\overline{x}\,\overline{z}\vee xy\vee x\overline{z}$, $V=xy\vee\overline{z}$;

2) $U=(x\to y)\to((x\overline{y})\oplus(x\sim\overline{y}))$, $V=(x\vee y)(\overline{x}\vee\overline{y})$.

Розв'язання. Необхідно показати, що еквівалентними перетвореннями одну формулу можна звести до іншої або кожну з них можна звести до одного і того ж виразу.

1) $U=\overline{x}\,\overline{z}\vee xy\vee x\overline{z}=\overline{x}\,\overline{z}\vee x\overline{z}\vee xy=\overline{z}\,\overline{x}\vee\overline{z}x\vee xy=$

$=\overline{z}\,(\overline{x}\vee x)\vee xy=\overline{z}\,(x\vee\overline{x})\vee xy=\overline{z}\cdot 1\vee xy=\overline{z}\vee xy=$

$=xy\vee\overline{z}=V$, тобто $U=V$. $\blacksquare$

2) $U=(x\to y)\to((x\overline{y})\oplus(x\sim\overline{y}))=$

$=(\overline{x}\vee y)\to((x\overline{y})\oplus(x\sim\overline{y}))=(\overline{\overline{x}\vee y})\vee((x\overline{y})\oplus(x\sim\overline{y}))=$

$=(\overline{\overline{x}}\,\overline{y})\vee((x\overline{y})\oplus(x\sim\overline{y}))=x\overline{y}\vee((x\overline{y})\oplus(x\sim\overline{y}))=$

$=x\overline{y}\vee((x\overline{y})\oplus(\overline{x\oplus\overline{y}}))=x\overline{y}\vee((x\overline{y})\oplus((x\oplus\overline{y})\oplus 1))=$

$=x\overline{y}\vee(x\overline{y}\oplus x\oplus\overline{y}\oplus 1)=x\overline{y}\vee(x\overline{y}\oplus\overline{y}\oplus x\oplus 1)=$

$=x\overline{y}\vee(\overline{y}x\oplus\overline{y}\oplus x\oplus 1)=x\overline{y}\vee(\overline{y}(x\oplus 1)\oplus(x\oplus 1))=$

$=x\overline{y}\vee((x\oplus 1)(\overline{y}\oplus 1))=x\overline{y}\vee(\overline{x}\,\overline{\overline{y}})=x\overline{y}\vee\overline{x}y,$

$$V = (x \vee y)(\overline{x} \vee \overline{y}) = (x \vee y)\overline{x} \vee (x \vee y)\overline{y} =$$
$$= (x\overline{x} \vee y\overline{x}) \vee (x\overline{y} \vee y\overline{y}) = 0 \vee y\overline{x} \vee x\overline{y} \vee 0 = y\overline{x} \vee x\overline{y} =$$
$$= x\overline{y} \vee y\overline{x} = x\overline{y} \vee \overline{x}y,$$ тому $U = V$. ■

Завдання для самостійної роботи

Задача 4.3.5. Побудувати таблиці істинності булевих функцій, що реалізуються наступними формулами:

1) $f = (x \sim \overline{y}) \oplus (\overline{y} \vee z)$;
2) $f = (\overline{\overline{x}_1 / x_2}) \downarrow x_3$;
3) $f = \overline{x}\overline{z} \to (y \oplus xz)$;
4) $f = ((x / y) \downarrow z) \to \overline{x}$;
5) $f = \overline{(\overline{x} \oplus y) \vee (x / \overline{z})} \downarrow (x \sim y)$.

Задача 4.3.6. З'ясувати, чи є правильними співвідношення:

1) $x \to (y \sim z) = (x \to y) \sim (x \to z)$;
2) $x \vee (y \oplus z) = (x \vee y) \oplus (x \vee z)$;
3) $x \to (y \vee z) = (x \to y) \vee (x \to z)$;
4) $x \downarrow (y / z) = (x \downarrow y) / (x \downarrow z)$;
5) $x / (y \downarrow z) = (x / y) \downarrow (x / z)$.

Задача 4.3.7. За функціями $f(x_1, x_2)$ і $g(x_3, x_4)$, які задані векторно, побудувати векторне задання функції h:

1) $f(x_1, x_2) = (1011)$, $g(x_3, x_4) = (0111)$,
$h(x_1, x_2, x_3) = g(x_3, f(x_1, g(\overline{x}_3, x_2)))$;
2) $f(x_1, x_2) = (0110)$, $g(x_3, x_4) = (1101)$,
$h(x_1, x_2, x_3) = g(x_2 \sim x_3, f(x_3, x_1 \oplus 1))$.

Задача 4.3.8. Булева функція $m(\widetilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3 = (00010111)$ називається **функцією голосування** або **мажоритарною функцією** (оскільки значення цієї функції на кожному двійковому наборі дорівнює значенню, котре мають більшість аргументів набору). Використовуючи основні еквівалентності, довести, що виконуються співвідношення:

1) $m(x_1, x_1, x_2) = x_1$;

2) $m(x_1, \bar{x}_1, x_2) = x_2$;

3) $\overline{m(x_1, x_2, x_3)} = m(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$.

Задача 4.3.9. Використовуючи основні еквівалентності, довести еквівалентність формул U і V:

1) $U = (x \downarrow y)(x \sim y)$, $V = y \downarrow x$;

2) $U = x \to (xy \to ((x \to y) \to y)z)$, $V = y \to (x \to z)$.

4.4. Істотні та фіктивні змінні булевих функцій

Раніше введене означення рівності булевих функцій не дає змоги порівнювати булеві функції, що залежать від різної кількості змінних. Вказаний недолік можна усунути, ввівши поняття істотних і фіктивних змінних.

Двійкові набори вигляду

$$\tilde{\alpha}^n = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \ldots, \alpha_n),$$

$$\tilde{\tilde{\alpha}}^n = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \ldots, \alpha_n)$$

*називаються **сусідніми за** i **-тою координатою**.*

Наприклад, (0,0,1) і (1,0,1) – сусідні за першою координатою, (1,0,0) і (1,1,0) – за другою, (1,0,0) і (1,0,1) – за третьою.

*Змінна x_i називається **істотною** змінною булевої функції $f(\tilde{x}^n)$, якщо існують два сусідні за i-тою координатою двійкові набори $\tilde{\alpha}^n$ і $\tilde{\tilde{\alpha}}^n$, такі, що $f(\tilde{\alpha}^n) \neq f(\tilde{\tilde{\alpha}}^n)$.*

*Змінна, що не є істотною, називається **фіктивною**.*

*Дві булеві функції називаються **рівними**, якщо кожну з них можна отримати з іншої шляхом вилучення чи введення фіктивних змінних.*

Наступне твердження дає ефективний метод знаходження фіктивних змінних за допомогою еквівалентних перетворень.

Якщо булева функція задається формулою і в результаті еквівалентних перетворень у цій формулі зникає деяка змінна, то ця змінна є фіктивною змінною булевої функції.

Задача 4.4.1. Визначити істотні та фіктивні змінні заданої булевої функції. Вилучити фіктивні змінні.

$$f(\widetilde{x}^3) = (11111010).$$

Розв'язання. Будуємо таблицю істинності заданої функції:

x_1	x_2	x_3	$f(\widetilde{x}^3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

1) Досліджуємо змінну x_1. Порівнюємо значення функції на кожній парі сусідніх за першою координатою двійкових наборів:

$(0,0,0)$ і $(1,0,0)$: $f(0,0,0) = f(1,0,0)$;

$(0,0,1)$ і $(1,0,1)$: $f(0,0,1) \neq f(1,0,1)$ $\Rightarrow$ x_1 – істотна змінна.

2) Досліджуємо змінну x_2. Порівнюємо значення функції на кожній парі сусідніх за другою координатою двійкових наборів:

$(0,0,0)$ і $(0,1,0)$: $f(0,0,0) = f(0,1,0)$;

$(0,0,1)$ і $(0,1,1)$: $f(0,0,1) = f(0,1,1)$;

$(1,0,0)$ і $(1,1,0)$: $f(1,0,0) = f(1,1,0)$;

$(1,0,1)$ і $(1,1,1)$: $f(1,0,1) = f(1,1,1)$.

Таким чином, x_2 – фіктивна змінна.

3) Досліджуємо змінну x_3. Порівнюємо значення функції на кожній парі сусідніх за третьою координатою двійкових наборів:

$(0,0,0)$ і $(0,0,1)$: $f(0,0,0) = f(0,0,1)$;

$(0,1,0)$ і $(0,1,1)$: $f(0,1,0) = f(0,1,1)$;

$(1,0,0)$ і $(1,0,1)$: $f(1,0,0) \neq f(1,0,1)$ $\Rightarrow$ x_3 – істотна змінна.

Виконаємо тепер процедуру **вилучення фіктивної змінної** x_2. Для цього в таблиці істинності функції $f(\tilde{x}^3)$ викреслимо стовпчик фіктивної змінної x_2 і всі ті рядки, що містять у цьому стовпчику одиниці. Отримаємо таблицю істинності деякої функції двох змінних $g(x_1, x_3)$.

x_1	x_2	x_3	$f(\tilde{x}^3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

x_1	x_3	$g(x_1, x_3)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Функція $g(x_1, x_3)$ отримується із функції $f(\tilde{x}^3)$ шляхом вилучення фіктивної змінної x_2, і навпаки, функція $f(\tilde{x}^3)$ отримуватиметься із функції $g(x_1, x_3)$ шляхом введення фіктивної змінної x_2. Тоді, за означенням, $f(\tilde{x}^3) = g(x_1, x_3)$.

Очевидно, $g(x_1, x_3) = x_1 / x_3$. Таким чином, $f(\tilde{x}^3) = x_1 / x_3$.

Відповідь: x_1, x_3 – істотні змінні, x_2 – фіктивна змінна, $f(\tilde{x}^3) = x_1 / x_3$. ■

Задача 4.4.2. Еквівалентними перетвореннями визначити фіктивні змінні наступних булевих функцій:

1) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \to (x_1 \vee x_2))\, x_3 \to x_3$;

2) $f(\tilde{x}^3) = (((x_3 \to x_2) \vee x_1)(x_2 \to x_1)\, x_3 \bar{x}_1) \oplus x_3$.

Розв'язання.

1) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \to (x_1 \vee x_2))\, x_3 \to x_3 = (\bar{x}_1 \vee (x_1 \vee x_2))\, x_3 \to$
$\to x_3 = ((\bar{x}_1 \vee x_1) \vee x_2)\, x_3 \to x_3 = (1 \vee x_2)\, x_3 \to x_3 =$

$= 1 \cdot x_3 \to x_3 = x_3 \to x_3 = 1$.

Отже, x_1, x_2, x_3 – фіктивні змінні булевої функції $f(\widetilde{x}^3)$. ■

2) $f(\widetilde{x}^3) = (((x_3 \to x_2) \vee x_1)(x_2 \to x_1)\, x_3\bar{x}_1) \oplus x_3 =$

$= (((\bar{x}_3 \vee x_2) \vee x_1)(\bar{x}_2 \vee x_1)\, x_3\bar{x}_1) \oplus x_3 =$

$= ((\bar{x}_3 \vee x_2 \vee x_1)(\bar{x}_2 x_3 \bar{x}_1 \vee x_1 x_3 \bar{x}_1)) \oplus x_3 =$

$= (\bar{x}_3 \vee x_2 \vee x_1)(\bar{x}_2 x_3 \bar{x}_1 \vee 0) \oplus x_3 = (\bar{x}_3 \vee x_2 \vee x_1)\bar{x}_2 x_3 \bar{x}_1 \oplus x_3 =$

$= (\bar{x}_3 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_1 \vee x_2 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_1 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_1) \oplus x_3 = (0 \vee 0 \vee 0) \oplus x_3 =$

$= 0 \oplus x_3 = x_3$.

Отже, x_1 і x_2 – фіктивні змінні булевої функції $f(\widetilde{x}^3)$. ■

Завдання для самостійної роботи

Задача 4.4.3. Визначити істотні та фіктивні змінні заданої булевої функції. Вилучити фіктивні змінні.

1) $f(\widetilde{x}^2) = (x_1 \vee x_2) \to \bar{x}_2$;
2) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \oplus x_2)(x_1 \downarrow x_2)$;
3) $f(\widetilde{x}^3) = (00111100)$;
4) $f(\widetilde{x}^3) = (10111011)$;
5) $f(\widetilde{x}^3) = (11110000)$;
6) $f(\widetilde{x}^3) = (11001100)$;
7) $f(\widetilde{x}^4) = (0011110011000011)$.

Задача 4.4.4. Еквівалентними перетвореннями визначити фіктивні змінні наступних булевих функцій:

1) $f(\widetilde{x}^2) = (x_1 \vee x_2) \to \bar{x}_2$;
2) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \oplus x_2)(x_1 \downarrow x_2)$;
3) $f(\widetilde{x}^3) = ((x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_3) \to (\bar{x}_1 \to x_2\bar{x}_3))x_2$.

4.5. Розклад булевих функцій за частиною змінних

Вираз x^{σ}, *де* $\sigma \in E_2$, *називається* ***первинним термом*** *змінної* x. *Вираз* x^{σ} *обчислюється наступним чином:* $x^0 = \overline{x}$, $x^1 = x$.

Теорема про розклад булевої функції за частиною змінних. *Кожну булеву функцію* $f(\widetilde{x}^n)$ *при будь-якому* m $(1 \le m \le n)$ *можна розкласти за змінними* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *наступним чином:*

$$f(\widetilde{x}^n) = \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_m)} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_m^{\sigma_m} f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m, x_{m+1}, \ldots, x_n),$$

де диз'юнкція береться за всеможливими двійковими наборами $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ *змінних* $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Задача 4.5.1. Розкласти булеву функцію за змінними x_1, x_2:

$$f(\widetilde{x}^4) = (x_1 / \overline{x}_3)\overline{x}_2 \oplus ((\overline{x}_1 \downarrow x_4) \to x_3).$$

Розв'язання. Покладаючи у формулі розкладу $n = 4$, $m = 2$, маємо:

$$f(\widetilde{x}^4) = \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2)} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} f(\sigma_1, \sigma_2, x_3, x_4) =$$

$$= x_1^0 x_2^0 f(0,0,x_3,x_4) \vee x_1^0 x_2^1 f(0,1,x_3,x_4) \vee x_1^1 x_2^0 f(1,0,x_3,x_4) \vee$$
$$\vee x_1^1 x_2^1 f(1,1,x_3,x_4) = \overline{x}_1 \overline{x}_2 f(0,0,x_3,x_4) \vee \overline{x}_1 x_2 f(0,1,x_3,x_4) \vee$$
$$\vee x_1 \overline{x}_2 f(1,0,x_3,x_4) \vee x_1 x_2 f(1,1,x_3,x_4). \qquad (4.5.1)$$

Обчислимо коефіцієнти розкладу, використовуючи формулу, якою задається функція, та основні еквівалентності:

$$f(0,0,x_3,x_4) = (0/\overline{x}_3)\overline{0} \oplus ((\overline{0} \downarrow x_4) \to x_3) = 1 \cdot 1 \oplus (0 \to x_3) =$$
$$= 1 \oplus 1 = 0,$$
$$f(0,1,x_3,x_4) = (0/\overline{x}_3)\overline{1} \oplus ((\overline{0} \downarrow x_4) \to x_3) = 1 \cdot 0 \oplus (0 \to x_3) =$$
$$= 0 \oplus 1 = 1,$$
$$f(1,0,x_3,x_4) = (1/\overline{x}_3)\overline{0} \oplus ((\overline{1} \downarrow x_4) \to x_3) = x_3 \cdot 1 \oplus (\overline{x}_4 \to x_3) =$$
$$= x_3 \oplus (x_4 \vee x_3) = \overline{x}_3 (x_4 \vee x_3) \vee x_3 (\overline{x_4 \vee x_3}) = \overline{x}_3 x_4 \vee x_3 \overline{x}_4 \overline{x}_3 =$$

$= \bar{x}_3 x_4 \vee 0 = \bar{x}_3 x_4$,

$f(1,1,x_3,x_4) = (1/\bar{x}_3)\bar{1} \oplus ((\bar{1} \downarrow x_4) \to x_3) = x_3 \cdot 0 \oplus (\bar{x}_4 \to x_3) =$

$= 0 \oplus (x_4 \vee x_3) = x_4 \vee x_3 = x_3 \vee x_4$.

Підставляючи знайдені значення коефіцієнтів у формулу (4.5.1), остаточно знаходимо:

$$f(\tilde{x}^4) = \bar{x}_1\bar{x}_2 \cdot 0 \vee \bar{x}_1 x_2 \cdot 1 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 x_4 \vee x_1 x_2(x_3 \vee x_4) =$$
$$= \bar{x}_1 x_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 x_4 \vee x_1 x_2(x_3 \vee x_4).$$

Відповідь: $f(\tilde{x}^4) = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 x_4 \vee x_1 x_2(x_3 \vee x_4)$. ■

Завдання для самостійної роботи

Задача 4.5.2. Розкласти за змінними x_1, x_2 наступні булеві функції:

1) $f(\tilde{x}^4) = (\bar{x}_3 \to x_1\bar{x}_2) \sim ((x_4 / \bar{x}_2\bar{x}_3) \oplus \bar{x}_1 x_3)$;

2) $f(\tilde{x}^3) = (\bar{x}_2 \sim x_3) \downarrow (\bar{x}_1 \to \bar{x}_3)$;

3) $f(\tilde{x}^4) = (\bar{x}_1 x_2 \sim \bar{x}_3) \to (\bar{x}_2 x_4 \downarrow \bar{x}_1 x_3)$.

4.6. Диз'юнктивні нормальні форми, досконала ДНФ

Кон'юнкція первинних термів деяких різних змінних, тобто вираз вигляду $K = x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_m}^{\sigma_m}$, *де* $\sigma_i \in E_2$ $(i = \overline{1,m})$, $x_{i_k} \neq x_{i_j}$ *при* $k \neq j$, *називається* ***елементарною кон'юнкцією (ЕК)***.

Кількість різних змінних в елементарній кон'юнкції називається ***рангом*** *елементарної кон'юнкції.*

Наприклад, $\bar{x}_1$ і x_2 – ЕК рангу 1, $\bar{x}_2 x_3$ – ЕК рангу 2, $x_2\bar{x}_4\bar{x}_6$ – ЕК рангу 3.

Елементарною кон'юнкцією рангу 0 *є константа* 1.

Диз'юнкція деяких різних елементарних кон'юнкцій, тобто вираз вигляду $K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_m$, *де* K_i *– елементарні кон'юнкції*

($i=\overline{1,m}$), $K_i \neq K_j$ при $i \neq j$, називається ***диз'юнктивною нормальною формою (ДНФ)***.

Наприклад, $\bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2$, $x_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1$ – ДНФ.

ДНФ від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, у якій <u>всі</u> елементарні кон'юнкції мають ранг n, називається ***досконалою ДНФ (ДДНФ)***.

Наприклад, $\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2$ – ДДНФ від змінних x_1, x_2, $x_1\bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$ – ДДНФ від змінних x_1, x_2, x_3.

Елементарні кон'юнкції, що містяться у ДДНФ, називаються ***конституентами одиниці***.

Теорема про зображення булевої функції у вигляді ДДНФ. *Кожну булеву функцію $f(\tilde{x}^n) \neq 0$ можна зобразити у вигляді ДДНФ наступним єдиним чином:*

$$f(\tilde{x}^n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n):\\ f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n},$$

де диз'юнкція береться за всеможливими двійковими наборами $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, на яких $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1$.

Задача 4.6.1. Еквівалентними перетвореннями побудувати диз'юнктивні нормальні форми для наступних булевих функцій:

1) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2\bar{x}_3)(x_1 \vee x_3)$;

2) $f(\tilde{x}^3) = (x_2 \sim x_1 x_3) \oplus \bar{x}_2 \bar{x}_3$.

Розв'язання.

1) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2\bar{x}_3)(x_1 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2\bar{x}_3)x_1 \vee (x_1 \vee x_2\bar{x}_3)x_3 =$
$= x_1x_1 \vee x_2\bar{x}_3x_1 \vee x_1x_3 \vee x_2\bar{x}_3x_3 = x_1 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_3 \vee 0 =$
$= x_1 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_3$ – ДНФ.

Зауважимо, що, використовуючи правило поглинання $x \vee xy = x$, далі можна було б отримати більш прості ДНФ: або $x_1 \vee x_1x_2\bar{x}_3$, або $x_1 \vee x_1x_3$, або навіть просто x_1.

Цей приклад ілюструє, що для кожної булевої функції існує, взагалі кажучи, не одна ДНФ, а певна множина ДНФ. ■

2) $f(\widetilde{x}^3) = (x_2 \sim x_1x_3) \oplus \overline{x}_2\overline{x}_3 = \overline{(x_2 \sim x_1x_3)}\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee$
$\vee (x_2 \sim x_1x_3)\overline{\overline{x}_2\overline{x}_3} = (x_2 \oplus x_1x_3)\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee$
$\vee (\overline{x}_2\overline{x_1x_3} \vee x_2x_1x_3)(x_2 \vee x_3) =$
$= (x_2\overline{x}_2\overline{x}_3 \oplus x_1x_3\overline{x}_2\overline{x}_3) \vee (\overline{x}_2(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_3) \vee x_1x_2x_3)(x_2 \vee x_3) =$
$= (0 \oplus 0) \vee (\overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2x_3)(x_2 \vee x_3) =$
$= \overline{x}_1\overline{x}_2x_2 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3x_2 \vee x_1x_2x_3x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3x_3 \vee x_1x_2x_3x_3 =$
$= 0 \vee 0 \vee x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee 0 \vee x_1x_2x_3 =$
$= x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3 = x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3$ – ДНФ, яка навіть є досконалою ДНФ (ДДНФ). ■

Задача 4.6.2. Еквівалентними перетвореннями вигляду $A = Ax \vee A\overline{x}$ (операція введення змінної) і $A \vee A = A$ (операція приведення однакових доданків) перейти від заданої ДНФ булевої функції до ДДНФ цієї булевої функції:

$$f(\widetilde{x}^3) = x_1 \vee \overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_3 .$$

Розв'язання. Оскільки задана функція залежить від трьох змінних, то на першому етапі, вводячи у кон'юнкції відсутні змінні, потрібно перейти до кон'юнкцій виключно рангу 3, а на другому – здійснити приведення однакових доданків:

$f(\widetilde{x}^3) = x_1 \vee \overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_3 = x_1(x_2 \vee \overline{x}_2) \vee \overline{x}_2x_3(x_1 \vee \overline{x}_1) \vee$
$\vee \overline{x}_1x_3(x_2 \vee \overline{x}_2) = x_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee$
$\vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 = x_1x_2(x_3 \vee \overline{x}_3) \vee x_1\overline{x}_2(x_3 \vee \overline{x}_3) \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee$
$\vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 = x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee$
$\vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 = x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x}_3 \vee$
$\vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3$ – ДДНФ. ■

Задача 4.6.3. Зобразити у вигляді ДДНФ булеву функцію

$$f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \oplus x_2) \sim \overline{x}_1x_3 .$$

Розв'язання. Будуємо таблицю істинності заданої булевої функції:

x_1	x_2	x_3	$x_1 \oplus x_2$	$\overline{x}_1x_3$	$f(\widetilde{x}^3)$	
0	0	0	0	0	1	$x_1^0x_2^0x_3^0 = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$

0	0	1	0	1	0	
0	1	0	1	0	0	
0	1	1	1	1	1	$x_1^0 x_2^1 x_3^1 = \bar{x}_1 x_2 x_3$
1	0	0	1	0	0	
1	0	1	1	0	0	
1	1	0	0	0	1	$x_1^1 x_2^1 x_3^0 = x_1 x_2 \bar{x}_3$
1	1	1	0	0	1	$x_1^1 x_2^1 x_3^1 = x_1 x_2 x_3$

Знаходимо всеможливі двійкові набори $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, на яких функція набуває значення 1: $(0,0,0)$, $(0,1,1)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$. За кожним знайденим набором $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ будуємо елементарну кон'юнкцію вигляду $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3}$ (результати наведено біля таблиці істинності навпроти кожного із знайдених двійкових наборів). Поєднуючи між собою всі побудовані елементарні кон'юнкції операцією диз'юнкції, отримуємо шукану ДДНФ:

$f(\tilde{x}^3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$ – ДДНФ. ■

Завдання для самостійної роботи

Задача 4.6.4. Еквівалентними перетвореннями побудувати диз'юнктивні нормальні форми для наступних булевих функцій:

1) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \sim \bar{x}_2) \to x_2 x_3$;

2) $f(\tilde{x}^3) = (x_3 \downarrow \bar{x}_1) \sim x_2 \bar{x}_3$;

3) $f(\tilde{x}^3) = (x_2 / \bar{x}_3) \downarrow (\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2)$;

4) $f(\tilde{x}^4) = ((x_1 \to x_2 x_3)(x_2 x_4 \oplus x_3) \to x_1 \bar{x}_4) \vee \bar{x}_1$.

Задача 4.6.5. Еквівалентними перетвореннями перейти від заданої ДНФ булевої функції до ДДНФ цієї булевої функції:

1) $f(\tilde{x}^3) = x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_3$;

2) $f(\tilde{x}^3) = \bar{x}_1 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_2 \bar{x}_3$;

3) $f(\tilde{x}^3) = \bar{x}_1 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2$.

Задача 4.6.6. Зобразити у вигляді ДДНФ наступні булеві функції:

1) $f(\tilde{x}^3) = (\overline{\bar{x}_1 / x_2}) \downarrow x_3$;

2) $f(\tilde{x}^3) = (01011001)$;

3) $f(\tilde{x}^3) = ((\bar{x}_1 \to x_3) \vee \bar{x}_2) / x_1$;

4) $f(\tilde{x}^3) = (x_3 \downarrow \bar{x}_1) \sim x_2\bar{x}_3$;

5) $m(\tilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$.

4.7. Кон'юнктивні нормальні форми, досконала КНФ

Диз'юнкція первинних термів деяких різних змінних, тобто вираз вигляду $D = x_{i_1}^{\sigma_1} \vee x_{i_2}^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x_{i_m}^{\sigma_m}$, *де* $\sigma_i \in E_2$ $(i = \overline{1,m})$, $x_{i_k} \neq x_{i_j}$ *при* $k \neq j$, *називається* ***елементарною диз'юнкцією (ЕД)***.

Кількість різних змінних в елементарній диз'юнкції називається ***рангом*** *елементарної диз'юнкції.*

Наприклад, $\bar{x}_1$ і x_2 – ЕД рангу 1, $\bar{x}_2 \vee x_3$ – ЕД рангу 2, $x_2 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_6$ – ЕД рангу 3.

Елементарною диз'юнкцією рангу 0 *є константа* 0.

Кон'юнкція деяких різних елементарних диз'юнкцій, тобто вираз вигляду $D_1 \cdot D_2 \cdot \ldots \cdot D_m$, *де* D_i *– елементарні диз'юнкції* $(i = \overline{1,m})$, $D_i \neq D_j$ *при* $i \neq j$, *називається* ***кон'юнктивною нормальною формою (КНФ)***.

Наприклад, $(\bar{x}_1 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2)$, $(x_1 \vee \bar{x}_2)(x_2 \vee \bar{x}_3)\bar{x}_1$ – КНФ.

КНФ від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *у якій* <u>*всі*</u> *елементарні диз'юнкції мають ранг* n, *називається* ***досконалою КНФ (ДКНФ)***.

Наприклад, $(\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_2)$ – ДКНФ від змінних x_1, x_2,

$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$ – ДКНФ від змінних x_1, x_2, x_3.

Елементарні диз'юнкції, що містяться у ДКНФ, називаються ***конституентами нуля****.*

Теорема про зображення булевої функції у вигляді ДКНФ. *Кожну булеву функцію $f(\tilde{x}^n) \neq 1$ можна зобразити у вигляді ДКНФ наступним єдиним чином:*

$$f(\tilde{x}^n) = \bigwedge_{\substack{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n): \\ f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)=0}} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}),$$

де кон'юнкція береться за всеможливими двійковими наборами $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, на яких $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 0$.

Задача 4.7.1. Зобразити у вигляді ДКНФ булеву функцію

$$f(\tilde{x}^3) = (x_1 \oplus x_2) \sim \bar{x}_1 x_3.$$

Розв'язання. Таблиця істинності цієї булевої функції має вигляд (дивись задачу 4.6.3):

x_1	x_2	x_3	$f(\tilde{x}^3)$	
0	0	0	1	
0	0	1	0	$x_1^{\bar{0}} \vee x_2^{\bar{0}} \vee x_3^{\bar{1}} = x_1^1 \vee x_2^1 \vee x_3^0 = x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$
0	1	0	0	$x_1^{\bar{0}} \vee x_2^{\bar{1}} \vee x_3^{\bar{0}} = x_1^1 \vee x_2^0 \vee x_3^1 = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$
0	1	1	1	
1	0	0	0	$x_1^{\bar{1}} \vee x_2^{\bar{0}} \vee x_3^{\bar{0}} = x_1^0 \vee x_2^1 \vee x_3^1 = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3$
1	0	1	0	$x_1^{\bar{1}} \vee x_2^{\bar{0}} \vee x_3^{\bar{1}} = x_1^0 \vee x_2^1 \vee x_3^0 = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$
1	1	0	1	
1	1	1	1	

Знаходимо всеможливі двійкові набори $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, на яких функція набуває значення 0: $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,0,0)$, $(1,0,1)$. За кожним знайденим набором $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ будуємо елементарну диз'юнкцію вигляду $x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee x_3^{\bar{\sigma}_3}$ (результати наведено біля таблиці істинності навпроти кожного із знайдених двійкових наборів). Поєднуючи між собою всі побудовані елементарні диз'юнкції операцією кон'юнкції, отримуємо шукану ДКНФ:

$f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)$ – ДКНФ. ■

Завдання для самостійної роботи

Задача 4.7.2. Зобразити у вигляді ДКНФ наступні булеві функції:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (x_3 \downarrow \overline{x}_1) \sim x_2\overline{x}_3$;
2) $f(\widetilde{x}^3) = (01011001)$;
3) $f(\widetilde{x}^3) = ((\overline{x}_1 \to x_3) \vee \overline{x}_2) / x_1$;
4) $f(\widetilde{x}^3) = (\overline{\overline{x}_1 / x_2}) \downarrow x_3$;
5) $m(\widetilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$.

4.8. Поліном Жегалкіна

Поліномом Жегалкіна від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *називається вираз вигляду*

$$a_0 \oplus \bigoplus_{\substack{\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \\ 1 \le k \le n}} a_{i_1 i_2 \cdots i_k} x_{i_1} x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k},$$

де сума за модулем 2 береться при $k = 1, 2, \ldots, n$ *за всеможливими невпорядкованими* k *-вибірками без повторень* $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ *із множини індексів* $\{1, 2, \ldots, n\}$*, а* a_0 *і* $a_{i_1 i_2 \cdots i_k}$ *(* $k = \overline{1, n}$ *) – коефіцієнти полінома, що належать множині* $E_2 = \{0, 1\}$*.*

Інакше кажучи, поліном Жегалкіна від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – сума за модулем 2 всеможливих кон'юнкцій (що не містять заперечень змінних) рангів 0, 1, 2, ..., n, кожна з яких береться з деяким коефіцієнтом із множини $E_2 = \{0,1\}$.

Явний вигляд поліному Жегалкіна:

- від однієї змінної x_1 –

$$a_0 \oplus a_1 x_1, \text{ де } a_0, a_1 \in E_2;$$

- від двох змінних x_1, x_2 –

$$a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_{12} x_1 x_2, \text{ де } a_0, a_1, a_2, a_{12} \in E_2;$$

- від трьох змінних x_1, x_2, x_3 –

$$a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_3 x_3 \oplus a_{12} x_1 x_2 \oplus a_{13} x_1 x_3 \oplus a_{23} x_2 x_3 \oplus a_{123} x_1 x_2 x_3,$$

$$\text{де } a_0, a_1, a_2, a_3, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{123} \in E_2.$$

Теорема. *Кожну булеву функцію $f(\tilde{x}^n)$ можна єдиним чином зобразити у вигляді поліному Жегалкіна.*

Універсальним методом побудови поліному Жегалкіна для булевої функції $f(\tilde{x}^n)$ є **метод невизначених коефіцієнтів**.

Задача 4.8.1. Методом невизначених коефіцієнтів побудувати поліном Жегалкіна для булевої функції

$$f(\tilde{x}^3) = (x_1 \oplus x_2) \sim \bar{x}_1 x_3.$$

Розв'язання. Таблиця істинності цієї булевої функції має вигляд (дивись задачу 4.6.3):

x_1	x_2	x_3	$f(\tilde{x}^3)$	
0	0	0	1	$a_0 = 1$
0	0	1	0	$a_3 = 1$
0	1	0	0	$a_2 = 1$
0	1	1	1	$a_{23} = 0$
1	0	0	0	$a_1 = 1$
1	0	1	0	$a_{13} = 1$
1	1	0	1	$a_{12} = 0$
1	1	1	1	$a_{123} = 0$

Випишемо для булевої функції $f(\tilde{x}^3)$ загальний вигляд поліному Жегалкіна від змінних x_1, x_2, x_3 з невідомими (невизначеними) коефіцієнтами:

$$f(\tilde{x}^3) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_3 x_3 \oplus a_{12} x_1 x_2 \oplus a_{13} x_1 x_3 \oplus$$
$$\oplus a_{23} x_2 x_3 \oplus a_{123} x_1 x_2 x_3 . \qquad (4.8.1)$$

По черзі підставляючи в цю рівність всеможливі двійкові набори та використовуючи основні еквівалентності, послідовно знаходимо значення невідомих коефіцієнтів (для зручності знайдені значення записуємо біля таблиці істинності навпроти відповідних двійкових наборів):

1) $(0,0,0)$: $f(0,0,0) = a_0$; $1 = a_0$; $a_0 = 1$.

2) $(0,0,1)$: $f(0,0,1) = a_0 \oplus a_3$; $0 = 1 \oplus a_3$; $0 = \overline{a}_3$; $a_3 = 1$.

3) $(0,1,0)$: $f(0,1,0) = a_0 \oplus a_2$; $0 = 1 \oplus a_2$; $0 = \overline{a}_2$; $a_2 = 1$.

4) $(0,1,1)$: $f(0,1,1) = a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{23}$; $1 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_{23}$;
$1 = 1 \oplus a_{23}$; $1 = \overline{a}_{23}$; $a_{23} = 0$.

5) $(1,0,0)$: $f(1,0,0) = a_0 \oplus a_1$; $0 = 1 \oplus a_1$; $0 = \overline{a}_1$; $a_1 = 1$.

6) $(1,0,1)$: $f(1,0,1) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_{13}$; $0 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_{13}$;
$0 = 1 \oplus a_{13}$; $0 = \overline{a}_{13}$; $a_{13} = 1$.

7) $(1,1,0)$: $f(1,1,0) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_{12}$; $1 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_{12}$;
$1 = 1 \oplus a_{12}$; $1 = \overline{a}_{12}$; $a_{12} = 0$.

8) $(1,1,1)$: $f(1,1,1) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{23} \oplus a_{123}$;
$1 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_{123}$;
$1 = 1 \oplus a_{123}$; $1 = \overline{a}_{123}$; $a_{123} = 0$.

Підставляючи знайдені значення коефіцієнтів у формулу (4.8.1), отримуємо шуканий поліном Жегалкіна:

$$f(\tilde{x}^3) = 1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_1 x_3 . \ \blacksquare$$

Також універсальним, доволі простим, але маловідомим, методом побудови поліному Жегалкіна для булевої функції $f(\tilde{x}^n)$ є **метод двійкового трикутника**.

Суть цього методу полягає у наступному. Будується двійковий трикутник, перший рядок якого повністю містить стовпчик значень заданої булевої функції. Елементи ж всіх наступних рядків обчислюються, як сума за модулем 2 двох сусідніх елементів попереднього рядка.

Після завершення побудови трикутника його лівий бік міститиме значення коефіцієнтів поліному в тому порядку, в якому вони знаходилися б методом невизначених коефіцієнтів.

Фактично, метод двійкового трикутника насправді є тим же ж самим методом невизначених коефіцієнтів, поданим у дещо іншому та менш громіздкому вигляді.

Задача 4.8.2. Методом двійкового трикутника побудувати поліном Жегалкіна для булевої функції

$$f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \oplus x_2) \sim \overline{x}_1 x_3 .$$

Розв'язання. Виписуємо для булевої функції загальний вигляд поліному Жегалкіна з невідомими (невизначеними) коефіцієнтами:

$$f(\widetilde{x}^3) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_3 x_3 \oplus a_{12} x_1 x_2 \oplus a_{13} x_1 x_3 \oplus$$
$$\oplus a_{23} x_2 x_3 \oplus a_{123} x_1 x_2 x_3 .$$

Скориставшись таблицею істинності функції (дивись задачу 4.6.3), будуємо відповідний двійковий трикутник та знаходимо значення коефіцієнтів поліному:

x_1	x_2	x_3	$f(\widetilde{x}^3)$	Двійковий трикутник	Коефіцієнти поліному
0	0	0	1	$\boxed{1}$ 0 0 1 0 0 1 1	$a_0 = 1$
0	0	1	0	$\boxed{1}$ 0 1 1 0 1 0	$a_3 = 1$
0	1	0	0	$\boxed{1}$ 1 0 1 1 1	$a_2 = 1$
0	1	1	1	$\boxed{0}$ 1 1 0 0	$a_{23} = 0$
1	0	0	0	$\boxed{1}$ 0 1 0	$a_1 = 1$
1	0	1	0	$\boxed{1}$ 1 1	$a_{13} = 1$
1	1	0	1	$\boxed{0}$ 0	$a_{12} = 0$
1	1	1	1	$\boxed{0}$	$a_{123} = 0$

Отже, шуканий поліном Жегалкіна має вигляд:

$$f(\widetilde{x}^3) = 1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_1 x_3 . \ \blacksquare$$

Якщо булева функція $f(\widetilde{x}^n)$ задається деякою формулою, то поліном Жегалкіна для цієї функції можна також побудувати за допомогою **еквівалентних перетворень**. Алгоритм цього методу:

1) звести формулу до формули лише з операціями $\bar{\ }, \wedge, \vee$;
2) використовуючи еквівалентні перетворення вигляду
$$\overline{A \vee B} = \overline{A}\,\overline{B}\,,\ A \vee B = \overline{\overline{A \vee B}} = \overline{\overline{A}\,\overline{B}}\,,$$
позбутись у формулі всіх диз'юнкцій;
3) використовуючи еквівалентні перетворення вигляду
$$\overline{A} = A \oplus 1\,,$$
позбутись у формулі всіх заперечень;
4) використовуючи еквівалентні перетворення вигляду
$$A(B \oplus C) = AB \oplus AC\,,\ A \oplus (B \oplus C) = A \oplus B \oplus C\,,$$
позбутись у формулі всіх дужок;
5) використовуючи еквівалентні перетворення вигляду
$$A \cdot A = A\,,\ A \cdot 1 = A\,,\ A \cdot 0 = 0\,,$$
здійснити спрощення доданків;
6) використовуючи еквівалентні перетворення вигляду
$$A \oplus A = 0\,,\ A \oplus 0 = A\,,$$
здійснити приведення однакових доданків та відкинути доданки-нулі.

Зауваження 4.8.1. Якщо початкова формула містить операції $\oplus$, їх позбуватися недоцільно, оскільки операції $\oplus$ будуть присутні і в поліномі Жегалкіна.

Зауваження 4.8.2. Якщо початкова формула містить операції $\sim$, доцільно виразити їх через операції $\oplus$ ($A \sim B = \overline{A \oplus B}$) і скористатися зауваженням 4.8.1.

Задача 4.8.3. Еквівалентними перетвореннями побудувати поліноми Жегалкіна для наступних булевих функцій:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 / \overline{x}_2) \downarrow x_3$;
2) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \to x_2) \to x_3$;
3) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \oplus x_2) \sim \overline{x}_1 x_3$;
4) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \vee \overline{x}_2 \overline{x}_3) \to (\overline{x}_2 \sim x_3)$.

Розв’язання.

1) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 / \bar{x}_2) \downarrow x_3 = (\overline{x_1 \bar{x}_2}) \downarrow x_3 = \overline{\overline{x_1 \bar{x}_2} \vee x_3} = \overline{\overline{x_1 \bar{x}_2}}\, \bar{x}_3 =$
$= x_1 \bar{x}_2\, \bar{x}_3 = x_1 (x_2 \oplus 1)(x_3 \oplus 1) = (x_1 x_2 \oplus x_1)(x_3 \oplus 1) =$
$= x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1$. ■

2) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \to x_2) \to x_3 = (\bar{x}_1 \vee x_2) \to x_3 = (\overline{\bar{x}_1 \vee x_2}) \vee x_3 =$
$= x_1 \bar{x}_2 \vee x_3 = \overline{\overline{x_1 \bar{x}_2 \vee x_3}} = \overline{\overline{x_1 \bar{x}_2}\, \bar{x}_3} = ((x_1 \bar{x}_2 \oplus 1)\, \bar{x}_3) \oplus 1 =$
$= (x_1 (x_2 \oplus 1) \oplus 1)(x_3 \oplus 1) \oplus 1 = (x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus 1)(x_3 \oplus 1) \oplus 1 =$
$= x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 \oplus x_3 \oplus 1 \oplus 1 =$
$= x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 \oplus x_3$. ■

3) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \oplus x_2) \sim \bar{x}_1 x_3 = \overline{(x_1 \oplus x_2) \oplus \bar{x}_1 x_3} =$
$= (x_1 \oplus x_2 \oplus (x_1 \oplus 1) x_3) \oplus 1 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_3 \oplus 1$. ■

4) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3) \to (\bar{x}_2 \sim x_3) = (\overline{x_1 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3}) \vee (\bar{x}_2 \sim x_3) =$
$= \bar{x}_1\, \overline{\bar{x}_2 \bar{x}_3} \vee \overline{(\bar{x}_2 \oplus x_3)} = \overline{\overline{\bar{x}_1\, \overline{\bar{x}_2 \bar{x}_3} \vee \overline{(\bar{x}_2 \oplus x_3)}}} =$
$= \overline{\overline{\bar{x}_1\, \overline{\bar{x}_2 \bar{x}_3}}\, (\bar{x}_2 \oplus x_3)} = (\bar{x}_1\, \overline{\bar{x}_2 \bar{x}_3} \oplus 1)(\bar{x}_2 \oplus x_3) \oplus 1 =$
$= (\bar{x}_1 (\bar{x}_2 \bar{x}_3 \oplus 1) \oplus 1)((x_2 \oplus 1) \oplus x_3) \oplus 1 =$
$= (\bar{x}_1 (\bar{x}_2 \bar{x}_3 \oplus 1) \oplus 1)(x_2 \oplus 1 \oplus x_3) \oplus 1 =$
$= ((x_1 \oplus 1)((x_2 \oplus 1)(x_3 \oplus 1) \oplus 1) \oplus 1)(x_2 \oplus 1 \oplus x_3) \oplus 1 =$
$= ((x_1 \oplus 1)(x_2 x_3 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1 \oplus 1) \oplus 1)(x_2 \oplus 1 \oplus x_3) \oplus 1 =$
$= ((x_1 \oplus 1)(x_2 x_3 \oplus x_2 \oplus x_3) \oplus 1)(x_2 \oplus 1 \oplus x_3) \oplus 1 =$
$= (x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1)(x_2 \oplus 1 \oplus x_3) \oplus 1 =$
$= x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus$
$\oplus x_1 x_3 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_2 \oplus x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus$
$\oplus x_2 x_3 \oplus x_3 \oplus x_3 \oplus x_2 \oplus 1 \oplus x_3 \oplus 1 =$
$= x_1 x_2 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_2 \oplus x_3$. ■

Завдання для самостійної роботи

Задача 4.8.4. Методом невизначених коефіцієнтів або методом двійкового трикутника побудувати поліноми Жегалкіна для наступних булевих функцій:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (\overline{\overline{x}_1 / x_2}) \downarrow x_3$;

2) $f(\widetilde{x}^3) = (x_3 \downarrow \overline{x}_1) \sim x_2\overline{x}_3$;

3) $m(\widetilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$;

4) $f(\widetilde{x}^3) = (10110110)$.

Задача 4.8.5. Еквівалентними перетвореннями побудувати поліноми Жегалкіна для наступних булевих функцій:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (\overline{\overline{x}_1 / x_2}) \downarrow x_3$;

2) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \to x_2)(x_2 \downarrow x_3)$;

3) $m(\widetilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$;

4) $f(\widetilde{x}^3) = ((x_1 \to x_2) \vee \overline{x}_3) / x_1$;

5) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \oplus \overline{x}_2\overline{x}_3) \to x_1x_2$;

6) $f(\widetilde{x}^3) = (x_3 \downarrow \overline{x}_1) \sim x_2\overline{x}_3$;

7) $f(\widetilde{x}^3) = (\overline{x}_2 \sim x_1) \downarrow (\overline{x}_1x_3)$.

ТЕМА 5. ЗАМКНУТІ ТА ПОВНІ СИСТЕМИ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

5.1. Поняття замикання та повноти системи булевих функцій. Теорема зведення

Нехай задано деяку множину (систему) булевих функцій $M = \{f_1(\widetilde{x}^n), f_2(\widetilde{x}^n), \ldots\}$.

Індуктивне ***означення формули над множиною*** *M:*

1) *кожна функція $f_i(\widetilde{x}^n)$ із множини M є формулою над M;*
2) *якщо $f_j(\widetilde{x}^n)$ – функція із множини M, а $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – вирази, кожен з яких є формулою над M або символом змінної із множини $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, то вираз вигляду $f_j(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ теж є формулою над M;*
3) *не існує інших формул над M, окрім побудованих згідно з 1) та 2).*

Замиканням множини *M (позначається $[M]$) називається множина всіх тих булевих функцій, що можуть бути подані у вигляді формули над M.*

Властивості операції замикання:

1) $[\varnothing] = \varnothing$;
2) $M \subseteq [M]$;
3) $[[M]] = [M]$;
4) якщо $M_1 \subseteq M_2$, то $[M_1] \subseteq [M_2]$;
5) $[M_1] \cup [M_2] \subseteq [M_1 \cup M_2]$.

Множина (система) булевих функцій M називається ***замкнутою****, якщо $[M] = M$.*

Множину всіх існуючих булевих функцій позначимо через P_2.

Множина (система) булевих функцій M називається

***повною**, якщо будь-яку булеву функцію з множини P_2 можна подати у вигляді формули над M .*

Основні повні системи функцій: P_2, $B = \{\overline{x}_1,\ x_1 x_2,\ x_1 \vee x_2\}$, $B_1 = \{\overline{x}_1,\ x_1 x_2\}$, $B_2 = \{\overline{x}_1,\ x_1 \vee x_2\}$.

Використовуючи поняття замикання, можна дати інше означення повноти системи булевих функцій:

*множина (система) булевих функцій M називається **повною**, якщо $[M] = P_2$.*

***Теорема зведення.** Нехай задано 2 системи булевих функцій – $F = \{f_1, f_2, \ldots\}$ і $G = \{g_1, g_2, \ldots\}$, причому система F є повною і кожну її функцію можна подати у вигляді формули над G. Тоді система G теж є повною.*

Задача 5.1.1. Використовуючи теорему зведення, довести, що множина H є повною системою:

1) $H = \{0,\ m(x, y, z),\ x^y \oplus z\}$;

2) $H = \{x \to y,\ \overline{x \oplus y \oplus z}\}$;

3) $H = \{x_1 x_2 \oplus x_3,\ (x_1 \sim x_2) \oplus x_3\}$.

Розв'язання.

1) Як відомо, $m(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz$ – функція голосування. Позначимо інші функції системи H: $f_1 = 0$, $f_2(x, y, z) = x^y \oplus z$.

Візьмемо повну систему $B_1 = \{\overline{x},\ xy\}$ і покажемо, що кожну її функцію можна подати у вигляді формули над H.

Маємо:

$\overline{x} = x^0 \oplus 0 = f_2(x, 0, 0) = f_2(x, f_1, f_1)$ – формула над H,

$xy = m(x, y, 0) = m(x, y, f_1)$ – формула над H.

Отже, за теоремою зведення, система H є повною. ■

2) Позначимо: $f_1(x, y) = x \to y$, $f_2(x, y, z) = \overline{x \oplus y \oplus z}$.

$B_2 = \{\overline{x},\ x \vee y\}$ – повна система.

$\overline{x} = \overline{x \oplus x \oplus x} = f_2(x, x, x)$ – формула над H,

$x \vee y = \overline{x} \to y = f_1(\overline{x}, y) = f_1(f_2(x, x, x), y)$ – формула над H.

Отже, за теоремою зведення, H – повна система. ■

3) Позначимо: $f_1(\widetilde{x}^3) = x_1x_2 \oplus x_3$, $f_2(\widetilde{x}^3) = (x_1 \sim x_2) \oplus x_3$.

$B_1 = \{\overline{x}_1,\ x_1x_2\}$ – повна система.

$\overline{x}_1 = 1 \oplus x_1 = (x_1 \sim x_1) \oplus x_1 = f_2(x_1, x_1, x_1)$ – формула над H.

$x_1x_2 = x_1x_2 \oplus 0 = f_1(x_1, x_2, 0)$. Цей вираз буде формулою над H лише тоді, коли 0 є формулою над H. Покажемо, що 0 справді є формулою над H:

$0 = x_1x_1 \oplus x_1 = f_1(x_1, x_1, x_1)$ – формула над H.

Отже, $x_1x_2 = f_1(x_1, x_2, 0) = f_1(x_1, x_2, f_1(x_1, x_1, x_1))$ – формула над H. Тому, за теоремою зведення, H – повна система. ■

Завдання для самостійної роботи

Задача 5.1.2. Використовуючи теорему зведення, довести, що множина H є повною системою:

1) $H = \{x_1 \downarrow x_2\}$;
2) $H = \{x_1 / x_2\}$;
3) $H = \{x \sim y,\ x / y\}$;
4) $H = \{x \sim y,\ x \oplus y,\ xy \oplus z\}$;
5) $H = \{x \to y,\ (10110110)\}$;
6) $H = \{\overline{x}\,\overline{y} \vee z,\ (01111110)\}$.

5.2. Класи булевих функцій, що зберігають константи (класи T_0 і T_1)

Під класом розуміють множину булевих функцій, що мають спільну властивість.

Булева функція $f(\widetilde{x}^n)$ ***зберігає константу*** **0**, *тобто належить до класу* T_0, *якщо* $f(0,0,\ldots,0) = 0$.

Позначимо через $T_0(n)$ множину тих функцій класу T_0, що залежать від n змінних.

Кількість всеможливих булевих функцій від n *змінних, що належать класу* T_0, *обчислюється за формулою:*

$$|T_0(n)| = 2^{2^n - 1} = \frac{1}{2} 2^{2^n}.$$

Клас T_0 *– замкнутий* ($[T_0] = T_0$)*, але не є повним* ($[T_0] \neq P_2$)*.*

Булева функція $f(\widetilde{x}^n)$ ***зберігає константу*** **1***, тобто належить до класу* T_1*, якщо* $f(1,1,\ldots,1) = 1$*.*

Позначимо через $T_1(n)$ множину тих функцій класу T_1**,** що залежать від n змінних.

Кількість всеможливих булевих функцій від n *змінних, що належать класу* T_1*, обчислюється за формулою:*

$$|T_1(n)| = 2^{2^n - 1} = \frac{1}{2} 2^{2^n}.$$

Клас T_1 *– замкнутий* ($[T_1] = T_1$)*, але не є повним* ($[T_1] \neq P_2$)*.*

Задача 5.2.1. З'ясувати, чи належить множинам $T_0 \cup T_1$, $T_0 \cap T_1$, $T_0 \setminus T_1$, $T_1 \setminus T_0$, $T_0 \,\Delta\, T_1$ булева функція

$$f(\widetilde{x}^3) = ((x_1 \vee x_2) \to (x_1 / x_2 x_3)) \downarrow ((x_2 \sim x_3) \to x_1).$$

Розв'язання. З'ясуємо належність булевої функції $f(\widetilde{x}^3)$ до класів T_0 і T_1:

$$f(0,0,0) = ((0 \vee 0) \to (0/0 \cdot 0)) \downarrow ((0 \sim 0) \to 0) =$$
$$= (0 \to 1) \downarrow (1 \to 0) = 1 \downarrow 0 = 0 \;\Rightarrow\; f(\widetilde{x}^3) \in T_0,$$
$$f(1,1,1) = ((1 \vee 1) \to (1/1 \cdot 1)) \downarrow ((1 \sim 1) \to 1) =$$
$$= (1 \to 0) \downarrow (1 \to 1) = 0 \downarrow 1 = 0 \;\Rightarrow\; f(\widetilde{x}^3) \notin T_1.$$

Оскільки $f(\widetilde{x}^3) \in T_0$ і $f(\widetilde{x}^3) \notin T_1$, отримуємо, що $f(\widetilde{x}^3) \in T_0 \cup T_1$, $f(\widetilde{x}^3) \notin T_0 \cap T_1$, $f(\widetilde{x}^3) \in T_0 \setminus T_1$, $f(\widetilde{x}^3) \notin T_1 \setminus T_0$, $f(\widetilde{x}^3) \in T_0 \,\Delta\, T_1$. ■

Задача 5.2.2. Знайти булеву функцію $f(x, x, \ldots, x)$, якщо $f(\widetilde{x}^n) \in T_1 \setminus T_0$.

Розв'язання. За умовою, маємо:

$$f(\widetilde{x}^n) \in T_1 \setminus T_0 \;\Rightarrow\; f(\widetilde{x}^n) \in T_1 \text{ і } f(\widetilde{x}^n) \notin T_0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; f(1,1,\ldots,1) = 1 \text{ і } f(0,0,\ldots,0) = 1.$$

$f(x, x, \ldots, x)$ – функція однієї змінної, тому введемо позначення:

$$\Phi(x) = f(x, x, \ldots, x).$$

Обчислимо стовпчик значень функції $\Phi(x)$:

$$\Phi(0) = f(0,0,\ldots,0) = 1, \ \Phi(1) = f(1,1,\ldots,1) = 1.$$

Звідси випливає, що $\Phi(x) \equiv 1$. Таким чином, $f(x, x, \ldots, x) \equiv 1$. ■

Задача 5.2.3. Обчислити кількість булевих функцій від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ у кожній із наступних множин:

1) $T_0 \cap T_1$;

2) $T_0 \cup T_1$.

Розв'язання.

1) Візьмемо довільну булеву функцію $f(\widetilde{x}^n) \in T_0 \cap T_1$. Маємо:

$$f(\widetilde{x}^n) \in T_0 \cap T_1 \ \Rightarrow \ f(\widetilde{x}^n) \in T_0 \ \text{і} \ f(\widetilde{x}^n) \in T_1 \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ f(0,0,\ldots,0) = 0 \ \text{ і } \ f(1,1,\ldots,1) = 1.$$

Таким чином, на двох двійкових наборах значення булевої функції $f(\widetilde{x}^n)$ відомі. На решті $2^n - 2$ двійкових наборах функція може набувати будь-яких значень. Всеможливими способами задаючи значення функції на цих двійкових наборах, отримаємо всеможливі шукані функції із множини $T_0 \cap T_1$. Отже,

$$|T_0(n) \cap T_1(n)| = \overline{A}_2^{\,2^n - 2} = 2^{2^n - 2} = \frac{1}{4} 2^{2^n}. \ ■$$

2) Скориставшись формулою включення-виключення для двох множин, з врахуванням 1) отримуємо:

$$|T_0(n) \cup T_1(n)| = |T_0(n)| + |T_1(n)| - |T_0(n) \cap T_1(n)| =$$
$$= \frac{1}{2} 2^{2^n} + \frac{1}{2} 2^{2^n} - \frac{1}{4} 2^{2^n} = \frac{3}{4} 2^{2^n} = 3 \cdot 2^{2^n - 2}. \ ■$$

Задача 5.2.4. З'ясувати, чи можна отримати функцію f за допомогою операцій суперпозиції над множиною Φ:

$$f = x \to y, \ \Phi = \{xy, x \vee y\}.$$

Розв'язання. Обидві функції системи Φ, очевидно, належать класу T_0. Тоді, внаслідок замкнутості класу T_0, будь-яка суперпозиція над Φ (формула над Φ) також буде належати класу T_0. А оскільки функція $f \notin T_0$, то її не можна буде отримати за допомогою операцій суперпозиції над множиною Φ.

$$(\Phi \subseteq T_0 \Rightarrow [\Phi] \subseteq [T_0] \Rightarrow [\Phi] \subseteq T_0,$$
$$\text{а оскільки } f \notin T_0 \Rightarrow f \notin [\Phi])$$

Зауважимо також, що хоча $\Phi \subseteq T_1$ і $f \in T_1$, ніякий висновок на підставі цього зробити не вдасться. ■

Завдання для самостійної роботи

Задача 5.2.5. З'ясувати, чи належить множинам $T_0 \cup T_1$, $T_0 \cap T_1$, $T_0 \setminus T_1$, $T_1 \setminus T_0$, $T_0 \,\Delta\, T_1$ булева функція:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 x_2 \to x_3)/((x_1 \to x_2) \downarrow (x_3 \oplus \bar{x}_1 x_2))$;
2) $f(\widetilde{x}^3) = (10110110)$.

Задача 5.2.6. Знайти булеву функцію $f(x, x, \ldots, x)$, якщо:

1) $f(\widetilde{x}^n) \in T_0 \setminus T_1$;
2) $f(\widetilde{x}^n) \in T_0 \cap T_1$;
3) $f(\widetilde{x}^n) \notin T_0 \cup T_1$.

Задача 5.2.7. Обчислити кількість булевих функцій від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ у кожній із наступних множин:

1) $T_0 \setminus T_1$;
2) $T_1 \setminus T_0$.

Задача 5.2.8. З'ясувати, чи можна отримати функцію f за допомогою операцій суперпозиції над множиною Φ:

$$f = x \oplus y, \quad \Phi = \{x \to y\}.$$

5.3. Клас лінійних булевих функцій (клас L)

Булева функція $f(\widetilde{x}^n)$ *називається* ***лінійною****, тобто належить до класу* L*, якщо її поліном Жегалкіна має вигляд:*

$$f(\widetilde{x}^n) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \ldots \oplus a_nx_n, \quad \textit{де } a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in E_2.$$

Позначимо через $L(n)$ множину тих функцій класу L, що залежать від n змінних.

Кількість всеможливих булевих функцій від n *змінних, що належать класу* L*, обчислюється за формулою:*

$$|L(n)| = 2^{n+1}.$$

Клас L *– замкнутий* ($[L] = L$)*, але не є повним* ($[L] \neq P_2$)*.*

Лема про нелінійну функцію. *Якщо булева функція* $f(\widetilde{x}^n) \notin L$*, то, підставляючи на місце її змінних лінійні функції* 0*,* 1*,* x_1*,* $\overline{x}_1$*,* x_2*,* $\overline{x}_2$ *та, при потребі, навішуючи заперечення над усією функцією, можна отримати нелінійну функцію* x_1x_2*.*

Якщо булева функція $f(\widetilde{x}^n)$ – лінійна, то отримати з неї вказаними в умові леми діями нелінійну функцію x_1x_2 неможливо. Це випливає із замкнутості класу L.

Задача 5.3.1. З'ясувати, чи є лінійною булева функція

$$f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \downarrow \overline{x}_2) \sim (x_3 \vee \overline{x}_1).$$

Розв'язання. Побудувавши поліном Жегалкіна для цієї функції (див. п.4.8), отримаємо:

$$f(\widetilde{x}^3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3.$$

Поліном Жегалкіна містить кон'юнкції змінних (x_1x_2 і x_1x_3), тому дана функція не є лінійною: $f(\widetilde{x}^3) \notin L$. ■

Задача 5.3.2. Довести, що функцію $x \to y$ не можна отримати з функцій $f_1 = x \oplus y \oplus z$, $f_2 = x \oplus 1$, $f_3 = x \oplus y$ за допомогою операцій суперпозиції.

Розв'язання. Функції f_1, f_2, f_3, очевидно, є лінійними. Тоді, внаслідок замкнутості класу L, будь-яка суперпозиція цих функцій обов'язково належатиме класу L.

З'ясуємо, чи є лінійною функція $x \to y$. Побудуємо для неї поліном Жегалкіна методом еквівалентних перетворень:

$$x \to y = \bar{x} \vee y = \overline{\overline{\bar{x} \vee y}} = \overline{x\,\bar{y}} = x\bar{y} \oplus 1 = x(y \oplus 1) \oplus 1 = xy \oplus x \oplus 1.$$

Таким чином, функція $x \to y$ є нелінійною, а тому її не можна отримати з функцій f_1, f_2, f_3 за допомогою операцій суперпозиції. ■

Задача 5.3.3. Обчислити кількість булевих функцій від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ у кожній із наступних множин:

1) $T_0 \cap L$;
2) $T_0 \cup L$.

Розв'язання.

1) Розглянемо довільну функцію $f(\widetilde{x}^n) \in T_0 \cap L$. Маємо:

$$f(\widetilde{x}^n) \in T_0 \cap L \;\Rightarrow\; f(\widetilde{x}^n) \in T_0 \text{ і } f(\widetilde{x}^n) \in L \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; f(0,0,\ldots,0) = 0 \text{ і } f(\widetilde{x}^n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \ldots \oplus a_n x_n \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; f(\widetilde{x}^n) = a_1 x_1 \oplus \ldots \oplus a_n x_n, \text{ де } a_1, a_2, \ldots, a_n \in E_2 = \{0,1\}.$$

Тоді всеможливими способами задаючи значення коефіцієнтів $a_1, a_2, \ldots, a_n$, отримаємо всеможливі шукані функції із множини $T_0 \cap L$. Отже,

$$|T_0(n) \cap L(n)| = \overline{A}_2^{\,n} = 2^n. \;■$$

2) Скориставшись формулою включення-виключення для двох множин, з врахуванням 1) отримуємо:

$$|T_0(n) \cup L(n)| = |T_0(n)| + |L(n)| - |T_0(n) \cap L(n)| =$$

$$= \frac{1}{2} 2^{2^n} + 2^{n+1} - 2^n = 2^{2^n - 1} + 2^n. \;■$$

Задача 5.3.4. З'ясувати, чи можна з функції f, підставляючи на місце її змінних 0, 1, x_1, $\bar{x}_1$, x_2, $\bar{x}_2$ та, при потребі, навішуючи заперечення над усією функцією, отримати кон'юнкцію $x_1 x_2$? Якщо так, вказати необхідну підстановку.

$$f(\tilde{x}^3) = (01111111).$$

Розв'язання. З'ясуємо, чи є функція $f(\tilde{x}^3)$ лінійною. Будуємо поліном Жегалкіна методом еквівалентних перетворень, попередньо зобразивши булеву функцію у вигляді ДКНФ:

$$f(\tilde{x}^3) \overset{ДКНФ}{=\!=\!=\!=} x_1^{\bar{0}} \vee x_2^{\bar{0}} \vee x_3^{\bar{0}} = x_1 \vee x_2 \vee x_3 = \overline{\overline{x_1 \vee x_2 \vee x_3}} =$$

$$= \overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3} = (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1)(x_3 \oplus 1) \oplus 1 = \ldots =$$

$$= x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3.$$

Отже, $f(\tilde{x}^3) \notin L$, тому, за лемою про нелінійну функцію, вказаними в умові діями з функції $f(\tilde{x}^3)$ можна отримати кон'юнкцію x_1x_2. Знайдемо відповідну підстановку, використовуючи конструктивне доведення леми.

1) Групуємо доданки в поліномі:

$$f(\tilde{x}^3) = x_1x_2\underbrace{(x_3 \oplus 1)}_{f_1(x_3)} \oplus x_1\underbrace{(x_3 \oplus 1)}_{f_2(x_3)} \oplus x_2\underbrace{(x_3 \oplus 1)}_{f_3(x_3)} \oplus \underbrace{x_3}_{f_4(x_3)}.$$

2) Знаходимо набір, на якому функція $f_1(x_3)$ набуває значення 1. Очевидно, це набір $(\alpha_3) = (0)$.

3) Вводимо функцію $\Phi(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, \alpha_3)$:

$$\Phi(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, 0) = x_1x_2 \oplus \alpha x_1 \oplus \beta x_2 \oplus \gamma,$$

де $\alpha = f_2(0) = 1,\ \beta = f_3(0) = 1,\ \gamma = f_4(0) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Phi(x_1, x_2) = x_1x_2 \oplus x_1 \oplus x_2.$$

4) Вводимо функцію $\Psi(x_1, x_2) = \Phi(x_1 \oplus \beta, x_2 \oplus \alpha) \oplus \alpha\beta \oplus \gamma$:

$$\Psi(x_1, x_2) = \Phi(x_1 \oplus 1, x_2 \oplus 1) \oplus 1 \oplus 0 = (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1) \oplus$$

$$\oplus (x_1 \oplus 1) \oplus (x_2 \oplus 1) \oplus 1 = \ldots = x_1x_2.$$

Отже,

$$x_1x_2 = \Psi(x_1, x_2) = \Phi(x_1 \oplus 1, x_2 \oplus 1) \oplus 1 = \Phi(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \oplus 1 =$$

$$= f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0) \oplus 1 = \overline{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)},$$

тобто $x_1x_2 = \overline{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)}$. ■

Завдання для самостійної роботи

Задача 5.3.5. З'ясувати, чи є лінійними наступні булеві функції:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2) \oplus x_3$;

2) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \oplus x_2) \sim \bar{x}_1 x_3$;

3) $m(\widetilde{x}^3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$;

4) $f(\widetilde{x}^3) = (00111100)$.

Задача 5.3.6. Довести, що функцію $x_1 \downarrow x_2$ не можна отримати з функцій $f_1 = \bar{x}_1$, $f_2 = x_2 \oplus x_3$, $f_3 = 1$ за допомогою операцій суперпозиції.

Задача 5.3.7. Обчислити кількість булевих функцій від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ у множині $L \setminus T_0$.

Задача 5.3.8. З'ясувати, чи можна з функції f, підставляючи на місце її змінних 0, 1, x_1, $\bar{x}_1$, x_2, $\bar{x}_2$ та, при потребі, навішуючи заперечення над усією функцією, отримати кон'юнкцію $x_1 x_2$? Якщо так, вказати необхідну підстановку.

1) $f(\widetilde{x}^3) = (10011001)$;

2) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3) \to (\bar{x}_2 \sim x_3)$;

3) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1$.

5.4. Двоїсті функції. Клас самодвоїстих булевих функцій (клас S)

Двоїстою *до булевої функції* $f(\widetilde{x}^n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *називається булева функція* $f^*(\widetilde{x}^n) = \overline{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)}$.

Із означення випливає, що якщо функція $f(\widetilde{x}^n)$ задається векторно, то для отримання векторного задання функції $f^*(\widetilde{x}^n)$ необхідно заперечити стовпчик значень функції $f(\widetilde{x}^n)$

і відобразити його симетрично відносно середини ("перевернути").

Має місце **властивість взаємності**: $f^{**}(\widetilde{x}^n) = f(\widetilde{x}^n)$.

Двійкові набори $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ *і* $(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_n)$ *називаються* ***протилежними****.*

Протилежні двійкові набори розташовані в таблиці істинності симетрично відносно середини: протилежним до першого буде останній, до другого – передостанній, і т.д.

Булева функція $f(\widetilde{x}^n)$ *називається* ***самодвоїстою****, тобто належить до класу* S*, якщо* $f(\widetilde{x}^n) = f^*(\widetilde{x}^n)$*, або, що те саме, якщо* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)}$ *.*

З цього означення випливає **критерій самодвоїстості**: *булева функція є самодвоїстою тоді і тільки тоді, коли на всіх протилежних двійкових наборах вона набуває протилежних значень.*

Позначимо через $S(n)$ множину тих функцій класу S, що залежать від n змінних.

Кількість всеможливих булевих функцій від n *змінних, що належать класу* S*, обчислюється за формулою:*

$$|S(n)| = 2^{2^{n-1}} = \sqrt{2^{2^n}}\ .$$

Клас S *– замкнутий (*$[S] = S$*), але не є повним (*$[S] \neq P_2$*).*

Лема про несамодвоїсту функцію. *Якщо булева функція* $f(\widetilde{x}^n) \notin S$*, то, підставляючи на місце її змінних самодвоїсті функції* x *та* $\overline{x}$*, можна отримати несамодвоїсту функцію-константу, тобто* 0 *або* 1*.*

Якщо булева функція $f(\widetilde{x}^n)$ – самодвоїста, то отримати з неї вказаними в умові леми діями константу неможливо. Це випливає із замкнутості класу S.

Задача 5.4.1. Побудувати двоїсті до наступних булевих функцій:

1) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \to x_2 x_3$;

2) $f(\widetilde{x}^3) = (01011110)$;

3) $m(\widetilde{x}^3) = (00010111)$.

З'ясувати, чи є серед цих функцій самодвоїсті функції.

Розв'язання.

1) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \to x_2 x_3$. Тоді, за означенням,

$$f^*(\widetilde{x}^3) = \overline{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)} = \overline{\overline{x}_1 \to \overline{x}_2 \overline{x}_3} = \overline{x_1 \vee \overline{x}_2 \overline{x}_3} =$$
$$= \overline{x}_1 \overline{\overline{x}_2 \overline{x}_3} = \overline{x}_1 (x_2 \vee x_3).$$

Оскільки $f(0,0,0) = 0 \to 0 \cdot 0 = 1$, а $f^*(0,0,0) = \overline{0} \cdot (0 \vee 0) = 0$, то $f(\widetilde{x}^3) \neq f^*(\widetilde{x}^3)$, тобто функція $f(\widetilde{x}^3)$ не є самодвоїстою. ■

2) $f(\widetilde{x}^3) = (01011110)$. Заперечуємо стовпчик значень функції $f(\widetilde{x}^3)$: $\overline{f(\widetilde{x}^3)} = (10100001)$. Відобразивши стовпчик значень функції $\overline{f(\widetilde{x}^3)}$ симетрично відносно середини, отримуємо векторне задання двоїстої функції $f^*(\widetilde{x}^3)$: $f^*(\widetilde{x}^3) = (10000101)$.

Очевидно, $f(\widetilde{x}^3) \neq f^*(\widetilde{x}^3)$, тобто функція $f(\widetilde{x}^3)$ не є самодвоїстою. ■

3) $m(\widetilde{x}^3) = (00010111)$. Маємо:

$$\overline{m(\widetilde{x}^3)} = (11101000), \quad m^*(\widetilde{x}^3) = (00010111).$$

Очевидно, $m(\widetilde{x}^3) = m^*(\widetilde{x}^3)$, тобто функція голосування $m(\widetilde{x}^3)$ є самодвоїстою. ■

Задача 5.4.2. З'ясувати, чи є функція g двоїстою до функції f:

$$f(x, y) = x \to y, \; g(x, y) = y \to x.$$

Розв'язання. Необхідно з'ясувати, чи $g(x, y) = f^*(x, y)$.

Векторні задання функцій f і g мають вигляд: $f(x, y) = (1101)$, $g(x, y) = (1011)$.

Знаходимо двоїсту до f: $\overline{f(x, y)} = (0010)$, $f^*(x, y) = (0100)$.

Очевидно, $f^*(x,y) \neq g(x,y)$ ($(0100) \neq (1011)$), отже, функція $g(x,y)$ не є двоїстою до функції $f(x,y)$. ■

Задача 5.4.3. З'ясувати, чи є самодвоїстою булева функція $f(\widetilde{x}^4) = (0001001001100111)$.

Розв'язання. Скористаємось критерієм самодвоїстості. Оскільки $f(0,1,0,0) = f(1,0,1,1) = 0$ ($f(\widetilde{x}^4) = (0001\underline{0}01001\underline{1}\underline{0}0111)$), то дана функція не є самодвоїстою: $f(\widetilde{x}^4) \notin S$. ■

Задача 5.4.4. Знайти функцію $f(x,x,\ldots,x)$, якщо $f(\widetilde{x}^n) \in S$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(\widetilde{x}^n)$ – самодвоїста, то

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \overline{f(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_n)}. \qquad (5.4.1)$$

$f(x,x,\ldots,x)$ – функція однієї змінної, тому введемо позначення:

$$\Phi(x) = f(x,x,\ldots,x).$$

Тоді $\Phi(0) = f(0,0,\ldots,0)$, $\Phi(1) = f(1,1,\ldots,1) \overset{(5.4.1)}{=} \overline{f(0,0,\ldots,0)}$.

Позначивши $f(0,0,\ldots,0) = \alpha$, маємо:

$$\Phi(0) = \alpha,\ \Phi(1) = \overline{\alpha}.$$

Оскільки $\alpha \in E_2 = \{0,1\}$, можливі 2 випадки.

1) $\alpha = 0$. В цьому випадку $\Phi(0) = 0$, $\Phi(1) = 1$, звідки випливає, що $\Phi(x) = x$, тобто $f(x,x,\ldots,x) = x$.
2) $\alpha = 1$. В цьому випадку $\Phi(0) = 1$, $\Phi(1) = 0$, звідки випливає, що $\Phi(x) = \overline{x}$, тобто $f(x,x,\ldots,x) = \overline{x}$.

Отже, $f(x,x,\ldots,x) = x$ або $f(x,x,\ldots,x) = \overline{x}$. ■

Задача 5.4.5. Обчислити кількість булевих функцій від змінних $x_1,x_2,\ldots,x_n$ у кожній із наступних множин:

1) $T_1 \cap S$;
2) $S \setminus T_1$;
3) $T_1 \setminus S$.

Розв'язання.

1) Розглянемо довільну функцію $f(\widetilde{x}^n) \in T_1 \cap S_1$. Маємо:

$$f(\widetilde{x}^n) \in T_1 \cap S \;\Rightarrow\; f(\widetilde{x}^n) \in T_1 \text{ і } f(\widetilde{x}^n) \in S \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; f(1,1,\dots,1) = 1 \text{ і } f(\widetilde{x}^n) \in S\,.$$

Оскільки самодвоїста функція на всіх протилежних двійкових наборах набуває протилежних значень, додатково отримуємо, що $f(0,0,\dots,0) = 0$. Таким чином, значення функції $f(\widetilde{x}^n)$ на $2^n - 2$ двійкових наборах невідомі, але на протилежних двійкових наборах значення цієї функції обов'язково повинні бути протилежними. Тому функцію $f(\widetilde{x}^n)$ слід довизначити лише на половині цих наборів. Всеможливими способами задаючи значення функції на цих $(2^n - 2)/2$ двійкових наборах, отримаємо всеможливі шукані функції із множини $T_1 \cap S$. Отже,

$$|\,T_1(n) \cap S(n)\,| = \overline{A}_2^{\,(2^n - 2)/2} = 2^{2^{n-1} - 1} = \frac{1}{2}\sqrt{2^{2^n}}\,. \;\blacksquare$$

2) Міркуючи аналогічно випадку 1), отримуємо:

$$|\,S(n) \setminus T_1(n)\,| = \overline{A}_2^{\,(2^n - 2)/2} = 2^{2^{n-1} - 1} = \frac{1}{2}\sqrt{2^{2^n}}\,. \;\blacksquare$$

3) Оскільки для будь-яких множин X і Y має місце рівність

$$X \setminus Y = X \setminus (X \cap Y)\,,$$

отримуємо:

$$|\,T_1(n) \setminus S(n)\,| = |\,T_1(n)\,| - |\,T_1(n) \cap S(n)\,| = \frac{1}{2}2^{2^n} - \frac{1}{2}\sqrt{2^{2^n}} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\, 2^{2^n} - \sqrt{2^{2^n}}\,\right). \;\blacksquare$$

Задача 5.4.6. З'ясувати, чи можна з функції f, підставляючи на місце її змінних x та $\overline{x}$, отримати константу? Якщо так, вказати необхідну підстановку.

$$f(\widetilde{x}^3) = (00110111)\,.$$

Розв'язання. Оскільки $f(0,1,0) = f(1,0,1) = 1$, то $f(\widetilde{x}^3) \notin S$. Отже, за лемою про несамодвоїсту функцію, вказаними в умові діями з функції $f(\widetilde{x}^3)$ можна отримати константу 1. Відповідні підстановки, побудовані на основі знайдених двійкових наборів, мають вигляд:

$$f(x^0, x^1, x^0) = f(\bar{x}, x, \bar{x}) \text{ і } f(x^1, x^0, x^1) = f(x, \bar{x}, x).$$

Таким чином, $f(\bar{x}, x, \bar{x}) \equiv 1$ і $f(x, \bar{x}, x) \equiv 1$. ■

Завдання для самостійної роботи

Задача 5.4.7. Побудувати двоїсті до наступних булевих функцій:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \oplus x_2) \downarrow \bar{x}_3$;
2) $f(\widetilde{x}^3) = (01101110)$.

Задача 5.4.8. З'ясувати, чи є функція g двоїстою до функції f:

1) $f(x, y) = x \oplus y$, $g(x, y) = x \sim y$;
2) $f(x, y, z) = (10000111)$, $g(x, y, z) = (00011100)$;
3) $f(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz$, $g(x, y, z) = xy \oplus xz \oplus yz$;
4) $f(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}z \vee x(y \sim z)$, $g(x, y, z) = (01101101)$.

Задача 5.4.9. З'ясувати, чи є самодвоїстими наступні булеві функції:

1) $f(\widetilde{x}^4) = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$;
2) $f(\widetilde{x}^3) = (00011111)$;
3) $f(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$.

Задача 5.4.10. Знайти функцію $f(x, x, \ldots, x)$, якщо:

1) $f(\widetilde{x}^n) \in S \cap T_0$;
2) $f(\widetilde{x}^n) \in S \cap T_1$;
3) $f(\widetilde{x}^n) \in S \setminus T_0$;
4) $f(\widetilde{x}^n) \in S \setminus T_1$;
5) $f(\widetilde{x}^n) \in S \setminus (T_0 \cup T_1)$;
6) $f(\widetilde{x}^n) \in S \setminus (T_0 \cap T_1)$.

Задача 5.4.11. Обчислити кількість булевих функцій від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ у кожній із наступних множин:

1) $S \cap T_0$;
2) $S \setminus T_0$;
3) $T_0 \setminus S$;
4) $S \cap T_0 \cap T_1$;
5) $S \setminus (T_0 \cap T_1)$;
6) $S \cup (T_0 \cap T_1)$.

Задача 5.4.12. З'ясувати, чи можна з функції f за допомогою операції суперпозиції отримати функцію g:

$$f = (10110010), \; g = (1000).$$

Задача 5.4.13. З'ясувати, чи можна з функції f, підставляючи на місце її змінних x та $\bar{x}$, отримати константу? Якщо так, вказати необхідну підстановку.

1) $f(\tilde{x}^3) = (10000110)$;
2) $f(\tilde{x}^3) = (10010110)$.

5.5. Клас монотонних булевих функцій (клас M)

Двійковий набір $\tilde{\alpha}^n = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ***передує*** *двійковому набору* $\tilde{\beta}^n = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ *(позначається* $\tilde{\alpha}^n << \tilde{\beta}^n$*), якщо* $\alpha_i \le \beta_i$ *для всіх* $i = \overline{1, n}$.

Булева функція $f(\tilde{x}^n)$ *називається* ***монотонною****, тобто належить до класу* M*, якщо для всіх наборів* $\tilde{\alpha}^n$ *і* $\tilde{\beta}^n$*, таких, що* $\tilde{\alpha}^n << \tilde{\beta}^n$*, виконується нерівність* $f(\tilde{\alpha}^n) \le f(\tilde{\beta}^n)$.

Із означення випливає, що $f(\tilde{x}^n) \notin M$, якщо знайдуться набори $\tilde{\alpha}^n$ *і* $\tilde{\beta}^n$, $\tilde{\alpha}^n << \tilde{\beta}^n$, для яких $f(\tilde{\alpha}^n) > f(\tilde{\beta}^n)$.

Клас M *– замкнутий* ($[M] = M$)*, але не є повним* ($[M] \ne P_2$)*.*

Лема про немонотонну функцію. *Якщо булева функція $f(\tilde{x}^n) \notin M$, то, підставляючи на місце її змінних монотонні функції 0, 1 та x, можна отримати немонотонну функцію $\bar{x}$.*

Якщо булева функція $f(\tilde{x}^n)$ – монотонна, то отримати з неї вказаними в умові леми діями немонотонну функцію $\bar{x}$ неможливо. Це випливає із замкнутості класу M.

Задача 5.5.1. З'ясувати, чи є монотонною булева функція $f(\tilde{x}^3) = (01110101)$.

Розв'язання. Будуємо таблицю істинності заданої функції:

x_1	x_2	x_3	$f(\tilde{x}^3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Послідовно переберемо всеможливі пари двійкових наборів. Якщо для наборів є передування, порівнюємо значення функції.

$(0,0,0) << (0,0,1)$, $f(0,0,0) = 0 \le 1 = f(0,0,1)$;
$(0,0,0) << (0,1,0)$, $f(0,0,0) = 0 \le 1 = f(0,1,0)$;
$(0,0,0) << (0,1,1)$, $f(0,0,0) = 0 \le 1 = f(0,1,1)$;
$(0,0,0) << (1,0,0)$, $f(0,0,0) = 0 \le 0 = f(1,0,0)$;
$(0,0,0) << (1,0,1)$, $f(0,0,0) = 0 \le 1 = f(1,0,1)$;
$(0,0,0) << (1,1,0)$, $f(0,0,0) = 0 \le 0 = f(1,1,0)$;
$(0,0,0) << (1,1,1)$, $f(0,0,0) = 0 \le 1 = f(1,1,1)$;

$(0,0,1)$ не передує $(0,1,0)$;
$(0,0,1) << (0,1,1)$, $f(0,0,1) = 1 \le 1 = f(0,1,1)$;
$(0,0,1)$ не передує $(1,0,0)$;
$(0,0,1) << (1,0,1)$, $f(0,0,1) = 1 \le 1 = f(1,0,1)$;

$(0,0,1)$ не передує $(1,1,0)$;

$(0,0,1) << (1,1,1)$, $f(0,0,1) = 1 \le 1 = f(1,1,1)$;

$(0,1,0) << (0,1,1)$, $f(0,1,0) = 1 \le 1 = f(0,1,1)$;

$(0,1,0)$ не передує $(1,0,0)$;

$(0,1,0)$ не передує $(1,0,1)$;

$(0,1,0) << (1,1,0)$, $f(0,1,0) = 1 > 0 = f(1,1,0)$.

Оскільки $(0,1,0) << (1,1,0)$, а $f(0,1,0) = 1 > 0 = f(1,1,0)$, то звідси випливає, що задана функція не є монотонною: $f(\tilde{x}^3) \notin M$. ■

Задача 5.5.2. Знайти функцію $f(\tilde{x}^n)$, якщо $f(\tilde{x}^n) \in M \setminus T_0$.

Розв'язання. З умови маємо:

$$f(\tilde{x}^n) \in M \setminus T_0 \;\Rightarrow\; f(\tilde{x}^n) \in M \;\text{ і }\; f(\tilde{x}^n) \notin T_0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; f(\tilde{x}^n) \in M \;\text{ і }\; f(0,0,\ldots,0) = 1.$$

Оскільки двійковий набір $(0,0,\ldots,0)$ передує всім нижче розташованим двійковим наборам і $f(0,0,\ldots,0) = 1$, то з монотонності функції $f(\tilde{x}^n)$ випливає, що її значення на всіх цих наборах також дорівнюють 1. Таким чином, $f(\tilde{x}^n) \equiv 1$. ■

Задача 5.5.3. З'ясувати, чи можна з функції f, підставляючи на місце її змінних 0, 1 та x, отримати функцію $\bar{x}$? Якщо так, вказати необхідну підстановку.

$$f(\tilde{x}^3) = (01111011).$$

Розв'язання. Оскільки $(0,0,1) << (1,0,1)$, а $f(0,0,1) = 1 > > 0 = f(1,0,1)$, то $f(\tilde{x}^3) \notin M$. Отже, за лемою про немонотонну функцію, вказаними в умові діями з функції $f(\tilde{x}^3)$ можна отримати функцію $\bar{x}$. Знайдемо відповідну підстановку, використовуючи конструктивне доведення леми.

Шукаємо двійкові набори $\tilde{\alpha}^3$ і $\tilde{\tilde{\alpha}}^3$, які є сусідніми за деякою координатою і на яких порушується умова монотонності, тобто $\tilde{\alpha}^3 << \tilde{\tilde{\alpha}}^3$, але $f(\tilde{\alpha}^3) > f(\tilde{\tilde{\alpha}}^3)$. Цими наборами, очевидно, є набори (0,0,1) і (1,0,1) (або набори (1,0,0) і (1,0,1)). Тоді відповідна підстановка матиме вигляд $f(x,0,1)$ (або $f(1,0,x)$).

Таким чином, $\bar{x} = f(x,0,1)$ або $\bar{x} = f(1,0,x)$. ■

Завдання для самостійної роботи

Задача 5.5.4. З'ясувати, чи є монотонними наступні булеві функції:

1) $f(\tilde{x}^3) = (00110111)$;
2) $f(\tilde{x}^3) = (01100111)$;
3) $f(\tilde{x}^4) = (0001010101010111)$.

Задача 5.5.5. Знайти функцію $f(\tilde{x}^n)$, якщо $f(\tilde{x}^n) \in M \setminus T_1$.

Задача 5.5.6. З'ясувати, чи можна з функції f, підставляючи на місце її змінних 0, 1 та x, отримати функцію $\bar{x}$? Якщо так, вказати необхідну підстановку.

1) $f(\tilde{x}^3) = (01111101)$;
2) $f(\tilde{x}^3) = (01100111)$;

Задача 5.5.7. Знайти всеможливі булеві функції, що задовольняють умови:

1) $f(\tilde{x}^3) \in M$, $f(1,0,0) = 1$, $f(\tilde{x}^3) \in S$;
2) $f(\tilde{x}^3) \in M$, $f(0,0,1) = 1$, $f(0,1,0) = 1$;
3) $f(\tilde{x}^4) \in M$, $f(1,0,0,0) = 1$, $f(0,1,1,1) = 0$;
4) $f(\tilde{x}^4) \in M$, $f(1,1,0,1) = 0$, $f(\tilde{x}^4) \in S$;
5) $f(\tilde{x}^4) \in M$, $f(1,0,0,0) = 1$, $f(\tilde{x}^4) \in L$.

5.6. Критерій повноти систем булевих функцій

Теорема Поста (критерій повноти). *Для того, щоб система булевих функцій H була повною, необхідно і досить, щоб вона не містилася повністю в жодному з класів T_0, T_1, L, S, M:*

$$[H]=P_2 \iff H\not\subseteq T_0,\ H\not\subseteq T_1,\ H\not\subseteq L,\ H\not\subseteq S,\ H\not\subseteq M.$$

Задача 5.6.1. Використовуючи критерій повноти, з'ясувати, чи є повними наступні системи булевих функцій:

1) $H=\{x_1\vee x_2,\ x_1x_2,\ x_1\to x_2\}$;

2) $H=\{x\overline{y},\ x\sim yz\}$;

3) $H=\{(01101001),(10001101),(00011100)\}$.

Розв'язання.

1) Позначимо функції системи H:

$$f_1(x_1,x_2)=x_1\vee x_2,\ \ f_2(x_1,x_2)=x_1x_2,\ \ f_3(x_1,x_2)=x_1\to x_2.$$

а) З'ясуємо, чи міститься система H в класі T_0. Маємо:

$$f_1(0,0)=0\vee 0=0 \ \Rightarrow\ f_1(x_1,x_2)\in T_0,$$
$$f_2(0,0)=0\cdot 0=0 \ \Rightarrow\ f_2(x_1,x_2)\in T_0,$$
$$f_3(0,0)=0\to 0=1 \ \Rightarrow\ f_3(x_1,x_2)\notin T_0 \ \Rightarrow\ H\not\subseteq T_0.$$

б) З'ясуємо, чи міститься система H в класі T_1. Маємо:

$$f_1(1,1)=1\vee 1=1 \ \Rightarrow\ f_1(x_1,x_2)\in T_1,$$
$$f_2(1,1)=1\cdot 1=1 \ \Rightarrow\ f_2(x_1,x_2)\in T_1,$$
$$f_3(1,1)=1\to 1=1 \ \Rightarrow\ f_3(x_1,x_2)\in T_1.$$

Оскільки всі функції системи H належать класу T_1, то система H міститься повністю в класі T_1: $H\subseteq T_1$. Тоді, за теоремою Поста, система H не є повною. ■

2) Позначимо функції системи H:

$$f(x,y)=x\overline{y},\ \ g(x,y,z)=x\sim yz.$$

а) $H\subseteq T_0$ – ?

$$f(0,0)=0\cdot\overline{0}=0 \ \Rightarrow\ f(x,y)\in T_0,$$
$$g(0,0,0)=0\sim 0\cdot 0=1 \ \Rightarrow\ g(x,y,z)\notin T_0 \ \Rightarrow\ H\not\subseteq T_0.$$

б) $H\subseteq T_1$ – ?

$$f(1,1)=1\cdot\overline{1}=0 \ \Rightarrow\ f(x,y)\notin T_1 \ \Rightarrow\ H\not\subseteq T_1.$$

в) $H\subseteq S$ – ?

$$f(0,0)=f(1,1)=0 \ \Rightarrow\ f(x,y)\notin S \ \Rightarrow\ H\not\subseteq S.$$

г) $H\subseteq M$ – ?

$(1,0)<<(1,1)$, а $f(1,0)=1>0=f(1,1) \ \Rightarrow\ f(x,y)\notin M \ \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad H \underline{\not\subset} M$.

д) $H \subseteq L$ – ?

$f(x,y) = x\bar{y} = x(y \oplus 1) = xy \oplus x \;\Rightarrow\; f(x,y) \notin L \;\Rightarrow\; H \underline{\not\subset} L$.

Отже, за теоремою Поста, система H є повною. ■

3) Позначимо функції системи H :

$$f_1(\tilde{x}^3) = (01101001),$$

$$f_2(\tilde{x}^3) = (10001101),$$

$$f_3(\tilde{x}^3) = (00011100).$$

а) $H \subseteq T_0$ – ?

$f_1(0,0,0) = 0 \;\Rightarrow\; f_1(\tilde{x}^3) \in T_0$,

$f_2(0,0,0) = 1 \;\Rightarrow\; f_2(\tilde{x}^3) \notin T_0 \;\Rightarrow\; H \underline{\not\subset} T_0$.

б) $H \subseteq T_1$ – ?

$f_1(1,1,1) = 1 \;\Rightarrow\; f_1(\tilde{x}^3) \in T_1$,

$f_2(1,1,1) = 1 \;\Rightarrow\; f_2(\tilde{x}^3) \in T_1$,

$f_3(1,1,1) = 0 \;\Rightarrow\; f_3(\tilde{x}^3) \notin T_1 \;\Rightarrow\; H \underline{\not\subset} T_1$.

в) $H \subseteq S$ – ?

$f_1(\tilde{x}^3) \in S$,

$f_2(0,0,0) = f_2(1,1,1) = 1 \;\Rightarrow\; f_2(\tilde{x}^3) \notin S \;\Rightarrow\; H \underline{\not\subset} S$.

г) $H \subseteq M$ – ?

$(0,0,1) << (0,1,1)$, а $f_1(0,0,1) = 1 > 0 = f_1(0,1,1) \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; f_1(\tilde{x}^3) \notin M \;\Rightarrow\; H \underline{\not\subset} M$.

д) $H \subseteq L$ – ?

Будуючи поліноми Жегалкіна методом невизначених коефіцієнтів або методом двійкового трикутника, отримуємо:

$f_1(\tilde{x}^3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \;\Rightarrow\; f_1(\tilde{x}^3) \in L$,

$f_2(\tilde{x}^3) = 1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \;\Rightarrow\; f_2(\tilde{x}^3) \notin L \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; H \underline{\not\subset} L$.

Отже, за теоремою Поста, система H є повною. ■

Завдання для самостійної роботи

Задача 5.6.2. Використовуючи критерій повноти, з'ясувати, чи є повними наступні системи булевих функцій:

1) $H = \{\overline{x},\ m(x, y, z)\}$;
2) $H = \{0,\ x_1 \vee x_2,\ x_1 \sim x_2\}$;
3) $H = \{x \to y,\ x \to \overline{y}z\}$;
4) $H = \{0, 1,\ x(y \sim z) \vee \overline{x}(y \oplus z)\}$;
5) $H = \{(00111111), (11100110)\}$.

ТЕМА 6. МІНІМІЗАЦІЯ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ У КЛАСІ ДНФ

6.1. Поняття імпліканти, простої імпліканти, скороченої ДНФ

*Функція $f_1(\tilde{x}^n)$ називається **імплікантою** функції $f_2(\tilde{x}^n)$, якщо виконується співвідношення:*

$$f_1(\tilde{x}^n) \to f_2(\tilde{x}^n) \equiv 1.$$

*Елементарна кон'юнкція K називається **простою імплікантою** булевої функції $f(\tilde{x}^n)$, якщо:*

1) *вона є імплікантою функції $f(\tilde{x}^n)$;*
2) *при відкиданні з неї будь-якої змінної отримується елементарна кон'юнкція, що вже не є імплікантою функції $f(\tilde{x}^n)$.*

Теорема. *Нехай $K_1, K_2, \ldots, K_p$ – всеможливі прості імпліканти булевої функції $f(\tilde{x}^n)$. Тоді має місце рівність:*

$$f(\tilde{x}^n) = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_p.$$

Інакше кажучи, будь-яку булеву функцію можна подати у вигляді диз'юнкції всіх її простих імплікант.

***Скороченою ДНФ** (СДНФ) булевої функції $f(\tilde{x}^n)$ називається диз'юнкція всіх простих імплікант цієї функції.*

Для кожної булевої функції існує єдина СДНФ.

Задача 6.1.1. У заданій множині елементарних кон'юнкцій K знайти прості імпліканти булевої функції $f(\tilde{x}^n)$:

$$K = \{x_1, \bar{x}_3, x_1x_2, x_2\bar{x}_3\}, \quad f(\tilde{x}^3) = (00101111).$$

Розв'язання. Позначимо елементарні кон'юнкції системи K:

$$K_1 = x_1,\ K_2 = \bar{x}_3,\ K_3 = x_1x_2,\ K_4 = x_2\bar{x}_3.$$

Побудуємо таблицю істинності булевої функції $f(\tilde{x}^3)$ і всі подальші обчислення здійснюватимемо таблично.

1) Досліdимо елементарну кон'юнкцію $K_1 = x_1$.

$$K_1 \to f(\tilde{x}^3) \equiv 1 \Rightarrow K_1 \text{ є імплікантою функції } f(\tilde{x}^3).$$

Відкинемо в елементарній кон'юнкції K_1 змінну x_1. Отримаємо елементарну кон'юнкцію $K_1^{(1)} = 1$.

$K_1^{(1)} \to f(\tilde{x}^3) \neq 1 \Rightarrow K_1^{(1)}$ не є імплікантою функції $f(\tilde{x}^3)$.

Отже, за означенням, K_1 є простою імплікантою функції $f(\tilde{x}^3)$.

2) Досліdимо елементарну кон'юнкцію $K_2 = \bar{x}_3$.

$$K_2 \to f(\tilde{x}^3) \neq 1 \Rightarrow K_2 \text{ не є імплікантою функції } f(\tilde{x}^3).$$

Отже, K_2 не є простою імплікантою функції $f(\tilde{x}^3)$, бо вона взагалі не є імплікантою цієї функції.

3) Досліdимо елементарну кон'юнкцію $K_3 = x_1 x_2$.

$$K_3 \to f(\tilde{x}^3) \equiv 1 \Rightarrow K_3 \text{ є імплікантою функції } f(\tilde{x}^3).$$

а) Відкинемо в елементарній кон'юнкції K_3 змінну x_1. Отримаємо елементарну кон'юнкцію $K_3^{(1)} = x_2$.

$K_3^{(1)} \to f(\tilde{x}^3) \neq 1 \Rightarrow K_3^{(1)}$ не є імплікантою функції $f(\tilde{x}^3)$.

б) Відкинемо в елементарній кон'юнкції K_3 змінну x_2. Отримаємо елементарну кон'юнкцію $K_3^{(2)} = x_1 = K_1$, яка, як було досліджено вище, є імплікантою функції $f(\tilde{x}^3)$.

Отже, імпліканта K_3 не є простою імплікантою функції $f(\tilde{x}^3)$ (K_3 є імплікантою, але ця імпліканта не є простою).

4) Досліdимо елементарну кон'юнкцію $K_4 = x_2 \bar{x}_3$.

$$K_4 \to f(\tilde{x}^3) \equiv 1 \Rightarrow K_4 \text{ є імплікантою функції } f(\tilde{x}^3).$$

а) Відкинемо в елементарній кон'юнкції K_4 змінну x_2. Отримаємо елементарну кон'юнкцію $K_4^{(1)} = \bar{x}_3 = K_2$, яка, як було досліджено вище, не є імплікантою функції $f(\tilde{x}^3)$.

б) Відкинемо в елементарній кон'юнкції K_4 змінну x_3. Отримаємо елементарну кон'юнкцію $K_4^{(2)} = x_2 = K_3^{(1)}$, яка, як було досліджено вище, не є імплікантою функції $f(\widetilde{x}^3)$.

Отже, за означенням, K_4 є простою імплікантою функції $f(\widetilde{x}^3)$.

Таблиця з відповідними обчисленнями:

x_1	x_2	x_3	$f(\widetilde{x}^3)$	A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Тут $A = K_1 \to f(\widetilde{x}^3)$, $B = K_1^{(1)} \to f(\widetilde{x}^3)$, $C = K_2 \to f(\widetilde{x}^3)$, $D = K_3 \to f(\widetilde{x}^3)$, $E = K_3^{(1)} \to f(\widetilde{x}^3)$, $F = K_4 \to f(\widetilde{x}^3)$.

Відповідь: $K_1 = x_1$ і $K_4 = x_2\overline{x}_3$ – прості імпліканти заданої булевої функції $f(\widetilde{x}^3)$. ■

Завдання для самостійної роботи

Задача 6.1.2. У заданій множині елементарних кон'юнкцій K знайти прості імпліканти булевої функції $f(\widetilde{x}^n)$:

$$K = \{x_1, x_1\overline{x}_2x_3, x_1\overline{x}_2, \overline{x}_1x_2\}, \quad f(\widetilde{x}^3) = (01111110).$$

6.2. Побудова скороченої ДНФ методом Нельсона

Метод Нельсона – найпростіший метод побудови скороченої ДНФ, що базується на наступному твердженні.

Теорема Нельсона. *Якщо в будь-якій КНФ булевої функції $f(\widetilde{x}^n)$ розкрити всі дужки, використовуючи дистрибутивність*

$a(b \vee c) = ab \vee ac$ та асоціативність $a \vee (b \vee c) = a \vee b \vee c$, і виконати всеможливі операції поглинання $p \vee pq = p$, отримається скорочена ДНФ цієї булевої функції.

Для зменшення громіздкості викладок, операції поглинання доцільно виконувати після кожного розкриття дужок.

Задача 6.2.1. Методом Нельсона побудувати скорочені ДНФ наступних булевих функцій:

1) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$;

2) $f(\tilde{x}^3) = (10011101)$.

Розв'язання.

1) Булеву функцію вже задано у вигляді КНФ. Тоді маємо:

$$f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) =$$
$$= (0 \vee x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_2 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3 \vee 0)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) =$$
$$= (x_1x_3 \vee x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) =$$
$$= x_1\bar{x}_2x_3 \vee 0 \vee 0 \vee x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 =$$
$$= x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \text{ – СДНФ. } \blacksquare$$

2) Зобразивши булеву функцію у вигляді ДКНФ, маємо:

$$f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) =$$
$$= (x_1 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_3 \vee x_1x_2 \vee 0 \vee x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee 0) \wedge$$
$$\wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) =$$
$$= 0 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee 0 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee 0 =$$
$$= x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \text{ – СДНФ. } \blacksquare$$

Завдання для самостійної роботи

Задача 6.2.2. Методом Нельсона побудувати скорочені ДНФ наступних булевих функцій:

1) $f(\tilde{x}^3) = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_3)$;

2) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \vee x_4)(x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$;

3) $f(\tilde{x}^3) = (10001111)$;

4) $f(\widetilde{x}^3) = (10110001)$.

6.3. Побудова скороченої ДНФ методом Квайна

Метод Квайна базується на наступному твердженні.

Теорема Квайна. *Якщо в ДДНФ булевої функції $f(\widetilde{x}^n)$ послідовно виконувати спочатку всеможливі операції неповного склеювання $px \vee p\overline{x} = p$, а потім всеможливі операції поглинання $p \vee pq = p$, то через скінченне число кроків процес завершиться і отримається скорочена ДНФ цієї булевої функції.*

На кожному кроці після виконання всеможливих склеювань (і, відповідно, перед виконанням всеможливих поглинань) до отриманого виразу слід також додавати елементарні кон'юнкції, що не брали участі в жодному склеюванні.

Для полегшення контролю за процесом викладок, на початку кожного кроку кон'юнкції нумерують. Якщо кон'юнкція бере участь хоча б у одному склеюванні, її номер обводять кружечком або беруть в дужки.

Задача 6.3.1. Методом Квайна побудувати скорочену ДНФ булевої функції $f(\widetilde{x}^3) = (11101010)$.

Розв'язання. Зобразивши булеву функцію у вигляді ДДНФ, маємо:

$$f(\widetilde{x}^3) = \overset{(1)}{\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3} \vee \overset{(2)}{\overline{x}_1\overline{x}_2x_3} \vee \overset{(3)}{\overline{x}_1x_2\overline{x}_3} \vee \overset{(4)}{x_1\overline{x}_2\overline{x}_3} \vee \overset{(5)}{x_1x_2\overline{x}_3} =$$

$$= \overset{1-2}{\overline{x}_1\overline{x}_2} \vee \overset{1-3}{\overline{x}_1\overline{x}_3} \vee \overset{1-4}{\overline{x}_2\overline{x}_3} \vee \overset{3-5}{x_2\overline{x}_3} \vee \overset{4-5}{x_1\overline{x}_3} =$$

$$= \overset{1}{\overline{x}_1\overline{x}_2} \vee \overset{(2)}{\overline{x}_1\overline{x}_3} \vee \overset{(3)}{\overline{x}_2\overline{x}_3} \vee \overset{(4)}{x_2\overline{x}_3} \vee \overset{(5)}{x_1\overline{x}_3} =$$

$$\overset{2-5}{=\ \bar{x}_3} \ \vee\ \overset{3-4}{\bar{x}_3} \ \vee\ \bar{x}_1\bar{x}_2 \ =$$

$$= \overset{1}{\bar{x}_3} \ \vee\ \overset{2}{\bar{x}_1\bar{x}_2} \ =$$

$$= \bar{x}_3 \ \vee\ \bar{x}_1\bar{x}_2$$ – СДНФ. ■

Завдання для самостійної роботи

Задача 6.3.2. Методом Квайна побудувати скорочені ДНФ наступних булевих функцій:

1) $f(\tilde{x}^3) = (10001111)$;
2) $f(\tilde{x}^3) = (00111111)$;
3) $f(\tilde{x}^3) = (11110110)$;
4) $f(\tilde{x}^3) = (11101101)$.

6.4. Побудова скороченої ДНФ методом Мак-Класкі

Якщо булева функція залежить від чотирьох чи більше змінних, викладки методу Квайна стають досить громіздкими. Мак-Класкі запропонував модифікацію методу Квайна, що базується на зображенні елементарних кон'юнкцій у вигляді двійкових номерів: якщо змінна входить у елементарну кон'юнкцію без заперечення, то у відповідному розряді двійкового номера пишеться 1, якщо з запереченням – 0, якщо взагалі не входить – прочерк.

Нехай, наприклад, вихідна булева функція залежала від п'яти змінних, тоді кон'юнкції $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5$ відповідатиме двійковий номер `10010`, а кон'юнкції $\bar{x}_1x_3x_4$ – двійковий номер `0-11-`.

Розряд двійкового номера, що містить 0 або 1, називають значущим, а розряд, що містить прочерк, – незначущим.

Очевидно, для конституент одиниці (елементарних кон'юнкцій із ДДНФ) двійкові номери формально співпадатимуть з двійковими наборами, за якими будувалися ці конституенти.

Кількість одиниць у двійковому номері називається ***індексом*** *цього номера*.

У методі Мак-Класкі всі двійкові номери розбивають на групи згідно з індексом.

Оскільки умовою склеювання в методі Квайна є те, що елементарні кон'юнкції повинні відрізнятися між собою способом входження тільки однієї змінної, то **умова склеювання в термінах двійкових номерів** матиме вигляд: *склеюватися будуть лише ті двійкові номери, у яких співпадають всі значущі розряди, крім одного* (наприклад, двійкові номери `1-100` і `1-110` будуть склеюватися за четвертим розрядом і результатом цього склеювання буде двійковий номер `1-1-0`). Звідси, в свою чергу, випливає, що *склеюватися можуть лише ті двійкові номери, індекси яких відрізняються на* 1*.*

Метод Мак-Класкі – метод Квайна у табличному вигляді. При цьому наявність зірочки біля двійкового номера буде ознакою його участі хоча б у одному склеюванні.

Всеможливі поглинання на кожному кроці слід виконувати як між двійковими номерами однакового індексу, так і між двійковими номерами різних індексів.

Двійковий номер K_i поглинатиме двійковий номер K_j, якщо всі значущі розряди номера K_i повністю співпадатимуть з відповідними розрядами номера K_j.

Задача 6.4.1. Методом Мак-Класкі побудувати скорочену ДНФ булевої функції $f(\widetilde{x}^4) = (1100000011111111)$.

Розв'язання. Побудувавши таблицю істинності булевої функції, знаходимо двійкові номери для конституент одиниці та обчислюємо їх індекси (вказані в дужках):

0000 (0), 0001 (1), 1000 (1), 1001 (2), 1010 (2), 1011 (3), 1100 (2), 1101 (3), 1110 (3), 1111 (4).

Заповнюємо таблицю і виконуємо відповідні викладки методу Квайна:

	Двійкові номери						
Індекси	**Початкові (ДДНФ)**	**Крок 1**		**Крок 2**		**Крок 3**	
		Результат всеможл. склеювань	Результат всеможл. поглинань (ДНФ)	Результат всеможл. склеювань	Результат всеможл. поглинань (ДНФ)	Результат всеможл. склеювань	Результат всеможл. поглинань (СДНФ)
0	0000 *	000- -000	000- * -000 *	-00- -00-	-00-	-00-	-00-
1	0001 * 1000 *	-001 100- 10-0 1-00	-001 * 100- * 10-0 * 1-00 *	10-- 1-0- 10-- 1--0 1-0- 1--0	10-- * 1-0- * 1--0 *	1--- 1--- 1---	1---
2	1001 * 1010 * 1100 *	10-1 1-01 101- 1-10 110- 11-0	10-1 * 1-01 * 101- * 1-10 * 110- * 11-0 *	1--1 1--1 1-1- 1-1- 11-- 11--	1--1 * 1-1- * 11-- *		
3	1011 * 1101 * 1110 *	1-11 11-1 111-	1-11 * 11-1 * 111- *				
4	1111 *						

Переходячи від отриманих на останньому кроці двійкових номерів до відповідних елементарних кон'юнкцій, отримуємо, що скорочена ДНФ заданої булевої функції має вигляд:

$$f(\widetilde{x}^4) = x_1 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 .$$ ■

Завдання для самостійної роботи

Задача 6.4.2. Методом Мак-Класкі побудувати скорочені ДНФ наступних булевих функцій:

1) $f(\widetilde{x}^4) = (1111111101110101)$;
2) $f(\widetilde{x}^4) = (0000011111111101)$;
3) $f(\widetilde{x}^4) = (1011111110111011)$;
4) $f(\widetilde{x}^4) = (0000001111111101)$;
5) $f(\widetilde{x}^4) = (0001011101111111)$.

6.5. Мінімальні та тупикові ДНФ. Побудова всеможливих мінімальних і тупикових ДНФ методом імплікантних таблиць

*Загальна кількість операцій, що містяться в ДНФ, називається **індексом простоти** (або **складністю**) цієї ДНФ.*

Індекс простоти ДНФ D позначатимемо $L(D)$.

Нехай, наприклад, $D = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3$, тоді $L(D) = 9$.

*ДНФ булевої функції $f(\widetilde{x}^n)$ називається **мінімальною,** якщо вона має найменший індекс простоти серед усіх ДНФ, що зображають цю функцію.*

Задача мінімізації полягає у знаходженні для заданої булевої функції її мінімальної ДНФ. Оскільки мінімальна ДНФ визначається за індексом простоти, вона може бути, взагалі кажучи, не єдиною.

Теорема про зв'язок між мінімальною та скороченою ДНФ. *Для будь-якої булевої функції $f(\widetilde{x}^n)$ мінімальна ДНФ або повністю співпадає зі скороченою ДНФ, або отримується з неї шляхом відкидання деяких простих імплікант.*

*ДНФ булевої функції $f(\widetilde{x}^n)$ називається **тупиковою**, якщо:*

1) *вона складається лише із простих імплікант функції $f(\widetilde{x}^n)$;*

2) *в результаті відкидання з неї будь-якої простої імпліканти отримується ДНФ, що вже не зображає функцію* $f(\tilde{x}^n)$.

З означення випливає, що будь-яка тупикова ДНФ або повністю співпадає зі скороченою ДНФ, або отримується з неї шляхом відкидання деяких простих імплікант.

Проста імпліканта, яку не можна відкидати зі скороченої ДНФ, називається ***ядровою*** *імплікантою.*

Кожна ядрова імпліканта буде входити до складу всіх тупикових і мінімальних ДНФ.

Теорема про зв'язок між мінімальною та тупиковою ДНФ. *Мінімальна ДНФ булевої функції* $f(\tilde{x}^n)$ *є тупиковою ДНФ цієї функції.*

З теореми випливає, що мінімальні ДНФ булевої функції $f(\tilde{x}^n)$ слід шукати серед тупикових ДНФ цієї функції.

Для побудови всеможливих тупикових і мінімальних ДНФ булевої функції $f(\tilde{x}^n)$ використовують **метод імплікантних таблиць**.

Суть цього методу полягає у наступному.

1) Будують досконалу ДНФ (ДДНФ) булевої функції $f(\tilde{x}^n)$.
2) Будують скорочену ДНФ (СДНФ) булевої функції $f(\tilde{x}^n)$.
3) Складають спеціальну імплікантну таблицю, рядками якої є прості імпліканти із СДНФ, а стовпцями – конституенти одиниці із ДДНФ. При цьому в комірці таблиці ставлять зірочку, якщо проста імпліканта поглинає (**покриває**) конституенту. Якщо після завершення побудови таблиці в деякому стовпчику міститься лише одна зірочка, то відповідна їй проста імпліканта є ядровою.
4) Знаходять сукупність ядрових імплікант (вони входитимуть до складу кожної із тупикових і мінімальних ДНФ).
5) В імплікантній таблиці викреслюють усі ядрові імпліканти та всі покриті ними конституенти (для

кожної ядрової імпліканти викреслюють її рядок і всі стовпці, що мають в ньому зірочки).

6) Якщо в отриманій після цього таблиці є рядки, що не містять жодної зірочки, повністю їх викреслюють.
7) Будують спрощену імплікантну таблицю, що отрималася після всіх попередніх кроків.
8) Знаходять всеможливі **ненадлишкові** сукупності простих імплікант, що своїми зірочками покривають усі конституенти (сукупність є ненадлишковою, якщо після відкидання з неї будь-якої простої імпліканти з'являється хоча б одна непокрита конституента).
9) Будуючи диз'юнкції всіх ядрових імплікант з імплікантами кожної із знайдених ненадлишкових сукупностей, отримують всеможливі тупикові ДНФ булевої функції $f(\tilde{x}^n)$.
10) Обчислюють індекси простоти отриманих тупикових ДНФ і знаходять серед них мінімальні ДНФ.

Задача 6.5.1. Методом імплікантних таблиць побудувати всеможливі тупикові та мінімальні ДНФ булевої функції

$$f(\tilde{x}^4) = (1110011000010101).$$

Розв'язання. ДДНФ заданої булевої функції має вигляд:

$$f(\tilde{x}^4) = \underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4}_{K_1} \vee \underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4}_{K_2} \vee \underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4}_{K_3} \vee \underbrace{\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4}_{K_4} \vee$$
$$\vee \underbrace{\bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4}_{K_5} \vee \underbrace{x_1\bar{x}_2x_3x_4}_{K_6} \vee \underbrace{x_1x_2\bar{x}_3x_4}_{K_7} \vee \underbrace{x_1x_2x_3x_4}_{K_8}$$

СДНФ заданої булевої функції, побудована методом Мак-Класкі, має вигляд:

$$f(\tilde{x}^4) = \underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3}_{p_1} \vee \underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4}_{p_2} \vee \underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_3x_4}_{p_3} \vee \underbrace{\bar{x}_1x_3\bar{x}_4}_{p_4} \vee \underbrace{x_2\bar{x}_3x_4}_{p_5} \vee \underbrace{x_1x_3x_4}_{p_6} \vee \underbrace{x_1x_2x_4}_{p_7}$$

Складаємо імплікантну таблицю (для компактності елементарні кон'юнкції записуємо у вигляді двійкових номерів):

	K_1 0000	K_2 0001	K_3 0010	K_4 0101	K_5 0110	K_6 1011	K_7 1101	K_8 1111
p_1 000-	*	*						
p_2 00-0	*		*					
p_3 0-01		*		*				
p_4 0-10			*		*			
p_5 -101				*			*	
p_6 1-11						*		*
p_7 11-1							*	*

Одну зірочку містять п'ятий і шостий стовпчики, ці зірочки відповідають імплікантам p_4 і p_6 відповідно. Отже, p_4 і p_6 – ядрові імпліканти.

Вилучаємо їх із імплікантної таблиці разом з покритими ними конституентами:

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8
p_1	*	*						
p_2	*		*					
p_3		*		*				
p_4			*		*			
p_5				*			*	
p_6						*		*
p_7							*	*

Будуємо спрощену імплікантну таблицю:

	K_1	K_2	K_4	K_7
p_1	*	*		
p_2	*			
p_3		*	*	
p_5			*	*
p_7				*

Для знаходження всеможливих ненадлишкових сукупностей простих імплікант, що своїми зірочками покривають усі конституенти (всеможливих ненадлишкових покриттів), скористаємось **методом Петрика**. Попередньо згадаємо, що логічній зв'язці "*або*" відповідає операція диз'юнкції, а логічній зв'язці "*і*" – операція кон'юнкції.

Конституенту K_1 можна покрити імплікантою p_1 або p_2 – ($p_1 \vee p_2$), K_2 – ($p_1 \vee p_3$), K_4 – ($p_3 \vee p_5$), K_7 – ($p_5 \vee p_7$). Оскільки нам потрібно одночасно покрити всі конституенти, ці дужки необхідно поєднати між собою операціями кон'юнкції (отримаємо кон'юнктивне покриття спрощеної імплікантної таблиці):

$$(p_1 \vee p_2)(p_1 \vee p_3)(p_3 \vee p_5)(p_5 \vee p_7).$$

Розкриваючи в цьому виразі дужки та виконуючи всеможливі поглинання (метод Нельсона), переходимо до диз'юнктивного покриття спрощеної імплікантної таблиці:

$$(p_1 \vee p_2)(p_1 \vee p_3)(p_3 \vee p_5)(p_5 \vee p_7) = (p_1 \vee p_1 p_3 \vee p_1 p_2 \vee p_2 p_3) \wedge$$
$$\wedge (p_3 p_5 \vee p_3 p_7 \vee p_5 \vee p_5 p_7) = (p_1 \vee p_2 p_3)(p_3 p_7 \vee p_5) =$$
$$= p_1 p_3 p_7 \vee p_1 p_5 \vee p_2 p_3 p_7 \vee p_2 p_3 p_5.$$

Кожен доданок отриманої логічної суми містить сукупність простих імплікант, що утворюють ненадлишкове покриття.

Таким чином, існують 4 ненадлишкові сукупності простих імплікант, що своїми зірочками покривають усі конституенти:

1) p_1, p_3, p_7;

2) p_1, p_5;

3) p_2, p_3, p_7;

4) p_2, p_3, p_5.

Тоді задана булева функція має 4 тупикові ДНФ:

$$T_1 = \underline{\underline{p_4 \vee p_6}} \vee p_1 \vee p_3 \vee p_7 =$$

$$= \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_4,$$

$$T_2 = \underline{\underline{p_4 \vee p_6}} \vee p_1 \vee p_5 =$$

$$= \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3 x_4,$$

$$T_3 = \underline{\underline{p_4 \vee p_6}} \vee p_2 \vee p_3 \vee p_7 =$$

$$= \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_4,$$

$$T_4 = \underline{\underline{p_4 \vee p_6}} \vee p_2 \vee p_3 \vee p_5 =$$

$$= \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4 \vee x_2 \bar{x}_3 x_4.$$

Оскільки $L(T_1) = 21$, $L(T_2) = 17$, $L(T_3) = 21$, $L(T_4) = 22$, то мінімальні ДНФ заданої булевої функції мають вигляд:

$$M_1 = T_2 = \underline{\underline{p_4 \vee p_6}} \vee p_1 \vee p_5 =$$

$$= \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3 x_4. \blacksquare$$

Завдання для самостійної роботи

Задача 6.5.2. Методом імплікантних таблиць побудувати всеможливі тупикові та мінімальні ДНФ наступних булевих функцій:

1) $f(\tilde{x}^4) = (1011111110010110)$;

2) $f(\tilde{x}^4) = (1100000001101110)$;

3) $f(\tilde{x}^4) = (0101011101110010)$;

4) $f(\tilde{x}^4) = (1100111001110111)$;

5) $f(\tilde{x}^4) = (0100111111101001)$;

6) $f(\tilde{x}^4) = (0111110001111111)$;

7) $f(\tilde{x}^3) = (01111110)$.

6.6. Побудова мінімальних ДНФ методом невизначених коефіцієнтів

Метод невизначених коефіцієнтів дозволяє побудувати якусь одну з мінімальних ДНФ заданої булевої функції $f(\tilde{x}^n)$. При цьому метод не вимагає попередньої побудови скороченої ДНФ.

Суть цього методу полягає у наступному.

1) Для булевої функції $f(\tilde{x}^n)$ виписують загальний вигляд ДНФ від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (диз'юнкцію всеможливих кон'юнкцій рангів $1, 2, \ldots, n$) із невідомими (невизначеними) коефіцієнтами.
2) Підставляючи у виписану ДНФ всеможливі двійкові набори, складають систему логічних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів.
3) Якщо в правій частині деякого рівняння стоїть нуль, то всі коефіцієнти цього рівняння рівні нулю, а тому викреслюють їх у цьому та всіх інших рівняннях системи. Виконавши таку процедуру для всіх рівнянь з нулем у правій частині, отримують спрощену систему логічних рівнянь, у правій частині кожного з яких стоїть одиниця.
4) У кожному рівнянні спрощеної системи знаходять коефіцієнт, що визначає кон'юнкцію найменшого рангу.
5) Покладають знайдені на попередньому кроці коефіцієнти рівними 1, а всі інші – рівними 0.
6) Знаючи значення всіх коефіцієнтів, виписують мінімальну ДНФ булевої функції $f(\tilde{x}^n)$.

Задача 6.6.1. Методом невизначених коефіцієнтів побудувати мінімальні ДНФ наступних булевих функцій:

1) $f(\tilde{x}^3) = (10001111)$;

2) $f(\tilde{x}^3) = (11011001)$.

Розв'язання.

1) Виписуємо для булевої функції $f(\tilde{x}^3)$ загальний вигляд

ДНФ від змінних x_1, x_2, x_3 із невідомими коефіцієнтами:

$$
\begin{aligned}
f(\tilde{x}^3) = {} & K_1^0\bar{x}_1 \vee K_1^1 x_1 \vee K_2^0\bar{x}_2 \vee K_2^1 x_2 \vee K_3^0\bar{x}_3 \vee K_3^1 x_3 \vee \\
& \vee K_{12}^{00}\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee K_{12}^{01}\bar{x}_1 x_2 \vee K_{12}^{10} x_1\bar{x}_2 \vee K_{12}^{11} x_1 x_2 \vee \\
& \vee K_{13}^{00}\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee K_{13}^{01}\bar{x}_1 x_3 \vee K_{13}^{10} x_1\bar{x}_3 \vee K_{13}^{11} x_1 x_3 \vee \\
& \vee K_{23}^{00}\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee K_{23}^{01}\bar{x}_2 x_3 \vee K_{23}^{10} x_2\bar{x}_3 \vee K_{23}^{11} x_2 x_3 \vee \\
& \vee K_{123}^{000}\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee K_{123}^{001}\bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \vee K_{123}^{010}\bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 \vee K_{123}^{011}\bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \\
& \vee K_{123}^{100} x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee K_{123}^{101} x_1\bar{x}_2 x_3 \vee K_{123}^{110} x_1 x_2\bar{x}_3 \vee K_{123}^{111} x_1 x_2 x_3 .
\end{aligned}
$$

Підставляючи у виписану ДНФ всеможливі двійкові набори, отримуємо наступну систему логічних рівнянь:

$$
\begin{array}{l}
\underline{(0,0,0)}: \\
\underline{(0,0,1)}: \\
\underline{(0,1,0)}: \\
\underline{(0,1,1)}: \\
\underline{(1,0,0)}: \\
\underline{(1,0,1)}: \\
\underline{(1,1,0)}: \\
\underline{(1,1,1)}:
\end{array}
\quad
\left\{
\begin{array}{l}
K_1^0 \vee K_2^0 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{00} \vee K_{13}^{00} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{000} = 1 \\
K_1^0 \vee K_2^0 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{00} \vee K_{13}^{01} \vee K_{23}^{01} \vee K_{123}^{001} = 0 \\
K_1^0 \vee K_2^1 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{01} \vee K_{13}^{00} \vee K_{23}^{10} \vee K_{123}^{010} = 0 \\
K_1^0 \vee K_2^1 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{01} \vee K_{13}^{01} \vee K_{23}^{11} \vee K_{123}^{011} = 0 \\
K_1^1 \vee K_2^0 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{100} = 1 \\
K_1^1 \vee K_2^0 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{11} \vee K_{23}^{01} \vee K_{123}^{101} = 1 \\
K_1^1 \vee K_2^1 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{10} \vee K_{123}^{110} = 1 \\
K_1^1 \vee K_2^1 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{11} \vee K_{23}^{11} \vee K_{123}^{111} = 1
\end{array}
\right.
$$

В правій частині другого, третього та четвертого рівнянь стоїть нуль. Тоді коефіцієнти, що входять у ці рівняння, рівні нулю, а тому викреслюємо їх у всіх рівняннях системи:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\cancel{K_1^0} \vee \cancel{K_2^0} \vee \cancel{K_3^0} \vee \cancel{K_{12}^{00}} \vee \cancel{K_{13}^{00}} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{000} = 1 \\
\cancel{K_1^0} \vee \cancel{K_2^0} \vee \cancel{K_3^1} \vee \cancel{K_{12}^{00}} \vee \cancel{K_{13}^{01}} \vee \cancel{K_{23}^{01}} \vee \cancel{K_{123}^{001}} = 0 \\
\cancel{K_1^0} \vee \cancel{K_2^1} \vee \cancel{K_3^0} \vee \cancel{K_{12}^{01}} \vee \cancel{K_{13}^{00}} \vee \cancel{K_{23}^{10}} \vee \cancel{K_{123}^{010}} = 0 \\
\cancel{K_1^0} \vee \cancel{K_2^1} \vee \cancel{K_3^1} \vee \cancel{K_{12}^{01}} \vee \cancel{K_{13}^{01}} \vee \cancel{K_{23}^{11}} \vee \cancel{K_{123}^{011}} = 0 \\
K_1^1 \vee \cancel{K_2^0} \vee \cancel{K_3^0} \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{100} = 1 \\
K_1^1 \vee \cancel{K_2^0} \vee \cancel{K_3^1} \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{11} \vee \cancel{K_{23}^{01}} \vee K_{123}^{101} = 1 \\
K_1^1 \vee \cancel{K_2^1} \vee \cancel{K_3^0} \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{10} \vee \cancel{K_{23}^{10}} \vee K_{123}^{110} = 1 \\
K_1^1 \vee \cancel{K_2^1} \vee \cancel{K_3^1} \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{11} \vee \cancel{K_{23}^{11}} \vee K_{123}^{111} = 1
\end{array}
\right.
$$

В результаті отримуємо наступну спрощену систему:

$$\begin{cases} K_{23}^{00} \vee K_{123}^{000} = 1 \\ K_1^1 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{100} = 1 \\ K_1^1 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{11} \vee K_{123}^{101} = 1 \\ K_1^1 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{10} \vee K_{123}^{110} = 1 \\ K_1^1 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{11} \vee K_{123}^{111} = 1 \end{cases}$$

У кожному рівнянні спрощеної системи шукаємо коефіцієнт, що визначає кон'юнкцію найменшого рангу. Для першого рівняння це коефіцієнт K_{23}^{00}, а для другого, третього, четвертого та п'ятого рівнянь – коефіцієнт K_1^1.

Тоді покладаємо:

$K_{23}^{00} = 1$, $K_1^1 = 1$, а всі решта коефіцієнтів рівні нулю.

Отже, мінімальна ДНФ заданої булевої функції має вигляд:

$$f(\tilde{x}^3) = x_1 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 . \blacksquare$$

2) Здійснюючи викладки аналогічно випадку 1), отримуємо наступну спрощену систему:

$$\begin{cases} K_{12}^{00} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{000} = 1 \\ K_{12}^{00} \vee K_{13}^{01} \vee K_{123}^{001} = 1 \\ K_{13}^{01} \vee K_{23}^{11} \vee K_{123}^{011} = 1 \\ K_{23}^{00} \vee K_{123}^{100} = 1 \\ K_{23}^{11} \vee K_{123}^{111} = 1 \end{cases}$$

Для першого, другого та третього рівнянь неможливо однозначно вказати коефіцієнт, що визначає кон'юнкцію найменшого рангу.

Для четвертого рівняння це коефіцієнт K_{23}^{00}, для п'ятого – K_{23}^{11}.

Оскільки коефіцієнти K_{23}^{00} і K_{23}^{11} ми покладатимемо рівними одиниці, а вони входять до першого та третього рівнянь, то ці рівняння задовольнятимуться за рахунок значень цих коефіцієнтів. Тому перше та третє рівняння з розгляду викидаємо.

В другому рівнянні серед коефіцієнтів K_{12}^{00} і K_{13}^{01} обираємо коефіцієнт K_{13}^{01}, оскільки він визначає елементарну кон'юнкцію з меншою складністю: $L(\bar{x}_1 x_3) = 2 < 3 = L(\bar{x}_1 \bar{x}_2)$.

Таким чином, покладаємо:

$K_{23}^{00} = 1$, $K_{23}^{11} = 1$, $K_{13}^{01} = 1$, а всі решта коефіцієнтів рівні нулю.

Отже, мінімальна ДНФ заданої булевої функції має вигляд:

$$f(\tilde{x}^3) = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_3 . \ \blacksquare$$

Завдання для самостійної роботи

Задача 6.6.2. Методом невизначених коефіцієнтів побудувати мінімальні ДНФ наступних булевих функцій:

1) $f(\tilde{x}^3) = (11101101)$;
2) $f(\tilde{x}^3) = (11110100)$;
3) $f(\tilde{x}^3) = (00110001)$;
4) $f(\tilde{x}^3) = (11001111)$;
5) $f(\tilde{x}^3) = (11000111)$;
6) $f(\tilde{x}^3) = (11001011)$;
7) $f(\tilde{x}^3) = (01101110)$;
8) $f(\tilde{x}^3) = (11100111)$.

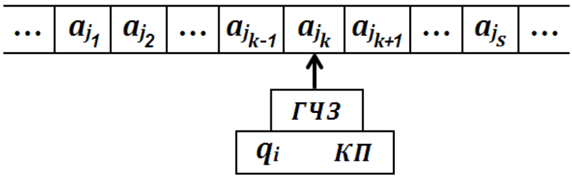
ТЕМА 7. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ АЛГОРИТМІВ

7.1. Машина Тюрінга

Машина Тюрінга (МТ) – абстрактна обчислювальна машина, запропонована в 1936 р. англійським математиком Аланом Тюрінгом для формального визначення поняття алгоритму.

7.1.1. Будова МТ

МТ складається з нескінченної в обидва боки стрічки, розбитої на комірки, керуючого пристрою (КП) та голівки читання-запису (ГЧЗ):



В комірках стрічки містяться певні символи із деякої множини допустимих символів $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, $n \geq 1$. Множина A називається **зовнішнім алфавітом** МТ. При цьому один із символів алфавіту A називається **порожнім**. Позначатимемо його надалі, якщо явно не вказано інше, символом 0 (нуль). Вважатимемо, що $0 = a_0$. Порожній символ потрібен для відокремлення між собою “слів”, утворених з інших непорожніх символів. Комірка, що містить порожній символ, називається **порожньою**.

Керуючий пристрій у кожний момент часу знаходиться в певному внутрішньому стані, що належить деякій множині допустимих станів $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_m\}$, $m \geq 1$. Множина Q називається **внутрішнім алфавітом** МТ. При цьому стан q_1 вважається **початковим** (саме в ньому машина завжди розпочинає свою роботу), а стан q_0 – **кінцевим** (зазвичай, саме в ньому машина закінчуватиме роботу).

Голівка читання-запису може переміщуватися вздовж стрічки, оглядаючи в кожний момент часу якусь одну її комірку. Голівка може зчитувати вміст комірки та записувати в неї деякий символ із зовнішнього алфавіту.

7.1.2. Функціонування МТ

Перед початком роботи МТ на стрічці знаходиться деяка початкова послідовність символів, керуючий пристрій перебуває в початковому стані q_1, а голівка читання-запису оглядає деяку комірку на стрічці.

Подальша робота МТ здійснюється **тактами** (кроками) в дискретні моменти часу t $(t = 1,2,3,\ldots)$.

У кожному такті, в залежності від поточного стану керуючого пристрою та поточного символу в оглядуваній голівкою комірці, виконуються 3 дії:

1) голівка записує в оглядувану нею комірку деякий символ із зовнішнього алфавіту (можливо, навіть такий самий);
2) голівка або залишається на місці, або зсувається на одну комірку вліво чи вправо;
3) керуючий пристрій перемикається в деякий новий внутрішній стан (можливо, навіть у такий самий).

Сукупність конкретних дій у конкретному такті описується **командою** МТ (машинною командою) вигляду

$$q_i, a_j \quad \to \quad q_k, a_l, D,$$

де

q_i – поточний стан керуючого пристрою,

a_j – поточний символ в оглядуваній голівкою комірці,

q_k – новий стан керуючого пристрою,

a_l – новий символ, що записується голівкою в оглядувану нею комірку,

$D \in \{S, L, R\}$ – напрям руху голівки:

S – відсутність руху (залишитися на місці),
L – зсув на одну комірку вліво,
R – зсув на одну комірку вправо.

Наприклад, команда

$$q_2, 5 \quad \to \quad q_4, 2, R$$

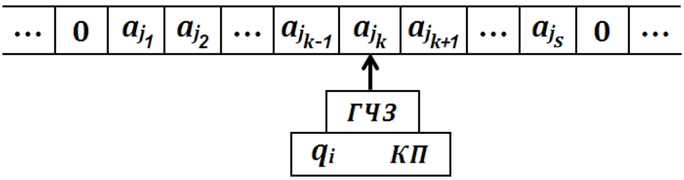
вказує, що у випадку, коли керуючий пристрій перебуває в стані q_2, а в оглядуваній голівкою комірці знаходиться символ 5, голівка повинна записати в оглядувану нею комірку символ 2 і переміститися на одну комірку вправо, а керуючий пристрій повинен перемкнутися в стан q_4.

Сукупність усіх команд МТ утворює **програму** МТ. Програму МТ можна задавати безпосереднім **переліком** усіх її команд або у вигляді **таблиці команд**. Рядки цієї таблиці відповідають станам внутрішнього алфавіту, а стовпці – символам зовнішнього алфавіту. Вмістом внутрішніх комірок таблиці є праві частини відповідних команд, тобто відповідні трійки вигляду $q_k a_l D$. При цьому деякі комірки таблиці можуть містити прочерк (–), тобто бути порожніми. Вони визначають так звані **порожні команди**. Якщо в процесі виконання програми зустрінеться порожня команда, то МТ припинить свою роботу.

Зазвичай, при виконанні заданої програми МТ через скінченну кількість тактів зупиняється. Однак програма можуть бути і такою, що МТ працюватиме безупинно (ніколи не зупиниться).

7.1.3. Конфігурації МТ. Застосовність і незастосовність МТ до початкового слова

В кожний дискретний момент часу t $(t = 1,2,3,\dots)$ для МТ визначені відповідні послідовність символів на стрічці, комірка, яку оглядає ГЧЗ, та внутрішній стан КП:



Все це разом утворює **конфігурацію** K_t МТ в момент часу t. Нехай крайній лівий непорожній символ на стрічці – a_{j_1}, крайній правий непорожній – a_{j_s}, голівка оглядає комірку з символом a_{j_k}, а керуючий пристрій перебуває в стані q_i. Тоді кажуть, що в момент часу t на стрічці записане **слово** $P_t = a_{j_1}a_{j_2}\dots a_{j_s}$ і що відповідна **конфігурація** K_t має вигляд:

$$K_t = a_{j_1}a_{j_2}\dots a_{j_{k-1}}q_i a_{j_k}\dots a_{j_s}.$$

Відзначимо, що в записі конфігурації внутрішній стан КП завжди вказується безпосередньо попереду символу, який оглядала ГЧЗ.

Зауважимо, що в деякі моменти часу ГЧЗ може знаходитися за межами відповідного слова. Приклади таких конфігурацій:

$q_i 0 a_{j_1}\dots a_{j_s}$ – ГЧЗ знаходиться зліва від слова,

$a_{j_1}\dots a_{j_s}00q_i$ – ГЧЗ знаходиться справа від слова.

Слово P_1 і конфігурація K_1, які наявні в дискретний момент часу $t=1$ (в момент початку роботи МТ), називаються ***початковими***. Як було відзначено раніше, початковим станом МТ завжди є стан q_1.

Слово і конфігурація, які наявні в момент закінчення роботи МТ, називаються ***кінцевими*** *та позначаються P_0 і K_0 відповідно*. Як було відзначено раніше, кінцевим станом МТ, зазвичай, є стан q_0 (зустрівши порожню команду, МТ може зупинятися і в будь-якому іншому поточному внутрішньому стані).

Початкова та кінцева конфігурації називаються ***стандартними****, якщо ГЧЗ оглядає крайню ліву непорожню комірку стрічки, тобто перший символ відповідного слова*.

Таким чином, стандартна початкова конфігурація має вигляд

$$K_1 = q_1 a_{j_1}a_{j_2}\dots a_{j_s},$$

а стандартна кінцева конфігурація має вигляд

$$K_0 = q_0 a_{j_1}a_{j_2}\dots a_{j_s}.$$

Якщо при виконанні програми МТ через скінченну кількість тактів роботи зупиняється, то кажуть, що МТ ***застосовна до початкового слова*** *P_1 і що результатом її застосування є кінцеве слово P_0, яке відповідає кінцевій конфігурації K_0.*

Якщо ж при виконанні програми МТ ніколи не зупиняється, *то кажуть, що МТ* ***незастосовна до початкового слова*** P_1.

Перехід МТ від конфігурації K_i до конфігурації K_j позначається записом

$$K_i \xrightarrow{T} K_j .$$

Тоді вся робота МТ, що досягає кінцевої конфігурації, може бути описана наступним чином:

$$K_1 \xrightarrow{T} K_2 \xrightarrow{T} K_3 \xrightarrow{T} \ldots \xrightarrow{T} K_0$$

або, коротко,

$$K_1 \overset{T}{\Rightarrow} K_0 .$$

Для компактного запису слів зі стрічки та конфігурацій МТ надалі під виразом X^n розумітимемо послідовність

$$XXX \ldots X ,$$

у якій фрагмент X повторюється рівно n разів.

Задача 7.1.1. Задано наступну програму МТ:

$q_i \backslash a_j$	0	1
q_1	$q_0 0 S$	$q_2 1 R$
q_2	$q_0 1 L$	$q_3 0 R$
q_3	$q_1 1 L$	$q_1 0 R$
q_0	–	–

Для вказаної початкової конфігурації K_1 знайти кінцеву конфігурацію K_0:

1) $K_1 = q_1 1^3 01$;

2) $K_1 = 10 q_1 1^4$;

3) $K_1 = 1 q_1 1^5$.

Розв'язання.

1) Виконаємо програму МТ для заданої початкової конфігурації $K_1 = q_1 1^3 01$:

K_1

…	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	…
		$\uparrow$ q_1						

$\xrightarrow{T}$

K_2

…	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	…
			$\uparrow$ q_2					

$\xrightarrow{T}$

K_3

…	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	…
				$\uparrow$ q_3				

$\xrightarrow{T}$

K_4

…	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	…
					$\uparrow$ q_1			

$\xrightarrow{T}$

$K_5 = K_0$

…	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	…
					$\uparrow$ q_0			

Таким чином, $K_0 = 100\,q_0\,01 = 10^2\,q_0\,01$. ■

2) Виконаємо програму МТ для заданої початкової конфігурації $K_1 = 10\,q_1 1^4$:

$$K_1 = 10q_1 1^4 \xrightarrow{T} K_2 = 101q_2 1^3 \xrightarrow{T} K_3 = 1010\,q_3 1^2 \xrightarrow{T}$$
$$\xrightarrow{T} K_4 = 10100\,q_1 1 \xrightarrow{T} K_5 = 101001q_2 \xrightarrow{T}$$

$\xrightarrow{T} K_6 = 10100q_0 11 = K_0$.

Таким чином, $K_0 = 10100q_0 11 = (10)^2 0 q_0 1^2$. ■

3) Виконаємо програму МТ для заданої початкової конфігурації $K_1 = 1q_1 1^5$:

$$K_1 = 1q_1 1^5 \xrightarrow{T} K_2 = 11q_2 1^4 \xrightarrow{T} K_3 = 110q_3 1^3 \xrightarrow{T}$$
$$\xrightarrow{T} K_4 = 1100q_1 1^2 \xrightarrow{T} K_5 = 11001q_2 1 \xrightarrow{T}$$
$$\xrightarrow{T} K_6 = 110010q_3 \xrightarrow{T} K_7 = 11001q_1 01 \xrightarrow{T}$$
$$\xrightarrow{T} K_8 = 11001q_0 01 = K_0.$$

Таким чином, $K_0 = 11001q_0 01 = 1^2 0^2 1 q_0 01$. ■

Задача 7.1.2. З'ясувати, чи застосовна машина Тюрінга з програмою

$q_i \backslash a_j$	0	1
q_1	$q_2 1R$	$q_3 0R$
q_2	$q_3 1L$	$q_2 1S$
q_3	–	$q_1 1R$
q_0	–	–

до початкового слова P_1. Якщо застосовна, то вказати результат її застосування, тобто кінцеве слово P_0. Початкову конфігурацію вважати стандартною.

1) $P_1 = 1^3 01^2$;

2) $P_1 = 1^4 01$;

3) $P_1 = 1^6$.

Розв'язання.

1) Виконавши програму МТ для початкової конфігурації $K_1 = q_1 1^3 01^2$, можна пересвідчитися, що МТ зупиняється в кінцевій конфігурації $K_0 = 10q_3 011$. Отже, МТ застосовна до початкового слова $P_1 = 1^3 01^2$ і результатом її застосування є кінцеве слово $P_0 = 10011 = 10^2 1^2$. ■

2) Виконуючи програму МТ для початкової конфігурації $K_1 = q_1 1^4 01$, можна пересвідчитися, що МТ ніколи не зупиниться, бо вона зациклюється на обробці останньої одиниці слова. Отже, МТ незастосовна до початкового слова $P_1 = 1^4 01$. ■

3) Виконавши програму МТ для початкової конфігурації $K_1 = q_1 1^6$, можна пересвідчитися, що МТ зупиняється в кінцевій конфігурації $K_0 = (10)^2 1^2 0 q_3$. Отже, МТ застосовна до початкового слова $P_1 = 1^6$ і результатом її застосування є кінцеве слово $P_0 = (10)^2 1^2$. ■

Завдання для самостійної роботи

Задача 7.1.3. Задано наступну програму МТ:

q_i \ a_j	0	1
q_1	$q_0 1 S$	$q_2 0 R$
q_2	$q_1 0 R$	$q_2 1 L$
q_0	–	–

Для вказаної початкової конфігурації K_1 знайти кінцеву конфігурацію K_0:

1) $K_1 = 1^2 q_1 1^3 01$;

2) $K_1 = 1 q_1 1^4$.

Задача 7.1.4. З'ясувати, чи застосовна машина Тюрінга з програмою

a_j \ q_i	0	1
q_1	$q_2\,0\,R$	$q_1\,1\,R$
q_2	$q_3\,0\,R$	$q_1\,1\,L$
q_3	$q_0\,0\,S$	$q_2\,1\,R$
q_0	–	–

до початкового слова P_1. Якщо застосовна, то вказати результат її застосування, тобто кінцеве слово P_0. Початкову конфігурацію вважати стандартною.

1) $P_1 = 1^3\,0^2\,1^2$;

2) $P_1 = 1^3\,0\,1^3$;

3) $P_1 = 10\,(01)^2\,1$.

Задача 7.1.5. З'ясувати, чи застосовна машина Тюрінга з програмою

a_j \ q_i	0	1
q_1	$q_1\,1\,R$	$q_2\,0\,R$
q_2	$q_1\,1\,R$	$q_3\,1\,L$
q_3	$q_1\,1\,L$	–
q_0	–	–

до початкового слова P_1. Якщо застосовна, то вказати результат її застосування, тобто кінцеве слово P_0. Початкову конфігурацію вважати стандартною.

1) $P_1 = 101^2$;

2) $P_1 = 1^2\,0^2\,1$.

7.2. Складання програм для машини Тюрінга

Задача 7.2.1. Скласти в зовнішньому алфавіті $A=\{0,1\}$ програму МТ, яка, починаючи з деякої стартової комірки, нескінченно заповнюватиме стрічку вправо одиницями.

Розв'язання. Початковим станом МТ є стан q_1. Незалежно від конкретного символу (0 чи 1) в стартовій комірці, голівка повинна записати в цю комірку одиницю та зсунутися на одну комірку вправо. А оскільки з наступною коміркою доведеться робити це ж саме, то керуючий пристрій слід залишити в стані q_1. Таким чином забезпечується організація нескінченного циклу для обробки всіх наступних комірок стрічки.

Відповідна програма МТ у вигляді переліку команд:

$q_1,0 \to q_1,1,R$,

$q_1,1 \to q_1,1,R$,

та у вигляді таблиці команд:

q_i \ a_j	0	1
q_1	$q_1 1 R$	$q_1 1 R$
q_0	–	–

Відзначимо, що МТ ніколи не зупиниться, отже, вона незастосовна до будь-якого початкового слова. ■

Задача 7.2.2. Скласти в зовнішньому алфавіті $A=\{0,a,b\}$ програму МТ, яка в довільному слові з символів "a" та "b" міняє кожний символ "a" на символ "b" та навпаки. Початкова та кінцева конфігурації повинні бути стандартними.

Розв'язання. В стані q_1 організовуємо цикл, в якому рухаємося по буквах початкового слова (крокуємо по комірках вправо) та робимо потрібну заміну символів:

$q_1,a \to q_1,b,R$,

$q_1,b \to q_1,a,R$.

Коли в стані q_1 вперше зустрінемо 0, це означає, що слово вже закінчилося, тому потрібно організувати повернення назад (вліво) до першої букви отриманого кінцевого слова. Для цього спочатку повертаємося на останню букву слова (тобто на попередню комірку ліворуч) і перемикаємося в стан q_2:

$$q_1,0 \to q_2,0,L,$$

після чого в стані q_2 організовуємо цикл повернення по буквах слова (крокуємо по комірках вліво), нічого не змінюючи на стрічці:

$$q_2,a \to q_2,a,L,$$

$$q_2,b \to q_2,b,L.$$

Коли в стані q_2 вперше зустрінемо 0, це означає, що ми знаходимося на порожній комірці зліва від першої букви слова. Не змінюючи порожню комірку, зсуваємося на комірку праворуч (на першу букву слова) та перемикаємося в кінцевий стан q_0 для закінчення роботи МТ:

$$q_2,0 \to q_0,0,R.$$

Дана програма МТ у вигляді таблиці команд:

$q_i \backslash a_j$	0	a	b
q_1	$q_2 0 L$	$q_1 b R$	$q_1 a R$
q_2	$q_0 0 R$	$q_2 a L$	$q_2 b L$
q_0	–	–	–

■

Задача 7.2.3. Скласти в зовнішньому алфавіті $A = \{0,1\}$ програму МТ, яка застосовна до всіх слів вигляду 1^{3n} і незастосовна до всіх слів вигляду 1^{3n+k}, $k = 1,2$ ($n \in \mathbb{N}$). Початкова та кінцева конфігурації повинні бути стандартними.

Розв'язання.

Згідно з умовою, робота МТ залежатиме від того, чи є кількість одиниць в початковому слові на стрічці кратною 3.

При цьому стрічка гарантовано непорожня і містить щонайменше 3 одиниці.

Для з'ясування кратності трьом організовуємо цикл, в якому крокуємо по одиницях вправо, послідовно чергуючи три стани ($q_1, q_2, q_3, q_1, q_2, q_3, q_1, q_2, q_3, \ldots$):

$$q_1, 1 \to q_2, 1, R\,,$$

$$q_2, 1 \to q_3, 1, R\,,$$

$$q_3, 1 \to q_1, 1, R\,.$$

Одиниці на стрічці врешті-решт закінчаться і в одному з цих трьох станів ми вперше натрапимо на 0.

Якщо 0 ми вперше зустріли в стані q_1, то це означає, що кількість одиниць в початковому слові на стрічці є кратною 3 (маємо слово вигляду 1^{3n}). До такого слова, згідно з умовою, МТ повинна бути застосовною, причому кінцева конфігурація повинна бути стандартною. Оскільки при цьому кінцеве слово явно не вказане, то його можна сформувати на власний розсуд. Наприклад, додамо зліва до одиниць на стрічці ще одну одиницю. Для цього спочатку повертаємося вліво на останню одиницю слова та перемикаємося в стан q_4:

$$q_1, 0 \to q_4, 0, L\,.$$

Далі в стані q_4 крокуємо по одиницях вліво, не змінюючи їх:

$$q_4, 1 \to q_4, 1, L\,.$$

Коли в стані q_4 зустрінемо 0, перетворюємо його на 1, залишаємось на місці та перемикаємося в кінцевий стан q_0 для закінчення роботи МТ:

$$q_4, 0 \to q_0, 1, S\,.$$

Якщо ж 0 ми вперше зустріли в стані q_2, то це означає, що кількість одиниць в початковому слові на стрічці не є кратною 3 (маємо слово вигляду 1^{3n+1}). До такого слова, згідно з умовою, МТ повинна бути незастосовною, тобто працювати нескінченно. Найпростіший варіант досягти цього – змусити машину нескінченно записувати поточний символ у поточну комірку:

$$q_2, 0 \to q_2, 0, S\,.$$

Нарешті, аналогічно попередньому випадку, якщо 0 ми вперше зустріли в стані q_3, то кількість одиниць в початковому слові на стрічці не є кратною 3 (маємо слово вигляду 1^{3n+2}) і змушуємо МТ працювати нескінченно за допомогою команди:

$$q_3, 0 \to q_3, 0, S.$$

Дана програма МТ у вигляді таблиці команд:

q_i \ a_j	0	1
q_1	$q_4 0 L$	$q_2 1 R$
q_2	$q_2 0 S$	$q_3 1 R$
q_3	$q_3 0 S$	$q_1 1 R$
q_4	$q_0 1 S$	$q_4 1 L$
q_0	–	–

■

Задача 7.2.4. Скласти в зовнішньому алфавіті $A = \{0,1\}$ програму МТ, яка перетворює початкову конфігурацію K_1 у кінцеву конфігурацію K_0:

1) $K_1 = q_1 1^n$, $K_0 = q_0 1^{2n}$ ($n \in \mathbb{N}$);

2) $K_1 = q_1 0^n 1^n$, $K_0 = q_0 (01)^n$ ($n \in \mathbb{N}$).

Розв'язання.

1) Згідно з умовою, стрічка непорожня і МТ повинна подвоїти кількість одиниць на стрічці.

<u>Загальний опис алгоритму.</u> Залишимо справа від початкового слова одну порожню комірку в якості розділювача, а після нього і утворюватимемо шукане кінцеве слово. Для цього організуємо цикл, у кожній ітерації якого занулюватимемо чергову одиницю початкового слова та додаватимемо ще дві одиниці у слово після розділювача. Таким чином, після завершення циклу, початкове слово буде повністю витерте, а кінцеве – повністю сформоване.

Реалізація алгоритму. В стані q_1 занулюємо крайню ліву одиницю, зсуваємося вправо та перемикаємося в стан q_2:

$q_1,1 \to q_2,0,R$.

В стані q_2 рухаємося вправо по решті одиниць, не змінюючи їх:

$q_2,1 \to q_2,1,R$.

Коли в стані q_2 зустрічаємо нуль, залишаємо його (як розділювач), зсуваємося вправо та перемикаємося в стан q_3:

$q_2,0 \to q_3,0,R$.

В стані q_3 рухаємося вправо по решті одиниць, якщо вони є (вони будуть у всіх ітераціях, окрім першої), не змінюючи їх:

$q_3,1 \to q_3,1,R$.

Коли в стані q_3 зустрічаємо нуль, перетворюємо його в одиницю, зсуваємося вправо та перемикаємося в стан q_4:

$q_3,0 \to q_4,1,R$.

В стані q_4 гарантовано побачимо нуль, перетворюємо його в одиницю, залишаємося на місці та перемикаємося в стан q_5:

$q_4,0 \to q_5,1,S$.

В стані q_5 рухаємося по одиниця вліво, не змінюючи їх (повертаємося до розділювача):

$q_5,1 \to q_5,1,L$.

Коли в стані q_5 зустрічаємо нуль (розділювач), залишаємо його, зсуваємося вліво та перемикаємося в стан q_6:

$q_5,0 \to q_6,0,L$.

В стані q_6 рухаємося вліво по одиницях початкового слова, не змінюючи їх:

$q_6,1 \to q_6,1,L$.

Коли в стані q_6 зустрічаємо нуль, залишаємо його, зсуваємося вправо (щоб стати на першу з тих одиниць початкового слова, що залишилися) та починаємо все заново, перемикаючись в стан q_1:

$q_6, 0 \to q_1, 0, R$.

В процесі виконання вищенаведеного циклу врешті-решт виникне ситуація, що в стані q_1 ми вже зустрінемо нуль, а не одиницю. Це означає, що одиниць із початкового слова на стрічці вже не залишилося, тобто ми знаходимося на розділювачі, тому, не змінюючи розділювач, зсуваємося на комірку праворуч (на першу одиницю кінцевого слова) та перемикаємося в кінцевий стан:

$q_1, 0 \to q_0, 0, R$.

Дана програма МТ у вигляді таблиці команд:

q_i \ a_j	0	1
q_1	$q_0 0 R$	$q_2 0 R$
q_2	$q_3 0 R$	$q_2 1 R$
q_3	$q_4 1 R$	$q_3 1 R$
q_4	$q_5 1 S$	–
q_5	$q_6 0 L$	$q_5 1 L$
q_6	$q_1 0 R$	$q_6 1 L$
q_0	–	–

■

2) Загальний опис алгоритму. Починаючи зі стартової комірки з нулем, рухаємося вправо, замінюючи всі 0 на 1. Далі йдемо вправо по початкових одиницях до останньої одиниці в щойно отриманій групі з $2n$ одиниць. Починаючи з цієї останньої одиниці, рухаємося вліво, чергуючи 2 стани, в першому з яких 1 залишаємо, а в другому – занулюємо. Коли потрапляємо на 0 (це обов'язково відбудеться в першому із двох вказаних станів, бо кількість одиниць на стрічці була парною), 0 залишаємо, зсуваємося вправо та завершуємо роботу.

Реалізація алгоритму. Програма МТ у вигляді таблиці команд:

a_j / q_i	0	1
q_1	$q_1 1R$	$q_2 1S$
q_2	$q_3 0L$	$q_2 1R$
q_3	$q_0\, 0R$	$q_4 1L$
q_4	–	$q_3 0L$
q_0	–	–

■

Завдання для самостійної роботи

Задача 7.2.5. Скласти в зовнішньому алфавіті $A = \{0,1\}$ програму МТ, яка застосовна до всіх слів вигляду 1^{2n+1} і незастосовна до всіх слів вигляду 1^{2n+2} ($n \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\}$). Початкова та кінцева конфігурації повинні бути стандартними.

Задача 7.2.6. Скласти в зовнішньому алфавіті $A = \{0,1\}$ програму МТ, яка перетворює початкову конфігурацію K_1 у кінцеву конфігурацію K_0:

1) $K_1 = q_1 1^n 01^m$, $K_0 = q_0 1^{n+m}$ ($n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$);
2) $K_1 = q_1 1^{2n}$, $K_0 = q_0 1^n$ ($n \in \mathbb{N}$);
3) $K_1 = q_1 1^{2n}$, $K_0 = q_0 1^{3n}$ ($n \in \mathbb{N}$);
4) $K_1 = q_1 1^{3n}$, $K_0 = q_0 1^{2n}$ ($n \in \mathbb{N}$);
5) $K_1 = q_1 1^n 01^m$, $K_0 = q_0 1^m 01^n$ ($n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$);
6) $K_1 = q_1 0^n 1^n$, $K_0 = q_0 (10)^n$ ($n \in \mathbb{N}$);
7) $K_1 = q_1 1^n$, $K_0 = q_0 1^n 01^n$ ($n \in \mathbb{N}$).

Задача 7.2.7. Скласти в зовнішньому алфавіті $A = \{*, 0, 1\}$, де $*$ – порожній символ, програму МТ, яка додає одиницю до двійкового числа, записаного на стрічці. Початкова та кінцева конфігурації повинні бути стандартними.

Задача 7.2.8. Скласти в зовнішньому алфавіті $A = \{*, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, де $*$ – порожній символ, програму МТ, яка додає одиницю до десяткового числа, записаного на стрічці. Початкова та кінцева конфігурації повинні бути стандартними.

7.3. Функції, обчислювані за Тюрінгом

Розглянемо МТ з найпростішим зовнішнім алфавітом $A = \{0,1\}$, де 0 – порожній символ, та спеціальні початкові слова, що називаються основним кодом і використовуються для зображення чисел з множини $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Основним кодом числа $\beta \in \mathbb{N}_0$ *називається послідовність символів на стрічці, що складається з* $(\beta + 1)$ *-ї одиниці:*

$$\ldots 0\underbrace{11\ldots11}_{\beta+1}0\ldots = \ldots 01^{\beta+1}0\ldots,$$

тобто, по суті, слово $1^{\beta+1}$.

Наприклад, основним кодом числа 3 є слово 1^4, а основним кодом числа 0 є слово 1.

Основним кодом впорядкованого набору чисел $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, *де* $\beta_i \in \mathbb{N}_0$ *(*$i = \overline{1, n}$*), називається послідовність символів на стрічці вигляду*

$$\ldots 0\underbrace{11\ldots1}_{\beta_1+1}0\underbrace{11\ldots1}_{\beta_2+1}0\ldots0\underbrace{11\ldots1}_{\beta_n+1}0\ldots = \ldots 01^{\beta_1+1}01^{\beta_2+1}0\ldots01^{\beta_n+1}0\ldots,$$

тобто послідовність з основних кодів відповідних чисел набору, відокремлених між собою порожнім символом.

Наприклад, основний код набору (1, 4) має вигляд $1^2 01^5$.

Функція $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n \geq 1$, *що визначена на деякій множині* $D_f \subseteq \mathbb{N}_0^n$ *і набуває значень із множини* $\mathbb{N}_0$, *називається* ***частковою*** n ***-місною числовою функцією***.

Наприклад, функція $f(x_1,x_2)=x_1\cdot x_2$, де $x_1\in\mathbb{N}$, $x_2\in\mathbb{N}$, є частковою двомісною числовою функцією, а функція $f(x)=x+5$, де $x\in\mathbb{N}_0$, є частковою одномісною числовою функцією.

Часткова числова функція $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ називається ***правильно обчислюваною за Тюрінгом****, якщо існує програма МТ, що правильно обчислює цю функцію:*

1) *при $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in D_f$ машина, починаючи роботу в стандартній початковій конфігурації*
$$K_1=q_1 1^{\alpha_1+1}01^{\alpha_2+1}0\ldots01^{\alpha_n+1}, \qquad (7.3.1)$$
закінчує роботу в стандартній кінцевій конфігурації
$$K_0=q_0 1^{\gamma+1},\quad \text{де } \gamma=f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n);$$
2) *при $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\notin D_f$ машина, починаючи роботу в стандартній початковій конфігурації (7.3.1), ніколи не зупиняється (працює нескінченно).*

Умова 1) у наведеному означенні, по суті, вимагає, щоб при наявності на стрічці допустимих аргументів функції МТ обчислювала і залишала на стрічці відповідне значення функції від цих аргументів. Умова ж 2), по суті, вимагає, щоб при відсутності на стрічці допустимих аргументів функції МТ працювала нескінченно.

Задача 7.3.1. Скласти в зовнішньому алфавіті $A=\{0,1\}$ програму МТ, що правильно обчислює функцію:
$$f(x)=\begin{cases} x+1, \text{ якщо } x-\text{парне}, \\ x-1, \text{ якщо } x-\text{непарне} \end{cases} \qquad (x\in\mathbb{N}_0).$$

Розв'язання. Очевидно, в даному випадку маємо часткову одномісну числову функцію. Для одномісної функції відсутність на стрічці допустимого аргументу, по суті, означає порожню стрічку. Таким чином, нам необхідно скласти програму МТ, що працює наступним чином:

1) якщо стрічка порожня, то МТ повинна працювати нескінченно;
2) якщо стрічка непорожня, то робота МТ повинна мати

вигляд

$$K_1 = q_1 1^{x+1} \overset{T}{\Rightarrow} K_0 = \begin{cases} q_0 1^{x+2}, \text{ якщо } x - \text{парне}, \\ q_0 1^{x}, \text{ якщо } x - \text{непарне}. \end{cases}$$

Нескінченну роботу МТ у випадку порожньої стрічки забезпечуємо за допомогою всього-навсього однієї команди:

$q_1, 0 \rightarrow q_1, 0, S$.

У випадку непорожньої стрічки спочатку потрібно з'ясувати, парне чи непарне число зображається на стрічці, тобто кількість одиниць на стрічці є відповідно непарною чи парною. Для цього достатньо організувати проходження вправо всіх одиниць з циклічним чергуванням двох станів, але попередньо необхідно ввімкнути перший з цих станів.

Тому зі стану q_1, в якому знаходимося на першій одиниці, просто перемикаємося в стан q_2:

$q_1, 1 \rightarrow q_2, 1, S$.

Далі організовуємо цикл, в якому крокуємо по одиницях вправо, послідовно чергуючи два стани ($q_2, q_3, q_2, q_3, q_2, q_3, \ldots$):

$q_2, 1 \rightarrow q_3, 1, R$,

$q_3, 1 \rightarrow q_2, 1, R$.

Одиниці на стрічці врешті-решт закінчаться і в одному з цих двох станів ми вперше натрапимо на 0.

Якщо 0 ми зустріли в стані q_2, то це означає, що кількість одиниць на стрічці є парною, тобто на стрічці зображене непарне число. Згідно з умовою, МТ в цьому випадку повинна занулити останню одиницю. Для цього повертаємося вліво на останню одиницю та перемикаємося в стан q_4:

$q_2, 0 \rightarrow q_4, 0, L$.

В стані q_4 зануляємо останню одиницю, зсуваємося вліво та перемикаємося в стан q_5:

$q_4, 1 \rightarrow q_5, 0, L$.

Далі в стані q_5 організовуємо повернення на крайню ліву одиницю:

$q_5, 1 \rightarrow q_5, 1, L$,

$q_5, 0 \to q_0, 0, R$.

Якщо ж 0 ми зустріли в стані q_3, то це означає, що кількість одиниць на стрічці є непарною, тобто на стрічці зображене парне число. Згідно з умовою, МТ в цьому випадку повинна дописати ще одну одиницю. Тому нуль перетворюємо в одиницю, залишаємося на місці та перемикаємося в стан q_5, який забезпечує повернення на крайню ліву одиницю:

$q_3, 0 \to q_5, 1, S$.

Дана програма МТ у вигляді таблиці команд:

$q_i \backslash a_j$	0	1
q_1	$q_1\,0\,S$	$q_2\,1\,S$
q_2	$q_4\,0\,L$	$q_3\,1\,R$
q_3	$q_5\,1\,S$	$q_2\,1\,R$
q_4	–	$q_5\,0\,L$
q_5	$q_0\,0\,R$	$q_5\,1\,L$
q_0	–	–

■

Завдання для самостійної роботи

Задача 7.3.2. Скласти в зовнішньому алфавіті $A = \{0,1\}$ програму МТ, що правильно обчислює функцію:

1) $f(x) = x + 2 \quad (x \in \mathbb{N}_0)$;
2) $f(x) = x + 3 \quad (x \in \mathbb{N}_0)$;
3) $f(x) = 2 \quad (x \in \mathbb{N}_0)$;
4) $f(x) = \begin{cases} 2, \text{ якщо } x = 0, \\ x, \text{ якщо } x \neq 0 \end{cases} \quad (x \in \mathbb{N}_0)$;
5) $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x = 0, \\ x - 1, \text{ якщо } x \geq 1 \end{cases} \quad (x \in \mathbb{N}_0)$;

6) $f(x)=\begin{cases} x, \text{ якщо } x - \text{парне}, \\ x+1, \text{ якщо } x - \text{непарне} \end{cases}$ $(x \in \mathbb{N}_0)$;

7) $f(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x - \text{непарне}, \\ x, \text{ якщо } x - \text{парне} \end{cases}$ $(x \in \mathbb{N}_0)$;

8) $f(x)=sg(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x=0, \\ 1, \text{ якщо } x \ge 1 \end{cases}$ $(x \in \mathbb{N}_0)$;

9) $f(x)=\overline{sg(x)}=1-sg(x)=\begin{cases} 1, \text{ якщо } x=0, \\ 0, \text{ якщо } x \ge 1 \end{cases}$ $(x \in \mathbb{N}_0)$;

10) $f(x)=\begin{cases} x, \text{ якщо } x - \text{парне}, \\ x-1, \text{ якщо } x - \text{непарне} \end{cases}$ $(x \in \mathbb{N}_0)$;

11) $f(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x - \text{не кратне } 3, \\ x, \text{ якщо } x - \text{кратне } 3 \end{cases}$ $(x \in \mathbb{N}_0)$;

12) $f(x)=\begin{cases} 1, \text{ якщо } x=1, \\ 0, \text{ якщо } x \ge 2, \\ \infty, \text{ якщо } x=0 \end{cases}$ $(x \in \mathbb{N}_0)$.

7.4. Машина з необмеженими регістрами

Машина з необмеженими регістрами (МНР) – абстрактна обчислювальна машина, запропонована в 1963 р. англійським і американським математиками Дж. Шепердсоном і Г. Стерджісом для формального визначення поняття алгоритму.

МНР містить безліч **регістрів** $R_1, R_2, R_3, \dots$, у кожний момент часу в яких зберігаються деякі цілі невід'ємні числа $r_1, r_2, r_3, \dots$ відповідно:

R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	…
r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	…

МНР може змінювати вміст регістрів при виконанні **команд**. Скінченний пронумерований перелік команд утворює

програму. Команди програми послідовно нумеруються числами $1, 2, 3, \ldots$.

МНР сприймає команди наступних чотирьох типів:

1) **команду занулення** $Z(n)$, яка є вказівкою занулити вміст регістру R_n ($r_n := 0$);
2) **команду додавання одиниці** $S(n)$, яка є вказівкою збільшити вміст регістру R_n на 1 ($r_n := r_n + 1$);
3) **команду переадресації** $T(m,n)$, яка є вказівкою замінити вмістом регістру R_m вміст регістру R_n ($r_n := r_m$);
4) **команду умовного переходу** $J(m,n,q)$, яка є вказівкою порівняти вміст регістрів R_m та R_n, після чого у випадку $r_n = r_m$ перейти до виконання команди програми з номером q, а у випадку $r_n \neq r_m$ – до виконання наступної команди програми (IF $r_n = r_m$ GOTO q). При цьому спроба переходу до неіснуючої команди викликатиме зупинку машини.

МНР, як і будь-який алгоритм, при виконанні заданої програми працює **тактами** (кроками).

Для кожного такту послідовність чисел $(r_1, r_2, r_3, \ldots)$ у відповідних регістрах називається **конфігурацією** МНР.

Конфігурація МНР перед початком її роботи (перед виконанням першого такту) називається **початковою**.

Перший такт для заданої початкової конфігурації – виконання команди з номером 1. Далі послідовно виконуватимуться команди з номерами 2, 3 і т.д. Цей природний послідовний порядок виконання команд триватиме до тих пір, поки не зустрінеться команда умовного переходу $J(m,n,q)$, яка може його змінити.

Якщо в процесі виконання програми виникає ситуація, що чергова команда відсутня (тобто слід виконувати неіснуючу команду), то виконання програми завершується і МНР зупиняється. Конфігурація МНР після її зупинки називається

кінцевою, а відповідний вміст регістру R_1 (число r_1) вважається **результатом** роботи МНР.

Задача 7.4.1. Задано наступну програму МНР:

1. Z(2)
2. S(1)
3. J(2,4,7)
4. S(2)
5. S(3)
6. J(3,3,2)
7. T(3,2)

Для заданої початкової конфігурації (7, 4, 6, 1, 5, 0, 0, …), тобто конфігурації

R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	…
7	4	6	1	5	0	0	…

знайти кінцеву конфігурацію та результат роботи МНР.

Розв'язання. Виконаємо програму для початкової конфігурації, вказуючи на кожному такті команду, що виконується, та отриману після цього конфігурацію:

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	…
Поч. конф.	7	4	6	1	5	0	0	…
1. Z(2)	7	0	6	1	5	0	0	…
2. S(1)	8	0	6	1	5	0	0	…
3. J(2,4,7)	8	0	6	1	5	0	0	…
4. S(2)	8	1	6	1	5	0	0	…
5. S(3)	8	1	7	1	5	0	0	…
6. J(3,3,2)	8	1	7	1	5	0	0	…
2. S(1)	9	1	7	1	5	0	0	…
3. J(2,4,7)	9	1	7	1	5	0	0	…
7. T(3,2)	9	7	7	1	5	0	0	…
Кінц. конф.	9	7	7	1	5	0	0	…

Пояснення виконаних тактів:

- на першому такті виконується команда з номером 1 (**Z(2)**);
- на другому такті виконується команда з номером 2 (**S(1)**);
- на третьому такті виконується команда з номером 3 (**J(2,4,7)**), при цьому перехід до команди з номером 7 далі не відбувається, бо $r_2 \neq r_4$;
- на четвертому такті виконується команда з номером 4 (**S(2)**);
- на п'ятому такті виконується команда з номером 5 (**S(3)**);
- на шостому такті виконується команда з номером 6 (**J(3,3,2)**), при цьому далі відбувається перехід до команди з номером 2, бо $r_3 = r_3$;
- на сьомому такті виконується команда з номером 2 (**S(1)**);
- на восьмому такті виконується команда з номером 3 (**J(2,4,7)**), при цьому далі відбувається перехід до команди з номером 7, бо $r_2 = r_4$;
- на дев'ятому такті виконується команда з номером 7 (**T(3,2)**), на чому виконання програми і завершується, бо далі повинна була б виконуватись команда з номером 8, якої в програмі вже немає.

Таким чином, для заданої початкової конфігурації кінцева конфігурація має вигляд

R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	…
9	**7**	**7**	**1**	**5**	**0**	**0**	…

тобто

(9, 7, 7, 1, 5, 0, 0, …),

і результатом роботи МНР є число **9** (вміст регістру R_1). ■

Завдання для самостійної роботи

Задача 7.4.2. Задано наступну програму МНР:

1. J(1,2,5)
2. S(2)
3. S(3)
4. J(1,1,1)
5. T(3,1)

Для заданої початкової конфігурації знайти кінцеву конфігурацію та результат роботи МНР.

1) (4, 4, 0, 0, 0, …);
2) (7, 5, 0, 0, 0, …);
3) (2, 5, 0, 0, 0, …).

7.5. МНР-обчислювані функції

Аналогічно машині Тюрінга, МНР дозволяє здійснювати обчислення часткових числових функцій $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, аргументи і значення яких є цілими невід'ємними числами.

При цьому початкова конфігурація формується наступним чином:

$$r_1 = x_1,\ r_2 = x_2,\ \ldots,\ r_n = x_n,$$

а значеннями решти регістрів є нулі,

тобто має вигляд

$$(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ 0,\ 0,\ \ldots).$$

Після зупинки МНР вмістом регістру R_1 (результатом обчислення) має бути значення $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Якщо ж значення $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ було не визначене, то МНР повинна працювати безупинно (нескінченно).

Задача 7.5.1. Скласти програму МНР, що правильно обчислює функцію:

1) $f(x) = 3$ $(x \in \mathbb{N}_0)$;
2) $f(x, y) = x + y$ $(x \in \mathbb{N}_0,\ y \in \mathbb{N}_0)$;

3) $f(x, y) = \max\{x, y\}$ ($x \in \mathbb{N}_0$, $y \in \mathbb{N}_0$).

Розв'язання.

1) В початковій конфігурації в регістрі R_1 міститься число x, а значеннями решти регістрів є нулі. Необхідно написати таку програму, щоб у кінцевій конфігурації в регістрі R_1 містилося число 3, а значення решти регістрів при цьому можуть бути якими завгодно.

<u>Загальний опис алгоритму.</u> Занулити регістр R_1, після чого тричі збільшити його значення на одиницю.

<u>Реалізація алгоритму.</u>

1. Z(1)
2. S(1)
3. S(1)
4. S(1)

■

2) В початковій конфігурації в регістрі R_1 міститься число x, в регістрі R_2 – число y, а значеннями решти регістрів є нулі. Необхідно написати таку програму, щоб у кінцевій конфігурації в регістрі R_1 містилося число $x + y$, а значення решти регістрів при цьому можуть бути якими завгодно.

<u>Загальний опис алгоритму.</u> Організувати цикл, який виконуватиметься рівно y разів, у кожній ітерації якого збільшувати значення регістра R_1 на одиницю. В якості лічильника кількості виконаних ітерацій можна використати регістр R_3.

<u>Реалізація алгоритму.</u>

1. J(2,3,5)
2. S(1)
3. S(3)
4. J(1,1,1)

■

3) В початковій конфігурації в регістрі R_1 міститься число x, в регістрі R_2 – число y, а значеннями решти регістрів є нулі. Необхідно написати таку програму, щоб у кінцевій конфігурації в регістрі R_1 містилося число $\max\{x, y\}$, а значення решти регістрів при цьому можуть бути якими завгодно.

Загальний опис алгоритму. Організувати цикл (в якості лічильника кількості виконаних ітерацій можна використати регістр R_3), у кожній ітерації якого збільшувати значення лічильника на одиницю, одночасно контролюючи чи не досягло воно ще значення якогось із чисел x чи y. Як тільки вперше відбудеться співпадання, вийти з циклу (бо, фактично, ми вже визначили менше серед чисел x і y) і розмістити інше (більше) число в першому регістрі.

Реалізація алгоритму.

```
1. J(1,3,5)
2. J(2,3,6)
3. S(3)
4. J(1,1,1)
5. T(2,1)
```

■

Завдання для самостійної роботи

Задача 7.5.2. Скласти програму МНР, що правильно обчислює функцію:

1) $f(x) = 0$ ($x \in \mathbb{N}_0$);
2) $f(x) = x$ ($x \in \mathbb{N}_0$);
3) $f(x) = x + 2$ ($x \in \mathbb{N}_0$);
4) $f(x) = sg(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x = 0, \\ 1, \text{ якщо } x \geq 1 \end{cases}$ ($x \in \mathbb{N}_0$);
5) $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x = 0, \\ x - 1, \text{ якщо } x > 0 \end{cases}$ ($x \in \mathbb{N}_0$);
6) $f(x) = 2x$ ($x \in \mathbb{N}_0$);
7) $f(x) = [x/2]$ ($x \in \mathbb{N}_0$);

8) $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{N}_0)$;

9) $f(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x = y, \\ 0, \text{ якщо } x \neq y \end{cases}$ $(x \in \mathbb{N}_0,\ y \in \mathbb{N}_0)$;

10) $f(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \leq y, \\ 0, \text{ якщо } x > y \end{cases}$ $(x \in \mathbb{N}_0,\ y \in \mathbb{N}_0)$;

11) $f(x, y) = \min\{x, y\}$ $(x \in \mathbb{N}_0,\ y \in \mathbb{N}_0)$;

12) $f(x, y) = x \cdot y$ $(x \in \mathbb{N}_0,\ y \in \mathbb{N}_0)$;

13) $f(x, y) = |x - y|$ $(x \in \mathbb{N}_0,\ y \in \mathbb{N}_0)$;

14) $f(x) = x!$ $(x \in \mathbb{N}_0)$;

15) $f(x, y) = x^y$ $(x \in \mathbb{N}_0, y \in \mathbb{N}_0)$.

Задача 7.5.3. Проаналізувати програму МНР із задачі 7.4.2 та з’ясувати, обчислення якої функції вона реалізує.

ТЕМА 8. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

8.1. Основні поняття. Матричне задання графів

Граф (неорієнтований граф) *– впорядкована пара* $G=(V,E)$*, де* V *– множина довільних елементів, а* E *– сукупність деяких невпорядкованих пар елементів із множини* V*.*

Елементи множини V називають **вершинами** графа, а елементи сукупності E – його **ребрами**. Вершини графа позначають $v_1, v_2, \ldots$, а ребра – $e_1, e_2, \ldots$.

Графи прийнято наглядно зображати у вигляді діаграм, де вершини зображають кругами, а ребра – відрізками чи кривими з кінцями у вершинах.

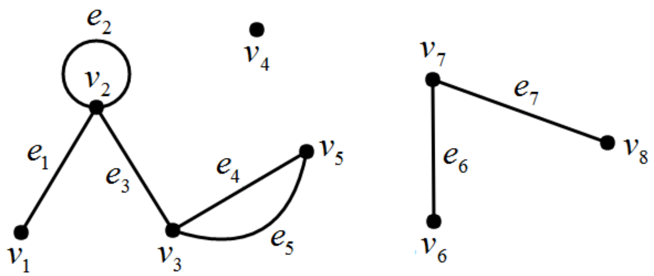


Рис. 8.1.1. Приклад неорієнтованого графа

На рис. 8.1.1 зображено граф G з множиною вершин

$$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8\}$$

і сукупністю ребер

$$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}=$$
$$=\{[v_1,v_2],[v_2,v_2],[v_2,v_3],[v_3,v_5],[v_3,v_5],[v_6,v_7],[v_7,v_8]\}.$$

Ребро, що з'єднує дві вершини, називається ***інцидентним*** *кожній з цих вершин і, навпаки, кожна з цих вершин називається* ***інцидентною*** *цьому ребру.*

Вершини, що з'єднані ребром, називаються ***суміжними****.*

Різні ребра, що інцидентні одній і тій самій парі вершин, називаються ***кратними*** *ребрами.*

*Ребро, що з'єднує вершину саму з собою, називається **петлею**.*

Кожна петля інцидентна лише одній вершині.

*Вершина, що не інцидентна жодному ребру, називається **ізольованою** вершиною.*

Наприклад, для графа із рис. 8.1.1:

- ребро e_3 інцидентне вершині v_2, але не інцидентне вершині v_5;
- вершина v_7 інцидентна ребру e_6, але не інцидентна ребру e_4;
- вершини v_3 і v_5 є суміжними;
- вершини v_5 і v_7 не є суміжними;
- ребра e_4 і e_5 є кратними;
- ребро e_2 є петлею;
- вершина v_4 є ізольованою.

*Граф називається **скінченним**, якщо він має скінченну кількість вершин і скінченну кількість ребер.*

Граф із рис. 8.1.1 є скінченним. Приклад нескінченного графа наведено на рис. 8.1.2. Розглядатимемо надалі лише скінченні графи.

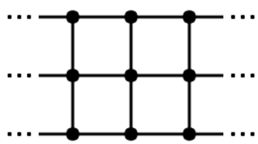


Рис. 8.1.2. Приклад нескінченного графа

*Ребро, для задано напрям з'єднання вершин (рис. 8.1.3), називається **орієнтованим** ребром.*

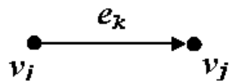


Рис. 8.1.3. Орієнтоване ребро

*Кажуть, що ребро e_k **виходить** із вершини v_i і **заходить** у* *вершину* v_j. *Вершина* v_i *називається* ***початком*** *ребра, а вершина* v_j *– його* ***кінцем***. *Ребро* e_k *можна подати впорядкованою парою* (v_i, v_j).

Граф, у якому всі ребра орієнтовані, називається ***орієнтованим*** *графом або* ***орграфом***.

Інакше кажучи,

орієнтований граф (орграф) *– впорядкована пара* $G = (V, E)$, *де* V *– множина довільних елементів, а* E *– сукупність деяких впорядкованих пар елементів із множини* V.

Приклад орієнтованого графа наведено на рис. 8.1.4.

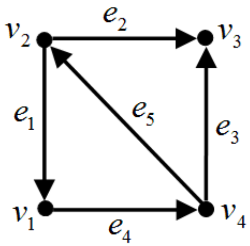


Рис. 8.1.4. Приклад орієнтованого графа

Цей граф має множину вершин $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ та сукупність ребер

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} = \{(v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_4, v_3), (v_1, v_4), (v_4, v_2)\}.$$

Орієнтований граф може містити кратні ребра та петлі. Кратні ребра завжди мають однаковий напрям.

Кожному неорієнтованому графу можна поставити у відповідність орієнтований граф, замінивши кожне неорієнтоване ребро на два протилежно направлені орієнтовані ребра. Така відповідність називається канонічною.

Окрім графічного зображення, графи можна задавати за допомогою спеціальних матриць: матриці інцидентності та матриці суміжності. Матричне задання графів зручно використовувати в програмуванні.

Нехай G – довільний граф, що містить n вершин та m ребер:

$$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\},\ E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}.$$

Матрицею інцидентності *графа G називається матриця* $\|\alpha_{ij}\|$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, *елементи якої визначаються наступним чином:*

- *для неорієнтованого графа*

$$\alpha_{ij}=\begin{cases}1, & \text{якщо ребро } e_i \text{ інцидентне вершині } v_j,\\ 0, & \text{якщо ребро } e_i \text{ не інцидентне вершині } v_j;\end{cases}$$

- *для орієнтованого графа*

$$\alpha_{ij}=\begin{cases}-1, & \text{якщо вершина } v_j \text{ є початком ребра } e_i,\\ 1, & \text{якщо вершина } v_j \text{ є кінцем ребра } e_i,\\ 0, & \text{якщо вершина } v_j \text{ не інцидентна ребру } e_i,\\ 2, & \text{якщо ребро } e_i \text{ є петлею при вершині } v_j.\end{cases}$$

Матриця інцидентності задає інцидентність вершин і ребер графа. Рядки цієї матриці відповідають ребрам графа, а стовпці – його вершинам.

Проілюструємо цю матрицю на конкретних прикладах.

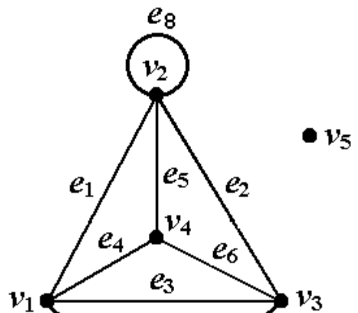


Рис. 8.1.5. Неорієнтований граф

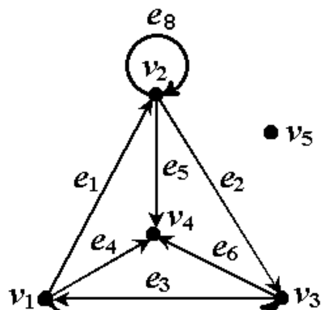


Рис. 8.1.6. Орієнтований граф

Неорієнтований граф, наведений на рис. 8.1.5, задається матрицею інцидентності вигляду

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
e_1	1	1	0	0	0
e_2	0	1	1	0	0
e_3	1	0	1	0	0
e_4	1	0	0	1	0
e_5	0	1	0	1	0
e_6	0	0	1	1	0
e_7	1	0	1	0	0
e_8	0	1	0	0	0

а орієнтований граф, наведений на рис. 8.1.6, задається матрицею інцидентності вигляду

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
e_1	– 1	1	0	0	0
e_2	0	– 1	1	0	0
e_3	1	0	– 1	0	0
e_4	– 1	0	0	1	0
e_5	0	– 1	0	1	0
e_6	0	0	– 1	1	0
e_7	– 1	0	1	0	0
e_8	0	2	0	0	0

Матриця інцидентності будь-якого неорієнтованого графа в кожному рядку містить одну або дві одинички: одну, якщо ребро є петлею, дві, якщо ребро є звичайним ребром.

Матриця інцидентності будь-якого орієнтованого графа володіє наступною властивістю: сума модулів елементів кожного рядка дорівнює 2.

Матрицею суміжності *графа G називається квадратна матриця $\left\|\delta_{ij}\right\|$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$, елементи якої визначаються наступним чином:*

- *для неорієнтованого графа*

δ_{ij} – *кількість ребер, що з'єднують вершину* v_i *з вершиною* v_j;

- *для орієнтованого графа*

  δ_{ij} – *кількість ребер з початком у вершині* v_i *та кінцем у вершині* v_j.

Матриця суміжності задає суміжність вершин графа. Рядки та стовпці цієї матриці відповідають вершинам графа.

Проілюструємо цю матрицю на конкретних прикладах.

Неорієнтований граф, наведений на рис. 8.1.5, задається матрицею суміжності вигляду

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	1	2	1	0
v_2	1	1	1	1	0
v_3	2	1	0	1	0
v_4	1	1	1	0	0
v_5	0	0	0	0	0

а орієнтований граф, наведений на рис. 8.1.6, задається матрицею суміжності вигляду

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	1	1	1	0
v_2	0	1	1	1	0
v_3	1	0	0	1	0
v_4	0	0	0	0	0
v_5	0	0	0	0	0

Матриця суміжності будь-якого неорієнтованого графа є симетричною відносно головної діагоналі. Всі ребра графа фактично визначатимуться головною діагоналлю матриці та елементами лише по якийсь один бік від неї. Загальну кількість ребер графа можна знайти, просумувавши згадані елементи матриці.

Матриця суміжності будь-якого орієнтованого графа, взагалі кажучи, несиметрична. Загальну кількість ребер графа можна знайти, просумувавши усі елементи матриці.

Локальним степенем *вершини графа називається загальна кількість ребер, інцидентних цій вершині, де кожна петля враховується двічі.*

Локальний степінь вершини v позначатимемо $\rho(v)$.

Наприклад, для неорієнтованого графа, наведеного на рис. 8.1.5, маємо:

$$\rho(v_1)=4,\ \rho(v_2)=5,\ \rho(v_3)=4,\ \rho(v_4)=3,\ \rho(v_5)=0.$$

Для орієнтованого графа, наведеного на рис. 8.1.6, отримуємо аналогічний результат:

$$\rho(v_1)=4,\ \rho(v_2)=5,\ \rho(v_3)=4,\ \rho(v_4)=3,\ \rho(v_5)=0.$$

Для орієнтованого графа локальний степінь $\rho(v)$ будь-якої вершини v можна подати у вигляді суми двох складових:

$$\rho(v)=\rho_1(v)+\rho_2(v),$$

де $\rho_1(v)$ – кількість ребер, що виходять з вершини v, а $\rho_2(v)$ – кількість ребер, що заходять у вершину v.

Наприклад, для орієнтованого графа, наведеного на рис. 8.1.6, маємо:

$$\rho(v_1)=4=3+1=\rho_1(v_1)+\rho_2(v_1),$$
$$\rho(v_2)=5=3+2=\rho_1(v_2)+\rho_2(v_2),$$
$$\rho(v_3)=4=2+2=\rho_1(v_3)+\rho_2(v_3),$$
$$\rho(v_4)=3=0+3=\rho_1(v_4)+\rho_2(v_4),$$
$$\rho(v_5)=0=0+0=\rho_1(v_5)+\rho_2(v_5).$$

Завдання для самостійної роботи

Задача 8.1.1. Граф задається матрицею інцидентності. Зобразити граф. Дослідити наявність у графі кратних ребер, петель та ізольованих вершин. Визначити локальні степені вершин графа. Побудувати матрицю суміжності графа.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Задача 8.1.2. Граф задається матрицею суміжності. Зобразити граф. Дослідити наявність у графі кратних ребер, петель та ізольованих вершин. Визначити локальні степені вершин графа. Побудувати матрицю інцидентності графа.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

8.2. Маршрути, ланцюги та цикли. Зв'язні графи та зв'язні компоненти графа

Нехай G – довільний неорієнтований граф.

Маршрутом *у графі* G *називається скінченна впорядкована послідовність вершин та ребер, що чергуються,*

$$S = (v_i, e_j, v_k, e_l, \ldots, v_p, e_q, v_r),$$

у якій кожні два сусідні елементи є інцидентними.

Вершина v_i *називається* **початком** *маршруту, вершина* v_r *– його* **кінцем**, *інші вершини – його* **внутрішніми вершинами**.

Наглядна геометрична інтерпретація поняття маршруту наведена на рис. 8.2.1.

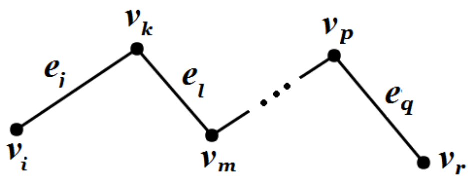


Рис. 8.2.1. Маршрут у графі

Кількість ребер маршруту називається його ***довжиною***.

Ребра і вершини в маршруті можуть повторюватися, маршрут може починатися і закінчуватися в одній і тій самій вершині.

Маршрут, в якому ребра не повторюються, називається ***ланцюгом***.

Ланцюг, в якому вершини не повторюються, називається ***простим ланцюгом***.

Ланцюг, який починається і закінчується в одній і тій самій вершині, називається ***циклом***.

Цикл, в якому внутрішні вершини не повторюються, називається ***простим циклом***.

Дві вершини графа називаються ***зв'язними***, *якщо існує маршрут, що їх з'єднує.*

Граф називається ***зв'язним***, *якщо кожні дві його вершини є зв'язними.*

Граф, що не є зв'язним, розпадається на скінченну кількість зв'язних підграфів. Їх називають **зв'язними компонентами** графа.

Розглянемо неорієнтований граф, наведений на рис. 8.2.2.

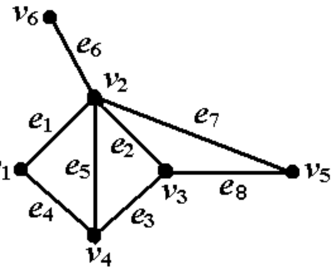


Рис. 8.2.2. Деякий неорієнтований граф

Для цього графа маємо, наприклад, наступне:

- послідовність $(v_2, e_5, v_4, e_8, v_5)$ не є маршрутом, оскільки сусідні у ній елементи v_4 і e_8 в графі не є інцидентними;
- $S_1 = (v_1, e_1, v_2, e_5, v_4, e_3, v_3, e_8, v_5)$ – маршрут, де не повторюються ні ребра, ні вершини;
- $S_2 = (v_1, e_1, v_2, e_5, v_4, e_3, v_3, e_2, v_2, e_7, v_5)$ – маршрут, де повторюються вершини;
- $S_3 = (v_1, e_1, v_2, e_5, v_4, e_3, v_3, e_2, v_2, e_1, v_1, e_4, v_4)$ – маршрут, де повторюються і ребра, і вершини;
- маршрути S_1 та S_2 є ланцюгами, а маршрут S_3 не є ланцюгом;
- ланцюг S_1 є простим, а ланцюг S_2 – ні;
- послідовність $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_8, v_5, e_7, v_2, e_5, v_4, e_4, v_1)$ є маршрутом, ланцюгом, циклом, але не є простим ланцюгом і простим циклом;
- послідовність $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_1)$ є маршрутом, ланцюгом, циклом, простим ланцюгом і простим циклом;
- граф є зв'язним, оскільки кожні дві його вершини є зв'язними.

На рис. 8.2.3 наведено приклад незв'язного графа, що складається із двох зв'язних компонент, виділених пунктиром.

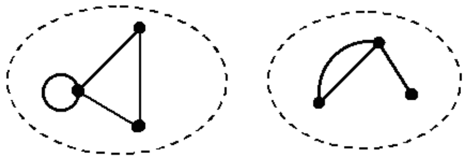


Рис. 8.2.3. Незв'язний граф із двома зв'язними компонентами

Аналогічні вищенаведеним означення вводяться і для орієнтованих графів. При цьому в понятті маршруту додатково вимагається, щоб кінець кожного чергового ребра був одночасно саме початком наступного, тобто, інакше кажучи, рухатись по ребрах графа дозволяється тільки згідно з їх напрямами. Орієнтований граф вважається зв'язним, якщо після заміни у ньому кожного орієнтованого ребра на одне неорієнтоване ребро отримується зв'язний неорієнтований граф.

Завдання для самостійної роботи

Задача 8.2.1. З'ясувати, чи є зв'язними графи із задач 8.1.1 і 8.1.2. Навести приклади маршрутів, ланцюгів, простих ланцюгів, циклів і простих циклів у цих графах.

8.3. Ейлерові ланцюги та цикли

Ейлеровим ланцюгом *у графі називається ланцюг, що містить всі ребра і всі вершини цього графа.*

Ейлеровим циклом *у графі називається цикл, що містить всі ребра і всі вершини цього графа.*

Ейлерові ланцюги та цикли, взагалі кажучи, не є простими, тобто вершини графа в них можуть повторюватися.

Граф, що містить ейлеровий ланцюг, називається ***напівейлеровим*** *графом.*

Граф, що містить ейлеровий цикл, називається ***ейлеровим*** *графом.*

Теорема 8.3.1 (про існування ейлерового циклу в неорієнтованому графі). *Скінченний неорієнтований граф є ейлеровим тоді і тільки тоді, коли він зв'язний і локальні степені усіх його вершин є парними.*

Теорема 8.3.2 (про існування ейлерового циклу в орієнтованому графі). *Скінченний орієнтований граф є ейлеровим тоді і тільки тоді, коли він зв'язний і для кожної його вершини локальні степені по вхідних і вихідних ребрах співпадають:*

$$\forall v \in V : \quad \rho_1(v) = \rho_2(v) .$$

Теорема 8.3.3 (про існування ейлерового ланцюга в неорієнтованому графі). *Скінченний неорієнтований граф має ейлеровий ланцюг між вершинами* v_i *та* v_j *тоді і тільки тоді, коли він зв'язний, а вершини* v_i *та* v_j *– єдині вершини з непарними локальними степенями.*

Теорема 8.3.4 (про існування ейлерового ланцюга в орієнтованому графі). *Скінченний орієнтований граф має ейлеровий ланцюг з початком у вершині* v_i *і кінцем у вершині* v_j *тоді і тільки тоді, коли він зв'язний,*

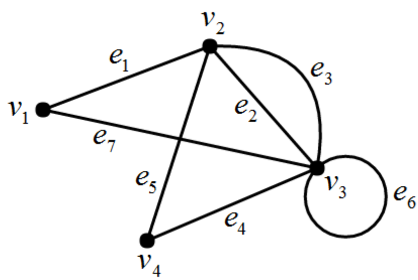
$$\rho_1(v_i) - \rho_2(v_i) = 1,$$
$$\rho_2(v_j) - \rho_1(v_j) = 1,$$

а для всіх інших вершин v_k *цього графа локальні степені по вхідних і вихідних ребрах співпадають:*

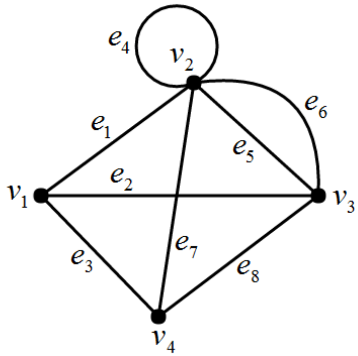
$$\rho_1(v_k) = \rho_2(v_k) .$$

Задача 8.3.1. Для заданого графа з'ясувати, чи існують у ньому ейлеровий цикл або ейлеровий ланцюг. Якщо існують, явно вказати їх.

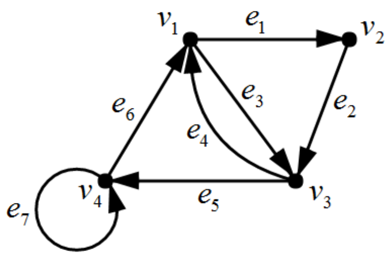
1)



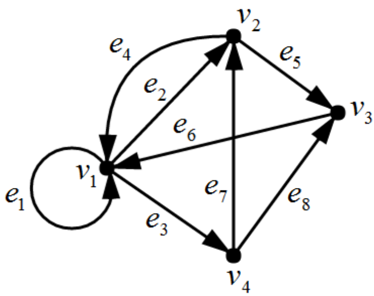
2)



3)



4)



Розв’язання.

1) Заданий неорієнтований граф є скінченним та зв’язним. Локальні степені його вершин є наступними:

$$\rho(v_1) = 2,\ \rho(v_2) = 4,\ \rho(v_3) = 6,\ \rho(v_4) = 2.$$

Згідно з теоремами 8.3.1 і 8.3.3, у цьому графі не існує ейлерового ланцюга, але існує ейлеровий цикл. Приклад такого циклу:

$$(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_6, v_3, e_3, v_2, e_5, v_4, e_4, v_3, e_7, v_1).\ \blacksquare$$

2) Заданий неорієнтований граф є скінченним та зв’язним. Локальні степені його вершин є наступними:

$$\rho(v_1) = 3,\ \rho(v_2) = 6,\ \rho(v_3) = 4,\ \rho(v_4) = 3.$$

Згідно з теоремами 8.3.1 і 8.3.3, у цьому графі не існує ейлерового циклу, але існує ейлеровий ланцюг між вершинами v_1 і v_4. Приклад такого ланцюга:

$$(v_1, e_1, v_2, e_4, v_2, e_6, v_3, e_5, v_2, e_7, v_4, e_8, v_3, e_2, v_1, e_3, v_4)\,. \ \blacksquare$$

3) Заданий орієнтований граф є скінченним та зв'язним. Локальні степені його вершин є наступними:

$\rho_1(v_1) = 2$, $\rho_2(v_1) = 2$,

$\rho_1(v_2) = 1$, $\rho_2(v_2) = 1$,

$\rho_1(v_3) = 2$, $\rho_2(v_3) = 2$,

$\rho_1(v_4) = 2$, $\rho_2(v_4) = 2$.

Згідно з теоремами 8.3.2 і 8.3.4, у цьому графі не існує ейлерового ланцюга, але існує ейлеровий цикл. Приклад такого циклу:

$$(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_4, v_1, e_3, v_3, e_5, v_4, e_7, v_4, e_6, v_1)\,. \ \blacksquare$$

4) Заданий орієнтований граф є скінченним та зв'язним. Локальні степені його вершин є наступними:

$\rho_1(v_1) = 3$, $\rho_2(v_1) = 3$,

$\rho_1(v_2) = 2$, $\rho_2(v_2) = 2$,

$\rho_1(v_3) = 1$, $\rho_2(v_3) = 2$,

$\rho_1(v_4) = 2$, $\rho_2(v_4) = 1$.

Згідно з теоремами 8.3.2 і 8.3.4, у цьому графі не існує ейлерового циклу, але існує ейлеровий ланцюг з початком у вершині v_4 і кінцем у вершині v_3. Приклад такого ланцюга:

$$(v_4, e_7, v_2, e_4, v_1, e_1, v_1, e_2, v_2, e_5, v_3, e_6, v_1, e_3, v_4, e_8, v_3)\,. \ \blacksquare$$

Завдання для самостійної роботи

Задача 8.3.2. Для графів із задач 8.1.1 і 8.1.2 з'ясувати, чи існують у них ейлерові цикли або ейлерові ланцюги. Якщо існують, явно вказати їх.

8.4. Мінімальне остовне дерево графа

Зв'язний неорієнтований граф без циклів називається ***деревом****.*

Незв'язний неорієнтований граф без циклів називається ***лісом****.*

На рис. 8.4.1 і 8.4.2 наведені приклади дерева та лісу відповідно.

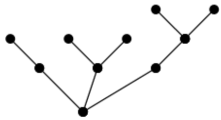


Рис. 8.4.1. Приклад дерева

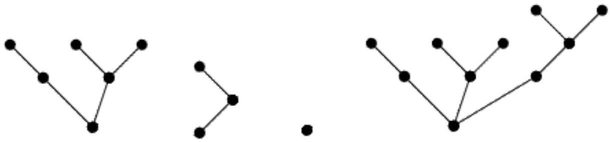


Рис. 8.4.2. Приклад лісу

Зв'язні компоненти лісу є деревами, тобто ліс – сукупність дерев.

Дерево з n *вершинами має* $n-1$ *ребро.*

Остовним деревом *зв'язного неорієнтованого графа називається дерево, що містить усі вершини цього графа та деякі з його ребер.*

На рис. 8.4.3 наведено приклад графа та одного із його остовних дерев.

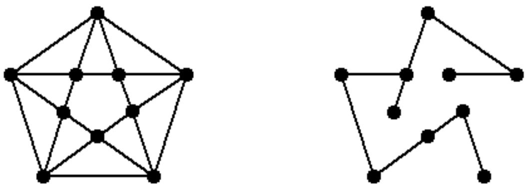


Рис. 8.4.3. Граф та одне із його остовних дерев

Остовне дерево графа ще часто називають покриваючим деревом, остовом, каркасом, кістяком або скелетом графа.

Нехай G – зв'язний неорієнтований **навантажений** граф, тобто кожному ребру графа G присвоєно деяку вагу (вона може бути довжиною ребра, вартістю і т.п.).

Мінімальним остовним деревом *(або* ***остовним деревом найменшої ваги****) графа G називається остовне дерево, що має найменшу загальну (сумарну) вагу ребер, з яких воно складається.*

На рис. 8.4.4 продемонстровано деякий зв'язний неорієнтований навантажений граф (числа на ребрах – їх вага) та виділено його мінімальне остовне дерево. Вага цього мінімального остовного дерева дорівнює 4+7+5+10+11=37.

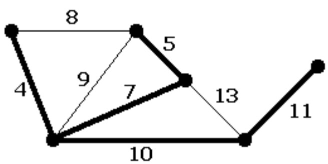


Рис. 8.4.4. Навантажений граф та його мінімальне остовне дерево

Деякі властивості мінімального остовного дерева:

1) якщо ваги всіх ребер графа різні, то мінімальне остовне дерево єдине, інакше можуть існувати декілька різних мінімальних остовних дерев;
2) мінімальне остовне дерево є також остовним деревом з найменшим добутком ваг ребер;
3) мінімальне остовне дерево є також остовним деревом з найменшою вагою найтяжчого ребра;
4) остовне дерево максимальної ваги шукається аналогічно мінімальному остовному дереву, досить поміняти знаки ваг ребер на протилежні і здійснити пошук мінімального остовного дерева.

Розглянемо методи побудови мінімального остовного дерева графа. Найвідомішими та найпопулярнішими з них є так звані алгоритми Пріма та Крускала.

<u>Алгоритм Пріма</u>

Побудова мінімального остовного дерева починається з дерева, що містить одну довільну вершину вихідного графа.

На кожному кроці алгоритму до отриманого раніше дерева додається ще одне ребро: ребро найменшої ваги, що з'єднує якісь вершину дерева і вершину не із дерева.

Таким чином, в процесі роботи алгоритму дерево розростається, поки не охопить всі вершини вихідного графа, тобто поки не стане остовним деревом.

Продемонструємо алгоритм Пріма на конкретному прикладі.

Нехай, наприклад, маємо зв'язний неорієнтований навантажений граф, наведений на рис. 8.4.5.

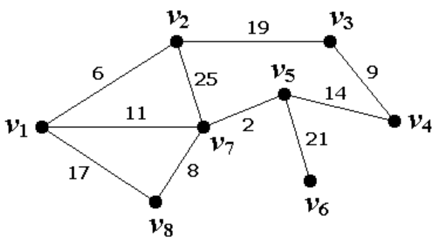
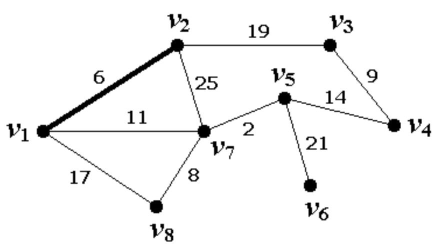


Рис. 8.4.5. Зв'язний неорієнтований навантажений граф

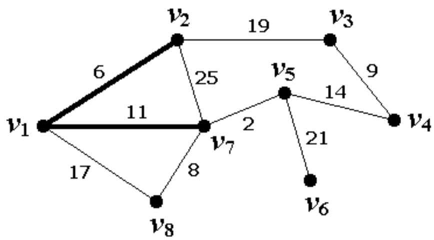
Побудуємо мінімальне остовне дерево цього графа за допомогою алгоритму Пріма, почавши побудову, наприклад, з вершини v_1.

Відповідні кроки алгоритму наведені нижче.

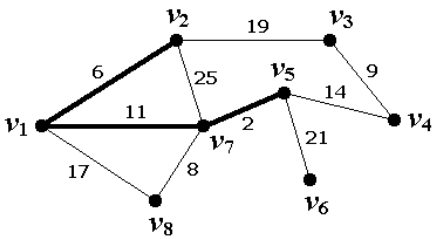
1) Обираємо ребро $[v_1, v_2]$ з вагою 6:



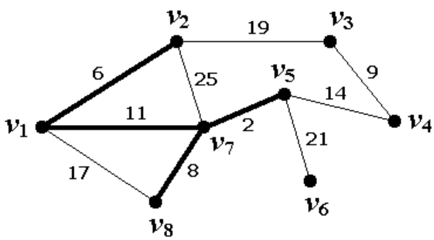
2) Обираємо ребро $[v_1, v_7]$ з вагою 11:



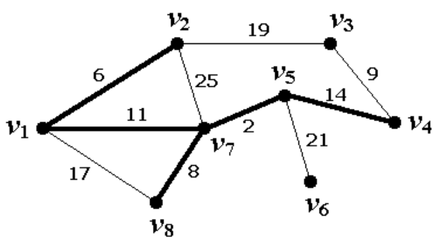
3) Обираємо ребро $[v_7, v_5]$ з вагою 2:



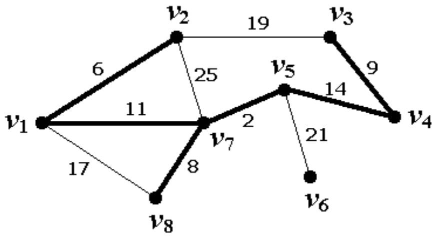
4) Обираємо ребро $[v_7, v_8]$ з вагою 8:



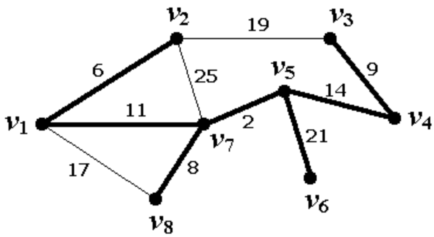
5) Обираємо ребро $[v_5, v_4]$ з вагою 14:



6) Обираємо ребро $[v_4, v_3]$ з вагою 9:



7) Обираємо ребро $[v_5, v_6]$ з вагою 21:



Мінімальне остовне дерево побудоване. Його вага дорівнює 71.

Алгоритм Крускала

Побудова мінімального остовного дерева починається з графа (лісу), що не містить жодного ребра і вершинами якого є всі вершини вихідного графа.

На кожному кроці алгоритму до отриманого раніше лісу додається ще одне ребро: ребро найменшої ваги, що з'єднує 2 різні дерева лісу.

Таким чином, в процесі роботи алгоритму кількість дерев лісу поступово зменшується, поки не стане рівною 1, тобто поки не отримається остовне дерево.

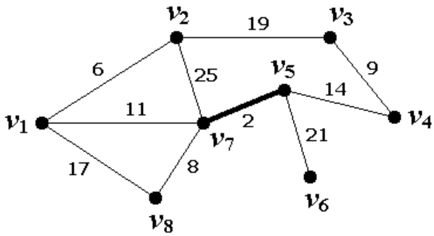
Продемонструємо алгоритм Крускала на конкретному прикладі.

Розглянемо, наприклад, зв'язний неорієнтований навантажений граф, наведений на рис. 8.4.5.

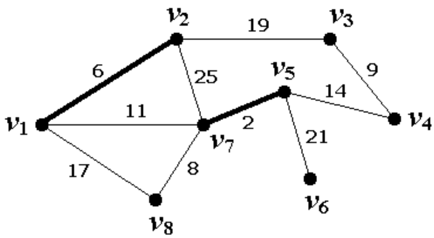
Побудуємо мінімальне остовне дерево цього графа за допомогою алгоритму Крускала.

Відповідні кроки алгоритму наведені нижче.

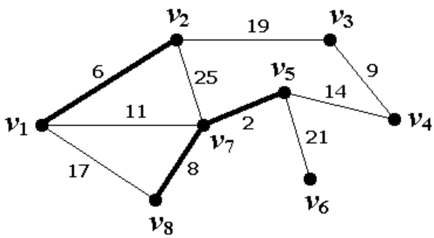
1) Обираємо ребро $[v_7, v_5]$ з вагою 2:



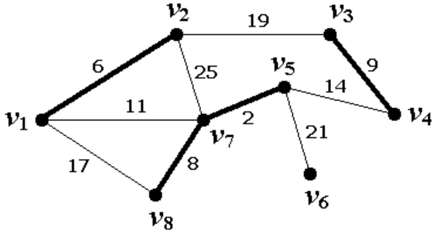
2) Обираємо ребро $[v_1, v_2]$ з вагою 6:



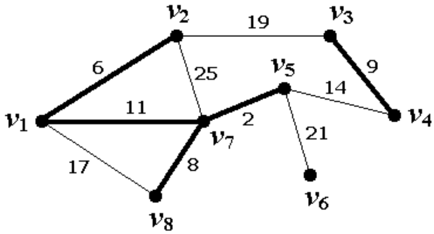
3) Обираємо ребро $[v_7, v_8]$ з вагою 8:



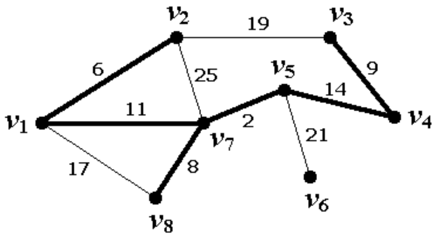
4) Обираємо ребро $[v_4, v_3]$ з вагою 9:



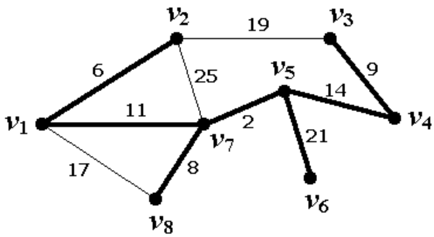
5) Обираємо ребро $[v_1, v_7]$ з вагою 11:



6) Обираємо ребро $[v_5, v_4]$ з вагою 14:



7) Обираємо ребро $[v_5, v_6]$ з вагою 21:



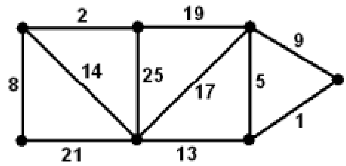
Мінімальне остовне дерево побудоване. Його вага дорівнює 71.

Як бачимо, для графа, наведеного на рис. 8.4.5, алгоритми Пріма та Крускала знаходять одне і те ж мінімальне остовне дерево. Це обумовлено тим, що ваги всіх ребер цього графа різні, а тому мінімальне остовне дерево для нього єдине.

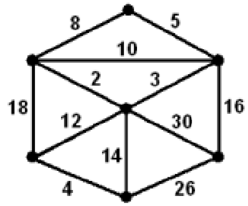
Завдання для самостійної роботи

Задача 8.4.1. Побудувати мінімальне остовне дерево заданого графа за допомогою алгоритмів Пріма і Крускала та знайти його вагу.

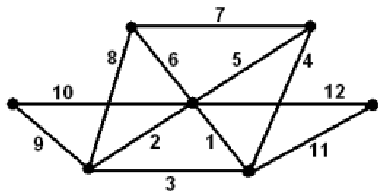
1)



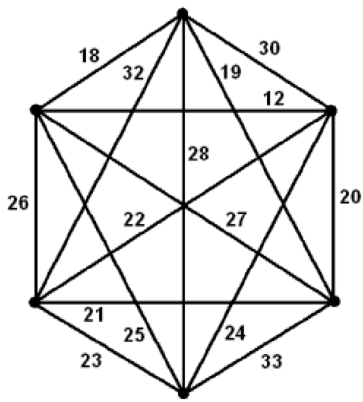
2)



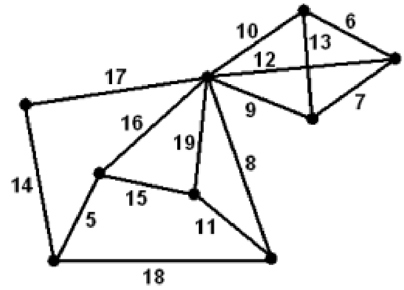
3)



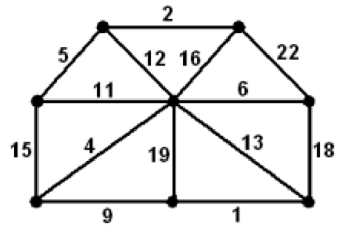
4)



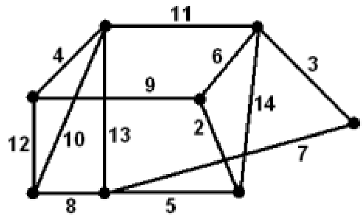
5)


10
6
13
12
17
9
7
16
19
8
14
15
5
11
18

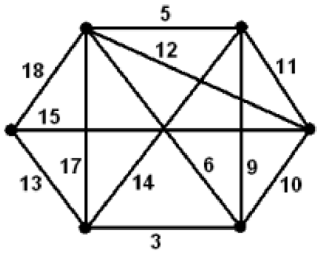
6)


2
5
12
16
22
11
6
15
4
19
13
18
9
1

7)


11
4
6
3
9
14
2
12
10
13
7
8
5

8)


5
12
18
11
15
17
6
9
13
14
10
3

ВІДПОВІДІ ДО ЗАВДАНЬ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

ТЕМА 1. МНОЖИНИ ТА ВІДНОШЕННЯ

Задача 1.1.3. $D = \{1, 2, 5, 6\}$, $E = \{0, 4, 7\}$.

Задача 1.2.8.

1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні; 5) ні; 6) так; 7) так; 8) ні; 9) ні.

Задача 1.2.11.

1) U; 2) B; 3) $B \cap C$; 4) $\varnothing$; 5) $A \cap B \cap M$; 6) B; 7) C; 8) C; 9) U; 10) $A \cup B \cup C$; 11) $A \cup B \cup C$.

Задача 1.3.3. 862.
Задача 1.3.4. 32.
Задача 1.3.5. 25.
Задача 1.3.6. 11; 1; 3; 0.
Задача 1.3.7. 3; 15.
Задача 1.3.8. 94; 65; 25.
Задача 1.3.9. 4.
Задача 1.3.10. 30; 7; 18; 5.
Задача 1.3.11. 26.
Задача 1.3.13. 33.
Задача 1.4.6.

3) $D_R = E_R = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $R^{-1} = R$,
$\overline{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}, x + y > 10\}$;

4) $D_R = E_R = [0,1]$, $R^{-1} = \{(x, y) : x, y \in [0,1], x \le y^2\}$,
$\overline{R} = \{(x, y) : x, y \in [0,1], y > x^2\}$;

5) $D_R = E_R = \mathbb{R}$, $R^{-1} = R$, $\overline{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x^2 = y^2\}$.

Задача 1.4.8.

1) $D_R = E_R = \mathbb{N}$, $R^{-1} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}, x \vdots y\}$, $R \circ R = R$,
$R \circ R^{-1} = \mathbb{N}^2$, $R^{-1} \circ R = \mathbb{N}^2$;

2) $D_R = E_R = \mathbb{R}$, $R^{-1} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, 2y \ge 3x\}$,
$R \circ R = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, 4x \ge 9y\}$,
$R \circ R^{-1} = \mathbb{R}^2$, $R^{-1} \circ R = \mathbb{R}^2$;

3) $D_R = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $E_R = [-1, \frac{\pi}{2}]$,

$R^{-1} = \{(x, y) : x, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], x \geq \sin y\}$,

$R \circ R = \{(x, y) : x, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], y \geq \sin(\sin x)\}$,

$R \circ R^{-1} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^2$, $R^{-1} \circ R = [-1, \frac{\pi}{2}]^2$;

4) $D_R = E_R = \mathbb{R}$, $R^{-1} = R$, $R \circ R = R \circ R^{-1} = R^{-1} \circ R = \mathbb{R}^2$.

Задача 1.6.4. 1) Так; 2) ні.

Задача 1.6.5. $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2,3,5,7\}$, $A_3 = \{4,9\}$, $A_4 = \{6,8,10\}$.

Задача 1.6.8. $1 \preccurlyeq 2 \preccurlyeq 4 \preccurlyeq 3$.

ТЕМА 2. КОМБІНАТОРИКА

Задача 2.1.4. 20.

Задача 2.1.5. Якщо спочатку було взято білу кульку.

Задача 2.1.6. 60; 36.

Задача 2.1.7. 26820600.

Задача 2.1.8. 370590000.

Задача 2.1.9. 900000000; 3265920; 896734080.

Задача 2.1.10. 750.

Задача 2.3.3. $C_{30}^4 = 27405$.

Задача 2.3.4. 1) $C_7^1 C_9^1 = 63$; 2) $C_7^2 C_9^2 = 756$.

Задача 2.3.5. $C_3^1 C_5^3 = C_3^2 C_5^2 = 3 \cdot 10 = 30$,

оскільки при формуванні однієї команди інша утворюється автоматично.

Задача 2.3.6.

1) $C_4^1 C_{48}^9 = 6708426560$;

2) $C_{52}^{10} - C_{48}^{10} = C_4^1 C_{48}^9 + C_4^2 C_{48}^8 + C_4^3 C_{48}^7 + C_4^4 C_{48}^6 = 9279308324$;

3) $C_4^2 C_{48}^8 = 2264093964$;

4) $(C_{52}^{10} - C_{48}^{10}) - C_4^1 C_{48}^9 = C_4^2 C_{48}^8 + C_4^3 C_{48}^7 + C_4^4 C_{48}^6 = 2570881764$.

Задача 2.3.7. $C_{28}^7 C_{21}^7 C_{14}^7 C_7^7 = (28!)/(7!)^4 = 472518347558400$.

Задача 2.3.8. $C_{17}^{12} - C_{15}^{10} = 3185$.

Задача 2.3.9. $C_4^2 C_7^4 + C_4^3 C_7^3 + C_4^4 C_7^2 = 371$.

Задача 2.3.10. $4C_{33}^2 = 2112$.

Задача 2.3.11. $C_{15}^1 + C_{15}^2 + \ldots + C_{15}^{15} = 32767$.

Задача 2.3.12. $\sum_{k=0}^{5} C_5^k = 32$,

оскільки $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ і добуток будь-якої кількості простих множників буде дільником.

Задача 2.3.13. $\sum_{k=0}^{4} C_4^k = 16$.

Задача 2.3.14. $C_n^2 - n = n(n-3)/2$,

оскільки будь-які дві вершини визначають сторону або діагональ.

Задача 2.4.3. $A_{30}^4 = 657720$.

Задача 2.4.4. $A_{300}^1 + A_{300}^2 + A_{300}^3 = 26820600$.

Задача 2.4.5. $A_5^3 = 60$; $A_5^3 - A_4^3 = 36$.

Задача 2.4.6. $A_4^3 A_5^3 A_6^3 = 172800$.

Задача 2.4.7. $A_{33}^1 A_{10}^4 + A_{33}^2 A_{10}^4 + A_{33}^3 A_{10}^4 = 170478000$.

Задача 2.4.8. 1) $A_7^6 = 5040$; 2) $A_8^6 - A_7^5 = 17640$.

Задача 2.5.6. $C_{64}^8 = 4426165368$; $P_8 = 40320$.

Задача 2.5.7. $P_5 P_3 = 720$; $P_4 P_4 = 576$.

Задача 2.5.8. 1) $P_n - 2P_{n-1}$; 2) $P_n - P_3 P_{n-2}$.

Задача 2.5.9. $P_7 - P_5 P_3 = 4320$.

Задача 2.5.10. $C_6^3 P_6 = 14400$.

Задача 2.5.11. $C_7^4 P_7 - C_6^3 P_6 = 162000$.

Задача 2.5.12. $C_3^1 P_5 P_5 = 43200$.

Задача 2.5.13. $C_{12}^4 C_{15}^4 P_4 = 16216200$.

Задача 2.5.14. $2P_5 P_5 = 28800$; $2P_5 P_5 / 10 = 2880$.

Задача 2.5.15. $P_7 / (7 \cdot 2) = 360$, оскільки намисто не змінюється при циклічному зсуві намистин, а також при перевертанні.

Задача 2.6.4.

1) $\overline{C}_{10}^{12} = C_{21}^{12} = 293930$; 2) $\overline{C}_{10}^{8} = C_{17}^{8} = 24310$; 3) $C_{10}^{8} = 45$.

Задача 2.6.5. $\overline{C}_{5}^{30} = C_{34}^{30} = 46376$.

Задача 2.6.6. $\overline{C}_{7}^{2} = 28$.

Задача 2.6.7. $\overline{C}_{2}^{10}\,\overline{C}_{2}^{15}\,\overline{C}_{2}^{14} = 2640$.

Задача 2.6.8. $\overline{C}_{4}^{4} = 35$.

Задача 2.6.9. $\overline{C}_{n}^{k-n} = C_{k-1}^{k-n}$.

Задача 2.6.10. $\overline{C}_{3}^{100} = 5151$; $\overline{C}_{3}^{97} = 4851$.

Задача 2.7.5. $\overline{A}_{2}^{n} = 2^{n}$.

Задача 2.7.6. $\overline{A}_{3}^{m} = 3^{m}$.

Задача 2.7.7. $\overline{A}_{13}^{4} = 28561$; $A_{13}^{4} = 17160$.

Задача 2.7.8. $\overline{A}_{10}^{3} - A_{10}^{3} = 280$.

Задача 2.7.9. 1) $\overline{A}_{2}^{5} = 32$; 2) $\sum_{k=1}^{5} \overline{A}_{2}^{k} = 62$.

Задача 2.7.10. 1) $\sum_{k=1}^{6} \overline{A}_{3}^{k} = 1092$; 2) $\overline{A}_{4}^{6} = 4096$.

Задача 2.8.7. $P_{13}(3,3,2,2,1,1,1) = 43243200$.

Задача 2.8.8. $P_{8}(2,2,2,1,1) = 5040$.

Задача 2.8.9. $P_{6}(3,1,1,1) - P_{4} = 96$.

Задача 2.8.10.

$P_{7}(2,1,1,1,1,1) = 2520$; $P_{7}(2,1,1,1,1,1) - P_{2}P_{6}(2,1,1,1,1) = 1800$.

Задача 2.8.11.

$\overline{A}_{3}^{36} = 150094635296999136$;

$P_{36}(12,12,12) = 3384731762521200$;

$P_{36}(10,12,14) = 2454860399191200$.

Задача 2.8.12. $A_{4}^{3}P_{7}(2,2,1,1,1) = 30240$.

Задача 2.8.13. $P_{18}(5,6,7)/(18\cdot 2)=408408$,

оскільки намисто не змінюється при циклічному зсуві намистин, а також при перевертанні.

Задача 2.8.14. $P_8(3,1,1,1,1,1)=6720$.

Задача 2.9.9. $T_4=120x^{11}$.

Задача 2.9.10. $x=\pm 1$.

Задача 2.9.11. $x=1000$ або $x=0.1$.

Задача 2.10.2.

1) $x=27$; 2) $x=4$ або $x=5$; 3) $x=5$; 4) $x=2$;
5) $x=4$ або $x=5$.

ТЕМА 3. РЕКУРЕНТНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

Задача 3.2.3.

1) $a_n=2^{n+1}-3^n,\ n=0,1,2,\ldots;$
2) $a_n=2\cdot(-3)^n+3,\ n=0,1,2,\ldots;$
3) $a_n=2+3\cdot(-1)^n-2^n+(-2)^n,\ n=0,1,2,\ldots;$
4) $a_n=5+(-2)^{n+1},\ n=0,1,2,\ldots;$
5) $a_n=2^{n+1}-(-2)^n,\ n=0,1,2,\ldots;$
6) $a_n=5-2^n+(-2)^n,\ n=0,1,2,\ldots;$
7) $a_n=3+(-1)^n+3^n+(-3)^n,\ n=0,1,2,\ldots.$

Задача 3.2.4.

1) $a_n=(n-2)(-10)^n,\ n=0,1,2,\ldots;$
2) $a_n=(n-1)(-2)^n+(n-2)2^n,\ n=0,1,2,\ldots;$
3) $a_n=(1-2n)(-9)^n,\ n=0,1,2,\ldots;$
4) $a_n=2+(n-1)(-2)^n,\ n=0,1,2,\ldots;$
5) $a_n=(n-1)(-1)^n+2+n,\ n=0,1,2,\ldots.$

Задача 3.3.3.

1) $a_n=(-4)^n-5^n+n+1,\ n=0,1,2,\ldots;$
2) $a_n=5^n-(-4)^n+3\cdot 4^n,\ n=0,1,2,\ldots;$
3) $a_n=3^n-2^n+5,\ n=0,1,2,\ldots;$
4) $a_n=2\cdot 3^n-3\cdot 2^n+n-3,\ n=0,1,2,\ldots;$

5) $a_n = 3^n - 2^n + 2 \cdot (-1)^n$, $n = 0,1,2,\ldots$;

6) $a_n = 2^n - 3^n + (n-1)(-1)^n$, $n = 0,1,2,\ldots$.

Задача 3.3.4.

1) $a_n = (n-2) \cdot 11^n + n \cdot 10^n$, $n = 0,1,2,\ldots$;

2) $a_n = (n-1)(-10)^n + 1$, $n = 0,1,2,\ldots$;

3) $a_n = (n-2)(-10)^n + n - 1$, $n = 0,1,2,\ldots$;

4) $a_n = (1-n)(-10)^n + (-9)^n$, $n = 0,1,2,\ldots$;

5) $a_n = (2-n)(-10)^n + n(-9)^n$, $n = 0,1,2,\ldots$.

Задача 3.3.5.

1) $a_n = 5^n + 2 \cdot (-4)^n + n(n-1) \cdot 5^n$, $n = 0,1,2,\ldots$;

2) $a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n + n2^n$, $n = 0,1,2,\ldots$;

3) $a_n = 2^n + 2 \cdot 3^n + n(n-1)2^n$, $n = 0,1,2,\ldots$.

Задача 3.3.6.

1) $a_n = (1-n) \cdot 11^n + n^2 11^n$, $n = 0,1,2,\ldots$;

2) $a_n = (n-2)(-10)^n + n^2(-10)^n$, $n = 0,1,2,\ldots$.

ТЕМА 4. МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА

Задача 4.1.3. 1 і 1.

Задача 4.1.4. 1) Ні; 2) так.

Задача 4.1.5. 1.

Задача 4.1.6. Протилежне до істиннісного значення висловлювання p.

Задача 4.1.7.

1) Не є ні тавтологією, ні протиріччям;

2) не є ні тавтологією, ні протиріччям.

Задача 4.3.5.

1) $f(x, y, z) = (11100001)$;

2) $f(\widetilde{x}^3) = (10001010)$;

3) $f(x, y, z) = (01111111)$;

4) $f(x, y, z) = (11111101)$;

5) $f(x, y, z) = (00110100)$.

Задача 4.3.6. 1) Так; 2) ні; 3) так; 4) ні; 5) ні.

Задача 4.3.7.

1) $h(x_1, x_2, x_3) = (01011111)$;

2) $h(x_1, x_2, x_3) = (11100111)$.

Задача 4.4.3.

1) x_1 – фіктивна, x_2 – істотна, $f(\tilde{x}^2) = \bar{x}_2$;

2) усі змінні є фіктивними, $f(\tilde{x}^3) \equiv 0$;

3) x_1 і x_2 – істотні, x_3 – фіктивна, $f(\tilde{x}^3) = x_1 \oplus x_2$;

4) x_1 – фіктивна, x_2 і x_3 – істотні, $f(\tilde{x}^3) = x_3 \to x_2$;

5) x_1 – істотна, x_2 і x_3 – фіктивні, $f(\tilde{x}^3) = \bar{x}_1$;

6) x_1 і x_3 – фіктивні, x_2 – істотна, $f(\tilde{x}^3) = \bar{x}_2$;

7) x_1, x_2, x_3 – істотні, x_4 – фіктивна, $f(\tilde{x}^4) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$.

Задача 4.4.4.

1) x_1 – фіктивна;

2) x_1, x_2, x_3 – фіктивні;

3) x_1 і x_3 – фіктивні.

Задача 4.5.2.

1) $f(\tilde{x}^4) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2(x_3 \vee \bar{x}_4) \vee x_1x_2x_3$;

2) $f(\tilde{x}^3) = \bar{x}_1x_2x_3$;

3) $f(\tilde{x}^4) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4) \vee x_1x_2$.

Задача 4.6.4.

1) $f(\tilde{x}^3) = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2 \vee x_2x_3$;

2) $f(\tilde{x}^3) = x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2\bar{x}_3$;

3) $f(\tilde{x}^3) = x_1x_2\bar{x}_3$;

4) $f(\tilde{x}^4) = x_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_3 \vee x_2x_3x_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1$.

Задача 4.6.5.

1) $f(\tilde{x}^3) = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3$;

2) $f(\tilde{x}^3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee$
$\vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3$;

3) $f(\tilde{x}^3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee$

$\vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3$.

Задача 4.6.6.

1) $f(\widetilde{x}^3) = (10001010) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3$;

2) $f(\widetilde{x}^3) = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3$;

3) $f(\widetilde{x}^3) = (11110000) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3$;

4) $f(\widetilde{x}^3) = (11010111) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee$
$\vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3$;

5) $m(\widetilde{x}^3) = (00010111) = \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3$.

Задача 4.7.2.

1) $f(\widetilde{x}^3) = (11010111) = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$;

2) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge$
$\wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$;

3) $f(\widetilde{x}^3) = (11110000) = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge$
$\wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$

4) $f(\widetilde{x}^3) = (10001010) = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge$
$\wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$

5) $m(\widetilde{x}^3) = (00010111) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge$
$\wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$;

Задача 4.8.4.

1) $f(\widetilde{x}^3) = (10001010) = 1 \oplus x_3 \oplus x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_2x_3$;

2) $f(\widetilde{x}^3) = (11010111) = 1 \oplus x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1 \oplus x_1x_3$;

3) $m(\widetilde{x}^3) = (00010111) = x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3$;

4) $f(\widetilde{x}^3) = 1 \oplus x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_1 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_2x_3$.

Задача 4.8.5.

1) $f(\widetilde{x}^3) = 1 \oplus x_3 \oplus x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_2x_3$;

2) $f(\widetilde{x}^3) = 1 \oplus x_3 \oplus x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_2x_3$;

3) $m(\widetilde{x}^3) = x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3$;

4) $f(\widetilde{x}^3) = 1 \oplus x_1 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2x_3$;

5) $f(\widetilde{x}^3) = x_3 \oplus x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1 \oplus x_1x_2$;

6) $f(\widetilde{x}^3) = 1 \oplus x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus x_1 x_3$;

7) $f(\widetilde{x}^3) = 1 \oplus x_3 \oplus x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3$.

ТЕМА 5. ЗАМКНУТІ ТА ПОВНІ СИСТЕМИ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

Задача 5.2.6.

1) $f(x, x, \ldots, x) \equiv 0$;

2) $f(x, x, \ldots, x) = x$;

3) $f(x, x, \ldots, x) = \overline{x}$.

Задача 5.2.7.

1) $|T_0(n) \setminus T_1(n)| = 2^{2^n - 2} = \frac{1}{4} 2^{2^n}$;

2) $|T_1(n) \setminus T_0(n)| = 2^{2^n - 2} = \frac{1}{4} 2^{2^n}$.

Задача 5.2.8. Ні.

Задача 5.3.5.

1) Так, оскільки $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1$;

2) ні, оскільки $f(\widetilde{x}^3) = 1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_1 x_3$;

3) ні, оскільки $m(\widetilde{x}^3) = x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3$;

4) так, оскільки $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \oplus x_2$.

Задача 5.3.7. $|L(n) \setminus T_0(n)| = 2^n$.

Задача 5.3.8.

1) Ні;

2) так, $x_1 x_2 = \overline{f(x_1, x_2, 1)}$;

3) так, $x_1 x_2 = f(\overline{x}_1, x_2, 1)$.

Задача 5.4.7. 1) $f^*(\widetilde{x}^3) = (x_1 \sim x_2)\overline{x}_3$; 2) $f^*(\widetilde{x}^3) = (10001001)$.

Задача 5.4.8. 1) Так; 2) ні; 3) так; 4) так.

Задача 5.4.9. 1) Так; 2) ні; 3) так.

Задача 5.4.10.

1) $f(x, x, \ldots, x) = x$;

2) $f(x, x, \ldots, x) = x$;

3) $f(x, x, \ldots, x) = \overline{x}$;

4) $f(x, x, \ldots, x) = \bar{x}$;

5) $f(x, x, \ldots, x) = \bar{x}$;

6) $f(x, x, \ldots, x) = \bar{x}$.

Задача 5.4.11.

1) $|S(n) \cap T_0(n)| = 2^{2^{n-1}-1} = \frac{1}{2}\sqrt{2^{2^n}}$;

2) $|S(n) \setminus T_0(n)| = 2^{2^{n-1}-1} = \frac{1}{2}\sqrt{2^{2^n}}$;

3) $|T_0(n) \setminus S(n)| = |T_0(n)| - |T_0(n) \cap S(n)| = 2^{2^n - 1} -$
$- 2^{2^{n-1}-1} = \frac{1}{2} 2^{2^n} - \frac{1}{2}\sqrt{2^{2^n}} = \frac{1}{2}\left(2^{2^n} - \sqrt{2^{2^n}} \right)$;

4) $|S(n) \cap T_0(n) \cap T_1(n)| = 2^{2^{n-1}-1} = \frac{1}{2}\sqrt{2^{2^n}}$;

5) $|S(n) \setminus (T_0(n) \cap T_1(n))| = |S(n)| - |S(n) \cap T_0(n) \cap T_1(n)| =$
$= 2^{2^{n-1}} - 2^{2^{n-1}-1} = \sqrt{2^{2^n}} - \frac{1}{2}\sqrt{2^{2^n}} = \frac{1}{2}\sqrt{2^{2^n}}$;

6) $|S(n) \cup (T_0(n) \cap T_1(n))| = |S(n)| + |T_0(n) \cap T_1(n)| -$
$- |S(n) \cap T_0(n) \cap T_1(n)| = 2^{2^{n-1}} + 2^{2^n - 2} - 2^{2^{n-1}-1} =$
$= \sqrt{2^{2^n}} + \frac{1}{4} 2^{2^n} - \frac{1}{2}\sqrt{2^{2^n}} = \frac{1}{2}\sqrt{2^{2^n}} + \frac{1}{4} 2^{2^n}$.

Задача 5.4.12. Ні.

Задача 5.4.13. 1) Так, $0 = f(\bar{x}, x, x)$ або $0 = f(x, \bar{x}, \bar{x})$; 2) ні.

Задача 5.5.4. 1) Так; 2) ні; 3) так.

Задача 5.5.5. $f(\tilde{x}^n) \equiv 0$.

Задача 5.5.6.

1) Так, $\bar{x} = f(x, 1, 0)$ або $\bar{x} = f(1, x, 0)$;

2) так, $\bar{x} = f(0, x, 1)$ або $\bar{x} = f(0, 1, x)$.

Задача 5.5.7.

1) $f(\tilde{x}^3) = x_1$;

2) $f_1(\tilde{x}^3) = (01110111) = x_2 \vee x_3$,
$f_2(\tilde{x}^3) = (01111111) = x_1 \vee x_2 \vee x_3$,

$f_3(\widetilde{x}^3) = (11111111) \equiv 1$;

3) $f(\widetilde{x}^4) = x_1$;

4) $f(\widetilde{x}^4) = x_3$;

5) $f_1(\widetilde{x}^4) = x_1$, $f_2(\widetilde{x}^4) \equiv 1$.

Задача 5.6.2. 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні; 5) так.

ТЕМА 6. МІНІМІЗАЦІЯ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ У КЛАСІ ДНФ

Задача 6.1.2. $K_3 = x_1\overline{x}_2$ і $K_4 = \overline{x}_1 x_2$.

Задача 6.2.2.

1) $x_1x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$;

2) $\overline{x}_1x_4 \vee \overline{x}_2x_4 \vee \overline{x}_3x_4 \vee x_1\overline{x}_3$;

3) $x_1 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3$;

4) $\overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3 \vee x_2x_3$.

Задача 6.3.2.

1) $x_1 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3$;

2) $x_1 \vee x_2$;

3) $\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2x_3 \vee x_2\overline{x}_3$;

4) $\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3 \vee x_1x_3$.

Задача 6.4.2.

1) $\overline{x}_1 \vee x_4 \vee \overline{x}_2x_3$;

2) $x_1\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_3 \vee x_2x_4 \vee x_1x_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3$;

3) $\overline{x}_4 \vee x_3 \vee \overline{x}_1x_2$;

4) $x_1\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_3 \vee x_1x_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee x_2x_3x_4$;

5) $x_3x_4 \vee x_2x_4 \vee x_2x_3 \vee x_1x_4 \vee x_1x_3 \vee x_1x_2$.

Задача 6.5.2.

1) СДНФ:

$$\underbrace{\overline{x}_1\overline{x}_4}_{p_1} \vee \underbrace{\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4}_{p_2} \vee \underbrace{\overline{x}_1x_3}_{p_3} \vee \underbrace{\overline{x}_1x_2}_{p_4} \vee \underbrace{\overline{x}_2x_3x_4}_{p_5} \vee \underbrace{x_2\overline{x}_3x_4}_{p_6} \vee \underbrace{x_2x_3\overline{x}_4}_{p_7}.$$

p_2, p_5, p_6, p_7 – ядрові імпліканти.

Тупикові ДНФ:

$T_1 = \underline{\underline{p_2 \vee p_5 \vee p_6 \vee p_7}} \vee p_1 \vee p_3$, $L(T_1) = 24$,

$T_2 = \underline{\underline{p_2 \vee p_5 \vee p_6 \vee p_7}} \vee p_1 \vee p_4$, $L(T_2) = 24$,

$T_3 = \underline{\underline{p_2 \vee p_5 \vee p_6 \vee p_7}} \vee p_3 \vee p_4$, $L(T_3) = 23$.

Мінімальні ДНФ:

$M_1 = T_3 = \underline{\underline{p_2 \vee p_5 \vee p_6 \vee p_7}} \vee p_3 \vee p_4$, $L(M_1) = 23$.

2) СДНФ:

$$\underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3}_{p_1} \vee \underbrace{\bar{x}_2\bar{x}_3x_4}_{p_2} \vee \underbrace{x_1\bar{x}_3x_4}_{p_3} \vee \underbrace{x_1x_3\bar{x}_4}_{p_4} \vee \underbrace{x_1x_2\bar{x}_3}_{p_5} \vee \underbrace{x_1x_2\bar{x}_4}_{p_6}.$$

p_1, p_4 – ядрові імпліканти.

Тупикові ДНФ:

$T_1 = \underline{\underline{p_1 \vee p_4}} \vee p_2 \vee p_5$, $L(T_1) = 18$,

$T_2 = \underline{\underline{p_1 \vee p_4}} \vee p_3 \vee p_5$, $L(T_2) = 17$,

$T_3 = \underline{\underline{p_1 \vee p_4}} \vee p_3 \vee p_6$, $L(T_3) = 17$.

Мінімальні ДНФ:

$M_1 = T_2 = \underline{\underline{p_1 \vee p_4}} \vee p_3 \vee p_5$, $L(M_1) = 17$,

$M_2 = T_3 = \underline{\underline{p_1 \vee p_4}} \vee p_3 \vee p_6$, $L(M_2) = 17$.

3) СДНФ:

$$\underbrace{\bar{x}_1x_4}_{p_1} \vee \underbrace{\bar{x}_2x_4}_{p_2} \vee \underbrace{\bar{x}_1x_2x_3}_{p_3} \vee \underbrace{x_2x_3\bar{x}_4}_{p_4} \vee \underbrace{x_1\bar{x}_2x_3}_{p_5} \vee \underbrace{x_1x_3\bar{x}_4}_{p_6}.$$

p_1, p_2 – ядрові імпліканти.

Тупикові ДНФ:

$T_1 = \underline{\underline{p_1 \vee p_2}} \vee p_3 \vee p_6$, $L(T_1) = 13$,

$T_2 = \underline{\underline{p_1 \vee p_2}} \vee p_4 \vee p_5$, $L(T_2) = 13$,

$T_3 = \underline{\underline{p_1 \vee p_2}} \vee p_4 \vee p_6$, $L(T_3) = 13$.

Мінімальні ДНФ:

$M_1 = T_1 = \underline{\underline{p_1 \vee p_2}} \vee p_3 \vee p_6$, $L(M_1) = 13$,

$M_2 = T_2 = \underline{\underline{p_1 \vee p_2}} \vee p_4 \vee p_5$, $L(M_2) = 13$,

$M_3 = T_3 = \underline{\underline{p_1 \vee p_2}} \vee p_4 \vee p_6$, $L(M_3) = 13$.

4) СДНФ:

$$\underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_3}_{p_1} \vee \underbrace{\bar{x}_3 x_4}_{p_2} \vee \underbrace{\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4}_{p_3} \vee \underbrace{x_1 x_4}_{p_4} \vee \underbrace{x_1 x_3}_{p_5} \vee \underbrace{x_2 x_3 \bar{x}_4}_{p_6}.$$

p_1, p_5 – ядрові імпліканти.

Тупикові ДНФ:

$$T_1 = \underline{\underline{p_1 \vee p_5}} \vee p_2 \vee p_3, \quad L(T_1) = 13,$$

$$T_2 = \underline{\underline{p_1 \vee p_5}} \vee p_3 \vee p_4, \quad L(T_2) = 12,$$

$$T_3 = \underline{\underline{p_1 \vee p_5}} \vee p_2 \vee p_6, \quad L(T_3) = 12,$$

$$T_4 = \underline{\underline{p_1 \vee p_5}} \vee p_4 \vee p_6, \quad L(T_4) = 11.$$

Мінімальні ДНФ:

$$M_1 = T_4 = \underline{\underline{p_1 \vee p_5}} \vee p_4 \vee p_6, \quad L(M_1) = 11.$$

5) СДНФ:

$$\underbrace{\bar{x}_1 x_2}_{p_1} \vee \underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_3 x_4}_{p_2} \vee \underbrace{\bar{x}_2\bar{x}_3 x_4}_{p_3} \vee \underbrace{x_2\bar{x}_3\bar{x}_4}_{p_4} \vee \underbrace{x_1\bar{x}_2\bar{x}_3}_{p_5} \vee \underbrace{x_1\bar{x}_2\bar{x}_4}_{p_6} \vee$$

$$\vee \underbrace{x_1\bar{x}_3\bar{x}_4}_{p_7} \vee \underbrace{x_2 x_3 x_4}_{p_8}.$$

p_1, p_6, p_8 – ядрові імпліканти.

Тупикові ДНФ:

$$T_1 = \underline{\underline{p_1 \vee p_6 \vee p_8}} \vee p_2 \vee p_4 \vee p_5, \quad L(T_1) = 25,$$

$$T_2 = \underline{\underline{p_1 \vee p_6 \vee p_8}} \vee p_2 \vee p_5 \vee p_7, \quad L(T_2) = 25,$$

$$T_3 = \underline{\underline{p_1 \vee p_6 \vee p_8}} \vee p_3 \vee p_4, \quad L(T_3) = 20,$$

$$T_4 = \underline{\underline{p_1 \vee p_6 \vee p_8}} \vee p_3 \vee p_7, \quad L(T_4) = 20.$$

Мінімальні ДНФ:

$$M_1 = T_3 = \underline{\underline{p_1 \vee p_6 \vee p_8}} \vee p_3 \vee p_4, \quad L(M_1) = 20,$$

$$M_2 = T_4 = \underline{\underline{p_1 \vee p_6 \vee p_8}} \vee p_3 \vee p_7, \quad L(M_2) = 20.$$

6) СДНФ:

$$\underbrace{\bar{x}_2 x_4}_{p_1} \vee \underbrace{\bar{x}_3 x_4}_{p_2} \vee \underbrace{\bar{x}_2 x_3}_{p_3} \vee \underbrace{x_2\bar{x}_3}_{p_4} \vee \underbrace{x_1 x_4}_{p_5} \vee \underbrace{x_1 x_3}_{p_6} \vee \underbrace{x_1 x_2}_{p_7}.$$

p_3, p_4 – ядрові імпліканти.

Тупикові ДНФ:

$T_1 = \underline{\underline{p_3 \vee p_4}} \vee p_1 \vee p_6$, $L(T_1) = 10$,

$T_2 = \underline{\underline{p_3 \vee p_4}} \vee p_1 \vee p_7$, $L(T_2) = 10$,

$T_3 = \underline{\underline{p_3 \vee p_4}} \vee p_2 \vee p_6$, $L(T_3) = 10$,

$T_4 = \underline{\underline{p_3 \vee p_4}} \vee p_2 \vee p_7$, $L(T_4) = 10$.

Мінімальні ДНФ:

$M_1 = T_1 = \underline{\underline{p_3 \vee p_4}} \vee p_1 \vee p_6$, $L(M_1) = 10$,

$M_2 = T_2 = \underline{\underline{p_3 \vee p_4}} \vee p_1 \vee p_7$, $L(M_2) = 10$,

$M_3 = T_3 = \underline{\underline{p_3 \vee p_4}} \vee p_2 \vee p_6$, $L(M_3) = 10$,

$M_4 = T_4 = \underline{\underline{p_3 \vee p_4}} \vee p_2 \vee p_7$, $L(M_4) = 10$.

7) СДНФ:

$$\underbrace{\bar{x}_1 x_3}_{p_1} \vee \underbrace{\bar{x}_2 x_3}_{p_2} \vee \underbrace{\bar{x}_1 x_2}_{p_3} \vee \underbrace{x_2 \bar{x}_3}_{p_4} \vee \underbrace{x_1 \bar{x}_2}_{p_5} \vee \underbrace{x_1 \bar{x}_3}_{p_6}.$$

Ядрових імплікант немає.

Тупикові ДНФ:

$T_1 = p_1 \vee p_3 \vee p_5 \vee p_6$, $L(T_1) = 11$,

$T_2 = p_1 \vee p_4 \vee p_5$, $L(T_2) = 8$,

$T_3 = p_1 \vee p_2 \vee p_4 \vee p_6$, $L(T_3) = 11$,

$T_4 = p_2 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_5$, $L(T_4) = 11$,

$T_5 = p_2 \vee p_3 \vee p_6$, $L(T_5) = 8$.

Мінімальні ДНФ:

$M_1 = T_2 = p_1 \vee p_4 \vee p_5$, $L(M_1) = 8$,

$M_2 = T_5 = p_2 \vee p_3 \vee p_6$, $L(M_2) = 8$.

Задача 6.6.2.

1) $\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_1 x_3$;

2) $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 x_3$;

3) $\bar{x}_1 x_2 \vee x_2 x_3$;

4) $x_1 \vee \bar{x}_2$;

5) $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2 \vee x_1 x_3$;

6) $\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_3$;

7) $\bar{x}_2x_3 \vee x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2$ або $\bar{x}_2x_3 \vee x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3$;

8) $\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_3$ або $\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2$.

ТЕМА 7. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ АЛГОРИТМІВ

Задача 7.1.3. 1) $K_0 = 1^2\,0^6\,q_0 1$; 2) $K_0 = 10^5\,q_0 1$.

Задача 7.1.4.

1) Застосовна, $K_0 = 1^3\,0^2\,1^2\,0^2\,q_0$, $P_0 = 1^3\,0^2\,1^2$;
2) незастосовна (зациклюється на обробці двох сусідніх комірок всередині слова);
3) застосовна, $K_0 = 10\,(01)^2\,10^2\,q_0$, $P_0 = 10\,(01)^2\,1$.

Задача 7.1.5.

1) Незастосовна (починаючи з останньої одиниці слова, нескінченно заповнюватиме стрічку вліво одиницями);
2) незастосовна (нескінченно заповнюватиме стрічку ліворуч від слова одиницями).

Задача 7.4.2.

1) (0, 4, 0, 0, 0, …) і 0;
2) (2, 7, 2, 0, 0, …) і 2;
3) кінцева конфігурація та результат роботи відсутні, оскільки МНР працюватиме нескінченно (відбувається зациклення).

Задача 7.5.3. $f(x, y) = x - y$ при $x \ge y$.

ТЕМА 8. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

Задача 8.4.1.

1) 43; 2) 42; 3) 33; 4) 93; 5) 75; 6) 38; 7) 37; 8) 37.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Нікольський Ю. В., Пасічник В. В., Щербина Ю. М. Дискретна математика : підручник. Львів : ПП "Магнолія 2006 ", ЛНУ ім. Івана Франка, 2023. 432 с.
2. Борисенко О. А. Дискретна математика : підручник. Суми : Університетська книга, 2023. 255 с.
3. Матвієнко М. П. Дискретна математика : підручник. Київ : Видавництво "Ліра-К", 2019. 324 с.
4. Журавчак Л. М. Дискретна математика для програмістів : навчальний посібник. Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2019. 420 с.
5. Кривий С. Л. Дискретна математика : підручник. Чернівці-Київ : Видавничий дім "Букрек", 2020. 568 с.
6. Бардачов Ю. М., Соколова Н. А., Ходаков В. Є. Дискретна математика : підручник. Київ : Вища школа, 2007. 382 с.
7. Бондаренко М. Ф., Білоус Н. В., Руткас А. Г. Комп’ютерна дискретна математика : підручник. Харків : "Компанія СМІТ", 2004. 480 с.
8. Журавчак Л. М., Мельникова Н. І., Сердюк П. В. Практикум з комп’ютерної дискретної математики : навчальний посібник. Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2020. 316 с.
9. Висоцька В. А., Литвин В. В., Лозинська О. В. Дискретна математика : практикум. Львів : Видавництво "Новий Світ - 2000", 2020. 575 с.
10. Кривий С. Л. Збірник задач з дискретної математики. Чернівці-Київ : Видавничий дім "Букрек", 2018. 456 с.
11. Манзій О. С., Тесак І. Є., Кавалець І. І., Чарковська Н. В. Дискретна математика : практикум. Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2016. 212 с.
12. Базилевич Л. Є. Дискретна математика у прикладах і задачах : підручник. Львів : Видавець І.Е. Чижиков, 2013. 487 с.

Навчальне видання

Філіпчук *Микола Петрович*

ПРАКТИКУМ З ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник

Автор*:*

Філіпчук Микола Петрович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики та інформаційних технологій Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича

Відповідальний за випуск ***Бігун Я.Й.***

Літературний редактор ***Колодій О.В.***

Дизайн обкладинки ***Філіпчук М.П.***

Підписано до друку 09.07.2024. Формат 60x84/16.

Електронне видання. Ум.-друк. арк. 12,5.
Обл.-вид. арк. 13,4. Зам. Н-059.
Видавництво Чернівецького національного
університету імені Юрія Федьковича

58002, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2
e-mail: ruta@chnu.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №891 від 08.04.2002 р.

ЧНУ РУТА
ISBN 978-966-423-871-4