ТЕОРІЯ НАБЛИЖЕНЬ

Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

ТЕОРІЯ НАБЛИЖЕНЬ

Конспект лекцій

**Чернівці
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича
2024**

УДК 519.651(075.8)
Т 338

Рекомендовано Вченою радою
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича
(протокол № 13 від « 30 » вересня 2024 року)

Укладачі:
Маслюченко Володимир Кирилович, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математичного аналізу;
Маслюченко Олександр Володимирович, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математичного аналізу;
Михайлюк Володимир Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математичного аналізу.

Т 338 **Теорія наближень: конспект лекцій** / уклад. : В.К. Маслюченко, О.В. Маслюченко, В.В. Михайлюк. Чернівці : Чернівец. нац. ун-т ім.Ю. Федьковича, 2024. 170 с.

ISBN 978-966-423-894-3

Пропоноване видання містить теоретичні відомості, необхідні для опанування дисципліни «Теорія наближень». Наведено класичні теореми Вейєрштрасса про наближення неперервних функцій алгебраїчними многочленами Бернштейна і тригонометричними многочленами Фейєра та Джексона з доведенням. Доведено загальну теорему Стоуна–Вейєрштрасса про наближення елементами довільного кільця неперервних функцій на компакті. Досліджено питання найкращого наближення у квазінормованих просторах. Подано різні методи апроксимації нарізно неперервних функцій.

Для студентів, що здобувають освіту в галузі знань „Математика”.

УДК 519.651(075.8)

ISBN 978-966-423-894-3

Зміст

Розділ I. Теорема Вейєрштрасса та її аналоги

Лекція №1

Многочлени Бернштейна і перша теорема Вейєрштрасса

1 Неперервність і рівномірна неперервність

Нехай X та Y – топологічні простори, $f : X \to Y$ і $x_0 \in X$. Нагадаємо, що відображення f називається *неперервним у точці* x_0, якщо для довільного околу V точки $f(x_0)$ в Y існує окіл U точки x_0 в X такий, що $f(U) \subseteq V$. Кажуть, що відображення f *неперервне*, якщо воно неперервне в кожній точці $x \in X$. Для метричного простору (X, d_X) відстань між точками $x, y \in X$ позначатимемо $|x - y|_X = d_X(x, y)$.[1] Нагадаємо, що *ε-кулею* (або *ε-околом*) з центром в точці x_0 називається множина

$$B(x_0, \varepsilon) = B_X(x_0, \varepsilon) = \Big\{x \in X : |x - x_0|_X < \varepsilon\Big\}.$$

Множина $U \subseteq X$ називається *околом точки* x_0 в метричному просторі X, якщо $B(x_0, \varepsilon) \subseteq U$ для деякого $\varepsilon > 0$. Зрозуміло, що для метричних просторів X та Y неперервність в точці x_0 означає, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ Таке, що $f\Big(B_X(x_0, \delta)\Big) \subseteq B_Y\Big(f(x_0), \varepsilon\Big)$. Отже, в цьому випадку означення неперервності записується у вигляді звичного ланцюжка кванторів:

$$\forall x_0 \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X \ \Big| \ |x - x_0|_X < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)|_Y < \varepsilon.$$

Переносячи перший квантор загальності на кінець (і традиційно замінюючи x_0 на x'), приходимо до поняття рівномірної неперервності. Відображення $f : X \to Y$ називається *рівномірно неперервним*, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, x' \in X \ \Big| \ |x - x'|_X < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')|_Y < \varepsilon$$

[1] Звісно, що тут знак мінуса в позначенні $|x - y|_X$ не несе жодного змісту. Але, як відомо, кожний метричний простір можна ізометрично вкласти в нормований простір (наприклад в $\ell_\infty(X)$). І тоді цей мінус означатиме реальне віднімання в цьому нормованому просторі, а $|\cdot|_X$ – норму в цьому просторі.

Очевидно, що з рівномірної неперервності випливає неперервність, а навпаки, взагалі кажучи – ні: прикладом служить відображення $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Проте у випадку компактного X істине й обернене твердження, яке прийнято називати *теоремою Кантора*.

Нагадаємо, що топологічний простір називається *компактним*, якщо з кожного його відкритого покриття можна виділити скінченне підпокриття. Це означення вочевидь рівносильно тому, що для довільної сім'ї $(U_x)_{x\in X}$ околів U_x точок x існує скінченний набір $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ такий, що $X = \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_{x_k}$.

Теорема 1.1 (Кантор). *Нехай X – компактний метричний простір, Y – метричний простір і $f : X \to Y$ – неперервне відображення. Тоді f рівномірно неперервне.*

Доведення. Візьмемо $\varepsilon > 0$. Оскільки f неперервне, то для кожного $x \in X$ існує $\delta_x > 0$ таке, що $f\Big(B_X(x, 2\delta_x)\Big) \subseteq B_Y\Big(f(x), \frac{\varepsilon}{2}\Big)$. Покладемо $U_x = B_X(x, \delta_x)$. Тоді з компактності X випливає, що існують $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ такі, що $X = \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_{x_k}$. Покладемо $\delta = \min\Big\{\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \ldots, \delta_{x_n}\Big\}$ і візьмемо $x, x' \in X$ такі, що $|x-x'|_X < \delta$. Тоді існує $k = 1, 2, \ldots, n$ таке, що $x \in U_{x_k}$. Отже,

$$|x - x_k|_X < \delta_{x_k} < 2\delta_{x_k} \text{ і } |x' - x_k|_X < |x' - x|_X + |x - x_k|_X < \delta + \delta_{x_k} \leq 2\delta_{x_k}.$$

Таким чином, $x, x' \in B_X(x_k, 2\delta_{x_k})$, а значить,

$$|f(x) - f(x')|_X \leq |f(x) - f(x_k)|_X + |f(x_k) - f(x')|_X < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отже, f рівномірно неперервна. □

2 Допоміжні тотожності та нерівності за участю біноміальних коефіцієнтів

Нагадаємо формулу *бінома Ньютона*:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}, \text{ де } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

До речі, для позначення *біноміальних коефіцієнтів* C_n^k в англомовній літературі частіше використовується символ Ньютона $\binom{n}{k}$. Підставляючи в біном Ньютона $x = 1 - y$, одержуємо

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1. \tag{1.1}$$

Продиференціювавши формулу бінома Ньютона по змінній x і домноживши на x, матимемо:

$$n(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^{k-1} y^{n-k} \quad \text{і} \quad nx(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^k y^{n-k}.$$

Підставляючи знову $y = 1 - x$, отримуємо:

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx. \tag{1.2}$$

Далі продиференціюємо ще раз по x рівність $\sum\limits_{k=0}^{n} kC_n^k x^k y^{n-k} = nx(x+y)^{n-1}$ і домножимо її на x. Будемо мати

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k y^{n-k} = x\big(n(x+y)^{n-1} + nx(n-1)(x+y)^{n-2}\big) =$$

$$= nx(x+y)^{n-2}(x+y+(n-1)x) = nx(x+y)^{n-2}(y+nx).$$

Покладаючи знову $y = 1 - x$, отримаємо, що

$$S_3 = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x+nx). \tag{1.3}$$

Приступимо тепер до обчислення суми

$$S = \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}. \tag{1.4}$$

Підносячи до квадрата $(k - nx)^2$ і використовуючи значення сум S_1, S_2 та S_3, що були знайдені вище, отримаємо

$$S = \sum_{k=0}^{n} (k^2 - 2knx + n^2x^2) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - 2nx \sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^k (1-x)^{n-k} + n^2x^2 \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= S_3 - 2nxS_2 + n^2x^2 S_1 = nx(1-x+nx) - 2nx \cdot nx + n^2x^2 = nx(1-x+nx-2nx+nx) = nx(1-x).$$

Отже, ми встановили, що

$$S = \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x). \tag{1.5}$$

Далі зауважимо, що

$$x(1-x) = x - x^2 = \tfrac{1}{4} - (x^2 - 2x \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{4} - (x - \tfrac{1}{2})^2 \le \tfrac{1}{4}.$$

Ми довели наступну нерівність

$$S = \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \le \frac{n}{4}. \tag{1.6}$$

Тепер ми готові довести наступну основну лему.

Лема 1.1. *Нехай* $x \in [0;1]$, $\delta > 0$ *і* $n \in \mathbb{N}$. *Тоді*

$$S_n(x,\delta) = \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \tfrac{1}{4n\delta^2},$$

де сумування здійснюється по всіх $k = 0, 1, \ldots, n$ *з* $\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta$.

Доведення. Зауважимо, що

$$|\tfrac{k}{n} - x| \geq \delta \Leftrightarrow (\tfrac{k}{n} - x)^2 \geq \delta^2 \Leftrightarrow (k - nx)^2 \geq n^2\delta^2 \Leftrightarrow 1 \leq \tfrac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2}.$$

Тому, використовуючи нерівність (1.6), матимемо:

$$S_n(x,\delta) = \sum_{|\frac{k}{n}-x|\geq\delta} 1 \cdot C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \sum_{|\frac{k}{n}-x|\geq\delta} \tfrac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2} \cdot C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq$$

$$\leq \tfrac{1}{n^2\delta^2} \sum_{|\frac{k}{n}-x|\geq\delta} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \tfrac{1}{n^2\delta^2} \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \tfrac{1}{n^2\delta^2} \cdot \tfrac{n}{4} = \tfrac{1}{4n\delta^2},$$

що й треба було довести. □

3 Многочлени Бернштейна і теорема Бернштейна

Для функції $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ і номера n розглянемо многочлен

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\big(\tfrac{k}{n}\big) C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

який називається *n-им многочленом Бернштейна.*

Нагадаємо, що послідовність функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$ *рівномірно збігається* до функції $f : X \to \mathbb{R}$ на множині X (позначаємо $f_n \rightrightarrows f$ на X), якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \; \Big| \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Символом $C(X)$ позначимо простір усіх неперервних функцій $f : X \to \mathbb{R}$. Якщо $X = [a;b]$, то писатимемо $C[a;b]$ замість $C\big([a;b]\big)$.

Наступний результат, який ми називатимемо *теоремою Бернштейна*, встановив харківський математик С. Н. Бернштейн у 1912 році.

Теорема 1.2 (Бернштейн)**.** *Нехай* $f \in C[0;1]$. *Тоді* $B_n f \rightrightarrows f$ *на* $[0;1]$.

Доведення. Оскільки за лемою Гейне-Бореля відрізок $[0;1]$ є компактним простором, то, за теоремою 1.1, функція f рівномірно неперервна. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і для нього знайдемо $\delta > 0$ таке, що для довільних $x, x' \in [0;1]$ з нерівності $|x - x'| < \delta$ випливає, що $|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}$. З формули (1.1) маємо, що $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f(x) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$. Тому

$$|f(x) - B_n f(x)| = \Big| \sum_{k=0}^{n} f(x) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} f\big(\tfrac{k}{n}\big) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \Big| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} C_n^k \big| f(x) - f\big(\tfrac{k}{n}\big) \big| x^k (1-x)^{n-1} = \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

де

$$\Sigma_1 = \sum_{|\frac{k}{n} - x| < \delta} C_n^k \big| f(x) - f\big(\tfrac{k}{n}\big) \big| x^k (1-x)^{n-1} \quad \text{і} \quad \Sigma_2 = \sum_{|\frac{k}{n} - x| \geq \delta} C_n^k \big| f(x) - f\big(\tfrac{k}{n}\big) \big| x^k (1-x)^{n-1}.$$

За вибором δ, з нерівності $|\frac{k}{n} - x| < \delta$ випливає, що $|f(x) - f(\frac{k}{n})| < \frac{\varepsilon}{2}$, а тому, використовуючи (1.1), матимемо:

$$\Sigma_1 \leq \tfrac{\varepsilon}{2} \sum_{|\frac{k}{n} - x| < \delta} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \tfrac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \tfrac{\varepsilon}{2} S_1 = \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Приступимо до оцінки другої суми Σ_2. За теоремою Вейєрштрасса про обмеженість неперервної функції на відрізку, існує таке число $M > 0$, що $|f(x)| \leq M$ на $[0;1]$. в такому разі

$$|f(\tfrac{k}{n}) - f(x)| \leq |f(\tfrac{k}{n})| + |f(x)| \leq M + M = 2M,$$

отже, за лемою 1.1, матимемо:

$$\Sigma_2 \leq 2M \sum_{|\frac{k}{n} - x| \geq \delta} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 2M \cdot S_n(x, \delta) \leq 2M \cdot \tfrac{1}{4n\delta^2} = \tfrac{M}{2n\delta^2}$$

для всіх $x \in [0;1]$. Оскільки $\gamma_n = \frac{M}{2n\delta^2} \to 0$ при $n \to \infty$, то існує такий номер N, для якого $\gamma_n < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n \geq N$. В такому разі $\Sigma_2 \leq \gamma_n < \frac{\varepsilon}{2}$, а тому

$$|f(x) - B_n f(x)| \leq \Sigma_1 + \Sigma_2 < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

при $n \geq N$ і $x \in [0;1]$. Отже, $B_n f \rightrightarrows f$ на $[0;1]$. □

4 Перша теорема Вейєрштрасса про наближення

К. Вейєрштрасс у 1887 році за допомогою сингулярних інтегралів встановив теорему про рівномірне наближення неперервних функцій алгебраїчними многочленами, яку ми назвемо *першою теоремою Вейєрштрасса про наближення.* Вона легко виводиться з пізнішої теореми Бернштейна, що ми тут і зробимо навіть в уточненій версії.

Теорема 1.3 (Вейєрштрасс). *Нехай $a < b$ і $f \in C[a;b]$. Тоді для многочленів*

$$f_n(x) = \tfrac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} f\big(a + \tfrac{k}{n}(b-a)\big) C_n^k (x-a)^k (b-x)^{n-k}$$

виконується, що $f_n \rightrightarrows f$ на $[a;b]$.

Доведення. Розглянемо лінійну функцію $x = l(t) = a + t(b-a)$ і обернену до неї $t = l^{-1}(x) = \frac{x-a}{b-a}$. Зрозуміло, що $l\big([0;1]\big) = [a;b]$. Розглянемо функцію $g = f \circ l$. Зрозуміло, $g \in C[0;1]$. Отже, за теоремою 1.1, матимемо, що для функцій $g_n = B_n g$ виконується $g_n \rightrightarrows g$ на $[0;1]$. Покладемо $f_n = g_n \circ l^{-1}$. Але $g \circ l^{-1} = f \circ l \circ g^{-1} = f$ і $l^{-1}\big([0;1]\big) = [a;b]$. Отже, $f_n = g_n \circ l^{-1} \rightrightarrows g \circ l^{-1} = f$ на $[a;b]$. Крім того, оскільки $g\big(\frac{k}{n}\big) = f\big(a + \frac{k}{n}(b-a)\big)$, то

$$f_n(x) = g_n\big(\tfrac{x-a}{b-a}\big) = \sum_{k=0}^{n} g\big(\tfrac{k}{n}\big)\big(\tfrac{x-a}{b-a}\big)^k\big(1-\tfrac{x-a}{b-a}\big)^{n-k} = \tfrac{1}{(b-a)^n}\sum_{k=0}^{n} f\big(a+\tfrac{k}{n}(b-a)\big)C_n^k(x-a)^k(b-x)^{n-k},$$

що і потрібно було довести. □

Лекція №2

Перша теорема Вейєрштрасса про наближення функцій багатьох змінних

1 Многочлени Бернштейна для функцій багатьох змінних

Для довільної множини X і числа $s \in \mathbb{N}$ позначатимемо *s-ий степінь* X символом $X^s = \Big\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_s) : x_1, x_2, \ldots, x_s \in X\Big\}$. Так, $[0;1]^s$ – це *s-вимірний куб.* Якщо $s = 1$, то $[0;1]^1 = [0;1]$ – це звичайний одиничний відрізок. У випадку $s = 2$, $[0;1]^2$ – це одиничний квадрат. Позначатимемо $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Елементи $n = (n_i)_{i=1}^s = (n_1, n_2, \ldots, n_s) \in \mathbb{N}_0^s$ називатимемо *мультиіндексами.* Для векторів (чи мультиіндексів) $x = (x_i)_{i=1}^s$ та $y = (y_i)_{i=1}^s \in \mathbb{R}^s$ запис $x \leq y$ (чи, відповідно, $x < y$) означає, що $x_i \leq y_i$ (чи, відповідно, $x_i < y_i$) для довільного $i = 1, 2, \ldots, s$. Крім того, ми ототожнюватимемо $0 = (0, 0, \ldots, 0)$, якщо це не викликатиме непорозумінь. Для номера $m \in \mathbb{N}$ позначатимемо

$$K_m = \Big\{0, 1, \ldots, m\Big\}$$

Далі для мультиіндекса $n = (n_i)_{i=1}^s \in \mathbb{N}_0^s$ позначатимемо

$$K_n = K_{n_1, n_2, \ldots, n_s} = \Big\{k \in \mathbb{N}_0^s : 0 \leq k \leq n\Big\} = \prod_{i=1}^s K_{n_i}.$$

Зокрема, якщо $n_i = m$ для кожного $i = 1, 2, \ldots, s$, то

$$K_n = K_{\underbrace{m, m, \ldots, m}_{s \text{ раз}}} = K_m^s.$$

Крім того, для векторів $a = (a_i)_{i=1}^s, b = (b_i)_{i=1}^s \in \mathbb{R}^s$ таких, що $a \leq b$, позначатимемо

$$P[a;b] = \Big\{x \in \mathbb{R}^s : a \leq x \leq b\Big\} = \prod_{i=1}^s [a_i; b_i].$$

Таким чином, $K_n = \mathbb{N}_0^s \cap P[0;n]$ для мультиіндекса $n \in \mathbb{N}_0^s$.

Далі для векторів $x, y \in \mathbb{R}^s$, крім звичайних покоординатних лінійних операцій додавання віднімання і множення на число, ми використовуватимемо також операції покоординатного множення, ділення і скалярного піднесення до степеня

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_s + y_s), \quad x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_s - y_s),$$

$$xy = (x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_s y_s), \quad \tfrac{x}{y} = (\tfrac{x_1}{y_1}, \tfrac{x_2}{y_2}, \ldots, \tfrac{x_s}{y_s}), \quad x^y = x_1^{y_1} x_2^{y_2} \ldots x_s^{y_s}.$$

При цьому допускаємо, що замість одного з векторів x чи y написано звичайне число. В такому разі ці операції розуміємо ототожнюючи $x = (x, x, \dots, x)$ чи $y = (y, y, \dots, y)$. Скажімо, $x^m = x_1^m x_2^m \dots x_s^m$ для $m \in \mathbb{N}$, чи $1 - x = (1 - x_1, 1 - x_2, \dots 1 - x_s)$. Для мультиіндексів $k = (k_i)_{i=1}^s, n = (n_i)_{i=1}^s \in \mathbb{N}^s$ таких, що $k \le n$, введемо позначення

$$C_n^k = C_{n_1}^{k_1} C_{n_2}^{k_2} \dots C_{n_s}^{k_s}$$

Визначимо також функції $\varphi_{n,k} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ таким правилом:

$$\varphi_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \prod_{i=1}^s C_{n_i}^{k_i} x_i^{k_i} (1 - x_i)^{n_i - k_i}, \quad \text{для } x = (x_i)_{i=1}^s \in \mathbb{R}^s.$$

Для функції $f : [0; 1]^s$ і мультиіндекса $n = (n_1, n_2, \dots, n_s) \in \mathbb{N}^s$ покладемо

$$B_n f(x) = \sum_{k \in K_n} f\left(\tfrac{k}{n}\right) \varphi_{n,k}(x), \quad \text{для } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^s.$$

Або, детальніше,

$$B_n f(x) = B_{n_1, n_2, \dots, n_s}(x_1, x_2, \dots, x_s) = \sum_{k \in K_n} f\left(\tfrac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \cdots \sum_{k_s=0}^{n_s} f\left(\tfrac{k_1}{n_1}, \tfrac{k_2}{n_2}, \dots, \tfrac{k_s}{n_s}\right) \prod_{i=1}^s C_{n_i}^{k_i} x_i^{k_i} (1 - x_i)^{n_i - k_i} =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \cdots \sum_{k_s=0}^{n_s} f\left(\tfrac{k_1}{n_1}, \tfrac{k_2}{n_2}, \dots, \tfrac{k_s}{n_s}\right) C_{n_1}^{k_1} C_{n_2}^{k_2} \dots C_{n_s}^{k_s} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_s^{k_s} (1-x_1)^{n_1-k_1} (1-x_2)^{n_2-k_2} \dots (1-x_s)^{n_s-k_s}.$$

Многочлен $B_n f(x) = B_{n_1, n_2, \dots, n_s}(x_1, x_2, \dots, x_s)$ від s змінних називатимемо *многочленом Бернштейна, що відповідає мультиіндексу* n.

Ми використовуватимемо наступну тотожність, яка узагальнює (1.1) з лекції 1.

Лема 2.1. *Для довільних* $s \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^s$ *та* $x \in \mathbb{R}^s$ *виконується, що*

$$\sum_{k \in K_n} \varphi_{n,k}(x) = 1.$$

Тобто $B_n 1 = 1$.

Доведення. Використовуючи дистрибутивність і рівність (1.1), матимемо:

$$\sum_{k \in K_n} \varphi_{n,k}(x) = \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \cdots \sum_{k_s=0}^{n_s} \prod_{i=1}^s C_{n_i}^{k_i} x_i^{k_i} (1 - x_i)^{n_i - k_i} = \prod_{i=1}^s \sum_{k_i=0}^{n_i} C_{n_i}^{k_i} x_i^{k_i} (1 - x_i)^{n_i - k_i} = 1.$$

□

2 Теорема Бернштейна для функцій багатьох змінних

Для вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_2)$ число $|x| = \max\limits_{i=1,\ldots,s} |x_i|$ називаємо його *максимум-нормою*. Наступний результат, який ми називаємо *теоремою Бернштейна для функцій багатьох змінних*, узагальнює теорему 1.2.

Теорема 2.1 (Бернштейн)**.** *Нехай* $s \in C[0;1]^s$*. Тоді*

$$B_n f(x) = B_{n_1,n_2,\ldots,n_s} f(x) \rightrightarrows f(x) \quad \text{на} \quad [0;1]^s$$

при $n_1 \to \infty, n_2 \to \infty, \ldots, n_s \to \infty$.

Доведення. Оскільки множина $[0;1]^s$ компактна, то за теоремою 1.1, функція f є рівномірно неперервна. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і виберемо $\delta > 0$ таке, що для довільних $x, x' \in [0;1]^s$ з $|x - x'| < \delta$ випливає, що $|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}$. За лемою 2.1, маємо $f(x) = \sum\limits_{k \in K_n} f(x)\varphi_{n,k}(x)$ і $0 \leq \varphi_{n,k}(x) \leq 1$ для $x \in [0;1]^s$. В такому разі

$$|f(x) - B_n f(x)| = \Big| \sum_{k \in K_n} f(x)\varphi_{n,k}(x) - \sum_{k \in K_n} f\left(\tfrac{k}{n}\right)\varphi_{n,k}(x) \Big| \leq \sum_{k \in K_n} \left| f(x) - f\left(\tfrac{k}{n}\right) \right| \varphi_{n,k}(x) = \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

де

$$\Sigma_1 = \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta} \left| f(x) - f\left(\tfrac{k}{n}\right) \right| \varphi_{n,k}(x) \quad \text{і} \quad \Sigma_2 = \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta} \left| f(x) - f\left(\tfrac{k}{n}\right) \right| \varphi_{n,k}(x).$$

З леми 2.1 на основі вибору δ матимемо, що

$$\Sigma_1 \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta} \varphi_{n,k}(x) \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \in K_n} \varphi_{n,k}(x) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Перейдемо до оцінки Σ_2. Оскільки функція f неперервна на компактній множині $[0;1]^s$, то за теоремою Вейєрштрасса, вона буде обмеженою. Отже, існує $M > 0$ таке, що $|f(x)| \leq M$ на $[0;1]^k$. Далі зауважимо, що нерівність $\left|\frac{k}{n} - x\right| = \max\limits_{i=1,\ldots,s} \left|\frac{k_i}{n_i} - x_i\right| \geq \delta$ рівносильна тому, що існує $i = 1, 2, \ldots, s$ для якого $\left|\frac{k_i}{n_i} - x_i\right| \geq \delta$. Крім того, $\varphi_{n,k}(x) \geq 0$ і $\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq 2M$. Тому

$$\Sigma_2 \leq 2M \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta} \varphi_{n,k}(x) \leq \sum_{i=1}^{s} \sum_{\left|\frac{k_i}{n_i} - x_i\right| \geq \delta} \varphi_{n,k}(x).$$

Зауважимо, що з (1.1) випливає, що $0 \leq C_{n_j}^{k_j} x_i (1 - x_j)^{n_j - k_j} \leq 1$ при $0 \leq x_j \leq 1$ та $j = 1, 2, \ldots, s$. Тому за лемою 1.1, для довільного $i = 1, 2, \ldots s$ виконується, що

$$\sum_{\left|\frac{k_i}{n_i} - x_i\right| \geq \delta} \varphi_{n,k}(x) = \sum_{\left|\frac{k_i}{n_i} - x_i\right| \geq \delta} C_{n_i}^{k_i} x_i (1 - x_i)^{n_i - k_i} \prod_{j \neq i} C_{n_j}^{k_j} x_j (1 - x_j)^{n_i - k_j} \leq$$

$$\leq \sum_{\left|\frac{k_i}{n_i}-x_i\right|\geq\delta} C_{n_i}^{k_i} x_i(1-x_i)^{n_i-k_i} = S_{n_i}(x_i,\delta) \leq \tfrac{1}{4n_i\delta^2}.$$

Тому

$$\Sigma_2 \leq 2M \sum_{i=1}^{s} \tfrac{1}{4n_i\delta^2} = \tfrac{M}{2\delta^2}\big(\tfrac{1}{n_1}+\tfrac{1}{n_2}+\cdots+\tfrac{1}{n_s}\big) = A_n.$$

Оскільки $A_n \to 0$ при $n_1, n_2, \ldots, n_s \to \infty$, то існує такий номер N, що $A_n < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n_1, n_2, \ldots, n_s \geq N$. Тоді для таких $n = (n_1, n_2, \ldots, n_s)$ і довільного $x \in [0;1]^s$ виконується нерівність

$$|f(x) - B_n f(x)| \leq \Sigma_1 + \Sigma_2 < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отже, $B_n f \rightrightarrows f$ на $[0;1]^s$. □

3 Перша теорема Вейєрштрасса для функцій багатьох змінних

Перейдемо до доведення *першої теореми Вейєрштрасса про наближення функцій багатьох змінних на s-вимірному паралелепіпеді.*

Теорема 2.2 (Вейєрштрасс)**.** *Нехай $a, b \in \mathbb{R}^s$ такі, що $a < b$, $P = P[a;b]$ і $f \in C(P)$. Тоді для многочленів*

$$f_n(x) = \tfrac{1}{(b-a)^n} \sum_{k\in K_n^s} f\big(a + \tfrac{k}{n}(b-a)\big) C_n^k (x-a)^k (b-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^s,$$

виконується, що $f_n \rightrightarrows f$ на P.

Доведення. Розглянемо лінійну заміну $x = l(t) = a + t(b-a)$, $t \in [0;1]^s$, і обернену функцію $t = \frac{x-a}{b-a}$, $x \in P$ (тут ми використовуємо векторні операції, введені на початку лекції). Зрозуміло, що $l : [0;1]^s \to P$ і $l^{-1} : P \to [0;1]^s$ є лінійними (неоднорідними) бієкціями. Покладемо $g = f \circ l$. Тоді $g \in C[0;1]^s$. Отже, за теоремою 2.1, для многочленів Бернштейна $g_n = B_{n,n,\ldots,n} g$, $n \in \mathbb{N}$, виконується, що $g_n(t) \rightrightarrows g(t)$ при $t \in T$. Зробивши обернену заміну $t = l^{-1}(x)$, отримаємо многочлени $f_n = g_n \circ l^{-1}$, причому

$$f_n = g_n \circ l^{-1} \rightrightarrows g \circ l^{-1} = f \circ l \circ l^{-1} = f \quad \text{на } P.$$

Крім того, для $x = l(t) \in P$ матимемо, що $t = l^{-1}(x) = \frac{x-a}{b-a}$, і тому

$$f_n(x) = g_n\big(l^{-1}(x)\big) = g_n(t) = \sum_{k\in K_n^s} g\big(\tfrac{k}{n}\big) C_n^k t^k (1-t)^{n-k} = \sum_{k\in K_n^s} f\big(l\big(\tfrac{k}{n}\big)\big) C_n^k t^k (1-t)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k\in K_n^s} f\big(l\big(\tfrac{k}{n}\big)\big) C_n^k \big(\tfrac{x-a}{b-a}\big)^k \big(1 - \tfrac{x-a}{b-a}\big)^{n-k} = \tfrac{1}{(b-a)^n} \sum_{k\in K_n^s} f\big(l\big(\tfrac{k}{n}\big)\big) C_n^k \big(x-a\big)^k \big(b-x\big)^{n-k},$$

і залишилось підставити $l\big(\frac{k}{n}\big) = a + \frac{k}{n}(b-a)$. □

Тепер ми легко можемо довести *першу теорему Вейерштрасса про наближення для компактних підмножин* $\mathbb{R}^s$.

Теорема 2.3 (Вейєрштрасс). *Нехай* $s \in \mathbb{N}$, X *– компактна підмножина* $\mathbb{R}^s$ *і* $f \in C(X)$. *Тоді існує послідовність многочленів* $f_n : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ *така, що* $f_n \rightrightarrows f$ *на* X.

Доведення. Зауважимо, що компактна множина X замкнена і обмежена в X. Тому $X \subseteq P$ для деякого паралелепіпеда $P = P[a; b]$, де $a, b \in \mathbb{R}^s$ і $a < b$. Оскільки P є нормальним простором, адже він метризовний, і компактна множина X замкнена в P, то за теоремою Тітце-Урисона [4, 2.1.6] існує неперервна функція $\tilde{f} : P \to \mathbb{R}$ така, що $\tilde{f}(x) = f(x)$ на X. Далі за теоремою 2.2 існує послідовність многочленів $f_n : \mathbb{R}^{\to}\mathbb{R}$ така, що $f_n \rightrightarrows \tilde{f}$ на P. Тоді, оскільки $X \subseteq P$, то $f_n(x) \rightrightarrows \tilde{f}(x) = f(x)$ для $x \in X$. $\square$

Лекція №3

Тригонометричні многочлени і друга теорема Вейєрштрасса

1 Нормовані алгебри та їх підалгебри

Нагадаємо, що *алгеброю* над полем $\mathbb{K}$ дійсних або комплексних чисел називається векторний простір над полем $\mathbb{K}$, на якому задана операція множення $X^2 \ni (x, y) \mapsto xy \in X$, яка для довільних $x, y, z \in X$ і $\lambda \in \mathbb{K}$ задовольняє умови (A_1)–(A_4) (див. нижче). Якщо множення *комутативне*, тобто виконується властивість (A_5) для довільних $x, y \in X$, то алгебра називається *комутативною*. Одиницею алгебри називається такий її елемент $1 \in X$, що для довільного $x \in X$ виконується (A_6). Пара $\big(X, \|\cdot\|\big)$ називається *нормованою алгеброю*, якщо $\|\cdot\|$ є нормою на алгебрі X, причому для довільних $x, y \in X$ виконується (A_7). Якщо до того ж вона повна відносно своєї норми, то кажуть, що X – 4*банахова алгебра*.

(A_1) $(xy)z = x(yz)$; (A_2) $(x + y)z = xz + yz$; (A_3) $x(y + z) = xy + xz$;

(A_4) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$; (A_5) $xy = yx$; (A_6) $x1 = 1x = x$;

(A_7) $\|xy\| \le \|x\|\|y\|$

Підмножина A алгебри X називається *підалгеброю*, якщо A є лінійним підпростором таким, що для довільних $x, y \in A$ виконується, що $xy \in A$.

В наступних прикладах обмежимося випадком $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Звісно, що поле $\mathbb{R}$ можна замінити на $\mathbb{C}$.

Приклад 3.1. Нехай K – компактний простір і $C(K)$ – векторний простір неперервних функцій $f : K \to \mathbb{R}$ з поточковим множенням $fg(t) = f(t)g(t)$, $t \in K$ і максимум-нормою $\|f\| = \max\limits_{t \in K} |f(t)|$. Тоді $C(K)$ є комутативною банаховою алгеброю над полем $\mathbb{R}$ з одиницею $1(t) = 1$, $t \in K$.

Приклад 3.2. Нехай $C = C(\mathbb{R})$ – векторний простір усіх неперервних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ з поточковим множенням. Тоді A є комутативною алгеброю з одиницею $1(t) = 1$.

Приклад 3.3. Сукупність P усіх алгебраїчних поліномів на $\mathbb{R}$ є підалгеброю C.

Приклад 3.4. Сукупність $C_{2\pi}$ усіх 2π-періодичних функція $f \in C$ є підалгеброю C. Якщо задати норму $\|f\| = \max\limits_{t \in \mathbb{R}}$, то $C_{2\pi}$ стає комутативною банаховою алгеброю.

Приклад 3.5. Нехай X – нормований простір, $L(X)$ – простір лінійних неперервних операторів $A : X \to X$ з нормою $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Ax\|$. Тоді $L(X)$ є нормованою алгеброю (взагалі кажучи, некомутативною) з одиницею $Ix = x$, $x \in X$. Якщо X – банахів простір, то $L(X)$ є банаховою алгеброю.

2 Тригонометричні многочлени

Тригонометричним многочленом називатимемо функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вигляду

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos kx + b_k \sin kx\big),$$

де $n \in \mathbb{N}_0$ і $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Сукупність усіх тригонометричних многочленів позначатимемо символом T. Зрозуміло, що $T \subseteq C$.

Зараз ми встановимо деякі властивості сукупності T.

Твердження 3.1. *Сукупність T усіх тригонометричних поліномів на $\mathbb{R}$ має такі властивості:*

1^0 *T є підалгеброю алгебри $C_{2\pi}$;*

2^0 *якщо f є алгебраїчним многочленом і $g(x) = f(\cos x)$ та $h(x) = f(\sin x)$ для $x \in \mathbb{R}$, то $g, h \in T$;*

3^0 *якщо $f \in T$ і $g(x) = f\big(x + \frac{\pi}{2}\big)$ та $h(x) = f\big(x - \frac{\pi}{2}\big)$ для $x \in \mathbb{R}$, то $g, h \in T$.*

Доведення. 1^0. Нехай $f, g \in T$ і $\lambda \in \mathbb{R}$. Тоді, доповнюючи при потребі суми доданками з нульовими коефіцієнтами, матимемо, що

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \big(a_k \cos kx + b_k \sin kx\big), \quad g(x) = \sum_{k=0}^{n} \big(c_k \cos kx + d_k \sin kx\big).$$

У такому разі

$$\lambda f(x) = \sum_{k=0}^{n} \big(\lambda a_k \cos kx + \lambda b_k \sin kx\big),$$

$$f(x) + g(x) = f(x) = \sum_{k=0}^{n} \big((a_k + c_k) \cos kx + (b_k + d_k) \sin kx\big),$$

а отже, $\lambda f \in T$ і $f + g \in T$.

Для перевірки властивості $fg \in T$ пригадаємо такі тригонометричні формули:

$$\begin{aligned} \cos\alpha\cos\beta &= \tfrac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\big), \quad \sin\alpha\sin\beta = \tfrac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big), \\ \cos\alpha\sin\beta &= \tfrac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\big), \quad \sin\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\big). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Перемножаючи суми f та g і використовуючи (3.1), одержимо

$$f(x)g(x)=\sum_{k,j=1}^{n}\big(a_kc_k\cos kx\cos kj+b_kd_k\sin kx\sin kj+a_kd_k\cos kx\sin kj+b_kc_k\sin kx\cos kj\big)=$$

$$=\tfrac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n}\Big(a_kc_k\big(\cos(k-j)x+\cos(k+j)x\big)+b_kd_k\big(\cos(k-j)x-\cos(k+j)x\big)+$$

$$+a_kd_k\big(\sin(k+j)x-\sin(k-j)x\big)+b_kc_k\big(\sin(k+j)x+\sin(k-j)x\big)\Big).$$

Перегрупувавши доданки одержуємо, що $fg\in T$.

2^0. Нехай $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k$. Тоді

$$g(x)=f(\cos x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\cos^k x.$$

Але з (i) випливає, що функції $\cos^k x$ є тригонометричними многочленами, як добуток $\cos x$ самої на себе. Тому $g\in T$, як лінійна комбінація елементів T. Аналогічно показуємо, що $h\in T$.

3^0. За відомими формулами додавання,

$$\cos k\big(x\pm\tfrac{\pi}{2}\big)=\cos kx\cos\tfrac{k\pi}{2}\mp\sin kx\sin\tfrac{k\pi}{2},\quad \sin k\big(x\pm\tfrac{\pi}{2}\big)=\sin kx\cos\tfrac{k\pi}{2}\pm\cos kx\sin\tfrac{k\pi}{2}.$$

Тому, зводячи подібні в формулах для виразів $g(x)$ та $h(x)$, одержуємо, що $g,h\in T$. □

3 Зображення довільної функції у вигляді суми парної і непарної

Твердження 3.2. *Кожну функцію $f\in C_{2\pi}$ можна однозначно подати у вигляді $f=p+q$, де $p\in C_{2\pi}$ – парна функція, а $q\in C_{2\pi}$ – непарна функція.*

Доведення. Єдиність. Нехай $f=p+q$, де $p\in C_{2\pi}$ – парна функція, а $q\in C_{2\pi}$ – непарна функція. Тоді для $x\in\mathbb{R}$ матимемо, що

$$f(x)+f(-x)=p(x)+q(x)+p(-x)+q(-x)=p(x)+q(x)+p(x)-q(x)=2p(x),$$

$$f(x)-f(-x)=p(x)+q(x)-p(-x)-q(-x)=p(x)+q(x)-p(x)+q(x)=2q(x).$$

Таким чином,

$$p(x)=\tfrac{1}{2}\big(f(x)+f(-x)\big),\quad q(x)=\tfrac{1}{2}\big(f(x)-f(-x)\big)\quad \text{для } x\in\mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Існування. Визначимо функції $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ формулами (3.2). Зрозуміло, що p та q неперервні. Оскільки f є 2π-періодичною, то для довільного $x \in \mathbb{R}$ виконується, що

$$p(x + 2\pi) = \tfrac{1}{2}\big(f(x + 2\pi) + f(-x - 2\pi)\big) = \tfrac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) = p(x),$$

$$q(x + 2\pi) = \tfrac{1}{2}\big(f(x + 2\pi) - f(-x - 2\pi)\big) = \tfrac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big) = q(x).$$

Отже, $p, q \in C_{2\pi}$. Далі, для довільного $x \in \mathbb{R}$

$$p(-x) = \tfrac{1}{2}\big(f(-x) + f(-(-x))\big) = \tfrac{1}{2}\big(f(-x) + f(x)\big) = \tfrac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) = p(x),$$

$$q(-x) = \tfrac{1}{2}\big(f(-x) - f(-(-x))\big) = \tfrac{1}{2}\big(f(-x) - f(x)\big) = -\tfrac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) = -p(x),$$

а тому p парна і q непарна. Крім того,

$$p(x) + q(x) = \tfrac{1}{2}\big(f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)\big) = \tfrac{1}{2} \cdot 2f(x) = f(x)$$

для $x \in \mathbb{R}$. □

4 Друга теорема Вейєрштрасса про наближення

Почнемо з трьох лем.

Лема 3.1. *Нехай $p \in C_{2\pi}$ – парна функція. Тоді існує послідовність тригонометричних многочленів $p_n \in T$ така, що $p_n(x) \rightrightarrows p(x)$ на $\mathbb{R}$.*

Доведення. Розглянемо функцію $\varphi : [-1; 1] \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = p(\arccos t)$ для $t \in [-1; 1]$. За першою теоремою Вейєрштрасса (теорема 1.3), існує послідовність алгебраїчних многочленів φ_n на $\mathbb{R}$ така, що $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ на $[-1; 1]$. Покладемо $p_n(x) = \varphi(\cos x)$ для $x \in \mathbb{R}$. Тоді $p_n \in T$, причому з парності $\cos x$ випливає парність p_n. Оскільки $\arccos(\cos x) = x$ при $x \in [0; \pi]$ і $\cos x \in [-1; 1]$, то

$$p_n(x) = \varphi_n(\cos x) \rightrightarrows \varphi(\cos x) = p\big(\arccos(\cos x)\big) = p(x), \quad \text{при } x \in [0; \pi].$$

Далі, за рахунок парності функцій p і p_n матимемо:

$$p_n(x) = p_n(-x) \rightrightarrows p(-x) = p(x), \quad \text{при } x \in [-\pi; 0].$$

Таким чином, $p_n(x) \rightrightarrows p(x)$ на $[-\pi; \pi]$. Тоді, враховуючи 2π-періодичність функцій p і p_n, одержимо, що $p_n(x) \rightrightarrows p(x)$ на $\mathbb{R}$. □

Лема 3.2. *Нехай $f \in C_{2\pi}$. Тоді існує послідовність тригонометричних многочленів $g_n \in T$ така, що $g_n(x) \rightrightarrows f(x)\sin^2 x$ на $\mathbb{R}$.*

Доведення. Перш за все, скориставшись твердженням 3.2, подамо f у вигляді $f = p + q$, де $p \in C_{2\pi}$ – парна функція, а $q \in C_{2\pi}$ – непарна функція. Тоді функція $y = q(x)\sin x$ буде парною, як добуток двох непарних функція. Отже, за лемою 3.1, існують послідовності тригонометричних многочленів $p_n, q_n \in T$ такі, що

$$p_n(x) \rightrightarrows p(x), \quad q_n(x) \rightrightarrows q(x)\sin x \quad \text{на } \mathbb{R}.$$

Тоді, оскільки $|\sin x| \le 1$, то

$$p_n(x)\sin^2 x \rightrightarrows p(x)\sin^2 x, \quad q_n(x)\sin x \rightrightarrows q(x)\sin^2 x \quad \text{на } \mathbb{R}.$$

Покладемо $g_n(x) = p_n(x)\sin^2 x + q_n(x)\sin x$ для $x \in \mathbb{R}$. Зрозуміло, що $g_n \in T$. Крім того,

$$g_n(x) = p_n(x)\sin^2 x + q_n(x)\sin x \rightrightarrows p(x)\sin^2 x + q(x)\sin^2 x = \big(p(x) + q(x)\big)\sin^2 x = f(x)\sin^2 x$$

для $x \in \mathbb{R}$. □

Лема 3.3. *Нехай $f \in C_{2\pi}$. Тоді існує послідовність тригонометричних многочленів $h_n \in T$ така, що $h_n(x) \rightrightarrows f(x)\cos^2 x$ на $\mathbb{R}$.*

Доведення. Розглянемо функцію $\tilde{f} \in C_{2\pi}$, $\tilde{f}(t) = f(t+\frac{\pi}{2})$ для $t \in \mathbb{R}$. Тоді, за лемою 3.2, існує послідовність $\tilde{g}_n \in T$ така, що $\tilde{g}_n(t) \rightrightarrows \tilde{f}(t)\sin^2 t$. Зрозуміло, що функції $h_n(x) = \tilde{g}_n\big(x - \frac{\pi}{2}\big)$ будуть тригонометричними многочленами, причому

$$h_n(x) = \tilde{g}_n\big(x - \tfrac{\pi}{2}\big) \rightrightarrows \tilde{f}\big(x - \tfrac{\pi}{2}\big)\sin^2\big(x - \tfrac{\pi}{2}\big) = f(x)\cos^2 x.$$

для $x \in \mathbb{R}$. □

Тепер ми легко можемо довести *другу теорему Вейерштраса про наближення.*

Теорема 3.1 (Вейєрштрасс)**.** *Нехай $f \in C_{2\pi}$. Тоді існує послідовність тригонометричних многочленів $f_n \in T$ така, що $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $\mathbb{R}$.*

Доведення. Застосувавши леми 3.2 і 3.3, знайдемо послідовності тригонометричних многочленів g_n і h_n такі, що

$$g_n(x) \rightrightarrows f(x)\sin^2 x \quad \text{і} \quad h_n(x) \rightrightarrows f(x)\cos^2 x \quad \text{для } x \in \mathbb{R}.$$

Покладемо $f_n = g_n + h_n$. Зрозуміло, що $f_n \in T$, причому

$$f_n(x) = g_n(x) + h_n(x) \rightrightarrows f(x)\sin^2 x + f(x)\cos^2 x = f(x)\big(\sin^2 x + \cos^2 x\big) = f(x),$$

для $x \in \mathbb{R}$. □

Лекція №4

Многочлени Фейєра та їх застосування

1 Ряди Фур'є, їхні частинні суми і ядро Діріхле

Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – 2π-періодична інтегровна на $[-\pi; \pi]$ функція. Нагадаємо, що числа

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u)du, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos nu\, du, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin nu\, du, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.1}$$

називаються *коефіцієнтами Фур'є функції* f, а ряд

$$\tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\big)$$

називається *рядом Фур'є для функції* f. Суми

$$S_n(x) = \tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos kx + b_k \sin kx\big), \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{4.2}$$

є *частинними сумами ряду Фур'є для функції* f.

Щоб записати $S_n(x)$ в зручному вигляді, знайдемо для $\alpha \in \mathbb{R}$ суму

$$A = \tfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos 2k\alpha.$$

Домноживши цю рівність на $2\sin\alpha$ і враховуючи, що $2\sin x \cos y = \sin(x+y) - \sin(x-y)$, матимемо:

$$2A\sin\alpha = \sin\alpha + \sum_{k=1}^{n} 2\cos 2k\alpha \sin\alpha = \sin\alpha + \sum_{k=1}^{n} \big(\sin(2k+1)\alpha - \sin(2k-1)\alpha\big) =$$

$$= \sin\alpha + (\sin 3\alpha - \sin\alpha) + (\sin 5\alpha - \sin 3\alpha) + \dots + \big(\sin(2n+1)\alpha - \sin(2n-1)\alpha\big) = \sin(2n+1)\alpha.$$

Отже,

$$A = \tfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos 2k\alpha = \frac{\sin(2n+1)\alpha}{2\sin\alpha}.$$

Підставляючи сюди $\alpha = \frac{t}{2}$ для $t \in \mathbb{R}$, одержимо функцію

$$D_n(t) = \tfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}, \tag{4.3}$$

яку називатимемо *ядром Діріхле*. Зрозуміло, що $D_n(t)$ є тригонометричним многочленом. Зокрема, $D_n(t)$ є неперервною 2π-періодичною функцією.

Зафіксуємо $x \in \mathbb{R}$ і перетворимо тепер суму $S_n(x)$ за допомогою (4.1), (4.2) і (4.3).

$$S_n(x) = \tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos kx + b_k \sin kx\big) =$$

$$= \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)du + \sum_{k=1}^{n} \Big(\cos kx \cdot \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos ku\, du + b_k \sin kx \cdot \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin ku\, du\Big) =$$

$$= \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\Big(\tfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(u-x)\Big)du = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)D_n(u-x)du.$$

Зробивши заміну змінної $t = u - x$, $u = x + t$, $dt = du$, $t(-\pi) = -\pi - x$, $t(\pi) = \pi - x$ матимемо, що

$$S_n(x) = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)D_n(t)dt = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt,$$

адже, як відомо, для довільної 2π-періодичної функції, а зокрема для $\varphi(t) = f(x+t)D_n(t)$, інтеграл $\int\limits_{a}^{a+2\pi} \varphi(t)dt$ не залежить від a.

Отже, ми встановили, що

$$S_n(x) = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt, , \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0. \tag{4.4}$$

Зауважимо, що для $f = 1$ матимемо, що $a_0 = 2$ і $a_n = b_n = 0$ для $n \in \mathbb{N}$. А тому $S_n(x) = 1$ для довільного $n \in \mathbb{N}_0$ і $x \in \mathbb{R}$. Підставляючи це в (4.4), одержимо:

$$\tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 1, , \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0. \tag{4.5}$$

2 Середні арифметичні частинних сум рядів Фур'є і ядро Фейєра

В цьому пункті ми використовуватимемо позначення з попереднього. Для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $x \in \mathbb{R}$ покладемо

$$T_n(x) = \tfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x),$$

тобто, тригонометричний многочлен $T_n(x)$ є середнім арифметичним n перших частинних сум $S_0(x)$, $S_1(x)$,…,$S_{n-1}(x)$. Використовуючи (4.4), перетворюємо

$$T_n(x) = \tfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x) = \tfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_k(t)dt = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\Big(\tfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(t)\Big)dt.$$

Тригонометричний многочлен, який з урахуванням (4.3) записується у вигляді

$$\Phi_n(t) = \tfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(t) = \frac{1}{2n\sin\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2k+1)\tfrac{t}{2}, \tag{4.6}$$

називається *ядром Фейєра.* Таким чином,

$$T_n(x) = \tfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x) = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\Phi_n(t)dt, \quad x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}. \tag{4.7}$$

Для перетворення ядра Фейєра займемося спочатку обчисленням суми

$$B = \sum_{k=0}^{n-1}\sin(2k+1)\alpha$$

для $\alpha\in\mathbb{R}$. Оскільки $2\sin x\sin y = \cos(x-y)-\cos(x+y)$, то, домножуючи цю суму на $2\sin\alpha$, матимемо:

$$2B\sin\alpha = \sum_{k=0}^{n-1} 2\sin(2k+1)\alpha\sin\alpha = \sum_{k=0}^{n-1}\big(\cos 2k\alpha - \cos(2k+2)\alpha\big) =$$

$$= \big(1-\cos 2\alpha\big) + \big(\cos 2\alpha - \cos 4\alpha\big) + \dots + \big(\cos(2n-2)\alpha - \cos 2n\alpha\big) = 1-\cos 2n\alpha = 2\sin^2 n\alpha,$$

адже $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$. Отже,

$$B = \sum_{k=0}^{n-1}\sin(2k+1)\alpha = \frac{\sin^2 n\alpha}{\sin\alpha}.$$

Підставляючи це значення B з $\alpha = \frac{t}{2}$ у (4.6), отримаємо:

$$\Phi_n(t) = \tfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_n(t) = \frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2n\sin^2\frac{t}{2}}. \tag{4.8}$$

Як ми зауважували раніше, для функції $f=1$ виконується, що $S_k(x)=1$ для кожного $k\in\mathbb{N}_0$, а тому $T_n(x)=1$ для довільного $n\in\mathbb{N}$. Підставляючи це в (4.7), одержимо

$$\tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)dt = 1, \quad x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}. \tag{4.9}$$

3 Многочлени Фейєра, оператор Фейєра і теорема Фейєра

Нехай $f\in C_{2\pi}$. Для довільного $n\in\mathbb{N}$ і $x\in\mathbb{R}$, враховуючи (4.7), покладемо

$$F_n f(x) = T_n(x) = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\Phi_n(t)dt. \tag{4.10}$$

Тригонометричний многочлен $F_n f(x)$ називається *многочленом Фейєра*, а відображення $F_n : C_{2\pi}\to T$ – *оператором Фейєра.* Наступний результат ми називатимемо *теоремою Фейєра.*

Теорема 4.1 (Фейєр)**.** *Нехай* $f \in C_{2\pi}$*. Тоді* $F_n f(x) \rightrightarrows f(x)$ *на* $\mathbb{R}$.

Доведення. Перш за все зауважимо, що з (4.8) випливає, що $\Phi(t) \geq 0$ на $\mathbb{R}$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Оскільки f неперервна то за теоремою Кантора (теорема 1.1) вона буде рівномірно неперервною на $[-\pi;\pi]$. Далі, за теоремою Вейєрштрасса про обмеженість неперервної функції матимемо, що f обмежена на $[-\pi;\pi]$. Тому з 2π-періодичності легко отримуємо, що f обмежена і рівномірно неперервна $\mathbb{R}$. Отже, існують $L > 0$ і $\delta \in (0;\pi)$ такі, що для $|f(x)| \leq L$ на $\mathbb{R}$ і для довільних $x, x' \in \mathbb{R}$, якщо $|x' - x| \leq \delta$ то $\big|f(x') - f(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Далі, враховуючи (4.9) і (4.10) матимемо, що для функцій $f_n(x) = F_n f(x)$ для довільного $x \in \mathbb{R}$ виконується:

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| = \Big|\tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\Phi_n(t)dt - \tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\Phi_n(t)dt\Big| = \Big|\tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \big(f(x+t) - f(x)\big)\Phi_n(t)dt\Big| \leq$$

$$\leq \tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \big|f(x+t) - f(x)\big|\Phi_n(t)dt = \tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g_n(x,t)dt = I_1 + I_2,$$

де $g_n(x,t) = \big|f(x+t) - f(x)\big|\Phi_n(t)$ для $x, t \in \mathbb{R}$,

$$I_1 = \tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} g_n(x,t)dt \quad \text{і} \quad I_2 = \tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{-\delta} g_n(x,t)dt + \tfrac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi} g_n(x,t)dt.$$

Використовуючи рівномірну неперервність з $x' = x + t$, матимемо, що $\big|f(x+t) - f(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $|t| \leq \delta$, отже, $g_n(x,t) \leq \frac{\varepsilon}{2}\Phi_n(x)$ при таких t. Тому, враховуючи (4.9),

$$I_1 = \tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} g_n(x,t)dt \leq \tfrac{\varepsilon}{2\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t)dt \leq \tfrac{\varepsilon}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)dt = \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Далі, з обмеженості маємо, що $g_n(x,t) \leq \big(|f(x+t)| + |f(x)|\big)\Phi_n(t) \leq 2L\Phi_n(t)$, а тому

$$I_2 = \tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{-\delta} g_n(x,t)dt + \tfrac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi} g_n(x,t)dt \leq \tfrac{2L}{\pi}\Big(\int\limits_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(t)dt + \tfrac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t)dt\Big) = \tfrac{4L}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t)dt,$$

адже $\Phi_n(t)$ парна. З (4.8) матимемо, що для $0 < t \leq \delta \leq \pi$ виконується нерівність

$$0 \leq \Phi_n(t) = \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{2n\sin^2 \frac{t}{2}} \leq \frac{1}{2n\sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

В такому разі,

$$I_2 \leq \frac{4L}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t)dt \leq \frac{4L}{\pi} \cdot \frac{1}{2n\sin^2 \frac{\delta}{2}} \cdot (\pi - \delta) \leq \frac{\gamma}{n}, \quad \text{де} \;\; \gamma = \frac{2L}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

Виберемо номер N такий, що $\frac{\gamma}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n \geq N$. Тоді $\big|f_n(x) - f(x)\big| \leq I_1 + I_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ на $\mathbb{R}$, а тому $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $\mathbb{R}$. □

4 Другий спосіб доведення теорем Вейєрштрасса про наближення

Тепер використовуючи теорему Фейєра, покажемо інший спосіб доведення першої та другої теорем Вейєрштрасса про наближення. Нагадаємо, що раніше ми отримували першу теорему Вейєрштрасса за допомогою многочленів Бернштейна, а потім з неї вже виводили другу теорему Вейєрштрасса. Зараз же ми спочатку одразу отримуємо другу теорему Вейєрштрасса, а потім з неї виводимо першу. І це дає нам альтернативний спосіб доведення теорем Вейєрштрасса.

Теорема 4.2 (друга теорема Вейєрштрасса)**.** *Нехай $f \in C_{2\pi}$. Тоді існує послідовність тригонометричних многочленів $f_n \in T$ така, що $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $\mathbb{R}$.*

Доведення. Покладемо $f_n = F_n f$. Тоді з теореми 3.1 маємо, що $f_n \rightrightarrows f$ на $\mathbb{R}$. $\square$

Теорема 4.3 (перша теорема Вейєрштрасса)**.** *Нехай $a < b$ і $f \in C[a;b]$. Тоді існує послідовність алгебраїчних многочленів $f_n \in P$ така, що $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a;b]$.*

Доведення. Перш за все зауважимо, що міркуючи подібно до першої теореми Вейєрштрасса (1.3), тільки з використанням лінійної бієкції

$$[-1;1] \ni x \mapsto y = \ell(x) = b + \tfrac{1}{2(b-a)}(x+1) \in [a;b],$$

загальний випадок зводимо до випадку $[a;b] = [-1;1]$.

Отож, нехай $[a;b] = [-1;1]$. Розглянемо неперервну 2π-періодичну функцію

$$g(t) = f(\cos t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тоді, за теоремою 4.1 для тригонометричних многочленів $g_n(t) = F_n g(t)$, виконується, що $g_n(t) \rightrightarrows g(t)$ на $\mathbb{R}$. Зауважимо, що функція $g(t)$ парна, адже такою є функція $\cos t$. Тоді, як відомо, для цієї функції коефіцієнти Фур'є $b_n = 0$ для $n \in \mathbb{N}$. Тому

$$g_n(t) = T_n(t) = \tfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_n(t) = \tfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\frac{a_0}{2} + \sum_{j=0}^{k} a_j \cos jt\Big) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \cos kt$$

для деякий коефіцієнтів α_k. Далі, використовуючи формулу Муавра і біном Ньютона, матимемо:

$$\cos nt = \operatorname{Re}\big(\cos nt + i \sin nt\big) = \operatorname{Re}\big(\cos t + i\sin t\big)^n = \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{n} C_n^k i^k \sin^k t \cos^{n-k} t.$$

Оскільки $i^{2j} = (i^2)^j = (-1)^j$ і $i^{2j+1} = i^{2j} i = (-1)^j i$, то

$$\cos nt = \sum_{0 \le 2j \le n} C_n^{2j} (-1)^j \sin^{2j} t \cos^{n-2j} t = \sum_{0 \le 2j \le n} (-1)^j C_n^{2j} (1 - \cos^2 t)^j \cos^{n-2j} t = C_n(\cos t),$$

де C_n – деякий алгебраїчний многочлен степеня $\le n$. Покладаючи

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k(x),$$

матимемо, що f_n є алгебраїчним многочленом степеня $< n$ і

$$g_n(t) = f_n(\cos t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Таким чином, покладаючи $x = \cos t$ матимемо, що

$$f_n(x) = f_n(\cos t) = g_n(t) \rightrightarrows g(t) = f(\cos t) = f(x),$$

а тому $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[-1; 1]$, адже $[-1; 1] = \big\{x = \cos t : t \in \mathbb{R}\big\}$. $\square$

Лекція №5

Один клас інтегралів Стілт'єса

1 Одна формула для обчислення інтегралів Стілт'єса

Означення і властивості інтегралів Стілт'єса розглядалися в курсі математичного аналізу. Тут ми нагадаємо одну формулу для їх обчислення, щоб потім вивчити один клас інтегралів Стілт'єса відносно функцій стрибків, який ми використаємо в наступній лекції при доведенні теореми Джексона про наближення неперервних 2π-періодичних функцій тригонометричними поліномами.

Спочатку пригадаємо означення інтеграла Стілт'єса. Розглянемо дві функції $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ і $g : [a; b] \to \mathbb{R}$. Для довільного розбиття

$$T : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

відрізка $[a; b]$ і довільних точок $\bar{x}_k \in [x_{k-1}, x_k]$, де $k = 1, 2, \dots, n$ визначимо *інтегральну суму Стілт'єса*

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\Delta g(x_k),$$

де $\Delta g(x_k) = g(x_k) - g(x_{k-1})$. Нехай $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ і $\lambda = \max\limits_{k=1,2,\dots,n} \Delta x_k$ – *параметр розбиття* T. *Інтеграл Стілт'єса* визначається формулою

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x) = \lim_{\lambda \to 0} \sigma.$$

де границя $I = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$ інтегральних сум Стілт'єса визначається, як таке дійсне число I, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для довільного розбиття T з $\lambda < \delta$ при довільному виборі точок $\bar{x}_k$ виконується нерівність $|\sigma - I| < \varepsilon$.

Добре відомо, що інтеграл Стілт'єса $\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ існує, якщо функція f неперервна, а g обмеженої варіації. Для комплексних функцій $f(x) = u(x) + iv(x)$, де $u = \operatorname{Re} f$ і $v = \operatorname{Im} f$, інтеграл Стілт'єса визначається так:

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x) = \int\limits_a^b u(x)dg(x) + i\int\limits_a^b v(x)dg(x).$$

Зауважимо, що для неперервної функції f і функції обмеженої варіації g виконується, що

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x) = \int\limits_a^c f(x)dg(x) + \int\limits_c^b f(x)dg(x), \tag{5.1}$$

якщо $a < c < b$.

Наступну формулу для обчислення інтеграла Стілт'єса подамо з доведенням, оскільки вона надалі буде часто використовуватися.

Теорема 5.1. *Нехай $f \in C[a;b]$, $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_m < c_{m+1} = b$ і $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ стала на кожному інтервалі $(c_k; c_{k+1})$ при $k = 0, 1, \ldots, m$. Тоді*

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(a)\big(g(a+0) - g(a)\big) + \sum_{k=1}^{m} f(c_k)\big(g(c_k+0) - g(c_k-0)\big) + f(b)\big(g(b) - g(b-0)\big)$$

Доведення. Розглянемо спочатку випадок $m = 0$, тобто коли $g(x) = \gamma$ стала на на інтервалі $(a;b)$. В такому разі $\Delta g(x_k) = g(x_k) - g(x_{k-1}) = \gamma - \gamma = 0$ при $k = 2, 3, \ldots, n$, тому

$$\sigma = f(\bar{x}_1)\Delta g(x_1) + f(\bar{x}_n)\Delta g(x_n) = f(\bar{x}_1)\big(g(\bar{x}_1) - g(a)\big) + f(\bar{x}_n)\big(g(b) - g(x_{n-1})\big).$$

Але при $\lambda \to 0$ маємо, що $\Delta x_1 \to 0$ і $\Delta x_n \to 0$, а тому $x_1, \bar{x}_1 \to a + 0$ і $x_{n-1}, \bar{x}_n \to b - 0$. Отже, оскільки $\sigma \to \int\limits_a^b f(x)dg(x)$ при $\lambda \to 0$, то

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(a)\big(g(a+0) - g(a)\big) + f(b)\big(g(b) - g(b-0)\big), \quad \text{якщо } g \text{ стала на } (a;b). \tag{5.2}$$

Перейдемо до розгляду загального випадку. Легко перевіряється, що g – це функція обмеженої варіації на відрізку $[a;b]$. Позначимо

$$f_k = f(c_k), \quad g_k = g(c_k), \quad g_k^+ = g(c_k + 0), \quad g_k^- = g(c_k - 0).$$

Тоді, користуючись (5.1) і застосовуючи (5.2) до кожного з відрізків $[c_k; c_{k+1}]$, одержимо

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \sum_{k=0}^{m} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)dg(x) = \sum_{k=0}^{m} \Big(f(c_k)\big(g(c_k+0) - g(c_k)\big) + f(c_{k+1})\big(g(c_{k+1}) - g(c_{k+1}-0)\big)\Big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \big(f_k \cdot (g_k^+ - g_k) + f_{k+1} \cdot (g_{k+1} - g_{k+1}^-)\big) = \sum_{k=0}^{m} f_k \cdot (g_k^+ - g_k) + \sum_{k=0}^{m} f_{k+1} \cdot (g_{k+1} - g_{k+1}^-) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} f_k \cdot (g_k^+ - g_k) + \sum_{k=1}^{m+1} f_k \cdot (g_k - g_k^-) = f_0 \cdot (g_0^+ - g_0) + \sum_{k=1}^{m} f_k \cdot (g_k^+ - g_k + g_k - g_k^-) + f_{m+1} \cdot (g_{m+1} - g_{m+1}^-) =$$

$$= f_0 \cdot (g_0^+ - g_0) + \sum_{k=1}^{m} f_k \cdot (g_k^- - g_k^-) + f_{m+1} \cdot (g_{m+1} - g_{m+1}^-) =$$

$$= f(a)\big(g(a+0) - g(a)\big) + \sum_{k=1}^{m} f(c_k)\big(g(c_k+0) - g(c_k)\big) + f(b)\big(g(b+0) - g(b)\big),$$

що й потрібно було довести. □

Наслідок 5.1. *Нехай $f \in C[a;b]$, $a = c_0 < c_1 < \dots < c_m < c_{m+1} = b$ і $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ стала но кожному інтервалі $(c_{k-1};c_k)$ і неперервна зліва в точках c_k при $k = 1, 2, \dots, m+1$. Тоді*

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \sum_{k=0}^{m} f(c_k)\big(g(c_k+0) - g(c_k)\big)$$

Доведення. З умови маємо, що

$$g(a+0) - g(a) = g(c_0+0) - g(c_0),$$

$$g(c_k+0) - g(c_k-0) \quad \text{при } k = 1, 2, \dots, m,$$

$$g(b) - g(b-0) = g(c_{m+1}) - g(c_{m+1}-0) = g(c_{m+1}) - g(c_{m+1}) = 0.$$

Тому потрібний результат випливає з теореми 5.1. □

2 Функція стрибків $\omega(x)$ для арифметичної прогресії

Почнемо з одного простого зауваження про арифметичні прогресії.

Лема 5.1. *Нехай $x_0 \in \mathbb{R}$, $d > 0$ і $x_n = x_0 + nd$ для $n \in \mathbb{Z}$. Нехай також $a \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{N}$ і $T = pd$ такі, що*

$$x_{n-1} < a \le x_n < \dots < x_{n+q-1} < a + T \le x_{n+q}$$

для деякого $n \in \mathbb{Z}$. Тоді $p = q$.

Доведення. Оскільки $x_0 + (n-1)d = x_{n-1} < a \le x_n = x_0 + nd$, то $n - 1 < \frac{a-x_0}{d} \le n$. Так само $x_0 + (n+q-1)d = x_{n+q-1} < a + T = a + pd \le x_{n+q} = x_0 + (n+q)d$, а значить, $(n+q-p-1)d < a - x_0 \le (n+q-p)d$ і тому $m - 1 < \frac{a-x_0}{d} \le m$, де $m = n+q-p$. Таким чином, $(m-1;m] \cap (n-1;n] \ne \varnothing$, причому $m, n \in \mathbb{Z}$. Отже, $m = n$ і тому $p = q$. □

Для арифметичної прогресії $x_n = x_0 + nd$ з $d > 0$ розглянемо породжену нею *функцію стрибків* $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\omega(x) = nd \text{ при } x_n < x \le x_{n+1}, \text{ де } n \in \mathbb{Z}.$$

Ясно, що функція стрибків ω стала на кожному інтервалі $(x_n; x_{n+1})$ і неперервна зліва в кожній точці x_n, причому $\omega(x_n) = (n-1)d$, $\omega(x_n+0) = nd$, а значить, $\omega(x_n+0) - \omega(x_n) = d$. З наслідку 5.1 випливає, що

$$\int_a^b f(x)d\omega(x) = d\sum_{a \le x_k < b} f(x_k), \quad \text{якщо } f \in C[a;b]. \tag{5.3}$$

Лема 5.2. *Нехай $x_0 \in \mathbb{R}$, $d > 0$, $p \in \mathbb{N}$, $T = pd$, ω – функція стрибків, що породжена арифметичною прогресією $x_n = x_0 + nd$, і $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – неперервна T-періодична функція. Тоді $\int\limits_a^{a+T} f(x)d\omega(x)$ не залежить від числа a.*

Доведення. Нехай $a, b \in \mathbb{R}$. Доведемо, що

$$\int_a^{a+T} f(x)d\omega(x) = \int_b^{b+T} f(x)d\omega(x).$$

Візьмемо такі цілі числа n і m, що $x_{n-1} < a \leq x_n$ і $x_{m-1} < b \leq x_m$. Тоді, згідно з лемою 5.1, будемо мати:

$$x_{n-1} < a \leq x_n < \cdots < x_{n+p-1} < a+T \leq x_{n+p} \text{ і } x_{m-1} < b \leq x_n < \cdots < x_{m+p-1} < b+T \leq x_{m+p}.$$

Далі з (5.3) отримуємо

$$\int_a^{a+T} f(x)d\omega(x) = d\sum_{k=n}^{n+p-1} f(x_k) = d\sum_{k=1}^{p} f(u_k) \quad \text{і} \quad \int_b^{b+T} f(x)d\omega(x) = d\sum_{k=m}^{m+p-1} f(x_k) = d\sum_{k=1}^{p} f(v_k),$$

де $u_k = x_{n+k-1}$ і $v_k = x_{m+k-1}$ при $k \in \mathbb{Z}$. Отже, досить показати рівність

$$\sum_{k=1}^{p} f(u_k) = \sum_{k=1}^{p} f(v_k).$$

Доведемо спочатку, що існують ціле число s і номер $j = 1, 2, \ldots, p$ такі, що $v_j = u_1 + sT$. Маємо

$$v_j - u_1 = x_{m+j-1} - x_n = x_0 + (m + j - 1)d - x_0 - nd = (l + j)d,$$

де $l = m+n-1 \in \mathbb{Z}$. Зрозуміло, що серед p підряд написаних цілих чисел $l+1, l+2, \ldots, l+p$ обов'язково якесь ділиться на p. Тому існують $s \in \mathbb{Z}$ і $j = 1, 2, \ldots, p$ такі, що $l + j = sp$. Тоді $v_j - u_1 = (l + j)d = spd = sT$, а значить, $v_j = u_1 + sT$.

Розглянемо ціле число $q = p - j + 1$. Ясно, що $1 \leq q \leq p$. Крім того,

$$v_j = u_1 + sT, \quad v_{j+1} = v_j + d = u_1 + d + sT = u_2 + sT, \quad \ldots, \quad v_p = v_{j+q-1} = u_q + sT,$$

а тому $f(v_j) = f(u_1), f(v_{j+1}) = f(u_2), \ldots, f(v_p) = f(u_q)$. Звідси випливає, що

$$\sum_{k=1}^{q} f(u_k) = \sum_{k=j}^{p} f(v_k).$$

Так само

$$v_{j-1} = v_j - d = u_1 + sT - d = u_0 + sT = u_p - pd + sT = u_p + (s - 1)T,$$

$$v_{j-2} = v_j - d = u_p + (s-1)T - d = u_{p-1} + (s-1)T, \ldots,$$

$$v_1 = v_{j-(j-1)} = u_{p-(j-2)} = u_{q+1} + (s-1)T.$$

Тому $f(v_{j-1}) = f(u_p)$, $f(v_{j-2}) = f(u_{p-1})$, $\ldots$, $f(v_1) = f(u_{q+1})$. Тут уже

$$\sum_{k=q+1}^{p} f(u_k) = \sum_{k=1}^{j-1} f(v_k).$$

Остаточно

$$\sum_{k=1}^{p} f(u_k) = \sum_{k=1}^{q} f(u_k) + \sum_{k=q+1}^{p} f(u_k) = \sum_{k=j}^{p} f(v_k) + \sum_{k=1}^{j-1} f(v_k) = \sum_{k=1}^{p} f(v_k),$$

що й потрібно було довести. □

3 Функція стрибків $\omega_p(x)$

Для натурального числа p і цілого k розглянемо числа $a_k = \frac{2k\pi}{p}$, які при $k = 0, 1, \ldots, p$ дають розбиття відрізка $[0; 2\pi]$ на p рівних частин. Нехай $d = \frac{2\pi}{p}$, $0 \le x_0 < a$ і $x_k = x_0 + kd$ для $k \in \mathbb{Z}$. Функцію стрибків для цієї арифметичної прогресії $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ позначимо символом $\omega_p(x)$. В наступному твердженні доводимо дві корисні властивості інтеграла Стілт'єса відносно цієї функції $\omega_p(x)$.

Твердження 5.1. *Виконуються такі рівності:*

1^0. $\int\limits_0^{2\pi} e^{ikx} d\omega_p(x) = 0$, *якщо* $k \in \mathbb{Z}$ *не ділиться націло на* p.

2^0. $\int\limits_0^{2\pi} Q(x) d\omega_p(x) = \int\limits_0^{2\pi} Q(x)dx$, *якщо* Q *– тригонометричний поліном степеня* $< p$.

Доведення. 1^0. Використовуючи (5.3) і формулу суми геометричної прогресії зі знаменником $q = e^{ikd} = e^{2\pi i \cdot \frac{k}{p}}$, який відмінний від 1, бо $\frac{k}{p} \notin \mathbb{Z}$, маємо

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{ikx} d\omega_p(x) = d\sum_{j=0}^{p-1} e^{ikx_j} = d\sum_{j=0}^{p-1} e^{ik(x_0+jd)} = de^{ikx_0}\sum_{j=0}^{p-1} \left(e^{ikd}\right)^j = de^{ikx_0}\sum_{j=0}^{p-1} q^j =$$

$$= de^{ikx_0} \cdot \frac{q^p - 1}{q-1} = de^{ikx_0} \cdot \frac{e^{2\pi ki} - 1}{e^{2\pi i \cdot \frac{k}{p}} - 1} = 0$$

2^0. Оскільки Q є тригонометричним многочленом степеня $< p$, то існують $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ з $k < p$ такі, що

$$Q(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{p-1} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Але кожне $k = 1, 2, \ldots, p-1$ не ділиться націло на p, тому з властивості 1^0 маємо, що

$$0 = \int\limits_0^{2\pi} e^{ikx} d\omega_p(x) = \int\limits_0^{2\pi} \cos kx \, d\omega_p(x) + i \int\limits_0^{2\pi} \sin kx \, d\omega_p(x),$$

а значить, $\int\limits_0^{2\pi} \cos kx \, d\omega_p(x) = \int\limits_0^{2\pi} \sin kx \, d\omega_p(x) = 0$. Тому, враховуючи (5.3),

$$\int\limits_0^{2\pi} Q(x) d\omega_p(x) = \int\limits_0^{2\pi} a_0 d\omega_p(x) + \sum_{k=1}^{p-1} \Big(a_k \int\limits_0^{2\pi} \cos kx \, d\omega_p(x) + b_k \int\limits_0^{2\pi} \sin kx \, d\omega_p(x) \Big) =$$

$$= a_0 \int\limits_0^{2\pi} d\omega_p(x) = a_0 d \sum_{j=0}^{p-1} 1 = p d a_0 = 2\pi a_0.$$

З іншого боку, $\int\limits_0^{2\pi} \cos kx \, dx = \int\limits_0^{2\pi} \sin kx \, dx = 0$ при $k = 1, 2, \ldots, p-1$, тому і

$$\int\limits_0^{2\pi} Q(x) dx = \int\limits_0^{2\pi} a_0 dx = 2\pi a_0 = \int\limits_0^{2\pi} Q(x) d\omega_p(x),$$

що й потрібно було довести. $\square$

Лекція №6

Многочлени Джексона та їх застосування

1 Властивості ядер Фейєра

У лекції №4 ми ввели ядра Діріхле і Фейєра

$$D_n(t) = \tfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}, \tag{4.3}$$

$$\Phi_n(t) = \tfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_n(t) = \frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2n\sin^2\frac{t}{2}}. \tag{4.8}$$

Тоді

$$n\Phi_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\Big(\tfrac{1}{2} + \sum_{j=1}^{k}\cos jt\Big) = \tfrac{n}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{k}\cos jt = \tfrac{n}{2} + \sum_{1\le j\le k<n}\cos jt =$$

$$= \tfrac{n}{2} + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j}^{n-1}\cos jt = \tfrac{n}{2} + \sum_{j=1}^{n-1}(n-1-j+1)\cos jt = \tfrac{n}{2} + \sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\cos jt$$

Отже, замінюючи j на k і ділячи на n, матимемо

$$\Phi_n(t) = \tfrac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n-1}\left(1 - \tfrac{k}{n}\right)\cos kt \tag{6.1}$$

В наступному твердженні ми зібрали ряд потрібних властивостей цих функцій

Твердження 6.1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$ і $x \in \mathbb{R}$. Тоді*

1^0. $\Phi_n(0) = \frac{n}{2}$;

2^0. $\Phi_n(-t) = \Phi_n(t)$ *і* $\Phi_n(t) \ge 0$ *для кожного* $t \in \mathbb{R}$;

3^0. $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)dt = 1$;

4^0. $\Phi_n(t) = 0$ *на* $[0; 2\pi] \Leftrightarrow t = a_k = \frac{2k\pi}{n}$ *для деякого* $k = 1, 2, \ldots, n-1$;

5^0. $\Phi_n(t)$ *– це тригонометричний многочлен степеня* $n-1$;

6^0. $\Phi_n(t-x)$ *– це тригонометричний многочлен степеня* $n-1$;

7^0. $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t-x)d\omega_p(t) = 1$ *при* $n-1 < p$;

Доведення. 1^0. Оскільки $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, то з неперервності Φ_n і (4.8) матимемо, що

$$\Phi_n(0) = \lim_{t\to 0} \Phi_n(t) = \lim_{t\to 0} \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{2n \sin^2 \frac{t}{2}} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{n^2t^2}{4}}{2n \cdot \frac{t^2}{4}} = \frac{\frac{n^2}{4}}{2n \cdot \frac{1}{4}} = \frac{n}{2}.$$

2^0. Випливає з (4.8) і непарності синуса.

3^0. Це (4.9) з лекції №4.

4^0. З 1^0 маємо, що $\Phi_n(0) > 0$. Оскільки з (6.1) маємо, що Φ_n є 2π-періодичною, то $\Phi_n(2\pi) = \Phi_n(0) > 0$. Візьмемо тепер $t \in (0; 2\pi)$. Тоді $0 < \frac{t}{2} < \pi$, а значить $\sin \frac{t}{2} > 0$. З (4.8) випливає, що $\Phi_n(t) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\sin \frac{nt}{2} = 0$, тобто коли $t = a_k = \frac{2k\pi}{n}$ для деякого $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

5^0. Випливає з (6.1).

6^0. З (6.1) маємо, що

$$\Phi_n(t-x) = \tfrac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} \left(1 - \tfrac{k}{n}\right) \cos k(t-x) = \tfrac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} \left(1 - \tfrac{k}{n}\right)(\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx)$$

є тригонометричним многочленом степеня $n-1$, адже $\cos kx$ і $\sin kx$ одночасно в нуль не обертаються, бо $\cos^2 kx + \sin^2 kx = 1$.

7^0. З твердження 5.1(властивість 2^0) і властивостей 4^0 та 5^0 випливає, що

$$\tfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_n(t-x) d\omega_p(t) = \tfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_n(t-x) dt \overset{u=t-x}{=\!=} \tfrac{1}{\pi} \int_{-x}^{2\pi - x} \Phi_n(u) du = \tfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_n(t) dt = 1$$

□

2 Многочлени Джексона, їхнє інтегральне зображення та інтерполяційна властивість

Розглянемо арифметичну прогресію $x_k = x_0 + \frac{2\pi}{n}$, що отримується при $p = n$, і відповідну їй функцію стрибків $\omega_n(x)$ (див. пункт 3 лекції 5). Для функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ розглянемо тригонометричний многочлен степеня $< n$, який визначається формулою

$$J_n f(x) = \tfrac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \Phi_n(x_k - x), \tag{6.2}$$

що називається *n-им многочленом Джексона*, а оператор J_n – *оператором Джексона*

Твердження 6.2. *Нехай $f \in C_{2\pi}$ і $x \in \mathbb{R}$. Тоді*

$$J_n f(x) = \tfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \Phi_n(t-x) d\omega_n(t),$$

причому $f(x_k) = J_n f(x_k)$ для кожного $k = 0, 1, \ldots n-1$.

Доведення. Оскільки для цієї арифметичної прогресії $d = \frac{2\pi}{n}$, то з (5.3) випливає, що

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\Phi(t-x)d\omega_n(t) = \frac{d}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Phi_n(x_k - x) = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Phi_n(x_k - x) = J_n f(x).$$

Крім того, $x_j - x_k = x_0 + jd - x_0 - kd = (j-k)d = \frac{2(j-k)\pi}{n}$. З твердження 6.1 (властивості 2^0 і 4^0) випливає, що $\Phi_n(x_j - x_k) = 0$ при $j \neq k$ і $\Phi_n(x_j - x_k) = \frac{n}{2}$ при $j = k$, для довільних $j, k = 0, 1, \ldots, n-1$. Тому з (6.2) маємо, що

$$J_n f(x_j) = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Phi_n(x_j - x_k) = \frac{2}{n}\cdot f(x_j)\cdot \frac{n}{2} = f(x_j)$$

для кожного $j = 0, 1, \ldots, n-1$. □

3 Теорема Джексона

Подібно до многочленів Фейєра многочлени Джексона дають інший спосіб рівномірної апроксимації неперервних 2π-періодичних функцій тригонометричними поліномами. Наступний результат називають *теоремою Джексона.*

Теорема 6.1 (Джексон). *Нехай $f \in C_{2\pi}$. Тоді $J_n f \rightrightarrows f$ на $\mathbb{R}$.*

Доведення. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Оскільки f неперервна, то, за теоремою Кантора (теорема 1.1) і теоремою Вейєрштрасса про обмеженість неперервної функції, матимемо, що f рівномірно неперервна і обмежена на $[0; 2\pi]$, а значить, і на $\mathbb{R}$, адже f є 2π-періодичною. Таким чином, існують $L > 0$ і $\delta \in (0; \pi)$ такі, що для довільних $x, x' \in \mathbb{R}$ виконується, що $|f(x)| \leq L$ і з $|x - x'| < \delta$ випливає $\big|f(x) - f(x')\big| < \frac{\varepsilon}{2}$

Візьмемо $x \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$. Позначимо $f_n = J_n f$. Тоді, за твердженнями 6.1(2^0, 7^0) і 6.2,

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| = \Big|\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\Phi_n(t-x)d\omega_n(t) - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\Phi_n(t-x)d\omega_n(t)\Big| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \big|f(t) - f(x)\big|\Phi_n(t-x)d\omega_n(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(t)d\omega_n(t),$$

де $g(t) = \big|f(t) - f(x)\big|\Phi_n(t-x)$ для $t \in \mathbb{R}$. Оскільки $g \in C_{2\pi}$ і період $2\pi = nd$, то, за лемою 5.1, отримаємо

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| \leq \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(t)d\omega_n(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{x-\pi}^{x+\pi} g(t)d\omega_n(t) = I_1 + I_2,$$

де

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} g(t) d\omega_n(t) \qquad \text{і} \qquad I_2 = \frac{1}{\pi} \Big(\int\limits_{x-\pi}^{x-\delta} g(t) d\omega_n(t) + \int\limits_{x+\delta}^{x+\pi} g(t) d\omega_n(t) \Big).$$

Оцінимо спочатку інтеграл I_1. За вибором δ матимемо, що $\big|f(t) - f(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2}$, а значить, $g(t) \le \frac{\varepsilon}{2} \Phi_n(t-x)$ при $t \in [x-\delta; x+\delta]$. Тому, за лемою 5.2 і твердженням 6.1(7^0), отримуємо:

$$I_1 \le \frac{\varepsilon}{2\pi} \int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} \Phi_n(t-x) d\omega_n(t) \le \frac{\varepsilon}{2\pi} \int\limits_{x-\pi}^{x+\pi} \Phi_n(t-x) d\omega_n(t) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} \Phi_n(t-x) d\omega_n(t) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Перейдемо до оцінки I_2. По-перше, $\big|f(t) - f(x)\big| \le \big|f(t)\big| + \big|f(x)\big| \le 2L$ для довільного $t \in \mathbb{R}$. Візьмемо $t \in [\pi; -\delta] \cup [\delta; \pi]$. Тоді $\delta \le |t| \le \pi$, а значить, $\frac{\delta}{2} \le \frac{|t|}{2} \le \frac{\pi}{2}$. Тому $\sin^2 \frac{t}{2} \ge \sin^2 \frac{\delta}{2}$. Таким чином,

$$g(t) \le 2L\Phi_n(t) = 2L \cdot \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{2n \sin^2 \frac{t}{2}} \le \frac{2L}{2n \sin^2 \frac{\delta}{2}} = \gamma_n, \quad \text{при} \quad t \in [\pi; -\delta] \cup [\delta; \pi].$$

В такому разі, використовуючи (5.1) і (5.3),

$$I_2 \le \frac{\gamma_n}{\pi} \Big(\int\limits_{x-\pi}^{x-\delta} d\omega_n(t) + \int\limits_{x+\delta}^{x+\pi} d\omega_n(t) \Big) \le \frac{\gamma_n}{\pi} \Big(\int\limits_{x-\pi}^{x-\delta} d\omega_n(t) + \int\limits_{x-\delta}^{x-\delta} d\omega_n(t) + \int\limits_{x+\delta}^{x+\pi} d\omega_n(t) \Big) =$$

$$= \frac{\gamma_n}{\pi} \int\limits_{x-\pi}^{x-\pi} d\omega_n(t) = \frac{\gamma_n}{\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} d\omega_n(t) = \frac{\gamma_n}{\pi} \cdot dn = \frac{\gamma_n}{\pi} \cdot 2\pi = 2\gamma_n.$$

Але $\gamma_n \to 0$. Тому існує $N \in \mathbb{N}$ таке, що $2\gamma_n < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n \ge N$. В такому разі

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| \le I_1 + I_2 \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для довільного $x \in \mathbb{R}$ і $n \ge N$. Отже, $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $\mathbb{R}$. $\square$

Зауважимо, що з теореми Джексона, так само як і з теореми Фейєра в лекції №4, випливають перша і друга теореми Вейєрштрасса.

Лекція №7

Теорема Стоуна-Вейєрштрасса

1 Кільця функцій

Нагадаємо, що *кільце* R – це множина, в якій введено операції додавання $R^2 \ni (x, y) \mapsto x + y \in R$ та множення $R^2 \ni (x, y) \mapsto xy \in R$ і взяття протилежного $R \ni x \mapsto -x \in R$, задано нульовий елемент $0 \in R$ так, що для довільних $x, y, z \in R$ виконуються властивості (R_1)–(R_7) (див. нижче). Якщо, крім того виконується властивість (R_8), то R називається *комутативним кільцем. Одиницею* кільця R називається елемент $1 \in R$, для якого виконується (R_9).

(R_1) $x + y = y + x$;	(R_2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;	(R_3) $x + 0 = x$;
(R_4) $x + (-x) = 0$;	(R_5) $(xy)z = x(yz)$;	(R_6) $(x + y)z = xz + yz$;
(R_7) $x(y + z) = xy + xz$;	(R_8) $xy = yx$;	(R_9) $x1 = 1x = x$;

Зауважимо, що кожна алгебра є кільцем. Непорожня підмножина S кільця R називається *підкільцем*, якщо для довільних $x, y \in L$ виконується $x + y \in S$, $-x \in S$, $xy \in S$. З (R_4) випливає, що 0 автоматично належить до кожного підкільця. Зрозуміло також, що підкільце утворює кільце відносно операцій індукованих з широкого кільця.

Нехай $\alpha = (\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$ – деяка нескінченно мала послідовність додатних чисел α_k. Суму ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} m_k\alpha_k$ називатимемо *α-дробом*, якщо $m_0 \in \mathbb{Z}$ а $m_k \in \mathbb{Z} \cap \left[0; \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\right)$. Якщо $\alpha_k = q^k$ є геометричною прогресією зі знаменником $q \in (0; 1)$, то $0 \le m_k < \frac{1}{q}$ для $k \in \mathbb{N}$. Зокрема, у випадку $q = \frac{1}{p}$ для деякого $p = 2, 3, 4, \ldots$, α-дроби – це в точності p-кові дроби. І для $p = 10$ матимемо звичайні десяткові дроби.

Теорема 7.1 (про розклад в α-дроби)**.** *Нехай $\alpha = (\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$ – деяка нескінченно мала послідовність додатних чисел α_k. Тоді кожне дійсне число $x \in \mathbb{R}$ записується у вигляді деякого α-дробу $\sum\limits_{k=0}^{\infty} m_k\alpha_k$.*

Доведення. Перш за все зауважимо, що

$$\forall a > 0\ \forall r \in \mathbb{R}\ \exists m \in \mathbb{Z}\ \Big|\ ma \le r < ma + a. \tag{7.1}$$

Справді, досить покласти $m = \max\left\{m \in \mathbb{Z} : m \le \frac{r}{a}\right\}$. До речі, при $r \ge 0$ матимемо, що $m \ge 0$.

Далі ми індуктивно побудуємо числа m_k для $k \in \mathbb{N}_0$. Перш за все скористаємося (7.1) для $a = \alpha_0$ та $r = x$ і знайдемо $m_0 \in \mathbb{Z}$ таке, що $m_0 a_0 \le x \le m_0\alpha_0 + \alpha_0$. Далі покладемо $s_0 = m_0\alpha_0$ і $r_0 = x - s_0$. Тоді $0 \le r_0 < \alpha_0$. На наступному кроці скористаємося (7.1) для $a = \alpha_1$ та $r = r_0$ і знайдемо $m_1 \in \mathbb{Z}$ таке, що $m_1\alpha_1 \le r_0 \le m_1\alpha_1 + \alpha_1$. Позначимо $s_1 = s_0 + m_1\alpha_1 = m_0\alpha_0 + m_1\alpha_1$ і $r_1 = r_0 - m_1\alpha_1 = x - s_1$. Тоді матимемо, що $0 \le r_1 < \alpha_1$. І так далі. На k-ому кроці, $k > 1$, скористаємося (7.1) для $a = \alpha_k$ та $r = r_{k-1}$ і знайдемо $m_k \in \mathbb{Z}$ таке, що $m_k\alpha_k \le r_{k-1} \le m_k\alpha_k + \alpha_k$. Позначимо $s_k = s_{k-1} + m_k\alpha_k = \sum\limits_{j=1}^{k} m_j a_j$ і $r_k = r_{k-1} - m_k\alpha_k = x - s_k$. Тоді матимемо, що $0 \le r_k < \alpha_k$.

Для так побудованої послідовності цілих чисел $(m_k)_{k=0}^{\infty}$ матимемо, що для $n > 0$ виконується, що $0 \le r_n = x - s_n < \alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$. Отже, $x = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} m_k\alpha_k$. З іншого боку для $k > 0$ матимемо, що $m_k\alpha_k < r_{k-1} < \alpha_{k-1}$. Тоді $m_k < \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}$. Крім того, оскільки $r_{k-1} \ge 0$, то $m_k \ge 0$. Отже ми подали x у вигляді α-дробу. $\square$

Твердження 7.1. *Нехай X – деяка множина і K – підкільце $\mathbb{R}^X$, яке містить сталу функцію $u_0(x) = q$, де $q \in (0;1)$. Тоді його рівномірне замикання $\overline{K}^u$ є алгеброю з $1 \in \overline{K}^u$.*

Доведення. Розглянемо довільне число $t \in \mathbb{R}$. Застосуємо теорему 7.1 до послідовності $\alpha_k = q^k$ і числа $x = t$ і знайдемо такі числа $m_k \in \mathbb{Z}$, що $t = \sum\limits_{k=1}^{\infty} m_k q^k$. Сталі функції $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k q^k$ належать до K, адже $u_0 = q \in K$ і K є кільцем. Тоді $t = \lim\limits_{n\to\infty} s_n \in \overline{K}^u$.

Але операції додавання і множення неперервні відносно рівномірної топології. Тому $\overline{K}^u$ є кільцем, яке містить усі сталі функції, а тому, $\overline{K}^u$ є алгеброю з одиницею. $\square$

2 Топологія поточкової та рівномірної збіжності і ґратка неперервних функцій

Нехай X – деяка множина. Як звичайно, символом $\mathbb{R}^X$ позначатимемо множину всіх функцій $f : X \to \mathbb{R}$. Для множини $E \subseteq X$, числа $\varepsilon > 0$ і функції $f \in \mathbb{R}^X$ позначатимемо

$$U_{E,\varepsilon}(f) = \Big\{ g \in \mathbb{R}^X : \big|f(x) - g(x)\big| < \varepsilon \text{ для кожного } x \in E \Big\} \quad \text{і} \quad U_\varepsilon(f) = U_{X,\varepsilon}(f).$$

На множині $\mathbb{R}^X$ розглядатимемо дві топології: *топологію поточкової збіжності* $\mathcal{T}_p$ і *топологію рівномірної збіжності* $\mathcal{T}_u$. Формально ці топології визначаються так:

$$\mathcal{T}_p = \Big\{ G \subseteq \mathbb{R}^X : \text{для довільного } f \in G \text{ існує скінченна } E \subseteq X \text{ і } \varepsilon > 0 \text{ з } U_{E,\varepsilon}(f) \subseteq G \Big\},$$

$$\mathcal{T}_u = \Big\{ G \subseteq \mathbb{R}^X : \text{для довільного } f \in G \text{ існує } \varepsilon > 0 \text{ таке, що } U_\varepsilon(f) \subseteq G \Big\},$$

Зауважимо, що для довільної напрямленості $(f_m)_{m\in M}$ в $\mathbb{R}^X$ і функції $f \in \mathbb{R}^X$ маємо, що

- $f_m \to f$ відносно $\mathcal{T}_p \Leftrightarrow f_m(x) \to f(x)$ для кожного $x \in X$;

- $f_m \to f$ відносно $\mathcal{T}_u \Leftrightarrow f_m(x) \rightrightarrows f(x)$ на X.

Отже, збіжність в просторі $(\mathbb{R}^X, \mathcal{T}_p)$ рівносильна поточковій збіжності, а у просторі $(\mathbb{R}^X, \mathcal{T}_u)$ – рівномірній збіжності. Власне звідси і походять назви цих топологій.

Зауважимо, що топологія рівномірної збіжності $\mathcal{T}_u$ породжується метрикою

$$d(f,g) = \min\Big\{1, \sup_{x \in X} \big|f(x) - g(x)\big|\Big\}, \text{ де } f, g \in \mathbb{R}^X,$$

а тому простір $(\mathbb{R}^X, \mathcal{T}_u)$ є метризовним.

Для множини функцій $A \subseteq \mathbb{R}^X$ *поточкове замикання* (тобто замикання відносно $\mathcal{T}_p$) позначатимемо символом $\overline{A}^p$, а *рівномірне замикання* (тобто замикання відносно $\mathcal{T}_u$) позначатимемо символом $\overline{A}^u$.

На множині $\mathbb{R}^X$ вводиться природний порядок: якщо $f, g \in \mathbb{R}^X$, то

$$f \le g \;\Leftrightarrow\; f(x) \le g(x) \text{ для кожного } x \in X.$$

Відносно цього порядку множина $\mathbb{R}^X$ є *ґраткою*, адже для довільних $f, g \in \mathbb{R}^X$ існують

$$f \vee g = \sup\{f, g\} \quad \text{і} \quad f \wedge g = \inf\{f, g\} \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^X.$$

Насправді функції $f \vee g, f \wedge g \in \mathbb{R}^X$ визначаються наступним чином:

$$f \vee g(x) = \max\big\{f(x), g(x)\big\} \quad \text{і} \quad f \wedge g(x) = \min\big\{f(x), g(x)\big\} \quad \text{для } x \in X.$$

Для функції $f \in \mathbb{R}^X$ модуль $|f| \in \mathbb{R}^X$ визначимо, покладаючи

$$|f|(x) = f(x) \text{ при } x \in X.$$

Зауважимо, що для довільних $f, g \in \mathbb{R}^X$ виконується:

$$|f| = f \vee (-f), \quad f \vee g = \tfrac{1}{2}\big(f + g + |f - g|\big), \quad f \wedge g = \tfrac{1}{2}\big(f + g - |f - g|\big).$$

Підмножина $L \subseteq \mathbb{R}^X$ називається *ґраткою функцій*, якщо для для довільних $f, g \in L$ функції $f \vee g$ і $f \wedge g$ теж належать до L. З попередніх зауважень отримуємо наступний факт.

Твердження 7.2. *Нехай X – деяка множина і L – векторний підпростір $\mathbb{R}^X$. Тоді L буде ґраткою в тому і тільки в тому випадку, коли $|f| \in L$ для кожного $f \in L$.*

Символом $C(X)$, як звичайно, позначимо множину всіх неперервних функцій $f : X \to \mathbb{R}$, що визначені на деякому топологічному просторі X. З попереднього твердження негайно випливає, що $C(X)$ є ґраткою. Наступне твердження є нескладним узагальненням теореми про неперервність рівномірної границі.

Твердження 7.3. *Нехай X – топологічний простір. Тоді $C(X)$ замкнена в $\mathbb{R}^X$ відносно топології рівномірної збіжності $\mathcal{T}_u$.*

Доведення. Нехай $f \in \overline{C(X)}^u$. Перевіримо, що $f \in C(X)$. Зафіксуємо $x_0 \in X$ і $\varepsilon > 0$. Перетин $U_{\frac{\varepsilon}{3}}(f) \cap C(X) \neq \varnothing$, тобто існує $g \in C(X)$ таке, що $\big|f(x) - g(x)\big| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $x \in X$. Далі з неперервності g в точці x_0 випливає, що існує окіл U точки x_0 такий, що $\big|g(x) - g(x_0)\big| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $x \in U$. Тоді

$$\big|f(x) - (x_0)\big| \leq \big|f(x) - g(x)\big| + \big|g(x) - g(x_0)\big| + \big|g(x_0) - f(x_0)\big| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

при $x \in U$. Отже, f неперервна в точці x_0. Тому $\overline{C(X)}^u \subseteq C(X)$, а значить, множина $C(X)$ замкнена в $(\mathbb{R}^X, \mathcal{T}_u)$. $\square$

3 Рівність рівномірного і поточкового замикання ґраток неперервних функцій

Наступна теорема є основним кроком в доведенні теореми Стоуна–Вейєрштрасса.

Теорема 7.2. *Нехай X – компактний топологічний простір і $L \subseteq C(X)$ є ґраткою. Тоді $\overline{L}^p \cap C(X) = \overline{L}^u$.*

Доведення. Зауважимо, що $\overline{L}^u \subseteq \overline{L}^p$, адже топологія $\mathcal{T}_p$ слабша за $\mathcal{T}_u$. Тому включення $\supseteq$ випливає з твердження 7.3.

Перевіримо, що $\overline{L}^p \cap C(X) \subseteq \overline{L}^u$. Нехай неперервна функція f належить до поточкового замикання $\overline{L}^p$. Покажемо, що f належить і до рівномірного замикання $\overline{L}^u$. Для цього досить показати, що $U_\varepsilon(f) \cap L \neq \varnothing$ для довільного $\varepsilon > 0$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Оскільки $f \in \overline{L}^p$, то $U_{\{x,y\},\varepsilon}(f) \cap L \neq \varnothing$ для довільних $x, y \in X$. Тоді для довільних $x, y \in X$ існують функції $g_{x,y} \in L$ такі, що $g_{x,y} \in U_{\{x,y\},\varepsilon}(f)$, тобто

$$\big|g_{x,y}(x) - f(x)\big| < \varepsilon \quad \text{і} \quad \big|g_{x,y}(y) - f(y)\big| < \varepsilon. \tag{7.2}$$

Зафіксуємо $x \in X$ і для довільного $y \in X$ розглянемо множину

$$U_{x,y} = \Big\{z \in X : g_{x,y}(z) > f(z) - \varepsilon\Big\}.$$

Оскільки $h_{x,y} = g_{x,y} - f$ є неперервною функцією і $U_{x,y} = h_{x,y}^{-1}\big((-\varepsilon; +\infty)\big)$, то множина $U_{x,y}$ є відкрита. Крім того, з (7.2) випливає, що $y \in U_{x,y}$ для кожного $y \in X$. Таким чином, з компактності X випливає, що існують $n \in \mathbb{N}$ і $y_1, y_2, \ldots, y_n \in X$ такі, що $X = \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_{x,y_k}$. Розглянемо функцію

$$g_x = g_{x,y_1} \vee g_{x,y_2} \vee \cdots \vee g_{x,y_n}.$$

Оскільки L є ґраткою, то $g_x \in L$. Зауважимо, що з (7.2) випливає, що $g_{x,y_j}(x) < f(x) + \varepsilon$ для кожного $j = 1, 2, \ldots, n$, а тому $g_x(x) = \max\limits_{j=1,\ldots,n} g_{x,y_j}(x) < f(x) + \varepsilon$. Таким чином,

$$g_x(x) < f(x) + \varepsilon \tag{7.3}$$

Розглянемо тепер довільне $z \in X$. Тоді існує $k = 1, 2, \ldots, n$ таке, що $z \in U_{x,y_k}$. Отже,

$$g_x(z) = \max_{j=1,\ldots,n} g_{x,y_j}(z) \geq g_{x,y_k}(z) > f(z) - \varepsilon.$$

А тому,

$$g_x(z) > f(z) - \varepsilon \quad \text{для довільного } z \in X. \tag{7.4}$$

Розглянемо множину

$$U_x = \Big\{ z \in X : g_x(z) < f(z) + \varepsilon \Big\}.$$

Оскільки $h_x = g_x - f$ є неперервною функцією і $U_x = h_x^{-1}\big((-\infty; \varepsilon)\big)$, то множина U_x відкрита. Крім того, з (7.3) випливає, що $x \in U_x$ для кожного $x \in X$. Таким чином, з компактності X випливає, що існують $m \in \mathbb{N}$ і $x_1, x_2, \ldots, x_m \in X$ такі, що $X = \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_{x_k}$. Розглянемо функцію

$$g_x = g_{x_1} \wedge g_{x_2} \wedge \cdots \wedge g_{x_m}.$$

Оскільки L є ґраткою, то $g \in L$. Візьмемо $z \in X$. Тоді існує $k = 1, 2, \ldots, m$ таке, що $z \in U_{x_k}$. В такому разі

$$g(z) = \min_{j=1,\ldots,m} g_{x_j}(z) \leq g_{x_k}(z) < f(z) + \varepsilon.$$

З іншого боку, за рахунок (7.4) одержимо, що

$$g(z) = \min_{j=1,\ldots,m} g_{x_j}(z) > f(z) + \varepsilon.$$

З цих двох нерівностей матимемо, що

$$f(z) - \varepsilon < g(z) < f(z) + \varepsilon \quad \text{для довільного } z \in X.$$

Отже, $\big|f(z) - g(z)\big| < \varepsilon$ при $z \in X$. Таким чином, $g \in L \cap U_\varepsilon(f)$. Отже, $L \cap U_\varepsilon(f) \neq \varnothing$ для кожного $\varepsilon > 0$ і тому $f \in \overline{L}^u$. $\square$

4 Теорема Діні

Теорема 7.3 (Діні)**.** *Нехай X – компактний топологічний простір $f \in C(X)$ і $(f_m)_{m\in M}$ – напрямленість в $C(X)$ така, що для кожного $x \in X$ напрямленість $\big(f_m(x)\big)_{m\in M}$ монотонна в $\mathbb{R}$ і $f_m(x) \to f(x)$. Тоді $f_m(x) \rightrightarrows f(x)$ на X.*

Доведення. Позначимо через X^+ (відповідно, X^-) множину таких $x \in X$ для яких напрямленість $\big(f_m(x)\big)_{m\in M}$ зростає (відповідно, спадає). Тоді $f(x) = \sup\limits_{m\in M} f_m(x)$, якщо $x \in X^+$ і $f(x) = \inf\limits_{m\in M} f_m(x)$, якщо $x \in X^-$. Покладемо $g_m(x) = \big|f_m(x) - f(x)\big|$ для $x \in X$ і $m \in M$. Тоді $g_m \in C(X)$ і напрямленість $\big(g_m(x)\big)_{m\in M}$ спадає і $g_m(x) \to 0$ для кожного $x \in X$.

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і покладемо

$$F_m = \Big\{x \in X : g_m(x) \geq \varepsilon\Big\}, \quad m \in M.$$

Зрозуміло, що множини F_m замкнені. Покажемо, що сім'я $(F_m)_{m\in M}$ спадає. Візьмемо $m, n \in M$ такі, що $m \leq n$. Тоді, якщо $x \in F_n$, то $g_m(x) \geq g_n(x) \geq \varepsilon$, а значить, $x \in F_m$. Таким чином, $F_n \subseteq F_m$ при $m \geq n$.

Припустимо, що $F_m \neq \varnothing$ для кожного $m \in M$. Тоді, оскільки M напрямлена, то для довільних $m_1, m_2, \dots, m_k \in M$ існує $n \in M$ такий, що $m_i \leq n$ при $i = 1, 2, \dots, k$. В такому разі, $\bigcap\limits_{i=1}^{k} F_{m_i} \supseteq F_n \neq \varnothing$. Отже, система $\mathcal{F} = \Big\{F_m : m \in M\Big\}$ замкнена і центрована в компактному просторі X. А тому, $\bigcap \mathcal{F} \neq \varnothing$ внаслідок [4, 3.1.1]. Отже, існує $x_0 \in X$ таке, що $x \in F_m$ для кожного $m \in M$. Тоді $g_m(x_0) \geq \varepsilon$ для кожного m, що неможливо, адже $g_m(x_0) \to 0$.

Таким чином, наше припущення хибне і існує $m_0 \in M$ таке, що $F_{m_0} = \varnothing$. Тоді і $F_m = \varnothing$ при $m \geq m_0$. Отже, для довільного $x \in X$ виконується, що $\big|f_m(x) - f(x)\big| = g_m(x) < \varepsilon$ при $m \geq m_0$. А це означає, що $f_m(x) \rightrightarrows f(x)$ на X. $\square$

5 Теорема Стоуна–Вейєрштрасса

Лема 7.1. *Нехай X – топологічний простір, A – деяка підалгебра $\mathbb{R}^X$ така, що $1 \in A$. Нехай також $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – деякий алгебраїчний многочлен і $f \in A$. Тоді $g = p \circ f \in A$.*

Доведення. Нехай $p(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k t^k$. Тоді $g = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k f^k$. Але функції $f^0 = 1$, $f^1 = f$, $f^2 = f \cdot f$, $\dots$, $f^n = f^{n-1} \cdot f$ належать до A, адже A – алгебра з одиницею. Тоді g теж належить до A, як лінійна комбінація елементів $f^0, f^1, \dots, f^n \in A$. $\square$

Наступну лема є очевидним наслідком класичної теореми Вейєрштрасса про наближення. Але ми тут подамо її безпосереднє доведення.

Лема 7.2. *Існує послідовність многочленів $p_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ така, що $p_n(t) \rightrightarrows \sqrt{t}$ на $[0;1]$.*

Доведення. Функції p_n визначимо рекурентно покладаючи $p_0 = 0$ і

$$p_{n+1}(t) = p_n(t) + \tfrac{1}{2}\bigl(t - p_n^2(t)\bigr), \quad t \in [0;1], \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Покажемо індукцією по $n \in \mathbb{N}_0$, що p_n є многочленом і $0 \le p_{n-1}(t) \le p_n(t) \le \sqrt{t}$ для $t \in [0;1]$ і $n > 0$. Ця властивість очевидно виконується для $n = 0$. Припустимо, що вона виконується для деякого $n \in \mathbb{N}_0$ і доведемо її для $n+1$. З означення p_{n+1} негайно випливає, що p_{n+1} є многочленом, адже p_n є многочленом за індуктивним припущенням. Крім того, оскільки $0 \le p_n(t) \le \sqrt{t}$ на $[0;1]$, то $p_n^2(t) \le t$, а значить,

$$p_{n+1}(t) = p_n(t) + \tfrac{1}{2}\bigl(t - p_n^2(t)\bigr) \ge p_n(t) \ge 0$$

на $[0;1]$. А також, для $t \in [0;1]$ матимемо, що

$$\sqrt{t} - p_{n+1}(t) = \sqrt{t} - p_n(t) - \tfrac{1}{2}\bigl(t - p_n^2(t)\bigr) = \sqrt{t} - p_n(t) - \tfrac{1}{2}\bigl(\sqrt{t} - p_n(t)\bigr)\bigl(\sqrt{t} + p_n(t)\bigr) =$$

$$= \bigl(\sqrt{t} - p_n(t)\bigr)\Bigl(1 - \tfrac{1}{2}\bigl(\sqrt{t} + p_n(t)\bigr)\Bigr) \ge \bigl(\sqrt{t} - p_n(t)\bigr)\Bigl(1 - \tfrac{1}{2}\bigl(\sqrt{t} + \sqrt{t}\bigr)\Bigr) = \bigl(\sqrt{t} - p_n(t)\bigr)\bigl(1 - \sqrt{t}\bigr) \ge 0.$$

Таким чином, $0 \le p_n(x) \le p_{n+1}(t) \le \sqrt{t}$ на $[0;1]$.

І нарешті, за теоремою Діні (теорема 7.3) матимемо, що $p_n(t) \rightrightarrows \sqrt{t}$ на $[0;1]$. □

Лема 7.3. *Нехай X – компактний простір, A – деяка підалгебра $C(X)$ така, що $1 \in A$, і $L = \overline{A}^u$ – її рівномірне замикання. Тоді L є ґраткою.*

Доведення. Зрозуміло, що L є підалгеброю $C(X)$. Зокрема, L є лінійним підпростором $C(X)$. Тому за твердженням 7.2 досить перевірити, що $|f| \in L$ для довільного $f \in L$. Зафіксуємо $f \in C(X)$. Оскільки X компактний, то f обмежена. Отже, існує стала $\gamma > 0$ така, що $|f(x)| \le \gamma$ для кожного $x \in X$. Розглянемо функцію $g = \frac{1}{\gamma} \cdot f$. Тоді $0 \le g^2(x) \le 1$ при $x \in X$. Виберемо многочлени p_n за лемою 7.2 і визначимо функції $g_n : X \to \mathbb{R}$ покладаючи $g_n(x) = p_n\bigl(g^2(t)\bigr)$ для $x \in X$. Тоді $g_n \in L$ за лемою 7.1

$$g_n(x) = p_n\bigl(g^2(x)\bigr) \rightrightarrows \sqrt{g^2(x)} = \bigl|g(x)\bigr| \quad \text{на } X.$$

Оскільки L замкнена в топології рівномірної збіжності, то $|g| \in L$. А тому і $|f| = \gamma \cdot |g| \in L$. Таким чином, L є ґраткою за твердженням 7.3. □

Лема 7.4. *Нехай X – топологічний простір, A – деяка підалгебра $\mathbb{R}^X$ така, що $1 \in A$, і A розділяє точки X. Тоді $\overline{A}^p = \mathbb{R}^X$.*

Доведення. Перш за все покажемо, що

$$\forall a \neq b \in X \ \exists \varphi_{a,b} \in A \ \Big| \ \varphi_{a,b}(a) = 1 \text{ і } \varphi_{a,b}(b) = 0. \tag{7.5}$$

Нехай $a \neq b \in X$. Оскільки A розділяє точки, то існує $g \in A$ така, що $g(a) \neq g(b)$. Покладемо

$$\varphi_{a,b}(x) = \frac{g(x) - g(b)}{g(a) - g(b)}, \quad x \in X.$$

Тоді $\varphi_{a,b} \in A$ за лемою 7.1, адже $\varphi_{a,b} = p \circ g$, де $p(t) = \frac{1}{g(a)-g(b)}\big(t - g(b)\big)$. Крім того, $\varphi_{a,b}(a) = 1$ і $\varphi_{a,b}(b) = 0$.

Зафіксуємо деяку функцію $f \in \mathbb{R}^X$ і покажемо, що $f \in \overline{A}^p$. Візьмемо деякий окіл U функції f в $\mathcal{T}_p$. Тоді існує $\varepsilon > 0$ і $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, де $x_j \neq x_k$ при $j \neq k$, така, що $U_{E,\varepsilon}(f) \subseteq U$. Візьмемо $k = 1, 2, \dots, n$ і покладемо $y_k = f(x_k)$. Використовуючи (7.5) з $a = x_k$ і $b = x_j$ для $k \neq j$, знайдемо функції φ_{x_k,x_j}. Далі визначимо функції

$$\varphi_k(x) = \prod_{j \neq k} \varphi_{x_k,x_j}(x), \quad x \in X.$$

Тоді $\varphi_k(x_k) = 1$ і $\varphi_k(x_j) = 0$ при $j \neq k$. Крім того, $\varphi_k \in A$, адже A є алгеброю і $\varphi_{x_k,x_j} \in A$. Визначимо тепер функцію

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \varphi_k(x), \quad x \in X.$$

Тоді $g \in A$ і $g(x_k) = y_k = f(x_k)$ при $k = 1, 2, \dots, n$. В такому разі, $g \in U_{E,\varepsilon}(f) \subseteq U$. Отже, $U \cap A \neq \varnothing$, а тому, $f \in \overline{A}^p$. $\square$

Теорема 7.4 (Стоуна–Вейєрштрасса)**.** *Нехай X – компактний топологічний простір, A – деяке підкільце $C(X)$, що містить сталу функцію $u_0(x) = q \in (0;1)$ і розділяє точки X. Тоді для довільної $f \in C(X)$ існує послідовність функцій $f_n \in A$ така, що $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X.*

Доведення. Нехай $L = \overline{A}^u$. Тоді за лемою 7.3 L є ґраткою. Крім того $L = \overline{L}^u$. За твердженням 7.1, L є алгеброю. За теоремою 7.2, маємо, що $L = \overline{L}^u = \overline{L}^p \cap C(X)$. Але $A \subseteq L$. Тому $\overline{A}^p \subseteq \overline{L}^p$. Крім того, $\overline{A}^p = \mathbb{R}^X$ за лемою 7.4. Таким чином,

$$f \in C(X) = \mathbb{R}^X \cap C(X) = \overline{A}^p \cap C(X) \subseteq \overline{L}^p \cap C(X) = \overline{L}^u = L = \overline{A}^u.$$

Отже, $U_{\frac{1}{n}}(f) \cap A \neq \varnothing$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Виберемо $f_n \in U_{\frac{1}{n}}(f) \cap A$. Тоді $\big|f_n(x) - f(x)\big| < \frac{1}{n}$ на X, а тому $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X. $\square$

Зауваження 7.1. *В класичному формулювання теореми Стоуна–Вейєрштрасса умову "A є кільцем, що містить деяку сталу функцію $u_0(x) = q \in (0;1)$" замінюють на сильнішу – "A є алгеброю, що містить усі сталі".*

6 Застосування теореми Стоуна–Вейєрштрасса до доведення теорем Вейєрштрасса

Теорема 7.5 (Друга теорема Вейєрштрасса)**.** *Нехай $f \in C_{2\pi}$. Тоді існує послідовність тригонометричних многочленів $f_n \in T$ така, що $f_n \rightrightarrows f$ на $\mathbb{R}$*

Доведення. Нехай $K = \Big\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\Big\}$ одиничний круг в $\mathbb{C}$. Нагадаємо, що *аргумент* комплексного числа $z \neq 0$ – це такий кут $t = \arg z \in (-\pi; \pi]$, для якого $z = |z|(\cos t + i \sin t) = |z|e^{it}$. Як відомо, функція $\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to (-\pi; \pi]$ неперервна скрізь, окрім променя $L = \Big\{z : \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z < 0\Big\}$. А якщо $z_0 \in L$, то

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ \operatorname{Im} z > 0}} \arg z = \pi, \quad \text{а також,} \quad \lim_{\substack{z \to z_0 \\ \operatorname{Im} z < 0}} \arg z = -\pi.$$

Зрозуміло, що відображення $\varphi : \mathbb{R} \to K$, $\varphi(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$, $t \in T$, є неперервною сюр'єкцією, причому $\arg \varphi(t) = t$ при $t \in (-\pi; \pi]$. Визначимо функцію $g : K \to \mathbb{R}$, $g(z) = f(\arg z)$, $z \in K$. Тоді g буде неперервна на $K \setminus \{-\pi\}$. Крім того, з 2π-періодичності f матимемо, що

$$\lim_{\substack{z \to -\pi \\ \operatorname{Im} z > 0}} g(z) = \lim_{\substack{z \to -\pi \\ \operatorname{Im} z > 0}} f(\arg z) = f(\pi) = f(-\pi) = \lim_{\substack{z \to -\pi \\ \operatorname{Im} z < 0}} f(\arg z) = \lim_{\substack{z \to -\pi \\ \operatorname{Im} z < 0}} g(z),$$

а тому g неперервна і в точці $-\pi$. Отже, $g \in C(K)$.

Розглянемо множину R усіх функцій $p : K \to \mathbb{R}$ вигляду

$$p(z) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{j,k} x^j y^k, \quad \text{де} \quad z = x + iy \in K,$$

де $n \in \mathbb{N}$ і $a_{j,k} \in \mathbb{R}$. Зрозуміло, що R є підкільцем $C(K)$, яке розділяє точки K і містить усі сталі функції. Тому, за теоремою Стоуна–Вейєрштрасса (теорема 7.4), існує послідовність функцій $g_n \in R$ така, що $g_n(z) \rightrightarrows g(z)$ на K. Тоді функції

$$f_n(t) = g_n(e^{it}) = g(\cos t + i \sin t), \quad t \in \mathbb{R},$$

будуть, очевидним чином, тригонометричними многочленами і

$$f_n(t) = g_n(e^{it}) \rightrightarrows g(e^{it}) = f(t)$$

на $\mathbb{R}$. □

Для кожного $s \in \mathbb{N}$ через $C_{2\pi}(\mathbb{R}^s)$ ми позначимо простір усіх неперервних функцій $f \in \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$, які є 2π-періодичними відносно кожної змінної зокрема. Крім того, для кожного $x = (x_1, \ldots, x_s) \in \mathbb{R}^s$ позначимо $e^{ix} = (e^{ix_1}, \ldots, e^{ix_s})$.

Твердження 7.4. *Нехай* $s \in \mathbb{N}$, $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}^s)$ *і* $K = \Big\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\Big\}$ *одиничний круг в* $\mathbb{C}$. *Тоді існує єдина функція* $g \in C(K^s)$ *така, що* $g(e^{ix}) = f(x)$ *для кожного* $x \in \mathbb{R}^s$.

Доведення. Спочатку доведемо існування функції g. Зауважимо, що відображення $\psi : [0, 2\pi)^s \to K^s$, $\psi(x) = e^{ix}$, є бієктивним. Для кожного $t \in K^s$ покладемо $g(t) = f(\psi^{-1}(t))$ і покажемо, що $g(e^{ix}) = f(x)$ для кожного $x \in \mathbb{R}^s$. Справді нехай $x \in \mathbb{R}^s$, $t = e^{ix}$ і $y = \psi^{-1}(t)$. Тоді $e^{iy} = \psi(y) = t = e^{ix}$, та $x - y = 2\pi n$, де $n \in \mathbb{N}_0^s$. Отже, $f(x) = f(y)$, адже функція f 2π-періодична відносно кожної змінної зокрема. Тепер маємо

$$f(x) = f(y) = f(\psi^{-1}(t)) = g(t) = g(e^{ix}).$$

Залишилося довести неперервність функції g. Нехай $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ – послідовність точок $t_k \in K^s$, яка збігається до деякого елемента $t_0 \in K^s$. Виберемо послідовність $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ точок $x_k \in \mathbb{R}^s$ так, що $x_0 = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ і $t_k = e^{ix_k}$ для кожного $k \in \mathbb{N}_0$. Тепер за неперервністю функції f в точці x_0 маємо $\lim\limits_{k\to\infty} g(t_k) = \lim\limits_{k\to\infty} g(e^{ix_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0) = g(e^{ix_0}) = g(t_0)$. □

Для $s \in \mathbb{N}$ символом $T(\mathbb{R}^s)$ позначатимемо сукупність усіх тригонометричних многочленів $f : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$.

Теорема 7.6 (Друга теорема Вейєрштрасса для функцій багатьох змінних)**.** *Нехай* $s \in \mathbb{N}$, $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}^s)$. *Тоді існує послідовність тригонометричних многочленів* $f_n \in T(\mathbb{R}^s)$ *така, що* $f_n \rightrightarrows f$ *на* $\mathbb{R}$

Доведення. Нехай $K = \Big\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\Big\}$. Згідно з твердженням 7.4 виберемо функцію $g \in C(K^s)$ таку, що $g(e^{ix}) = f(x)$ для кожного $x \in \mathbb{R}^s$.

Розглянемо множину R усіх функцій $p : K^s \to \mathbb{R}$ таких, що $p(e^{ix}) = q(x)$ на $\mathbb{R}^s$ деякого тригонометричного многочлена $q \in T(\mathbb{R}^s)$. Згідно з твердженням 7.4, множина R є підкільцем $C(K^s)$, яке розділяє точки K^s і містить усі сталі функції. Тому, за теоремою Стоуна–Вейєрштрасса (теорема 7.4), існує послідовність функцій $g_n \in R$ така, що $g_n(z) \rightrightarrows g(z)$ на K. За вибором функцій g_n всі функції $f_n(x) = g_n(e^{ix})$ є тригонометричними многочленами на $\mathbb{R}^s$ і

$$f_n(t) = g_n(e^{it}) \rightrightarrows g(e^{it}) = f(t)$$

на $\mathbb{R}^s$.

□

Розділ II. Найкращі наближення

Лекція №8

Найкращі наближення і квазінорми

1 Означення найкращого наближення і його властивості

Нехай (X, d) – метричний простір, L – його непорожня підмножина і $x \in X$. Число

$$E_L(x) = d(x, L) = \inf\{d(x, u) : u \in L\}$$

називається *відстанню від точки x до множини L* або *найкращим наближенням елемента x елементами множини L*.

Твердження 8.1. *Для довільного метричного простору (X, d) і його непорожньої підмножини L функція $E : X \to \mathbb{R}$, $E(x) = E_L(x)$, задовольняє такі умови:*

1^0 $E(x) \geq 0$ *і* $E(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \overline{L}$*;*

2^0 $|E(x_1) - E(x_2)| \leq d(x_1, x_2)$ *для довільних* $x_1, x_2 \in X$*;*

3^0 *функція E рівномірно неперервна, зокрема, неперервна.*

Доведення. 1^0. Зрозуміло, що $E(x) = \inf\{d(x, u) : u \in L\} \geq 0$, адже $d(x, u) \geq 0$ для кожного $u \in L$.

Нехай $E(x) = 0$ і U – довільний окіл точки x у метричному просторі (X, d). Тоді існує $\varepsilon > 0$ таке, що

$$U_\varepsilon(x) = \{u \in X : d(u, x) < \varepsilon\} \subseteq U.$$

Оскільки $\varepsilon > 0 = E(x) = \inf\{d(x, u) : u \in L\}$, то існує елемент $u \in L$ такий, що $d(x, u) < \varepsilon$. Тоді $u \in L \cap U_\varepsilon(x) \subseteq L \cap U$. Отже, перетин $L \cap U \neq \emptyset$. Тому $x \in \overline{L}$.

Навпаки, нехай $x \in \overline{L}$. Візьмемо $\varepsilon > 0$. Тоді $L \cap U_\varepsilon(x) \neq \emptyset$. Тобто існує елемент $u \in L$ такий, що $d(x, u) < \varepsilon$. Звідси випливає, що $E(x) \leq 0$, а отже, $E(x) = 0$.

2^0. Для довільних $x_1, x_2 \in X$ і $u \in L$ з нерівності трикутника випливає, що

$$E(x_1) \leq d(x_1, u) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, u).$$

Тому $E(x_1) - d(x_1, x_2) \leq d(x_2, u)$ для кожного $u \in L$. Отже,

$$E(x_1) - d(x_1, x_2) \leq \inf\{d(x_2, u) : u \in L\} = d(x_2, L) = E(x_2),$$

тому, $E(x_1) - E(x_2) \leq d(x_1, x_2)$. Помінявши місцями x_1 і x_2, отримаємо:

$$E(x_2) - E(x_1) \leq d(x_2, x_1) = d(x_1, x_2).$$

Таким чином,

$$-d(x_1, x_2) \leq E(x_1) - E(x_2) \leq d(x_1, x_2),$$

отже, $|E(x_1) - E(x_2)| \leq d(x_1, x_2)$.

3^0. З властивості 2^0 випливає, що для довільних $\varepsilon > 0$ і $x_1, x_2 \in X$ з нерівності $d(x_1, x_2) < \varepsilon$ випливає, що $|E(x_1) - E(x_2)| < \varepsilon$. Отже, функція E є рівномірно неперервною на X. $\square$

2 Квазінорми

Спочатку нагадаємо, що *абелевою групою* називається множина X, в якій уведені операція додавання

$$(x, y) \mapsto x + y : X^2 \to X,$$

операція взяття протилежного елемента

$$x \mapsto -x : X \to X$$

і нульовий елемент $0 \in X$, так, що при цьому для довільних $x, y, z \in X$ виконуються такі умови:

(G_1) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

(G_2) $x + y = y + x$;

(G_3) $x + 0 = x$;

(G_4) $x + (-x) = 0$.

Для довільних елементів x і y абелевої групи X суму $x + (-y)$ називатимемо *різницею елементів x і y* і позначатимемо її $x - y$.

Квазінормою на абелевій групі X називається функція

$$x \mapsto |x| : X \to \mathbb{R},$$

яка для довільних $x, y \in X$ задовольняє такі умови:

(Q_1) $|x| \geq 0$;

(Q_2) $|-x| = |x|$;

(Q_3) $|x+y| \leq |x| + |y|$;

(Q_4) $|x| = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0$.

Пару $(X, |\cdot|)$ називатимемо *квазінормованою абелевою групою*, якщо $|cdot|$ є квазінормою на абелевій групі X.

Теорема 8.1. *Нехай $|\cdot|$ є квазінормою на абелевій групі X. Тоді функція $d(x,y) = |x-y|$ є метрикою X, яка інваріантна відносно зсувів.*

Доведення. За властивістю (Q_1) маємо, що $d(x,y) = |x-y| \geq 0$. Крім того, згідно з властивістю (Q_4),

$$d(x,y) = |y-x| = |-(x-y)| = |x-y| = d(x,y).$$

З властивості (Q_3) виводимо, що

$$d(x,z) = |x-z| = |x-y+y-z| \leq |z-y| + |y-z| = d(x,y) + d(y,z).$$

Нарешті

$$d(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow \ |x-y| = 0 \ \Leftrightarrow \ x-y = 0 \ \Leftrightarrow \ x = y.$$

Отже, d – метрика на X.

Оскільки

$$d(x+z, y+z) = |(x+z) - (y+z)| = |x+z-y-z| = |x-y| = d(x,y)$$

для довільних $x, y, z \in X$, то метрика d інваріантна відносно зсувів. □

Наступний результат дає обернений зв'язок між метриками і квазінормами.

Теорема 8.2. *Нехай d – метрика на абелевій групі X, яка інваріантна відносно зсувів. Тоді функція $|x| = d(x,0)$ – це квазінорма на X і $d(x,y) = |x-y|$.*

Доведення. (Q_1). Для довільних $x, y \in X$ маємо, що $|x| = d(x,0) \geq 0$,

(Q_2). $|-x| = d(-x,0) = d(-x+x, 0+x) = d(0,x) = d(x,0) = |x|$.

(Q_3). $|x+y| = d(x+y,0) \leq d(x+y,y) + d(y,0) = d(x+y-y, y-y) + d(y,0) = = d(x,0) + d(y,0) = |x| + |y|$.

(Q_4). $|x| = 0 \ \Leftrightarrow \ d(x,0) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0$. □

Теореми 8.1 і 8.2 показують, що між множинами квазінорм на абелевій групі X і метрик на X, які інваріантні відносно зсувів, існує природна взаємно однозначна відповідність, яка квазінормі $|\cdot|$ ставить у відповідність метрику $d(x,y)=|x-y|$.

3 Властивості найкращого наближення породженого квазінормою

Нехай X – абелева група, а L – підгрупа групи X, тобто непорожня підмножина групи X, яка замкнена відносно операцій додавання і взяття протилежного елемента. Зауважимо, що нульовий елемент обов'язково входить у підгрупу, адже згідно з означенням існує елемент $a\in L$, а тоді $-a\in L$, і отже, $0=a+(-a)\in L$.

Нехай $|\cdot|$ – це квазінорма на X і $d(x,y)=|x-y|$ – відповідна їй метрика. Для кожного $x\in X$ розглянемо найкраще наближення

$$E(x)=E_L(x)=\inf\big\{|x-u|:u\in L\big\}.$$

Твердження 8.2. *Нехай X – квазінормована абелева група і L – її підгрупа. Функція $E=E_L:X\to\mathbb{R}$ має такі спеціальні властивості:*

4^0 *$E(x)=E(-x)$ для кожного $x\in X$;*

5^0 *$E(x_1+x_2)\le E(x_1)+E(x_2)$ для довільних $x_1,x_2\in X$;*

6^0 *$E(x+y)=E(x)$ для довільних $x\in X$ і $y\in L$.*

Доведення. 4^0. Оскільки $u\in L$ тоді і тільки тоді, коли $-u\in L$, то

$$E(x)=\inf\{|x-u|:u\in L\}=\inf\{|-x-(-u)|:-u\in L\}=\inf\{|-x-v|:v\in L\}=E(-x).$$

5^0. Оскільки L замкнена відносно додавання і містить нульовий елемент, то

$$L+L=\{u+v:u,v\in L\}=L.$$

Крім того, для довільних непорожніх обмежених знизу множин $A,B\subseteq\mathbb{R}$ виконується рівність

$$\inf A+\inf B=\inf\{a+b:a\in A,b\in B\}.$$

Таким чином, для довільних $x_1,x_2\in X$ маємо

$$E(x_1)+E(x_2)=\inf\{|x_1-u|:u\in L\}+\inf\{|x_2-v|:v\in L\}=\inf\{|x_1-u|+|x_2-v|:u,v\in L\}\ge$$

$$\geq \inf\{|(x_1+x_2)-(u+v)| : u,v \in L\} = \inf\{|(x_1+x_2)-w| : w \in L\} = E(x_1+x_2).$$

6^0. Нехай $y \in L$. Оскільки L замкнена відносно додавання і взяття протилежного елемента, то

$$y + L = \{y + u : u \in L\} = L.$$

Тепер для довільного $x \in X$ маємо

$$E(x+y) = \inf\{|x+y-u| : u \in L\} = \{|x-(y+u)| : u \in L\} = \{|x-v| : v \in L\} = E(x).$$

□

4 Квазінорми на векторних просторах

Квазінормою у векторному просторі X над полем $\mathbb{K}$ дійсних або комплексних чисел називається квазінорма на абелевій групі X з операцією додавання, що є у векторному просторі X.

Нехай $0 < p \leq 1$. Нагадаємо, що *p-нормою* на векторному просторі X називається функція

$$x \mapsto \|x\| : X \to \mathbb{R},$$

яка для довільних $x, y \in X$ і $\lambda \in \mathbb{K}$ задовольняє такі умови:

(N_1) $\|x\| \geq 0$;

(N_2) $\|\lambda x\| = |\lambda|^p \|x\|$;

(N_3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

(N_4) $\|x\| = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0$.

Якщо $p = 1$, то p-норма називається *нормою*. Крім того, для довільної p-норми маємо, що

$$\|-x\| = \|(-1)x\| = |-1|^p \|x\| = \|x\|$$

для кожного $x \in X$. Отже, p-норма є квазінормою на X.

Приклад 8.1. Нехай $p \in (0,1]$. Розглянемо простір $X = \ell_p$, який складається з усіх послідовностей $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ чисел $\xi_k \in \mathbb{K}$, для яких ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p$ збігається. Простір X є лінійним підпростором векторного простору $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ усіх числових послідовностей, а функція $\|x\|_p = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p$ є p-нормою на X.

Доведення. Зауважимо, що для довільних додатних чисел a і b виконується нерівність $(a+b)^p \leq a^p + b^p$. Справді,

$$(a+b)^p = \frac{a+b}{(a+b)^{1-p}} = \frac{a}{(a+b)^{1-p}} + \frac{b}{(a+b)^{1-p}} \leq \frac{a}{a^{1-p}} + \frac{b}{b^{1-p}} = a^p + b^p.$$

Звідси випливає, що $x+y \in X$ і $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ для довільних $x, y \in X$. Крім того, очевидно, що $\lambda x \in X$ для довільних $x \in X$ і $\lambda \in \mathbb{K}$. Таким чином, X є лінійним підпростором векторного простору $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Властивості (N_1), (N_2) і (N_4) легко можна перевірити за означенням функції $\| \cdot \|_p$. □

Твердження 8.3. *Нехай $\|\cdot\|$ – p-норма на векторному просторі X над полем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, L – підпростір простору X, $x \in X$ і $E(x) = d(x, L)$ – найкраще наближення. Тоді $E(\lambda x) = |\lambda|^p E(x)$ для кожного $\lambda \in \mathbb{K}$, зокрема, $E(\lambda x) = |\lambda| E(x)$, якщо $\| \cdot \|$ є нормою.*

Доведення. Спочатку розглянемо випадок $\lambda = 0$. Тоді $E(\lambda x) = E(0) = 0$, адже $0 \in L$, і $|\lambda|^p E(x) = 0$ для кожного $x \in X$. Отже, рівність виконується.

Тепер нехай $\lambda \neq 0$. Оскільки підпростір L простору X замкнений відносно множення на скаляр, то $L = \lambda L = \{\lambda u : u \in L\}$. Тепер для кожного $x \in X$ маємо

$$E(\lambda x) = \inf\{\|\lambda x - u\| : u \in L\} = \inf\{\|\lambda x - u\| : u \in \lambda L\} = \inf\{\|\lambda x - \lambda v\| : v \in L\} =$$

$$= \inf\{|\lambda|^p \|x - v\| : v \in L\} = |\lambda|^p \inf\{\|x - v\| : v \in L\} = |\lambda|^p E(x).$$

□

Лекція №9

Квазінорми та елементи найкращого наближення

1 Лінійні квазінорми і квазінормовані простори

Наступне твердження показує узгодженість групової і топологічної структур на абелевій групі з квазінормою.

Твердження 9.1. *Нехай X – комутативна група, $|\cdot|$ – квазінорма на X і $d(x,y) = |x-y|$ – метрика, породжена квазінормою. Тоді групові операції додавання $s(x,y) \mapsto x+y : X^2 \to X$ і переходу до протилежного елемента $\tau(x) \mapsto -x : X \to X$ є неперервними відносно топології $\mathcal{T}$, породженої метрикою d.*

Доведення. Нагадаємо, що для $x \in X$ система $\{U_\varepsilon(x) : \varepsilon > 0\}$ відкритих куль

$$U_\varepsilon(x) = \{y \in X : |x-y| < \varepsilon\}$$

утворює базу околів точки x в топології $\mathcal{T}$.

Візьмемо довільні точки $x, y \in X$ і покажемо, що відображення s неперервне в точці $(x,y) \in X^2$. Для цього достатньо встановити, що для кожного $\varepsilon > 0$ множина

$$s\left(U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \times U_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)\right) = \{u+v : u \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x), v \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)\}$$

міститься в множині $U_\varepsilon(x+y)$. Справді, нехай $u \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$ і $v \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)$. Тоді

$$|(x+y)-(u+v)| \le |x-u| + |y-v| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

тобто $u+v \in U_\varepsilon(x+y)$.

Перевіримо тепер неперервність операції τ. Оскільки

$$|\tau(x) - \tau(y)) = |-x-(-y)| = |-(x-y)| = |x-y|$$

для довільних $x, y \in X$, то τ є ізометрією, а отже, неперервним відображенням. □

Топологію, породжену метрикою $d(x,y) = |x-y|$, ми називатимемо *топологією, породженою квазінормою* $|\cdot|$.

Наслідок 9.1. *Нехай $|\cdot|$ – квазінорма на векторному просторі X над полем $\mathbb{K}$ і $\mathcal{T}$ – топологія, породжена цією квазінормою. Тоді операція додавання на X є неперервною відносно топології $\mathcal{T}$.*

Зауваження 9.1. *Операція множення на скаляр на векторному просторі не обов'язково є неперервною відносно топології, породженої квазінормою (див. приклад 9.4).*

Квазінорма $|\cdot|$ на векторному просторі X над полем $\mathbb{K}$ називається *лінійною*, якщо операція множення на скаляр на X неперервна відносно топології $\mathcal{T}$, породженої квазінормою, тобто $(X, \mathcal{T})$ – це топологічний векторний простір. При цьому пара $(X, |\cdot|)$ називається *квазінормованим простором.*

Приклад 9.1. Кожна p-норма $\|\cdot\|$ на векторному просторі X є лінійною квазінормою. Зокрема, кожна норма є лінійною квазінормою. Іншими словами, нормовані і p-нормовані простори є квазінормованими.

Доведення. Зафіксуємо $\lambda \in \mathbb{K}$ і $x \in X$ і покажемо, що операція множення на скаляр на X є неперервною в точці (λ, x) відносно топології $\mathcal{T}$, породженої квазінормою.

Нехай $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність скалярів $\lambda_n \in \mathbb{K}$ і $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність елементів $x_n \in X$ такі, що $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0$. Зауважимо, що послідовність $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ обмежена. Тепер, використовуючи властивості p-норми, одержимо, що

$$\|\lambda x - \lambda_n x_n\| \le \|\lambda x - \lambda_n x\| + \|\lambda_n x - \lambda_n x_n\| = |\lambda - \lambda_n|^p \|x\| + |\lambda_n|^p \|x - x_n\|.$$

Тому $\lim\limits_{n\to\infty} \|\lambda x - \lambda_n x_n\| = 0$, що й дає нам неперервність операції множення в точці (λ, x). □

Приклад 9.2. Нехай q, s – два різних числа з проміжку $(0; 1]$. Розглянемо простір X, який складається з усіх послідовностей $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ чисел $\xi_k \in \mathbb{K}$, для яких ряди $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |\xi_{2j-1}|^q$ і $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |\xi_{2j}|^s$ збігаються. Простір X є лінійним підпростором векторного простору $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ всіх числових послідовностей, а функція $|x| = \sum\limits_{j=1}^{\infty} |\xi_{2j-1}|^q + \sum\limits_{j=1}^{\infty} |\xi_{2j}|^s$ є лінійною квазінормою на X, яка не є p-нормою для жодного p.

Доведення. Для кожного $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in X$ покладемо $x_o = (x_{2j-1})_{j=1}^{\infty}$ і $x_e = (x_{2j})_{j=1}^{\infty}$, і зауважимо, що $|x| = \|x_o\|_q + \|x_e\|_s$, де $\|\cdot\|_q$ і $\|\cdot\|_s$ – це q-норма і s-норма, відповідно, з прикладу 8.1. З прикладу 8.1 випливає також, що простір X лінійний. Оскільки функції $\|\cdot\|_q$ і $\|\cdot\|_s$ є лінійними квазінормами, то і функція $|\cdot|$ є лінійною квазінормою на X. Крім того,

$$|\lambda x| = |\lambda|^q \|x_o\|_q + |\lambda|^s \|x_e\|_s$$

для кожного $x \in X$. Тому, оскільки числа q, s – різні, то функція $|\cdot|$ не є p-нормою для жодного p. □

Приклад 9.3. Функція $|x| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\xi_k|}{2^k(|\xi_k|+1)}$ – це лінійна квазінорма на просторі $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ усіх числових послідовностей.

Доведення. Легко бачити, що функція $|\cdot|$ задовольняє умови (Q_1), (Q_2) і (Q_4). Перевіримо умову (Q_3). Нехай $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty}, y = (\eta_k)_{k=1}^{\infty} \in X$. Оскільки функція $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(t) = \frac{t}{1+t}$ зростаюча, то

$$\frac{|\xi_k + \eta_k|}{2^k(|\xi_k + \eta_k| + 1)} = \frac{1}{2^k} f(|\xi_k + \eta_k|) \le \frac{1}{2^k} f(|\xi_k| + |\eta_k|) = \frac{|\xi_k| + |\eta_k|}{2^k(|\xi_k| + |\eta_k| + 1)} =$$

$$= \frac{|\xi_k|}{2^k(|\xi_k| + |\eta_k| + 1)} + \frac{|\eta_k|}{2^k(|\xi_k| + |\eta_k| + 1)} \le \frac{|\xi_k|}{2^k(|\xi_k| + 1)} + \frac{|\eta_k|}{2^k(|\eta_k| + 1)}$$

для кожного $k \in \mathbb{N}$. Тепер маємо

$$|x + y| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\xi_k + \eta_k|}{2^k(|\xi_k + \eta_k| + 1)} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\xi_k|}{2^k(|\xi_k| + 1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\eta_k|}{2^k(|\eta_k| + 1)} = |x| + |y|.$$

Отже, функція $|\cdot|$ є квазінормою.

Тепер доведемо лінійність квазінорми $|\cdot|$. Спочатку зауважимо, що для довільних $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in X$ і номера $m \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{|\xi_k|}{2^k(|\xi_k| + 1)} \le \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m-1}},$$

зокрема, $|x| \le 1$. Крім того, для кожного $m \in \mathbb{N}$ функція $|\cdot|_m : \mathbb{K}^m \to \mathbb{R}$, $|x|_m = \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{|\xi_k|}{2^k(|\xi_k|+1)}$, є лінійною квазінормою на просторі $\mathbb{K}^m$.

Зафіксуємо $\lambda \in \mathbb{K}$ і $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in X$ і покажемо, що операція множення на скаляр неперервна в точці (λ, x) відносно топології, породженої квазінормою $|\cdot|$. Нехай $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність скалярів $\lambda_n \in \mathbb{K}$ і $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність елементів $x_n = (\xi_k^{(n)})_{k=1}^{\infty} \in X$ такі, що $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$ і $\lim\limits_{n\to\infty} |x - x_n| = 0$. Для кожного $\varepsilon > 0$ виберемо номери $m, n_0 \in \mathbb{N}$ такі, що

$$\frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{і} \quad |\lambda x^{(m)} - \lambda_n x_n^{(m)}|_m < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всіх $n > n_0$, де $x^{(m)} = (\xi_k)_{k=1}^{m}$ і $x_n^{(m)} = (\xi_k^{(n)})_{k=1}^{m}$. Тепер для всіх $n > n_0$ маємо

$$|\lambda x - \lambda_n x_n| = |\lambda x^{(m)} - \lambda_n x_n^{(m)}|_m + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|\lambda \xi_k - \lambda_n \xi_k^{(n)}|}{2^k(|\lambda \xi_k - \lambda_n \xi_k^{(n)}| + 1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^m} < \varepsilon.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda x - \lambda_n x_n| = 0$ і операція множення на скаляр є неперервною в точці (λ, x). □

Приклад 9.4. Нехай $X = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\|x\|_\infty = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |\xi_k|$ і $|x| = \min\{\|x\|_\infty, 1\}$ для кожного $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in X$. Тоді $|\cdot|$ – це не лінійна квазінорма на просторі X.

Доведення. Перевірка властивостей $(Q_1)-(Q_4)$ для функції $|\cdot|$ є досить проста і цілком подібна до перевірки властивостей класичної норми у просторі ℓ_∞ всіх обмежених числових послідовностей. Тому доведемо лише нелінійність квазінорми $|\cdot|$. Розглянемо збіжну до нуля послідовність $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ скалярів $\lambda_n = \frac{1}{n}$ і елемент $x = (k)_{k=1}^\infty \in X$. Тепер маємо

$$\lim_{n\to\infty} |\lambda_n x| = 1 \neq 0 = |0x|.$$

Отже, множення на скаляр не є неперервним в точці $(0, x)$. $\square$

2 Квазінормовані простори з обмеженими кулями

Нагадаємо, що множина A в топологічному векторному просторі X називається *обмеженою*, якщо вона поглинається довільним околом нуля в просторі X, тобто для кожного околу нуля U в X існує таке число $\gamma > 0$, що $A \subseteq \lambda U$ при $|\lambda| \geq \gamma$. Кожний квазінормований простір є топологічним векторним простором відносно топології, породженої квазінормою. Під обмеженою множиною у квазінормованому просторі X ми будемо розуміти обмежену множину, яка обмежена в X як в топологічному векторному просторі. В нормованому чи, загальніше, p-нормованому просторі $(X, \|\cdot\|)$ обмеженість множини $A \subseteq X$ рівносильна такій умові: існує число $\gamma > 0$, таке, що $\|x\| \leq \gamma$ для кожного $x \in A$. В загальних квазінормованих просторах це вже не так. Наприклад у просторі $X = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ з прикладу 9.3 для кожного $x \in X$ виконується нерівність $|x| \leq 1$, але X не є обмеженою множиною в собі.

Квазінормований простір X ми називаємо *простором з обмеженими кулями*, якщо для кожного $r > 0$ куля

$$B_r = \{x \in X : |x| \leq r\}$$

є обмеженою множиною в X, і *простором з обмеженими скінченновимірними кулями*, якщо для кожного скінченновимірного лінійного підпростору L простору X і довільного $r > 0$ перетин $L \cap B_r$ – це обмежена множина в X.

Теорема 9.1. *Нехай X – квазінормований простір з обмеженими скінченновимірними кулями, L – його скінченновимірний лінійний підпростір і $r > 0$. Тоді куля $B = \{x \in L : |x| \leq r\}$ є компактною множиною в L, а отже, і в X.*

Доведення. Нехай $\dim L = n$ і $e_1 \ldots, e_n$ – базис в просторі L. Тоді для кожного $x \in L$ існує єдиний набір $\varphi(x) = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n$, такий, що $x = \sum\limits_{k=1}^n \xi_k e_k$. З теореми Тихонова про єдиність лінійної гаусдорфової топології на скінченновимірному векторному просторі

[12] випливає, що відображення $\varphi : L \to \mathbb{K}^n$ – це ізоморфізм топологічних векторних просторів L і $\mathbb{K}^n$. За умовою множина B обмежена в X, а значить, і в L. Крім того, вона є замкненою в L. Тоді і множина $K = \varphi(B)$ замкнена й обмежена в просторі $\mathbb{K}$, бо відображення φ лінійне і неперервне. За теоремою Гейне–Бореля, така множина K компактна в просторі $\mathbb{K}^n$. А тоді і її образ $B = \varphi^{-1}(K)$ при оберненому відображенні компактний в L і в X, бо відображення φ^{-1} неперервне, а образ компактної множини при неперервному відображенні залишається компактним. □

3 Елемент найкращого наближення і проксимінальні множини

Нехай (X, d) – метричний простір, $\emptyset \neq L \subseteq X$ і $x \in X$. Елемент $v \in L$ називається *елементом найкращого наближення* елемента x елементами з множини L, якщо $d(x, v) = d(x, L)$. Множина L називається *проксимінальною*, якщо кожний елемент $x \in X$ має в множині L елемент найкращого наближення.

Твердження 9.2. *Кожна непорожня компактна підмножина L метричного простору (X, d) є проксимінальною в просторі X.*

Доведення. Для кожного $x \in X$ функція $f(u) = d(x, u)$ неперервна, адже $|f(x) - f(x_0)| \leq d(x, x_0)$. А неперервна функція на компактній множині має найменше значення [4, 3.10.20], тобто існує таке $v \in K$, що $d(x, v) = d(x, L)$. Точка v і є елементом найкращого наближення x в L. □

Твердження 9.3. *Кожна проксимінальна множина L в метричному просторі (X, d) є замкненою в просторі X.*

Доведення. Нехай $x \in \overline{L}$, тобто $d(x, L) = 0$. За умовою в L існує елемент v найкращого наближення для x. Тоді $d(x, v) = d(x, L) = 0$. Отже, $x = v \in L$, тому множина L замкнена. □

Твердження 9.4. *Кожний скінченновимірний лінійний підпростір L квазінормованого простору X з обмеженими скінченновимірними кулями є проксимінальною множиною.*

Доведення. Нехай $x \in X$ і $B = \{u \in L : |u| \leq 2|x|\}$. Покажемо, що $d(x, L) = d(x, B)$. Нехай $u \in L \setminus B$. Тоді $|u| > 2|x|$, отже,

$$|u - x| \geq |u| - |x| > 2|x| - |x| = |x| = |x - 0| \geq d(x, B),$$

адже $0 \in B$. Якщо ж $u \in B$, то само собою $|u - x| \geq d(x, B)$. Отже, $|x - u| \geq d(x, B)$ для кожного $u \in L$ і $d(x, L) \geq d(x, B)$. Оскільки $L \supseteq B$, то $d(x, L) \leq d(x, B)$. Таким чином, $d(x, L) = d(x, B)$. За теоремою 9.1 куля B компактна в X, а тому є проксимінальною множиною згідно з твердженням 9.2. В такому разі існує такий елемент $v \in B$, що $|x - v| = d(x, B)$. Але $B \subseteq L$ і $d(x, L) = d(x, B)$, отже, $v \in L$ і $|x - v| = d(x, L)$, тобто v – це елемент найкращого наближення для x з L. $\square$

4 Єдиність елемента найкращого наближення у строго опуклих просторах

Нормований простір $(X, \|\cdot\|)$ називається *строго опуклим* [3], якщо для довільних його ненульових елементів x і y з умови $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ випливає, що існує число $\lambda > 0$ таке, що $y = \lambda x$.

Теорема 9.2. *Кожний евклідовий простір X строго опуклий.*

Доведення. Нагадаємо, що норма на евклідовому просторі X зі скалярним добутком $\langle \cdot, \cdot \rangle : X^2 \to \mathbb{R}$ вводиться за формулою $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Нехай $x, y \in X$ – ненульові елементи такі, що $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$. Доведемо, що існує число $\lambda > 0$ таке, що $y = \lambda x$.

З одного боку,

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2,$$

а з іншого боку,

$$\|x + y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 = \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2.$$

Тому $\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\|$ і для кожного числа $\alpha \in \mathbb{R}$ маємо

$$\|y - \alpha x\|^2 = \langle y - \alpha x, y - \alpha x \rangle = \|y\|^2 - 2\alpha\langle y, x \rangle + \|\alpha x\|^2 =$$

$$= \|y\|^2 - 2\alpha\|y\| \cdot \|x\| + \alpha^2\|x\|^2 = (\|y\| - \alpha\|x\|)^2.$$

Покладемо $\lambda = \frac{\|y\|}{\|x\|}$. Зрозуміло, що $\lambda > 0$ і $\|y\| - \lambda\|x\| = 0$. Тому $y - \lambda x = 0$, тобто $y = \lambda x$. $\square$

Теорема 9.3. *Нехай L – лінійний підпростір строго опуклого простору X, $x \in X$, $v_1, v_2 \in L$ і $\|x - v_1\| = \|x - v_2\| = d(x, L)$. Тоді $v_1 = v_2$*

Доведення. Якщо $d(x, L) = 0$, то $\|x - v_1\| = \|x - v_2\| = 0$, а отже, $v_1 = x = v_2$.

Нехай $d(x, L) = \varrho > 0$. Розглянемо елемент $v = \frac{v_1+v_2}{2}$. Тоді $v \in L$ і

$$\varrho \leq \|x - v\| = \left\| x - \frac{v_1 + v_2}{2} \right\| = \tfrac{1}{2}\|2x - v_1 - v_2\| \leq \tfrac{1}{2}(\|x - v_1\| + \|x - v_2\|) = \varrho.$$

Звідси випливає, що $\|x - v\| = \varrho$, а отже,

$$\|(x - v_1) + (x - v_2)\| = 2\|x - v\| = 2\varrho = \|x - v_1\| + \|x - v_2\|.$$

Оскільки елементи $x - v_1$ і $x - v_2$ – ненульові, а простір X строго опуклий, то існує скаляр такий $\lambda > 0$, що $x - v_1 = \lambda(x - v_2)$, тобто $(1 - \lambda)x = v_1 - v_2$. Припустимо, що $\lambda \neq 1$. Тоді $x = \frac{1}{1-\lambda}(v_1 - v_2) \in L$, що неможливо, адже $d(x, L) = \varrho > 0$. Таким чином, $\lambda = 1$, тобто $v_1 = v_2$. $\square$

Лекція №10

Теорема Гаара про єдиність елемента найкращого рівномірного наближення

1 Умова Гаара

Нехай K – компакт і $C(K)$ – простір неперервних функцій $f : K \to \mathbb{R}$ з рівномірною нормою $\|f\| = \max\limits_{x\in K} |f(x)|$. Розглянемо лінійно незалежну систему $f_1, \ldots, f_n$ елементів з $C(K)$ і її лінійну оболонку

$$L = \mathrm{sp}\{f_1, \ldots, f_n\} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k : n \in \mathbb{N},\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Ця оболонка L є скінченновимірним підпростором простору $C(K)$, а значить, проксимінальною множиною в просторі $C(K)$, як це було показано у попередній лекції. Це означає, що для кожної функції $f \in C(K)$ в L існує елемент її найкращого наближення, тобто такий елемент g, що $\|f - g\| \le \|f - h\|$ для кожного $h \in L$. Тут ми дослідимо питання про єдиність такого елемента. Зауважимо, що, наприклад, простір $C = C[0; 1]$ не є строго опуклим, отже, результат про єдиність з попередньої лекції до нього не застосовний.

Ми встановимо, що в питанні єдиності основну роль відіграє така *умова Гаара*:

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & . & . & . & f_1(x_n) \\ . & . & . & . & . \\ f_n(x_1) & . & . & . & f_n(x_n) \end{vmatrix} \ne 0 \text{ для довільних різних } x_1, \ldots, x_n \in K \qquad (H_n)$$

Лінійно незалежну систему $f_1, \ldots, f_n$ ми називаємо *системою Гаара*, якщо вона задовольняє умову Гаара (H_n).

Приклад 10.1. Нехай $K = [a; b]$, $f_0(x) = 1, f_1(x) = x, \ldots, f_n(x) = x^n$ на $[a; b]$. Тоді лінійна комбінація $g = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k f_k$ – це алгебраїчний многочлен $g(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_n x^n$ степеня $\le n$, отже, простір $L = \mathrm{sp}\{f_0, \ldots, f_n\}$ в даному випадку – це простір P_n всіх алгебраїчних многочленів степеня $\le n$. Визначник Δ для системи степеневих функцій $f_0, \ldots, f_n$ записується так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & . & . & . & 1 \\ x_0 & . & . & . & x_n \\ . & . & . & . & . \\ x_0^n & . & . & . & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Це відомий з курсу алгебри *визначник Вандермонда*

$$\Delta = \prod_{0 \le j < k \le n} (x_j - x_k).$$

Зрозуміло, що $\Delta \neq 0$, якщо точки $x_0, \dots, x_n$ різні. Таким чином, система $f_0, \dots, f_n$ степеневих функцій є системою Гаара.

2 Необхідність умови Гаара для єдиності

Для доведення необхідності нам буде потрібна одна властивість цілком регулярних просторів. Нагадаємо, що топологічний T_1-простір X називається *цілком регулярним*, якщо для довільної точки $x \in X$ і її довільного околу U існує неперервна функція $\varphi : X \to [0; 1]$ така, що $\varphi(x) = 1$ і $\varphi(X \setminus U) \subseteq \{0\}$.

Твердження 10.1. *Нехай X – цілком регулярний простір, $x_1, \dots, x_n$ – набір його різних точок і $y_1, \dots, y_n$ – набір дійсних чисел. Тоді існує така неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$, що $f(x_k) = y_k$ при $k = 1, \dots, n$ і $\|f\| = \max\limits_{1 \le k \le n} |y_k|$.*

Доведення. Оскільки цілком регулярний простір X є гаусдорфовим простором [4, p.39], то існують відкриті неперетинні околи U_k точок x_k, $k = 1, 2, \dots, n$. Тепер, скориставшись цілковитою регулярністю простору X для кожного $k \le n$, виберемо неперервну функцію $\varphi_k : X \to [0; 1]$ таку, що $\varphi_k(x_k) = 1$ і $\varphi_k(X \setminus V_k) = 0$.

Розглянемо неперервну функцію $f = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k \varphi_k$. Зрозуміло, що $f(x_k) = y_k$ для кожного $k \le n$. Крім того, оскільки всі U_k попарно неперетинні, то $\|f\| = \sup\limits_{x \in X} |f(x)| = \max\limits_{1 \le k \le n} |y_k|$. □

Наступний результат дає необхідність умови Гаара.

Теорема 10.1. *Нехай довільна функція $f \in C(K)$ має в $L = \mathrm{sp}\{f_1, \dots, f_n\}$ не більше одного елемента найкращого наближення. Тоді $f_1, \dots, f_n$ – це система Гаара.*

Доведення. Припустимо, що $f_1, \dots, f_n$ не є системою Гаара. Тоді існує набір $x_1, \dots, x_n$ різних елементів простору K, для яких визначних $\Delta = \det(f_k(x_j))_{k,j=1}^{n} = 0$. Теорему буде доведено, якщо ми побудуємо функцію f, яка в L має принаймні два елементи найкращого наближення.

Приступимо до такої побудови. Розглянемо наступні дві однорідні системи n лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} f_1(x_j)\xi_j = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} f_n(x_j)\xi_j = 0, \end{cases} \qquad \text{і} \qquad \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x_1)\eta_k = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x_n)\eta_k = 0, \end{cases}$$

відносно змінних $\xi_1, \dots, \xi_n$ і $\eta_1, \dots, \eta_n$ відповідно. Оскільки визначник кожної з цих систем дорівнює Δ і $\Delta \neq 0$, то ці системи мають ненульові розв'язки, тобто існують ненульові набори $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ і $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ такі, що $\sum\limits_{j=1}^{n} f_k(x_j)\alpha_j = 0$ для кожного $k = 1, \dots, n$ і $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x_j)\beta_k = 0$ для кожного $j = 1, \dots, n$.

Зауважимо, що $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j g(x_j) = 0$ для довільної функції $g \in L$. Справді, оскільки $L = \mathrm{sp}\{f_1, \dots, f_n\}$, то існує набір $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ скалярів $\lambda_k \in \mathbb{R}$ такий, що $g = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$. Тепер, використовуючи вибір набору $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, отримаємо

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j g(x_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x_j) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_k(x_j) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot 0 = 0.$$

Розглянемо функцію $h = \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k f_k \in L$. Оскільки система $f_1, \dots, f_n$ лінійно незалежна, а набір $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ ненульовий, то $h \neq 0$, тобто $\|h\| \neq 0$. Функція $h_0 = \frac{h}{\|h\|} \in L$, причому $\|h_0\| = 1$ і згідно з вибором набору $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ маємо, що

$$h_0(x_j) = \frac{1}{\|h\|} \sum_{k=1}^{n} \beta_k f_k(x_j) = 0$$

для кожного $j = 1, \dots, n$. Оскільки компакт K цілком регулярний, то, за твердженням 10.1, існує така функція $g_0 \in C(K)$, що $g_0(x_j) = \operatorname{sgn} \alpha_j$ при $j = 1, \dots, n$ і $\|g_0\| = \max\limits_{1 \le j \le n} |\operatorname{sgn} \alpha_j| = 1$. Покажемо, що функція неперервна функція f, що визначена правилом

$$f(x) = g_0(x) \cdot \big(1 - |h_0(x)|\big), \quad x \in K,$$

є шуканою.

Зауважимо, що

$$f(x_j) = g_0(x_j)(1 - |h_0(x_j)|) = g_0(x_j) = \operatorname{sgn} \alpha_j$$

для кожного $j = 1, \dots, n$. Доведемо, що $d(f, L) \ge 1$, тобто $\|f - g\| \ge 1$ для кожної функції $g \in L$. При цьому ми розглянемо два випадки.

Спочатку нехай функція $g \in L$ така, що $\alpha_j g(x_j) \geq 0$ для кожного $j = 1, \ldots, n$. Оскільки згідно з доведеним вище $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j g(x_j) = 0$, то $\alpha_j g(x_j) = 0$ для кожного $j = 1, \ldots, n$. У ненульовому наборі $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ обов'язково існує ненульовий елемент α_i. Тоді $g(x_i) = 0$ і

$$\|f - g\| \geq |f(x_i) - g(x_i)| = |f(x_i)| = |\operatorname{sgn} \alpha_i| = 1.$$

Тепер нехай функція $g \in L$ така, що $\alpha_j g(x_j) < 0$ для деякого $j \leq n$. Тоді ненульові числа α_j і $g(x_j)$ різних знаків, тому $|\operatorname{sgn} \alpha_j - g(x_j)| = |\operatorname{sgn} \alpha_j| + |g(x_j)| > 1$. Отже,

$$\|f - g\| \geq |f(x_j) - g(x_j)| = |\operatorname{sgn} \alpha_j - g(x_j)| > 1.$$

При кожному скалярі λ з $|\lambda| \leq 1$ розглянемо функцію $\lambda h_0 \in L$. Оскільки

$$|f(x) - \lambda h_0(x)| = |g_0(x)(1 - |h_0(x)|) - \lambda h_0(x)| \leq |g_0(x)|(1 - |h_0(x)|) + |\lambda h_0(x)| \leq$$

$$\leq \|g_0\|(1 - |h_0(x)|) + |h_0(x)| = 1 - |h_0(x)| + |h_0(x)| = 1$$

для всіх $x \in K$, то $\|f - \lambda h_0\| \leq 1$. Але $\|f - \lambda h_0\| \geq d(f, L) \geq 1$, тому

$$\|f - \lambda h_0\| = d(f, L) = 1.$$

Отже, всі функції λh_0 при $|\lambda| \leq 1$ є елементами найкращого наближення в L для функції f. Залишилось зауважити, що всі функції λh_0 різні, адже $\|h_0\| = 1$, що і завершує доведення теореми. $\square$

3 Одна властивість елемента найкращого наближення

Для доведення достатності умови Гаара для єдиності многочлена найкращого рівномірного наближення нам буде потрібний один допоміжний результат, який цікавий і сам по собі. Символом $|A|$ ми позначаємо потужність множини A.

Теорема 10.2. *Нехай $|K| > n$, $f_1, \ldots, f_n$ – система Гаара в $C(K)$, $L = \operatorname{sp}\{f_1, \ldots, f_n\}$, $f \in C(K) \backslash L$, g – елемент найкращого наближення елемента f елементами з L, $r = f - g$, $h = |r|$ і $\alpha = E(f) = \|r\| = \|h\|$. Тоді рівняння $h(x) = \alpha$ має принаймні $n + 1$ розв'язків.*

Доведення. Міркуючи від супротивного, припустимо, що рівняння $h(x) = \alpha$ має щонайбільше n розв'язків. Оскільки K – компакт, то множина $A = \{x \in K : f(x) = \alpha\}$ непорожня. За припущенням число $m = |A|$ її елементів не більше від n. Нехай $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$, де $1 \leq m \leq n$. Якщо $m < n$, то доповнимо множину A довільними різними елементами

$x_{m+1}, \ldots, x_n$ з доповнення $K \setminus A$. Це можна зробити, бо $|K| > n$. Крім того, існує принаймні ще одна точка $x^* \in K \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Розглянемо систему n лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x_1)\xi_k = r(x_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x_n)\xi_k = r(x_n), \end{cases}$$

відносно змінних $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Зауважимо, що визначник цієї системи $\Delta \neq 0$, адже $f_1, \ldots, f_n$ – система Гаара і точки $x_1, \ldots, x_n$ – різні. Тому дана система має єдиний розв'язок $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Тепер розглянемо функцію $g_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k f_k \in L$. Тоді $g_0(x_j) = r(x_j)$ для кожного $j = 1, \ldots, n$.

Доведемо, що при досить малих $\varepsilon > 0$ функція $\varphi_\varepsilon = g + \varepsilon g_0 \in L$ задовольняє нерівність

$$\|f - \varphi_\varepsilon\| < \|f - g\| = \alpha,$$

отже, g не буде елементом найкращого наближення в L для f, що приведе нас до суперечності.

Зауважимо, що $\alpha = E(f) > 0$, адже $f \notin L$, а L – замкнений підпростір $C(K)$, бо він скінченновимірний. Оскільки $g_0(x_j) = r(x_j)$, то $|r(x_j)| = h(x_j) = \alpha$, зокрема, $r(x_j) \neq 0$ при $j = 1, \ldots, m$. Тому частка $\psi = \frac{g_0}{r}$ визначена і неперервна в усіх точках x_j і $\psi(x_j) = \frac{g_0(x_j)}{r(x_j)} = 1$ при $j = 1, \ldots, m$. Крім того, $|r(x_j)| = \alpha > \frac{\alpha}{2}$ для кожного $j = 1, \ldots, m$. З неперервності функцій ψ і $|r| = h$ у точках x_j випливає, що для кожного $j = 1, \ldots, m$ існує такий відкритий окіл U_j точки x_j в K, що $\psi(x) > \frac{1}{2}$, $h(x) = |r(x)| > \frac{\alpha}{2}$ на U_j і $x^* \notin U_j$. Ці ж нерівності виконуються і на відкритій множині $G = \bigcup\limits_{j=1}^{m} U_j$, що містить множину A і не містить точку x^*. Доповнення $F = K \setminus G$ – це замкнена підмножина компакту K, яка є непорожньою (адже $x^* \in F$) і не перетинається з множиною A. Тому $h(x) < \alpha$ для кожного $x \in F$, отже, і $\delta = \max\limits_{x \in F} h(x) < \alpha$. Розглянемо числа

$$\mu = \alpha - \delta > 0, \quad M = \max_{x \in F} |g_0(x)| + 1, \quad \nu = \inf_{x \in G} h(x) \geq \frac{\alpha}{2} > 0 \quad \text{і} \quad N = \sup_{x \in G} |g_0(x)| \geq \alpha > 0.$$

Виберемо число $\varepsilon > 0$ так, що $0 < \varepsilon < \min\{\frac{\mu}{M}, \frac{\nu}{N}\}$ і покажемо, що тоді $\|f - g_\varepsilon\| < \alpha$.

Справді, для кожного $x \in G$ маємо

$$|f(x) - \varphi_\varepsilon(x)| = |f(x) - g(x) - \varepsilon g_0(x)| = |r(x) - \varepsilon g_0(x)| = |r(x)| \cdot |1 - \frac{\varepsilon g_0(x)}{r(x)}| = h(x)|1 - \varepsilon\psi(x)|.$$

Оскільки $\psi(x) \geq \frac{1}{2}$, то $\psi(x) > 0$, отже, $\psi(x) = |\psi(x)| = \frac{|g_0(x)|}{|r(x)|} \leq \frac{N}{\nu}$. В такому разі,

$$1 - \varepsilon\psi(x) \geq 1 - \frac{\varepsilon N}{\nu} > 0,$$

адже $\varepsilon < \frac{\nu}{N}$. Тому

$$|f(x) - \psi_\varepsilon(x)| = h(x)(1 - \varepsilon\psi(x)) = h(x)(1 - \tfrac{\varepsilon}{2}) \leq \alpha(1 - \tfrac{\varepsilon}{2}) = \alpha_1 < \alpha,$$

бо $0 < 1 - \varepsilon\psi(x) < 1 - \frac{\varepsilon}{2} < 1$ і множина G непорожня.

З іншого боку, при $x \in F$ маємо

$$|f(x) - \psi_\varepsilon(x)| = |r(x) - \varepsilon g_0(x)| \leq |r(x)| + \varepsilon|g_0(x)| \leq \delta = \alpha_2 < \delta + \mu = \alpha.$$

Тоді

$$|f(x) - \psi_\varepsilon(x)| \leq \alpha_0 = \max\{\alpha_1, \alpha_2\} < \alpha$$

на K, а значить, $\|f - \psi_\varepsilon\| \leq \alpha_0 < \alpha$. Отже, g не є елементом найкращого наближення, що приводить до суперечності і доводить нашу теорему. $\square$

4 Достатність умови Гаара

Достатність умови Гаара ми виведемо з теореми 10.2.

Теорема 10.3. *Нехай $f_1, \ldots, f_n$ – система Гаара у просторі $C(K)$, $f \in C(K)$, g_1 та g_2 – елементи найкращого наближення функції f у просторі $L = \mathrm{sp}\{f_1, \ldots, f_n\}$. Тоді $g_1 = g_2$.*

Доведення. Разом з функціями g_1 і g_2 до простору L належать також функції $g = \frac{g_1+g_2}{2}$ і $g_1 - g_2$. Нехай $E(f) = \alpha$. Оскільки $\|f - g_i\| = \alpha$ при $i = 1, 2$, то

$$\alpha \leq \|f - g\| = \tfrac{1}{2}\|f - g_1 + f - g_2\| \leq \tfrac{1}{2}(\|f - g_1\| + \|f - g_2\|) = \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha) = \alpha.$$

Отже, $\|f - g\| = \alpha$, тобто і g – це елемент найкращого наближення для функції f.

З теореми 10.2 випливає, що існує n різних точок $x_1, \ldots, x_n$ в K таких, що $|f(x_j) - g(x_j)| = \alpha$ для кожного $j = 1, \ldots, n$.

Покажемо, що $g_0(x_j) = 0$ для кожного $j = 1, \ldots, n$. Зафіксуємо $j \in \{1, \ldots, n\}$ і позначимо $u_j = f(x_j) - g_1(x_j)$ і $v_j = f(x_j) - g_2(x_j)$. Зауважимо, що $|u_j| \leq \|f - g_1\| = \alpha$ і $|v_j| \leq \|f - g_2\| = \alpha$. Тепер маємо

$$2\alpha = |2f(x_j) - 2g(x_j)| = |u_j + v_j| \leq |u_j| + |v_j| \leq 2\alpha.$$

Отже, $|u_j + v_j| = |u_j| + |v_j|$ і $|u_j| = |v_j| = \alpha$. Перша рівність означає, що числа u_j і v_j є числами одного знаку, а тому за другою рівністю $u_j = v_j$.

Таким чином, $g_0(x_j) = 0$ для кожного $j = 1, \dots, n$. Крім того, $g_0 \in L$. Отже, $g_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$ для деяких дійсних чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Тому $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x_j) = g_0(x_j) = 0$ при $j = 1, \dots, n$. Тобто набір $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ є розв'язком однорідної системи n лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x_1)\xi_k = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x_n)\xi_k = 0, \end{cases}$$

відносно змінних $\xi_1, \dots, \xi_n$. Оскільки визначник цієї системи $\Delta \neq 0$, адже $f_1, \dots, f_n$ – система Гаара і точки $x_1, \dots, x_n$ – різні. Тому ця система має єдиний нульовий розв'язок. Отже, $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, тобто $g_0 = 0$ і $g_1 = g_2$. □

Сформулюємо підсумкове твердження, яке називається теоремою Гаара.

Теорема 10.4 (Гаар)**.** *Нехай K – компакт, $f_1, \dots, f_n$ – лінійно незалежна система функцій в $C(K)$ і $L = \mathrm{sp}\{f_1, \dots, f_n\}$. Для того, щоб кожна функція $f \in C(K)$ мала єдиний елемент найкращого наближення в L необхідно і досить, щоб $f_1, \dots, f_n$ була системою Гаара.*

Система степеневих функцій $f_0(x) = 1, f_1(x) = x, \dots, f_n(x) = x^n$ на відрізку $[a; b]$ є системою Гаара, тому з теореми 10.4 випливає наступний результат.

Теорема 10.5. *Кожна неперервна функція $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ має єдиний алгебраїчний многочлен $g(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ її найкращого рівномірного наближення.*

Лекція №11

Узагальнення оберненої теореми Бернштейна на квазінормовані простори

1 Обернена теорема Бернштейна та її узагальнення

Для функції $f \in C[a;b]$ розглянемо її найкращі рівномірні наближення

$$E_n(f) = d(f, P_n) = \inf_{g \in P_n} \|f - g\|,$$

де P_n – підпростір всіх многочленів $g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, a_n x^n$ степеня $\leq n$. Зрозуміло, що $P_n \subseteq P_{n+1}$ для кожного $n = 0, 1, \ldots$, тому послідовність чисел невід'ємних $\alpha_n = E_n(f)$ спадає, тобто $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$ для кожного n. З першої теореми Вейєрштрасса про наближення негайно випливає, що $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = 0$. У 1938 році у "Вістях французької Академії наук" С. Н. Бернштейн опублікував статтю, в якій дав начерк доведення наступного результату, відомого тепер під назвою *обернена теорема Бернштейна.*

Теорема 11.1 (обернена теорема Бернштейна)**.** *Для довільної нескінченно малої і спадної послідовності невід'ємних чисел α_n існує така функція $f \in C[a;b]$, у якої $E_n(f) = \alpha_n$ для кожного $n = 0, 1, \ldots$.*

У 1948 році С.М.Нікольський без доведення зауважив, що справедливе таке узагальнення оберненої теореми Бернштейна.

Теорема 11.2 (Нікольський)**.** *Нехай X – дійсний банаховий простір і $(L_n)_{n=1}^{\infty}$ – строго зростаюча послідовність його скінченновимірних лінійних підпросторів і $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ – спадна послідовність невід'ємних чисел, яка прямує до нуля. Тоді існує такий елемент $x \in X$, що $d(x, L_n) = \alpha_n$ для кожного номера n.*

З того часу з'явилось багато узагальнень і аналогів оберненої теореми Бернштейна, зокрема, Г.А.Волошин і В.К.Маслюченко перенесли її на квазінормовані простори, розвиваючи ідеї первісної праці Бернштейна. Цей результат був опублікований у "Математичному віснику НТШ" у 2009 році. Ми викладемо його тут у покращеній редакції. Теореми 11.1 і 11.2 є його наслідками.

2 Найпростіша обернена задача

Нехай L – непорожня підмножина метричного простору (X, d). Найпростіша обернена задача для неї полягає в тому, щоб для числа $\alpha \geq 0$ побудувати такий елемент $x \in X$, що $d(x, L) = \alpha$. Тут ми розв'яжемо її для квазінормованого простору X, що задовольняє певні умови.

Нехай $(X, |\cdot|)$ – дійсний квазінормований простір. Його непорожній замкнений лінійний підпростір L називатимемо *неосяжним*, якщо $\lim\limits_{\lambda\to\infty} d(\lambda x, L) = +\infty$ виконується для кожного $x \in X \setminus L$. Ми розглядатимемо такі умови на простір X:

(a) тривіальний підпростір $L = \{0\}$ неосяжний;

(A) довільний скінченновимірний лінійний підпростір L простору X неосяжний;

$(\mathcal{A})$ довільний непорожній замкнений лінійний підпростір L простору X неосяжний.

Для фіксованого простору L позначимо $E(x) = d(x, L))$. Якщо X – p-нормований простір для деякого $p \in (0, 1]$, і L – його замкнений лінійний підпростір, то, як відомо, $E(\lambda x) = |\lambda|^p E(x)$ для довільних $\lambda \in \mathbb{R}$ і $x \in X$. Тоді при $x \in X \setminus L$ обов'язково $E(x) > 0$ і тому

$$\lim_{\lambda\to\infty} d(\lambda x, L) = \lim_{\lambda\to\infty} E(\lambda x) = \lim_{\lambda\to\infty} |\lambda|^p E(x) = +\infty.$$

Отже, p-нормований простір, зокрема, нормований простір, задовольняє умову $(\mathcal{A})$, а тому, й умови (A) і (a).

Приклад 11.1. Нехай X – такий простір, який був побудований в прикладі 9.2. Простір X є квазінормованим простором із квазінормою $|x| = \sum\limits_{j=1}^{\infty} |\xi_{2j-1}|^q + \sum\limits_{j=1}^{\infty} |\xi_{2j}|^s$, яка задовольняє умову $(\mathcal{A})$ і не є p-нормою для жодного p.

Доведення. Згідно з прикладом 9.2, залишається перевірити, що функція $|\cdot|$ задовольняє умову $(\mathcal{A})$. Нехай $t = \min\{q, s\}$. Тоді для довільного $\lambda \in \mathbb{R}$ з $|\lambda| \geq 1$ маємо $|\lambda|^t \leq |\lambda|^q$ і $|\lambda|^t \leq |\lambda|^s$, звідки

$$E(\lambda x) \geq |\lambda|^t E(x)$$

для кожного $x \in X$. Тому простір X задовольняє умову $(\mathcal{A})$. □

Приклад 11.2. Нехай $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ і $|x| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\xi_k|}{2^k(|\xi_k|+1)}$ (див. приклад 9.3). Квазінормований простір $(X, |\cdot|)$ не задовольняє найслабшу умову (a), адже $|x| \leq 1$ для кожного $x \in X$.

Теорема 11.3. *Нехай X – квазінормований простір, L – неосяжний підпростір простору X, $L \neq X$ і $\alpha > 0$. Тоді існує такий елемент $x \in X$, що $d(x, L) = \alpha$.*

Доведення. Оскільки $L \neq X$, то існує елемент $a \in X \setminus L$. Зауважимо, що функції $g : X \to \mathbb{R}$, $g(x) = d(x, L)$, і $h : [0; +\infty) \to X$, $h(\lambda) = \lambda a$, є неперервними. Тому функція $f : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(\lambda) = d(\lambda a, L) = g(h(\lambda))$, також неперервна. Крім того, $f(0) = d(0, L) = 0$, адже $0 \in L$, і з неосяжності L випливає, що

$$\lim_{\lambda \to +\infty} f(\lambda) = \lim_{\lambda \to +\infty} d(\lambda a, L) = +\infty.$$

За теоремою про проміжне значення існує число $\mu \geq 0$, таке, що $f(\mu) = \alpha$. Тоді $d(x, L) = \alpha$, де $x = \mu a \in X$. □

3 Обернена задача для скінченного числа просторів

Загальна задача полягає в тому, що для довільних непорожніх множин $L_1, \ldots, L_n$ у метричному просторі (X, d) і даних чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ побудувати такий елемент $x \in X$, що $d(x, L_k) = \alpha_k$ для кожного $k = 1, \ldots, n$. Ми подамо варіант її розв'язання для квазінормованих просторів.

Теорема 11.4. *Нехай X – квазінормований простір, $L_1, \ldots, L_n$ – проксимінальні неосяжні лінійні підпростори простору X, такі, що $L_1 \subset \cdots \subset L_n \subset X$, і $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n \geq 0$. Тоді існує такий елемент $x \in X$, що $|x| = \alpha_1$ і $d(x, L_k) = \alpha_k$ для кожного $k = 1, \ldots, n$.*

Доведення. Розглянемо спочатку випадок $n = 1$. За теоремою 11.3 існує такий елемент $u \in X$, що $d(u, L_1) = \alpha_1$. З проксимінальності L_1 випливає, що в L_1 існує елемент v найкращого наближення для u, для якого $|u - v| = d(x, L_1) = \alpha_1$. Розглянемо елемент $x = u - v$. Тоді $|x| = \alpha_1$. Оскільки $v \in L_1$, то $d(x, L_1) = d(u - v, L_1) = d(u, L_1) = \alpha_1$. Таким чином, для $n = 1$ теорема доведена.

Припустимо, що $n \geq 2$, і твердження теореми справджується для $n - 1$ підпросторів. Доведемо, що воно буде справедливим і для n підпросторів.

Застосувавши індуктивне припущення до $n - 1$ підпросторів $X_2 \subset \cdots \subset X_n \subset X$ і чисел $\alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n \geq 0$ знайдемо такий елемент $y \in X$, що $|y| = \alpha_2$ і $d(y, L_k) = \alpha_k$ при $k = 2, \ldots, n$. Але $L_1 \subset L_2$, отже, існує елемент $a \in L_2 \setminus L_1$. Розглянемо функцію $f(\lambda) = d(\lambda a + y, L_1)$ при $\lambda \geq 0$. Ясно, що функція $f : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ неперервна, бо вона є композицією $g \circ h$ неперервних відображень $h : [0; +\infty) \to X$, $h(\lambda) = \lambda a + y$, і

$g : X \to [0; +\infty)$, $g(x) = d(x, L_1)$. Оскільки з твердження 8.2 (властивість 5^0) маємо, що

$$d(\lambda a, L_1) = d(\lambda a + y - y, L_1) \le d(\lambda a + y, L_1) + d(-y, L_1) = f(\lambda) + d(-y, L_1),$$

то

$$f(\lambda) \ge d(\lambda a, L_1) - d(-y, L_1).$$

Але $a \notin L_1$ і L_1 неосяжний. Тому $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} d(\lambda a, L_1) = +\infty$. Отже, і $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} f(\lambda) = +\infty$.

Зауважимо, що оскільки $0 \in L_1 \subset L_2$, то

$$d(y, L_1) \le |y - 0| = |y| = \alpha_2 = d(y, L_2) \le d(y, L_1).$$

Отже, $d(y, L_1) = d(y, L_2) = \alpha_2$.

В такому разі, $f(0) = d(y, L_1) = \alpha_2$. Оскільки $\alpha_2 \le \alpha_1 < +\infty$, то за теоремою про проміжне значення існує таке число $\mu \ge 0$, що $f(\mu) = \alpha_1$.

Покладемо $u = \mu a + y$. Ясно, що $d(u, L_1) = f(\mu) = \alpha_1$. З проксимінальності простору L_1 випливає, що існує такий елемент $v \in L_1$, що $|u - v| = d(u, L_1) = \alpha_1$. Розглянемо елемент $x = u - v$. Оскільки $v \in L_1$, то за твердженням 8.2 (властивість 6^0) отримуємо, що

$$d(x, L_1) = d(u - v, L_1) = d(u, L_1) = \alpha_1 = |x|.$$

Крім того, $x = u - v = y + \mu a - v = y + w$, де $w = \mu a - v$. Але $w \in L_2 \subseteq L_k$ для кожного $k = 2, \dots, n$. Тому знову використавши твердження 8.2 матимемо, що

$$d(x, L_k) = d(y + w, L_k) = d(y, L_k) = \alpha_k$$

при $k = 2, \dots, n$. Отже, x є шуканим елементом. □

Зауважимо, що, згідно з твердженням 9.4, скінченновимірний лінійний підпростір квазінормованого простору з обмеженим скінченновимірними кулями проксимінальний. Тому наступний результат випливає з теореми 11.4.

Теорема 11.5. *Нехай X – квазінормований простір з обмеженим скінченновимірними кулями, який задовольняє умову (A), $L_1, \dots L_n$ – скінченновимірні лінійні підпростори простору X, такі, що $L_1 \subset \dots \subset L_n \subset X$, і $\alpha_1 \ge \dots \ge \alpha_n \ge 0$. Тоді існує такий елемент $x \in X$, що $|x| = \alpha_1$ і $d(x, L_k) = \alpha_k$ для кожного $k = 1, \dots, n$.*

4 Обернена задача для послідовності підпросторів

Загальна обернена задача для нескінченної послідовності підпросторів L_n метричного простору (X, d) полягає в тому, щоб для заданої послідовності чисел α_n побудувати такий елемент $x \in X$, що $d(x, L_n) = \alpha_n$ для кожного номера n. Ми її розв'яжемо для повних квазінормованих просторів з певними умовами.

Теорема 11.6. *Нехай $(L_n)_{n=1}^{\infty}$ – строго зростаюча послідовність скінченновимірних підпросторів L_n повного квазінормованого простору X з обмеженим скінченновимірними кулями, який задовольняє умову (A), і $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ – спадна послідовність невід'ємних чисел α_n, яка прямує до нуля. Тоді існує такий елемент $x \in X$, що $d(x, L_n) = \alpha_n$ для кожного номера n.*

Доведення. Візьмемо $n \in \mathbb{N}$ і застосуємо теорему 11.5 до підпросторів $L_1 \subset \cdots \subset L_n \subset X$ і чисел $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n \geq 0$. Тоді існує такий елемент $x_n \in X$, що $|x_n| = \alpha_1$ і $d(x_n, L_m) = \alpha_m$ для кожного $m \leq n$. Оскільки, згідно з твердженням 9.4, всі підпростори L_m проксимінальні, для довільних n і $m \leq n$ існує такий елемент $y_{m,n} \in L_m$, що $|x_n - y_{m,n}| = d(x_n, L_m) = \alpha_m$. Тоді

$$|y_{m,n}| = |y_{m,n} - x_n + x_n| \leq |y_{m,n} - x_n| + |x_n| = \alpha_m + \alpha_1 \leq 2\alpha_1$$

для довільних n і $m \leq n$. Оскільки кожна замкнена куля $B_m = \{y \in L_m : |y| \leq 2\alpha_1\}$ компактна за теоремою 9.1, а значить, і секвенціально компактна, бо в метричному просторі компактність еквівалентна секвенціальній компактності [13, с.136]. Тоді добуток $B = \prod\limits_{m=1}^{\infty} B_m$ теж буде секвенціально компактним за [4, 3.10.35]. Покладемо $p_{n,m} = y_{m,\ell}$, де $\ell = \max\{n, m\}$ для довільних $m, n \in \mathbb{N}$. Розглянемо послідовність $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ елементів $p_n = (p_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ добутку B. Тоді існує строго зростаюча послідовність номерів n_k і елемент $p = (y_m)_{m=1}^{\infty} \in B$ такі, що $p_{n_k} \to p$ в B. А це означає, що для кожного $m \in \mathbb{N}$ виконується, що $p_{n_k,m} \to y_m$ при $k \to \infty$. Врахувавши, що $n_k \geq k$, будемо мати, що $p_{n_k,m} = y_{m,n_k}$ при $k \geq m$. Таким чином, для кожного m виконується, що підпослідовність $(y_{m,n_k})_{k=m}^{\infty}$ послідовності $(y_{m,n})_{n=m}^{\infty}$ збігається в X до деякого елемента $y_m \in B_m$.

Покажемо, що послідовність $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна в X. Нехай $\varepsilon > 0$. Оскільки $\lim\limits_{m\to\infty} \alpha_n = 0$, то існує такий номер m, що $\alpha_m < \frac{\varepsilon}{3}$. Послідовність $(y_{m,n_k})_{k=m}^{\infty}$ збіжна, тому, і фундаментальна в просторі X. Існує такий номер $k_0 \geq m$, що $|y_{m,n_k} - y_{m,n_j}| < \frac{\varepsilon}{3}$, як тільки $k, j \geq k_0$. Нагадаємо, що $|x_n - y_{m,n}| = \alpha_m$ для кожного $n \geq m$, зокрема, $|x_{n_k} - y_{m,n_k}| = \alpha_m$ для кожного $k \geq m$, адже $n_k \geq k \geq m$. Тоді при $k, j \geq k_0$ маємо

$$|x_{n_k} - x_{n_j}| \leq |x_{n_k} - y_{m,n_k}| + |y_{m,n_k} - y_{m,n_j}| + |y_{m,n_j} - x_{n_j}| < \alpha_m + \tfrac{\varepsilon}{3} + \alpha_m < \varepsilon.$$

Отже, послідовність $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна в повному метричному просторі X. Тому послідовність $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ збігається до деякої точки $x \in X$. Покажемо, що елемент x – шуканий.

Зафіксуємо номер m і покажемо, що $d(x, L_m) = \alpha_m$. Оскільки $d(x_n, L_m) = \alpha_m$ для кожного $n \geq m$ і $n_k \geq k \geq m$ для кожного $k \geq m$, то $d(x_{n_k}, L_m) = \alpha_m$ при $k \geq m$, а отже, $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_{n_k}, L_m) = \alpha_m$. Тепер з неперервності функції $d(\,\cdot\,, L_m)$ випливає, що

$$d(x, L_m) = \lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, L_m) = \alpha_m.$$

$\square$

Розділ III. Поточкове наближення нарізно неперервних функцій

Лекція №12

Берівські простори і функції першого класу Бера

1 Ніде не щільні множини

Підмножина A топологічного простору X називається *десь щільною*, якщо існує непорожня відкрита множина G в X, в якій множина A щільна, тобто $G \subseteq \overline{A}$. Зауважимо, що для відкритої множини G включення $G \subseteq \overline{A}$ рівносильне включенню $G \subseteq \overline{G \cap A}$. Справді, якщо $G \subseteq \overline{G \cap A}$, то і $G \subseteq \overline{A}$, адже тоді $G \subseteq \overline{G \cap A} \subseteq \overline{A}$. Навпаки, нехай $G \subseteq \overline{A}$, $x \in G$ і U – окіл точки x. Тоді множина $U \cap G$ також є околом точки x і тому перетин $(U \cap G) \cap A = U \cap (G \cap A)$ непорожній. Отже, $x \in \overline{G \cap A}$.

Множини, які не є десь щільними в X, називаються *ніде не щільними* або *мізерними* в X. Ніде не щільна множина A характеризується такою умовою: $G \not\subseteq \overline{A}$ для кожної непорожньої відкритої в X множини G. Оскільки замикання $\overline{A}$ – це замкнена множина, то його доповнення $X \setminus \overline{A}$ – відкрите. Тому для ніде не щільної множини A і довільної непорожньої відкритої в X множини G різниця $H = G \setminus \overline{A} = G \cap (X \setminus \overline{A})$ є непорожньою відкритою множиною. Отже, для ніде не щільної множини A у довільній непорожній відкритій множині G існує така непорожня відкрита підмножина H, що $H \cap A = \emptyset$. Навпаки, якщо множина A задовольняє цю умову, то A – ніде не щільна в X. Справді, якщо G – непорожня відкрита множина в X і H – така її непорожня відкрита підмножина, що $H \cap A = \emptyset$, то $H \cap \overline{A} = \emptyset$, і тому, $G \not\subseteq \overline{A}$. Таким чином, множина A буде ніде не щільною в X тоді і тільки тоді, коли для довільної непорожньої відкритої множини G в X існує така непорожня відкрита в X множина $H \subseteq G$, що $H \cap A = \emptyset$. Цю властивість часто беруть за означення ніде не щільної множини.

Дамо ще одну характеризацію ніде не щільних множин.

Лема 12.1. *Множина A буде ніде не щільною в X тоді і тільки тоді, коли* $\operatorname{int} \overline{A} = \emptyset$, *тобто її замикання $\overline{A}$ не має внутрішніх точок.*

Доведення. Припустимо, що внутрішність $G = \operatorname{int}\overline{A} \neq \emptyset$. Тоді $G \subseteq \overline{A}$, причому G є непорожньою відкритою множиною. Отже, множина A десь щільна, тобто не є ніде не щільною. Навпаки, якщо A десь щільна, то існує така непорожня відкрита множина G, що $G \subseteq \overline{A}$. Тоді $G \subseteq \operatorname{int}\overline{A}$, і отже, $\operatorname{int}\overline{A} \neq \emptyset$. □

Наслідок 12.1. *Множина A буде ніде не щільною в X тоді і тільки тоді, коли її замикання $\overline{A}$ ніде не щільне.*

Нагадаємо, що перетин $\operatorname{fr} A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ називається *межею множини A* в топологічному просторі X. Зрозуміло, що для довільної множини A її межа $\operatorname{fr} A$ – це замкнена множина. Крім того, якщо множина G – відкрита, то $\overline{X \setminus G} = X \setminus G$, і тому $\operatorname{fr} G = \overline{G} \cap (X \setminus G) = \overline{G} \setminus G$. Якщо ж F – замкнена множина, то $\overline{X \setminus F} = X \setminus \operatorname{int} F$, і тому $\operatorname{fr} F = F \cap (X \setminus \operatorname{int} F) = F \setminus \operatorname{int} F$.

На основі наступного твердження можна навести багато прикладів ніде не щільних множин.

Лема 12.2. *Межа кожної відкритої чи замкненої множини є ніде не щільною множиною.*

Доведення. Оскільки межі довільної множини і її доповнення збігаються, а замкнені множини – це в точності доповнення до відкритих множин, то досить розглянути випадок межі відкритої множини.

Нехай G – відкрита множина у топологічному просторі X. Тоді $\operatorname{fr} G = \overline{G} \cap (X \setminus G)$. Оскільки множина $\operatorname{fr} G$ замкнена, тобто $\overline{\operatorname{fr} G} = \operatorname{fr} G$, і $\operatorname{int}(X \setminus G) = X \setminus \overline{G}$, то

$$\operatorname{int}\overline{\operatorname{fr} G} = \operatorname{int}(\overline{G} \cap (X \setminus G)) = \operatorname{int}\overline{G} \cap \operatorname{int}(X \setminus G) = \operatorname{int}\overline{G} \cap (X \setminus \overline{G}) = \emptyset.$$

Отже, за лемою 12.1, множина $\overline{\operatorname{fr} G}$ ніде не щільна. □

Лема 12.3. *Скінченне об'єднання $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ ніде не щільних множин A_k є ніде не щільною множиною.*

Доведення. Зауважимо, що достатньо довести це твердження для $n = 2$ і, відповідно, застосувати індукцію відносно n.

Отже, нехай $n = 2$ і $A = A_1 \cup A_2$. Розглянемо непорожню відкриту множину G. Оскільки множина A_1 ніде не щільна, то існує така непорожня відкрита множина $G_1 \subseteq G$, що

$G_1 \cap A_1 = \emptyset$. Використовуючи ніде не щільність множини A_2, виберемо таку непорожню відкриту множину $H \subseteq G_1$, що $H \cap A_2 = \emptyset$. Тоді $H \subseteq G$ і

$$H \cap A = H \cap (A_1 \cup A_2) = (H \cap A_1) \cup (H \cap A_2) \subseteq (G_1 \cap A_1) \cup \emptyset = \emptyset.$$

□

Нагадаємо, що точка x в топологічному просторі X називається *ізольованою*, якщо одноточкова множина $\{x\}$ є відкритою.

Лема 12.4. *Одноточкова множина $\{x\}$ у T_1-просторі X буде ніде не щільною тоді і тільки тоді, коли точка x не є ізольованою в просторі X.*

Доведення. Нехай x – ізольована точка в просторі X. Тоді непорожня відкрита множина $G = \{x\}$ не є ніде не щільною.

Навпаки, нехай $\{x\}$ десь щільна, тобто існує непорожня відкрита в X множина $G \subseteq \overline{\{x\}}$. Оскільки X – T_1-простір, то множина $\{x\}$ замкнена. Отже, $\emptyset \neq G \subseteq \{x\}$. Значить, $G = \{x\}$, тобто точка x ізольована. □

Наслідок 12.2. *Кожна скінченна множина A у T_1-просторі без ізольованих точок є ніде не щільною.*

Зокрема, на числовій прямій $\mathbb{R}$ кожна скінченна множина є ніде не щільною. Множина $\mathbb{N}$ є прикладом нескінченної ніде не щільної множини в $\mathbb{R}$. Класичним прикладом незліченної ніде не щільної множини служить відома канторова множина C, якаотримується викиданням з відрізка $[0; 1]$ інтервалів $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}), (\frac{7}{3}, \frac{8}{9})$, і т.д. Її потужність континуальна.

2 Множини першої і другої категорій

Кажуть, що множина A – це *множина першої категорії* або *худа множина* в топологічному просторі X, якщо існує така послідовність $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ ніде не щільних в X множин A_n, що

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Якщо множина A не є множиною першої категорії, то A називається *множиною другої категорії*. Доповнення $X \setminus A$ до множини A першої категорії в X називається *залишковою множиною* в X.

Поняття множини першої категорії подібне до поняття зліченної множини, лише тут замість одноточкових множин беруться ніде не щільні множини. Зрозуміло, що кожна зліченна множина в T_1-просторі X без ізольованих точок, зокрема, в $\mathbb{R}$ чи $\mathbb{R}^n$, є множиною першої категорії, бо одноточкові множини є ніде не щільними в X. Підмножина ніде не щільної множини чи множини першої категорії залишається такою ж. Але, на відміну від ніде не щільної множини, множина першої категорії може бути всюди щільною, як наприклад, множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$, яка є всюди щільною множиною першої категорії в $\mathbb{R}$. Зрозуміло також, що кожна ніде не щільна множина є множиною першої категорії, але не навпаки, як показує приклад множини $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$.

Лема 12.5. *Об'єднання послідовності $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ множин першої категорії A_n в топологічному просторі X є множиною першої категорії.*

Доведення. За умовою $A_n = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_{n,m}$, де $A_{n,m}$ – ніде не щільні множини. Візьмемо довільну бієкцію $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$. Тепер маємо

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{n,m} = \bigcup_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} A_{n,m} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{\varphi(k)}.$$

Отже, множина A першої категорії. □

Лема 12.6. *Перетин послідовності $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ залишкових множин B_n в топологічному просторі X є залишковою множиною.*

Доведення. Згідно з означенням залишкової множини, всі множини $A_n = X \setminus B_n$ першої категорії. Тому і множина $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ є першої категорії. Отже, множина

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n) = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X \setminus A$$

залишкова. □

3 Берівські простори

Топологічний простір X називається *берівським*, якщо в ньому кожна непорожня відкрита множина є множиною другої категорії.

Наступна теорема дає багато різних характеризацій беровості.

Теорема 12.1. *Для топологічного простору X такі умови рівносильні:*

(i) X *– берівський простір;*

(ii) *перетин* $P = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ *довільної послідовності відкритих і всюди щільних в* X *множин* G_n *є всюди щільним в* X*;*

(iii) *об'єднання* $S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ *довільної послідовності замкнених ніде не щільних в* X *множин* F_n *не має внутрішніх точок;*

(iv) *кожна залишкова в* X *множина є всюди щільною в* X*;*

(v) *для довільного покриття простору* X *послідовністю* $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ *замкнених в* X *множин* F_n *відкрита множина* $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{int} F_n$ *є всюди щільною в* X*.*

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$. Для кожного n множина $F_n = X \setminus G_n$ замкнена і

$$\operatorname{int} F_n = X \setminus \overline{G_n} = X \setminus X = \emptyset.$$

Отже, за лемою 12.1 всі множини F_n ніде не щільні. Тому множина $S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ першої категорії. Нехай G – довільна непорожня відкрита в X множина. Оскільки X берівський, то G другої категорії. Тому

$$G \cap P = \bigcap_{n=1}^{\infty} (G \cap G_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (G \setminus F_n) = G \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = G \setminus S \neq \emptyset.$$

Отже, множина P всюди щільна.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Для кожного номера n розглянемо множину $G_n = X \setminus F_n$, яка є відкритою і всюди щільною, адже F_n замкнена і ніде не щільна. Згідно з (ii), перетин $P = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ є всюди щільним в X. Але

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus G_n) = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = X \setminus P,$$

і тому

$$\operatorname{int} S = X \setminus \overline{P} = X \setminus X = \emptyset.$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Нехай B – залишкова множина, тобто доповнення до множини першої категорії в X. Тоді існує така послідовність ніде не щільних множин A_n, що $B = X \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Згідно з наслідком 12.1, всі множини $F_n = \overline{A_n}$ ніде не щільні і за умовою (iii) об'єднання $S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ не має внутрішніх точок. Тому

$$\overline{B} = X \setminus \operatorname{int}(X \setminus B) = X \setminus \operatorname{int} A \supseteq X \setminus \operatorname{int} S = X \setminus \emptyset = X.$$

$(iv) \Rightarrow (v)$. Нехай $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, де всі множини F_n замкнені. За лемою 12.2 кожна множина $\operatorname{fr} F_n$ ніде не щільна і тому множина $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{fr} F_n$ першої категорії в X. Оскільки

$$X \setminus G = X \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} \operatorname{int} F_m = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} \operatorname{int} F_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(F_n \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} \operatorname{int} F_m\right) \subseteq$$

$$\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \setminus \operatorname{int} F_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{fr} F_n = A,$$

то множина G залишкова, і згідно з (iv) всюди щільна в X.

$(v) \Rightarrow (i)$. Розглянемо довільну непорожню відкриту в X множину G, її доповнення $F = X \setminus G$ і довільну послідовність ніде не щільних в X множин A_n. Крім того, для кожного номера n розглянемо замкнену множину $F_n = F \cup \overline{A_n}$. Оскільки всі множини A_n ніде не щільні, то $\operatorname{int} \overline{A_n} = \emptyset$ і тому

$$\operatorname{int} F_n \cap G = \operatorname{int}(F_n \cap G) = \operatorname{int}((F \cup \overline{A_n}) \cap G) = \operatorname{int}((F \cap G) \cup (\overline{A_n} \cap G) = \operatorname{int}(\overline{A_n} \cap G) \subseteq \operatorname{int} \overline{A_n} = \emptyset.$$

Отже, множина $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{int} F_n$ не є всюди щільною в X. Тоді, згідно з (v), простір X не покривається множинами F_n і тому

$$G \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (F \cup G) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (F \cup A_n) \supseteq X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset.$$

Зокрема, $G \neq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, а отже, G не є множиною першої категорії і простір X берівський. □

4 Приклади берівських просторів

Кажуть, що множина A *вписана* в систему $\mathcal{B}$ (позначається: $A \preceq \mathcal{B}$), якщо існує така множина $B \in \mathcal{B}$, що $A \subseteq B$.

Топологічний простір X називають *сильно зліченно повним* (або, інакше, *зліченно повним за Чехом*), якщо існує така послідовність $(\mathcal{G}_n)_{n=1}^{\infty}$ відкритих покриттів $\mathcal{G}_n$ простору X, що для кожної спадної послідовності $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ непорожніх замкнених в X множин F_n такої, що $F_n \preceq \mathcal{G}_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, перетин $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

Топологічний простір X називається *повнометризовний*, якщо на X можна визначити метрику d, яка породжує топологічну структуру простору X, і таку, що метричний простір (X, d) повний.

Теорема 12.2. *Кожний повнометризовний простір X сильно зліченно повний.*

Доведення. Нехай d – метрика на X, яка породжує топологічну структуру простору X, і така, що метричний простір (X,d) повний. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо через $\mathcal{G}_n$ систему всіх відкритих куль $B(x, \frac{1}{n}) = \{y \in X : d(x,y) < \frac{1}{n}\}$, тобто $\mathcal{G}_n = \{B(x, \frac{1}{n}) : x \in X\}$. Покажемо, що послідовність відкритих покриттів $\mathcal{G}_n$ простору X задовольняє умову з означення сильно зліченно повного простору.

Нехай $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ – спадна послідовність непорожніх замкнених в X множин F_n така, що $F_n \preceq \mathcal{G}_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. В кожній непорожній множині F_n візьмемо довільну точку $x_n \in F_n$ і доведемо, що послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і виберемо такий номер $N \in \mathbb{N}$, що $\frac{2}{N} < \varepsilon$. Крім того, нехай $x \in X$ – така точка, що $F_N \subseteq B(x, \frac{1}{N})$. Для довільних $n, m \geq N$ маємо $x_n \in F_n \subseteq F_N$ і $x_m \in F_m \subseteq F_N$, і тому, $x_n, x_m \in B(x, \frac{1}{N})$, отже,

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \tfrac{1}{N} + \tfrac{1}{N} < \varepsilon.$$

Таким чином, послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна у повному метричному просторі (X,d), значить, існує $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in X$. Оскільки всі множини F_n замкнені і $x_{n+k} \in F_n$ для кожного $k \in \mathbb{N}$, то

$$x_0 = \lim_{k\to\infty} x_{n+k} \in F_n$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. Отже, $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$. □

Топологічний простір X називається *локально компактним*, якщо кожна його точка x має компактний окіл U_x. Зрозуміло, що кожний компактний простір є локально компактним, але не навпаки, як показує приклад числової прямої $\mathbb{R}$.

Теорема 12.3. *Кожний локально компактний простір X сильно зліченно повний.*

Доведення. Для кожної точки $x \in X$ візьмемо її компактний окіл U_x і розглянемо його внутрішність $G_x = \operatorname{int} U_x$, яка буде відкритим околом точки x, причому $G_x \subseteq U_x$. Система $\mathcal{G} = \{G_x : x \in X\}$ утворює відкрите покриття простору X. Покладемо $\mathcal{G}_n = \mathcal{G}$ для кожного номера n. Нехай $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ – спадна послідовність непорожніх замкнених в X множин F_n така, що $F_n \preceq \mathcal{G}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Візьмемо точку $x \in X$ таку, що $F_1 \subseteq G_x \subseteq U_x$. Отже, $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ – спадна послідовність непорожніх замкнених підмножин компактної множини U_x. Тому $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ і X – сильно зліченно повний. □

Теорема 12.4. *Кожний сильно зліченно повний регулярний простір X є берівським.*

Доведення. Нехай $(\mathcal{G}_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність відкритих покриттів $\mathcal{G}_n$ простору X, яка задовольняє умову з означення сильно зліченно повного простору. Розглянемо довільну непорожню відкриту в X множину G і покажемо, що вона другої категорії. Для цього візьмемо довільну послідовність $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ ніде не щільних в X множин A_n і покажемо, що $G \not\subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, тобто $G \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.

Позначимо $U_0 = G$. Оскільки множина A_1 ніде не щільна, то множина U_0 містить таку непорожню відкриту множину H_1, що $H_1 \cap A_1 = \emptyset$. Візьмемо точку $x_1 \in H_1$ і знайдемо такий елемент $G_1 \in \mathcal{G}_1$, що $x_1 \in G_1$. З регулярності простору X, випливає, що існує такий відкритий окіл U_1 точки x_1, що $\overline{U_1} \subseteq H_1 \cap G_1$.

На другому кроці візьмемо непорожню відкриту множину $H_2 \subseteq U_1$ таку, що $H_2 \cap A_2 = \emptyset$, точку $x_2 \in H_2$, множину $G_2 \in \mathcal{G}_2$, для якої $x_2 \in G_2$, і такий відкритий окіл U_2 точки x_2, що $\overline{U_2} \subseteq H_2 \cap G_2$.

Продовжуючи цей процес до нескінченності, ми отримаємо послідовності непорожніх відкритих множин H_n, точок x_n, відкритих множин $G_n \in \mathcal{G}_n$ і відкритих околів U_n точок x_n, такі, що $H_n \subseteq U_{n-1}$, $H_n \cap A_n = \emptyset$ і $x_n \in U_n \subseteq \overline{U_n} \subseteq H_n \cap G_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Замкнені множини $F_n = \overline{U_n}$ непорожні, бо $x_n \in F_n$, і утворюють спадну послідовність, бо $F_{n+1} \subseteq H_{n+1} \subseteq U_n \subseteq F_n$ для кожного номера n. Крім того, $F_n \subseteq G_n \in \mathcal{G}_n$, отже, $F_n \preceq \mathcal{G}_n$ для кожного n. Тому $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$, тобто існує точка $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Тоді, з одного боку, $x \in F_1 \subseteq H_1 \subseteq U_0 = G$. А з іншого боку, $x \in F_n \subseteq H_n \subseteq X \setminus A_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Отже,

$$x \in G \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n) \right) = G \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset.$$

□

Наступне твердження негайно випливає з теорем 12.2, 12.3 і 12.4.

Наслідок 12.3. *Кожний повнометризовний простір і кожний локально компактний простір є берівським.*

Твердження про беровість повнометризовного простору називають ще теоремою Бера про категорію.

5 Функції першого класу Бера

Нехай X і Y – топологічні простори. Кажуть, що відображення $f : X \to Y$ належить до першого класу Бера, якщо існує така послідовність неперервних відображень $f_n : X \to Y$, яка поточково збігається до f на X, тобто $f_n(x) \to f(x)$ на X при $n \to \infty$. Простір усіх відображень $f : X \to Y$ першого класу Бера позначається символом $B_1(X, Y)$. Неперервні відображення вважаються відображеннями нульового класу Бера, а їх сукупність $C(X, Y)$ позначається також символом $B_0(X, Y)$. Ясно, що $B_0(x, Y) \subseteq B_1(X, Y)$.

Приклад 12.1. Функція $f(x) = \operatorname{sgn} x$ належить до першого класу Бера (тут $X = Y = \mathbb{R}$), адже послідовність неперервних функцій

$$f_n(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & |x| \geq \frac{1}{n}; \\ nx, & |x| < \frac{1}{n} \end{cases}$$

поточково збігається до f на $\mathbb{R}$. Таку саму властивість мають функції $g_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$.

Для відображення $f : X \to Y$ символами $C(f)$ і $D(f)$ ми позначаємо множину точок неперервності і розриву відображення f відповідно. Зрозуміло, що $X = C(f) \sqcup D(f)$.

Теорема 12.5. *Нехай X – топологічний простір, Y – метризовний простір і $f \in B_1(X, Y)$. Тоді множина $D(f)$ точок розриву відображення f є множиною першої категорії в X*

Доведення. Нехай d – метрика на просторі Y, яка породжує його топологічну структуру, і $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність неперервних функцій $f_n : X \to Y$, яка поточково на X збігається до функції f. Для кожного $\varepsilon > 0$ і номера n розглянемо множини

$$F_n(\varepsilon) = \big\{x \in X : \forall\, k, j \geq n \;\big|\; d(f_k(x), f_j(x)) \leq \varepsilon\big\}.$$

Оскільки для кожного $x \in X$ послідовність $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ збіжна, то вона фундаментальна, і тому

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(\varepsilon) = X$$

для кожного $\varepsilon > 0$. Крім того, всі множини $F_n(\varepsilon)$ замкнені, як перетини замкнених множин, адже всі функції $g_{k,j}(x) = d(f_k(x), f_j(x))$ неперервні і $F_n(\varepsilon) = \bigcap\limits_{k,j \geq n} g_{k,j}^{-1}([0, \varepsilon])$. За теоремою 12.1($v$) для кожного $\varepsilon > 0$ відкрита множина

$$G(\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{int} F_n(\varepsilon)$$

всюди щільна в X, тобто замкнена множина $F(\varepsilon) = X \setminus G(\varepsilon)$ ніде не щільна. Залишилось показати, що $D(f) \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F(\frac{1}{n})$, або, рівносильно, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G(\frac{1}{n}) \subseteq C(f)$, тобто, функція f неперервна в кожній точці множини $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G(\frac{1}{n})$.

Візьмемо довільну точку $x_0 \in E$ і зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Виберемо номер m такий, що $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3}$. Оскільки $x_0 \in G(\frac{1}{m})$, то існує номер n такий, що $x_0 \in \operatorname{int} F_n(\frac{1}{m})$. Функція f_n неперервна в точці x_0, тому існує окіл $U \subseteq \operatorname{int} F_n(\frac{1}{m})$ точки x_0 такий, що

$$d(f_n(x_0), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

для кожного $x \in U$. Оскільки для кожного $x \in U \subseteq F_n(\frac{1}{m})$ і довільного номера $k \leq n$ виконується нерівність

$$d(f_k(x), f_n(x)) \leq \frac{1}{m},$$

то перейшовши до границі при $k \to \infty$, одержимо, що

$$d(f(x), f_n(x)) \leq \frac{1}{m}$$

для кожного $x \in U$. Таким чином, для довільного $x \in U$ маємо

$$d(f(x_0), f(x)) \leq d(f(x_0), f_n(x_0)) + d(f_n(x_0), f_n(x)) + d(f_n(x), f(x)) < \frac{1}{m} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{m} < \varepsilon,$$

що і дає нам неперервність функції f у точці x_0. □

Наслідок 12.4. *Нехай X – берівський простір, Y – метризовний простір і $f \in B_1(X, Y)$. Тоді f – точково розривна функція, тобто $\overline{C(f)} = X$.*

Приклад 12.2. Відома функція Діріле $f = \chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, як скрізь розривна функція, не є функцією першого класу Бера, тобто $f \notin B_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Разом з тим, функція Діріхле f є поточковою границею послідовності функцій першого класу Бера $f_n = \chi_{A_n}$, де A_n – це множина перших n раціональних чисел згідно з деякою перенумерацією множини $\mathbb{Q}$, тобто f належить до другого класу Бера.

Лекція №13

Належність до першого класу Бера нарізно неперервних функцій: метод Лебеґа

1 Нарізно неперервні відображення: означення і позначення

Для відображення $f : X \times Y \to Z$ і точки $p = (x, y) \in X \times Y$ ми покладемо $f^x(y) = f_y(x) = f(p)$. Відображення $f^x : Y \to Z$ і $f_y : X \to Z$ називаються відповідно *вертикальним* x*-розрізом* і *горизонтальним* y*-розрізом* відображення f.

Нехай X, Y Z – топологічні простори і $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$. Відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *сукупно неперервним у точці* p_0, якщо для довільного околу W точки $z_0 = f(x_0, y_0)$ в просторі Z існують окіл U точки x_0 в просторі X і окіл V точки y_0 в просторі Y такі, що $f(U \times V) \subseteq W$.

Введемо на просторі $P = X \times Y$ *топологічну структуру добутку*, в якій околом точки $p = (x, y) \in P$ вважається будь-яка множина $O \subseteq P$, для якої існують окіл U точки x в просторі X і окіл V точки y в просторі Y такі, що $U \times V \subseteq O$. Простір P, наділений топологічною структурою добутку, називається *топологічним добутком* просторів X та Y. Сукупна неперервність відображення $f : X \times Y \to Z$ у точці $p_0 = (x_0, y_0)$ – це те ж саме, що неперервність відображення $f : P \to Z$ у точці p_0 топологічного добутку P просторів X та Y у простір Z. Тому сукупно неперервні у точці p_0 відображення називають просто *неперервними у точці* p_0.

Відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *сукупно неперервним*, якщо воно сукупно неперервне у кожній точці p добутку $X \times Y$. Простір усіх сукупно неперервних відображень $f : X \times Y \to Z$ позначається символом $C(X \times Y, Z)$.

Відображення $f : X \times Y \to Z$ ми будемо називати *нарізно неперервним у точці* $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$, якщо відображення $f^{x_0} : Y \to Z$ і $f_{y_0} : X \to Z$ неперервні у точках y_0 і x_0 відповідно, тобто якщо для кожного околу W точки $z_0 = f^{x_0}(y_0) = f_{y_0}(x_0)$ у просторі Z існують такі околи U точки x_0 у просторі X і V точки y_0 у просторі Y, що $f^{x_0}(V) \subseteq W$ і $f_{y_0}(U) \subseteq W$, чи інакше $f((U \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times V)) \subseteq W$. Відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *нарізно неперервним*, якщо воно є таким у кожній точці p з добутку $X \times Y$. Простір усіх нарізно неперервних відображень $f : X \times Y \to Z$ ми позначаємо символом $CC(X \times Y, Z)$.

Оскільки $(U\times\{y_0\})\cup(\{x_0\}\times V)\subseteq U\times V$, якщо $x_0\in U$ $y_0\in V$, то з сукупної неперервності відображення f у точці p_0 випливає його нарізна неперервність у цій точці, а отже, і включення $C(X\times Y,Z)\subseteq CC(X\times Y,Z)$. Те, що обернене неправильно, показує класичний приклад функції Шварца $\mathrm{sp}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$\mathrm{sp}(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Ця функція сукупно неперервна, а отже, і нарізно неперервна в кожній точці $p\neq(0,0)$. У точці $(0,0)$ вона розривна, бо $\mathrm{sp}(x,x)=1$ при $x\neq 0$, і тому

$$\lim_{x\to+0}\mathrm{sp}(x,x)=1\neq\mathrm{sp}(0,0).$$

Нарізна неперервність цієї функції у точці $(0,0)$ випливає з того, що $\mathrm{sp}(x,0)=\mathrm{sp}(0,y)=0$ для довільних $x,y\in\mathbb{R}$.

Нехай P – деяка властивість відображень. Через $P(X,Y)$ ми позначаємо множину всіх відображень $f:X\to Y$, які мають властивість P. Для двох властивостей P і Q покладемо

$$PQ(X\times Y,Z)=\big\{f\in Z^{X\times Y}:\forall\,(x,y)\in X\times Y\;\big|\;f_y\in P(X,Z)\text{ і }f^x\in Q(Y,Z)\big\}.$$

Відображення з простору $PQ(X\times Y,Z)$ ми називаємо *PQ-функціями*. Оскільки властивість неперервності позначається літерою C, то CC-функції – це нарізно неперервні відображення.

Для відображення $f:X\times Y\to Z$ позначимо

$$X_Q(f)=\{x\in X:f^x\in Q(Y,Z)\}\quad\text{і}\quad Y_P(f)=\{y\in Y:f_y\in P(X,Z)\}.$$

Ясно, що

$$PQ(X\times Y,Z)=\{f\in Z^{X\times Y}:X_Q(f)=X\text{ і }Y_P(f)=Y\}.$$

2 Локально скінченні системи і один критерій неперервності

Нехай X – топологічний простір і $\mathcal{A}$ – система множин в X. Вона називається *локально скінченною*, якщо для кожної точки $x\in X$ існує такий її окіл U, що система $\mathcal{A}_U=\{A\in\mathcal{A}:A\cap U\neq\emptyset\}$ скінченна. Аналогічно, сім'ю $(A_s)_{s\in S}$ називаємо *локально скінченною*, якщо для довільної точки $x\in X$ існує такий її окіл U, що множина $S_U=\{s\in S:A_s\cap U\neq\varnothing\}$ скінченна. В деяких топологічних твердженнях скінченність можна замінити на локальну скінченність.

Теорема 13.1. *Нехай $\mathcal{A}$ – локально скінченна система множин в топологічному просторі X і $S = \bigcup \mathcal{A} = \bigcup\limits_{A \in \mathcal{A}} A$. Тоді*

$$\overline{S} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}.$$

Доведення. Оскільки $A \subseteq S$, то $\overline{A} \subseteq \overline{S}$ для кожного $A \in \mathcal{A}$. Тому $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{A}} \overline{A} \subseteq \overline{S}$.

Навпаки, нехай $x \in \overline{S}$. Знайдемо для точки x такий її окіл U, що система $\mathcal{A}_U = \{A \in \mathcal{A} : A \cap U \neq \emptyset\}$ скінченна і покладемо $S_U = \bigcup \mathcal{A}_U$. Оскільки замикання об'єднання скінченної кількості множин дорівнює об'єднанню замикань цих множин, то $\overline{S_U} = \bigcup\limits_{A \in \mathcal{A}_U} \overline{A}$. Тепер маємо

$$x \in \overline{S \cap U} \subseteq \overline{S_U} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}_U} \overline{A} \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}.$$

Отже, $\overline{S} \subseteq \bigcup\limits_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}$ і теорема доведена. □

Наслідок 13.1. *Нехай $\mathcal{F}$ – локально скінченна система, яка складається із замкнених множин у топологічному просторі X. Тоді множина $S = \bigcup \mathcal{F}$ замкнена.*

Доведення. Справді, згідно з теоремою 13.1,

$$\overline{S} = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F = S,$$

і тому множина S замкнена. □

З цього наслідку ми виведемо наступний критерій неперервності, який буде нам корисний в подальшому.

Теорема 13.2. *Нехай X і Y – топологічні простори, $f : X \to Y$ – відображення і $\mathcal{F}$ – локально скінченне покриття простору X замкненими множинами. Тоді f буде неперервним у тому і тільки тому випадку, коли всі звуження $f|_F : F \to Y$ відображення f на множини $F \in \mathcal{F}$ неперервні.*

Доведення. Необхідність негайно випливає з того, що звуження неперервного відображення на будь-яку підмножину області визначення цього відображення обов'язково є неперервним.

Достатність. Візьмемо довільну замкнену множину B у просторі Y і покажемо, що її прообраз $f^{-1}(B)$ замкнений у просторі X, що за відомим критерієм неперервності [13, с. 79] означає неперервність відображення f. Спочатку зауважимо, що для кожної множини $F \in \mathcal{F}$ прообраз

$$A_F = (f|_F)^{-1}(B) = f^{-1}(B) \cap F$$

при неперервному відображенні $f|_F$ замкнений в F, а отже, і в X, адже F – замкнена множина. Оскільки $A_F \subseteq F$ для кожного $F \in \mathcal{F}$ і $\mathcal{F}$ локально скінченна, то система $\mathcal{A} = \{A_F : F \in \mathcal{F}\}$ також локально скінченна і множина $\bigcup \mathcal{A}$ замкнена за наслідком 13.1. Крім того, $\mathcal{F}$ є покриттям простору X. Тому

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} (f^{-1}(B) \cap F) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} A_F = \bigcup \mathcal{A}.$$

Отже, $f^{-1}(B)$ замкнена в X. □

3 Оператори Лебеґа

Нехай Z – топологічний векторний простір і $g : [\alpha; \beta] \to Z$ – відображення. Зіставимо йому відображення $g_{\alpha,\beta} : [\alpha; \beta] \to Z$, що визначається формулою

$$g_{\alpha,\beta}(x) = g(\alpha) + \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha) = \lambda g(\alpha) + \mu g(\beta),$$

де $\lambda = \frac{\beta - x}{\beta - \alpha}$ і $\mu = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}$. Це відображення неперервне, оскільки операції в топологічному векторному просторі неперервні, а множники λ і μ неперервно залежать від x. Зрозуміло, що $g_{\alpha,\beta}(\alpha) = g(\alpha)$ і $g_{\alpha,\beta}(\beta) = g(\beta)$.

Розглянемо тепер відображення $g : \mathbb{R} \to Z$ і номер $n \in \mathbb{N}$. Розіб'ємо числову пряму $\mathbb{R}$ точками $\frac{k}{n}$ на рівні відрізки $\Delta_{n,k} = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, де $k \in \mathbb{Z}$. Зіставимо функції g функцію $g_n = L_n g$, у якої всі звуження $g_n|_{\Delta_{n,k}} = g_{\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}}$ для кожного $k \in \mathbb{Z}$. Таким чином, ми визначили оператор $L_n : Z^{\mathbb{R}} \to C(\mathbb{R}, Z)$, який називається *оператором Лебеґа*.

Теорема 13.3. *Нехай $g \in C(\mathbb{R}, Z)$ і $g_n = L_n g$. Тоді $g_n(x) \to g(x)$ в Z для кожного $x \in \mathbb{R}$.*

Доведення. Зауважимо, що для чисел $\alpha = \frac{k}{n}$ і $\beta = \frac{k+1}{n}$ різниця $\beta - \alpha = \frac{1}{n}$. Крім того,

$$\lambda = \tfrac{\beta - x}{\beta - \alpha} = n(\tfrac{k+1}{n} - x) = k + 1 - nx \qquad \text{і} \qquad \mu = \tfrac{x - \alpha}{\beta - \alpha} = n(x - \tfrac{k}{n}) = nx - k.$$

Тому

$$g_n(x) = (k + 1 - nx)g(\tfrac{k}{n}) + (nx - k)g(\tfrac{k+1}{n})$$

на відрізку $\Delta_{n,k}$.

Нехай W – довільний окіл нуля в просторі Z. Візьмемо такий заокруглений окіл нуля V в просторі Z, що $V+V\subseteq W$. Зафіксуємо точку $x\in\mathbb{R}$ і розглянемо ціле число $k=[nx]$. Тоді $\frac{k}{n}\le x<\frac{k+1}{n}$, отже, $x\in\Delta_{n,k}$. Оскільки відображення g неперервне в точці x, то існує таке $\delta>0$, що $g(u)-g(x)\in V$, як тільки $|u-x|<\delta$. Виберемо такий номер N, що $\frac{1}{N}<\delta$ і візьмемо довільний номер $n\ge N$. Тоді

$$|\tfrac{k}{n}-x|\le\tfrac{1}{n}<\delta \qquad \text{і} \qquad |\tfrac{k+1}{n}-x|\le\tfrac{1}{n}<\delta,$$

отже,

$$g(\tfrac{k}{n})-g(x)\in V \qquad \text{і} \qquad g(\tfrac{k+1}{n})-g(x)\in V.$$

Для чисел $\lambda=k+1-nx$ і $\mu=nx-k$ виконуються співвідношення $\lambda+\mu=1$, $\lambda\ge0$ і $\mu\ge0$. Тому, зокрема, $g(x)=\lambda g(x)+\mu g(x)$. Крім того, із заокругленості множини V випливає, що $\lambda V\subseteq V$ і $\mu V\subseteq V$. Тепер маємо

$$g_n(x)-g(x)=\lambda g(\tfrac{k}{n})+\mu g(\tfrac{k+1}{n})-\lambda g(x)-\mu g(x)=$$

$$=\lambda(g(\tfrac{k}{n})-g(x))+\mu(g(\tfrac{k+1}{n})-g(x))\in\lambda V+\mu V\subseteq V+V\subseteq W.$$

Таким чином, $g_n(x)-g(x)\in W$ при $n\ge N$, отже, $g_n(x)\to g(x)$ в Z, що і треба було довести. □

4 Теорема Лебеґа

Центральне питання при поточковій апроксимації нарізно неперервних функцій полягає в тому, щоб вказати, за яких умов на топологічні простори X, Y і Z виконується включення $CC(X\times Y,Z)\subseteq B_1(X\times Y,Z)$. Перший результат у цьому напрямку отримав А.Лебеґ, встановивши у 1898 році, що $CC(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})\subseteq B_1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. Ми подамо тут його результат у загальнішій формі.

Теорема 13.4. *Нехай $X=\mathbb{R}$, Y – топологічний простір, Z – топологічний векторний простір, $f\in CC(\mathbb{R}\times Y,Z)$ і $f_n(x,y)=(L_nf_y)(x)$ на $X\times Y$. Тоді $f_n\in C(X\times Y,Z)$ для кожного номера n і $f_n(x,y)\to f(x,y)$ на $X\times Y$. Зокрема, $CC(\mathbb{R}\times Y,Z)\subseteq B_1(\mathbb{R}\times Y,Z)$.*

Доведення. Множини $F_{n,k}=\Delta_{n,k}\times Y$ замкнені в добутку $\mathbb{R}\times Y$ і для кожного номера n система $\mathcal{F}_n=\{F_{n,k}:k\in\mathbb{Z}\}$ є локально скінченним покриттям простору $\mathbb{R}\times Y$, адже система $\{\Delta_{n,k}:k\in\mathbb{Z}\}$ є локально скінченним покриттям числової прямої $\mathbb{R}$. Оскільки при $(x,y)\in F_{n,k}$ маємо

$$f_n(x,y)=(k+1-nx)f(\tfrac{k}{n},y)+(nx-k)f(\tfrac{k+1}{n},y),$$

операції додавання і множення на скаляр у топологічному векторному просторі неперервні і всі вертикальні розрізи функції f неперервні, то кожне звуження $f|_{F_{n,k}} : F_{n,k} \to Z$ є неперервним відображенням. Тому за теоремою 13.2 всі функції $f_n : \mathbb{R}\times Y \to Z$ неперервні, тобто $f_n \in C(\mathbb{R} \times Y, Z)$.

Для кожного $y \in Y$ відображення $f_y : \mathbb{R} \to Z$ неперервне. Тому на основі теореми 13.3

$$f_n(x, y) = (L_n f_y)(x) \to f_y(x) = f(x, y)$$

в просторі Z при $n \to \infty$ для кожної точки $(x, y) \in \mathbb{R} \times Y$. Отже, теорема доведена. □

Метод, який ми застосували у доведенні цієї теореми, називається *методом Лебеґа.* Його можна застосовувати і для доведення включення $CC(X \times Y, Z) \subseteq B_1(X \times Y, Z)$, де X – це відрізок $[a; b]$ числової прямої або простір $\mathbb{R}^m$, Y – довільний топологічний простір, а Z – топологічний векторний простір.

Лекція №14

Метод Гана

1 Функції, пов'язані зі скінченною множиною точок

Ганс Ган узагальнив побудови Анрі Лебеґа, розглянуті в попередній лекції, з числової прямої на сепарабельні метричні простори. Його метод базується на властивостях введених ним функцій, які ми вивчимо у цьому пункті.

Нехай (X, d) – метричний простір. Протягом цієї лекції вслід за Гансом Ганом відстань $d(x, y)$ між точками x і y цього простору ми будемо коротко позначати xy. Для різних точок $a_1, \ldots, a_n$ з простору X і точки $x \in X$ покладемо

$$g(x) = \min\{xa_k : 1 \le k \le n\} \quad \text{і} \quad g_k(x) = \max\{2g(x) - xa_k; 0\}$$

при $k = 1, \ldots, n$. Оскільки відстані $d_k(x) = xa_k$ – це неперервні функції на X, то і функції g і g_k при $k = 1, \ldots, n$ неперервні. Зауважимо також, що $g(x) \ge 0$ і $g_k(x) \ge 0$ на X при $k = 1, \ldots, n$.

Лема 14.1. *Нехай* $\varrho_{i,k} = \frac{1}{3}a_ia_k$ *при* $i, k = 1, \ldots n$, $\varrho_k = \frac{1}{2}\min\{a_ia_k : i = 1, \ldots, n, i \ne k\}$ *та* $\delta_k = \min\{\varrho_{i,k} : i = 1, \ldots, n, i \ne k\} = \frac{2}{3}\varrho_k$ *при* $k = 1, \ldots, n$. *Розглянемо кулі*

$$B_k = B[a_k, \varrho_k] = \{x \in X : xa_k \le \varrho_k\}, \ B_{i,k} = B[a_k, \varrho_{i,k}] \quad \text{і} \quad U_k = B[a_k, \delta_k].$$

Тоді

(a) $g(x) = g_k(x) = xa_k$ *на* B_k;

(b) $g_i(x) = 0$ *на* $B_{i,k}$ *при* $i \ne k$;

(c) $g_k(x) = xa_k$ *і* $g_i(x) = 0$ *на* U_k *при* $i \ne k$.

Доведення. (a). Нехай $x \in B_k$, тобто $xa_k \le \varrho_k$. Тоді $a_ka_i \le a_kx + xa_i$ при $i \ne k$, отже,

$$xa_i \ge a_ka_i - xa_k \ge 2\varrho_k - xa_k \ge 2\varrho_k - \varrho_k = \varrho_k.$$

Тому $g(x) = xa_k$. Далі,

$$2g(x) - xa_k = 2xa_k - xa_k = xa_k \ge 0,$$

а тоді і

$$g_k(x) = 2g(x) - xa_k = xa_k.$$

(b). Припустимо, що $x \in B_{i,k}$, причому $i \neq k$. Тоді $xa_k \leq \varrho_{i,k}$ і

$$a_i a_k \leq a_i x + x a_k \leq a_i x + \varrho_{i,k},$$

звідки випливає, що

$$x a_i \geq a_i a_k - \varrho_{i,k} = 2\varrho_{i,k}.$$

В такому разі,

$$2g(x) - xa_i \leq 2xa_n - 2\varrho_{i,k} \leq 2\varrho_{i,k} - 2\varrho_{i,k} = 0.$$

Отже,

$$g_i(x) = \max\{2g(x) - xa_i, 0\} = 0.$$

(c). Оскільки $\delta_k \leq \varrho_k$, то $U_k \subseteq B_k$ і $g_k(x) = xa_k$ на основі властивості (a). Далі $\delta_k \leq \varrho_{i,k}$ при $i \neq k$, тому $U_k \subseteq B_{i,k}$, отже, $g_i(x) = 0$ при $x \in U_k$ на основі властивості (b). □

Лема 14.2. *Сума* $h(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} g_k(x)$ *є неперервною функцією на просторі* X*, причому* $h(x) > 0$ *на* $X \setminus \{a_1, \dots a_n\}$ *і* $h(a_k) = 0$ *при* $k = 1, \dots, n$.

Доведення. Неперервність функції h випливає з неперервності всіх функцій g_k. Нехай $x \in X \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Оскільки існує такий номер $k \leq n$, що $g(x) = xa_k$, то

$$2g(x) - xa_k = 2xa_k - xa_k = xa_k \geq 0,$$

а тому, $g_k(x) = xa_k > 0$, адже $x \neq a_k$. В такому разі

$$h(x) = g_k(x) = \sum_{i \neq k} g_i(x) \geq g_k(x) > 0.$$

Далі, $g(a_k) = 0$, бо $a_k a_k = 0$, а $a_i a_k > 0$ при $i \neq k$. Тоді

$$2g(a_k) - a_k a_i = -a_k a_i \leq 0,$$

отже, і $g_i(x_k) = 0$ при $i = 1, \dots, n$. Тому і $h(a_k) = \sum\limits_{i=1}^{n} g_i(a_k) = 0$. □

2 Функції Гана

У даному пункті ми будемо використовувати позначення з попереднього пункту. Введемо функції $\varphi_{n,k} : X \to [0; 1]$, покладаючи $\varphi_{n,k}(x) = \frac{g_k(x)}{h(x)}$ на $X \setminus \{a_1, \dots a_n\}$, $\varphi_{n,k}(a_k) = 1$ і $\varphi_{n,k}(a_i) = 0$ при $i \neq k$. Ці функції ми називатимемо *функціями Гана*, породженими точками $a_1, \dots, a_n$, хоча сам Г. Ган ними не користувався. Ми їх ввели, щоб спростити його викладки. Наступна лема показує, що система функцій $\varphi_{n,1}, \dots, \varphi_{n,n}$ утворює розбиття одиниці на X.

Лема 14.3. *Функції $\varphi_{n,k}$ неперервні, $\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi_{n,k}(x) = 1$ на X, причому якщо $xa_k \le \delta_k$, то $\varphi_{n,k}(x) = 1$ і $\varphi_{n,i}(x) = 0$ при $i \neq k$.*

Доведення. За лемою 14.1 якщо $xa_k \le \delta_k$, тобто $x \in U_k$, то

$$g_k(x) = xa_k \qquad \text{і} \qquad g_i(x) = 0$$

при $i \neq k$. Тому $h(x) = g_k(x) = xa_k$ на U_k. Таким чином, на U_k при $i \neq k$ маємо

$$\varphi_{n,k}(x) = 1 \qquad \text{і} \qquad \varphi_{n,i}(x) = 0.$$

Це дає нам неперервність функцій $\varphi_{n,k}$ у точках $a_1, \dots, a_n$, адже в кожній з них функція $\varphi_{n,k}$ є локально сталою. В точках доповнення $G = X\setminus\{a_1, \dots, a_n\}$ функція $\varphi_{n,k}$ неперервна, бо її звуження $\varphi_{n,k}|_G$ на відкриту множину G є часткою $\frac{g_k}{h}$ двох неперервних функцій g_k і h. Отже, всі функції $\varphi_{n,k}$ неперервні.

Далі,

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi_{n,k}(x) = \sum_{k=1}^{n}\tfrac{g_k(x)}{h(x)} = \tfrac{1}{h(x)}\sum_{k=1}^{n} g_k(x) = \tfrac{h(x)}{h(x)} = 1$$

на множині G, і

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi_{n,k}(a_i) = \varphi_{n,i}(a_i) + \sum_{k\neq i}\varphi_{n,k}(a_i) = 1 + 0 = 1$$

при $i = 1, \dots, n$. Отже, $\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi_{n,k}(x) = 1$ на X. □

3 Оператори Гана

Нехай X – метричний простір, Z – топологічний векторний простір і $(\varphi_{n,k})_{k=1}^{n}$ – система функцій Гана, породжена множиною різних точок $a_1, \dots, a_n$ з X. Кожній неперервній функції $f : X \to Z$ зіставимо функцію $f_n = H_n f$, яка визначається на X формулою

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\varphi_{n,k}(x) f(a_k).$$

Ця функція неперервна, бо всі функції $\varphi_{n,k}$ неперервні і операції додавання і множення на скаляр у топологічному векторному просторі Z неперервні. Відображення $H_n : C(X,Z) \to C(X,Z)$, $H_n f = f_n$, називається *оператором Гана*. Ясно, що $f_n(a_i) = f(a_i)$ для кожного $i = 1, \dots, n$.

Наділимо векторний простір $C(X,Z)$ *топологічною структурою поточкової збіжності*, базу околів нульової функції в якій утворюють множини

$$O_{W,x_1,\dots x_n} = \big\{f \in C(X,Z) : \forall\, k = 1, \dots, n \;\big|\; f(x_k) \in W\big\},$$

де W – окіл нуля в Z, а $x_1, \dots, x_n \in X$. Простір $C(X, Z)$ з цією топологічною структурою є топологічним векторним простором, він позначається символом $C_p(X, Z)$.

Теорема 14.1. *Оператор Гана $H_n : C_p(X, Z \to C_p(X, Z)$ є лінійним неперервним оператором.*

Доведення. Для кожної точки $a \in X$ відображення $\delta_a : C_p(X, Z) \to Z$, $\delta_a(f) = f(a)$, як легко перевірити, буде лінійним і неперервним. Тому таким буде і відображення $\Delta = (\delta_{a_1}, \dots, \delta_{a_n}) : C_p(X, Z) \to Z^n$,

$$\Delta(f) = (f(a_1), \dots, f(a_n)).$$

Кожній неперервній функції $\varphi : X \to \mathbb{R}$ і довільному елементу $z \in Z$ зіставимо функцію $\varphi z : C(X, Z)$, яка визначається формулою $(\varphi z)(x) = \varphi(x) \cdot z$ на X. Оскільки множення на скаляр у топологічному векторному просторі є неперервним, то кожна функція φz неперервна, як композиція неперервних відображень. Тому для кожної неперервної функції $\varphi : X \to \mathbb{R}$ відображення $M_\varphi : Z \to C_p(X, Z)$, $M_\varphi(z) = \varphi z$, буде лінійним і неперервним. Тоді і відображення $M : Z^n \to C_p(X, Z)^n$,

$$M(z_1, \dots, z_n) = (M_{\varphi_{n,1}}(z_1), \dots, M_{\varphi_{n,n}}(z_n)) = (\varphi_{n,1} z_1, \dots, \varphi_{n,n} z_n),$$

буде лінійним і неперервним.

Оскільки операція додавання є неперервною у топологічному векторному просторі, то сума $S : C_p(X, Z)^n \to C_p(X, Z)$,

$$S(f_1, \dots, f_n) = \sum_{k=1}^{n} f_k,$$

є лінійним неперервним оператором.

Для кожної функції $f \in C(X, Z)$ маємо

$$\begin{aligned} H_n f = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{n,k} f(a_k) = S(\varphi_{n,1} f(a_1), \dots, \varphi_{n,n} f(a_n)) = \\ = S(M(f(a_1), \dots, f(a_n))) = S(M(\Delta(f))) = (SM\Delta)(f). \end{aligned}$$

Тому і оператор Гана $H_n = SM\Delta$ – це лінійний неперервний оператор. □

4 Апроксимація неперервних функцій з допомогою операторів Гана

Нагадаємо, що топологічний векторний простір Z називається *локально опуклим*, якщо в ньому довільний окіл нуля W містить деякий опуклий окіл нуля V.

Теорема 14.2. *Нехай X – сепарабельний метричний простір, Z – локально опуклий простір, $A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ – всюди щільна в X множина, в якій $a_k \neq a_j$ при $k \neq j$, H_n – оператор Гана, породжений точками $a_1, \dots, a_n$ і відповідними функціями Гана $\varphi_{n,1}, \dots, \varphi_{n,n}$, $f \in C(X, Z)$ і $f_n = H_n f$. Тоді $f_n(x) \to f(x)$ в Z на X.*

Доведення. Зафіксуємо точку $x \in X$. Тоді $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{n,k}(x) f(a_k)$. З леми 14.3 випливає, що $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{n,k}(x) f(x)$. Тому

$$f_n(x) - f(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{n,k}(x)(f(a_k) - f(x)).$$

Нехай W – довільний окіл нуля в Z. Існує такий опуклий окіл нуля V в Z, що $V \subseteq W$. Оскільки функція $f : X \to Z$ неперервна в точці x, то існує таке $\delta > 0$, що для будь-якого $u \in X$ з нерівності $ux < 2\delta$ випливає, що $f(u) - f(x) \in V$.

За умовою $\overline{A} = X$. Тому існує такий номер N, що $a_N x < \delta$. Для довільного номера $n \geq N$ розглянемо множини

$$K_1 = \{k \leq n : a_k x < 2\delta\} \qquad \text{і} \qquad K_2 = \{k \leq n : a_k x \geq \delta\}$$

і при $i = 1, 2$ відповідні їм суми

$$\Sigma_i = \sum_{k \in K_i} \varphi_{n,k}(x)(f(a_k) - f(x)),$$

для яких виконується рівність $f_n(x) - f(x) = \Sigma_1 + \Sigma_2$.

Нехай $k \in K_2$. Тоді $xa_k \geq 2\delta$, а $g(x) = \min\{xa_1, \dots, xa_n\} \leq xa_N < \delta$, адже $N \leq n$. Тому $2g(x) - xa_k < 2\delta - 2\delta = 0$, отже, $g_k(x) = 0$, а значить, і $\lambda_k = \varphi_{n,k}(x) = 0$, а тоді і $\Sigma_2 = 0$.

Якщо ж $k \in K_1$, то $a_k x < 2\delta$, тому $f(a_k) - f(x) \in V$, отже,

$$f_n(x) - f(x) = \Sigma_1 \in \sum_{k \in K_1} \varphi_{n,k}(x) V = \sum_{k \in K_1} \lambda_k V,$$

де $\lambda_k = \varphi_{n,k}(x)$. Але $\lambda_k \geq 0$ для кожного $k = 1, \dots, n$, тому $\sum\limits_{k \in K_1} \lambda_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. З опуклості V випливає, що $\sum\limits_{k \in K_1} \lambda_k V \subseteq V$. Тепер маємо

$$f_n(x) - f(x) \in \sum_{k \in K_1} \lambda_k V \subseteq V \subseteq W,$$

як тільки $n \geq N$. Отже, $f_n(x) \to f(x)$ в Z і теорема доведена. $\square$

5 Апроксимація нарізно неперервних функцій з допомогою операторів Гана

Нехай X і Y – топологічні простори, Z – топологічний векторний простір. Співставимо двом відображенням $\varphi : X \to \mathbb{R}$ і $\psi : Y \to Z$ відображення $\varphi \otimes \psi : X \times Y \to Z$, $\varphi \otimes \psi(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$, яке називається *тензорним добутком відображень* φ і ψ.

Лема 14.4. *Нехай $\varphi \in C(X, \mathbb{R})$ і $\psi \in C(Y, Z)$. Тоді $\varphi \otimes \psi \in C(X \times Y, Z)$.*

Доведення. Розглянемо неперервні відображення $\varphi \times \psi : X \times Y \to \mathbb{R} \times Z$ і $m : \mathbb{R} \times Z \to Z$,

$$\varphi \times \psi(x, y) = (\varphi(x), \psi(y)) \quad \text{і} \quad m(\lambda, z) = \lambda z \quad \text{при} \quad x \in X, y \in Y, z \in Z, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Тоді

$$(m \circ (\varphi \times \psi))(x, y) = m(\varphi(x), \psi(y)) = \varphi(x)\psi(y) = (\varphi \otimes \psi)(x, y)$$

на $X \times Y$. Отже, $\varphi \otimes \psi = m \circ (\varphi \times \psi)$ і неперервність відображення $\varphi \otimes \psi$ випливає з теореми про неперервність композиції неперервних відображень. □

Теорема 14.3. *Нехай X – сепарабельний метричний простір, Y – топологічний простір, Z – локально опуклий простір, $A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ – всюди щільна в X множина, в якій $a_k \neq a_j$ при $k \neq j$, $f \in CC(X \times Y, Z)$, H_n – оператор Гана, породжений точками $a_1, \dots, a_n$ і відповідними функціями Гана $\varphi_{n,1}, \dots, \varphi_{n,n}$, і $f_n(x, y) = (H_n f_y)(x)$ на $X \times Y$. Тоді $f_n \in C(X \times Y, Z)$ для кожного n і $f_n(p) \to f(p)$ в Z на $X \times Y$.*

Доведення. Нехай $p = (x, y) \in X \times Y$. Тоді

$$f_n(x, y) = (H_n f_y)(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{n,k}(x) f_y(a_k) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{n,k}(x) f(a_k, y) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \varphi_{n,k}(x) f^{a_k}(y) = \sum_{k=1}^{n} (\varphi_{n,k} \otimes f^{a_k})(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} \varphi_{n,k} \otimes f^{a_k} \right)(x, y).$$

Отже, $f_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{n,k} \otimes f^{a_k}$. Оскільки, за лемою 14.4, всі функції $\varphi_{n,k} \otimes f^{a_k}$ неперервні, то і їх сума f_n буде неперервною функцією на $X \times Y$. Тут ми використали неперервність нарізно неперервної функції f відносно другої змінної.

Але функція f неперервна і відносно першої змінної, тому $f_y \in C(X, Z)$. В такому разі, з теореми 14.2 випливає, що

$$f_n(p) = f_n(x, y) = (H_n f_y)(x) \to f_y(x) = f(x, y) = f(p)$$

у просторі Z. Отже, $f \in B_1(X \times Y, Z)$. □

Наслідок 14.1. *Нехай X – сепарабельний метричний простір, Y – топологічний простір і Z – локально опуклий простір. Тоді $CC(X \times Y, Z) \subseteq B_1(X \times Y, Z)$.*

Доведення. Якщо простір X нескінченний, то в ньому можна вибрати зліченну всюди щільну множину $A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$, для якої $a_k \neq a_j$ при $k \neq j$. Тоді наше включення випливає з теореми 14.3.

Якщо ж простір X скінченний, то $CC(X \times Y, Z) = C(X \times Y, Z) \subseteq B_1(X \times Y, Z)$, якщо Z – довільний топологічний простір. □

Методом Лебеґа ми отримали включення $CC(\mathbb{R} \times Y, Z) \subseteq B_1(\mathbb{R} \times Y, Z)$, коли Z – топологічний векторний простір, а метод Гана вимагав локальної опуклості простору Z. Відповідь на питання про те, чи справедливе включення $CC(X \times Y, Z) \subseteq B_1(X \times Y, Z)$, коли X – сепарабельний метричний простір, Y – топологічний простір і Z – топологічний векторний простір, поки що невідома.

Лекція №15

Паракомпактні простори і розбиття одиниці

1 Означення паракомпактних просторів та їх паракомпактність

Кажуть, що система множин $\mathcal{A}$ *вписана* в систему $\mathcal{B}$, якщо для кожної множини $A \in \mathcal{A}$ існує така множина $B \in \mathcal{B}$, що $A \subseteq B$. Це позначається символом $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$.

Топологічний простір X називається *паракомпактним*, якщо в кожне його відкрите покриття $\mathcal{U}$ можна вписати локально скінченне відкрите покриття $\mathcal{V}$. Поняття паракомпактності ввів французький математик Жан Д'єдонне у 1944 році. Воно відіграє важливу роль у топології, теорії функцій і функціональному аналізі. Ми його використаємо при вивченні поточкових наближень нарізно неперервних відображень неперервними.

Зрозуміло, що кожний компактний простір паракомпактний. Гаусдорфовий паракомпактний простір називається *паракомпактом*. У цьому пункті ми з'ясуємо, що кожний паракомпакт є нормальним простором.

Лема 15.1. *Нехай A і B – дві неперетинні замкнені підмножини паракомпактного простору X, такі, що для кожного $y \in B$ існують відкриті множини U_y і V_y, для яких $A \subseteq U_y$, $y \in V_y$ і $U_y \cap V_y = \emptyset$. Тоді існують такі відкриті множини U і V, що $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ і $U \cap V = \emptyset$.*

Доведення. Система $\mathcal{V} = \{X \setminus B\} \cup \{V_y : y \in B\}$ є відкритим покриттям простору X, в яке на основі паракомпактності X ми можемо вписати відкрите локально скінченне покриття $\mathcal{W}$. Розглянемо його частину

$$\mathcal{W}_0 = \{W \in \mathcal{W} : W \cap B \neq \emptyset\},$$

яка, зрозуміло, є відкритим покриттям множини B. Покажемо, що $A \cap \overline{W} = \emptyset$ для кожного $W \in \mathcal{W}_0$. Справді, нехай $W \in \mathcal{W}_0$. Тоді $W \cap B \neq \emptyset$, тобто $W \not\subseteq X \setminus B$. Оскільки $W \in \mathcal{W} \preceq \mathcal{V}$, то існує елемент $V' \in \mathcal{V}$ такий, що $W \subseteq V'$. Зауважимо, що $V' \neq X \setminus B$. Тому існує така точка $y \in B$, що $V' = V_y$. Тоді $W \subseteq V_y$. Але за умовою $A \subseteq U_y$ і $U_y \cap V_y = \emptyset$. Тому $W \subseteq X \setminus U_y$, причому множина $X \setminus U_y$ замкнена. Тепер маємо

$$\overline{W} \subseteq \overline{X \setminus U_y} = X \setminus U_y \subseteq X \setminus A,$$

тобто $A \cap \overline{W} = \emptyset$.

Розглянемо множину $F = \bigcup\limits_{W\in\mathcal{W}_0} \overline{W}$. Система $\mathcal{W}_0$ є локально скінченною, як підсистема локально скінченної системи $\mathcal{W}$. Отже, за теоремою 13.1 множина F замкнена. Тому її доповнення $U = X \setminus F$ – це відкрита множина, причому $U \supseteq A$, бо

$$A \cap F = \bigcap_{W\in\mathcal{W}_0} A \cap \overline{W} = \emptyset.$$

Разом з тим, для відкритої множини $V = \bigcup \mathcal{W}_0$ маємо $B \subseteq V \subseteq F$. Отже, множини U і V шукані. □

Теорема 15.1. *Кожний паракомпакт X є нормальним простором.*

Доведення. Спочатку покажемо, що простір X регулярний, тобто задовольняє аксіоми T_1 і T_3.

По-перше, простір X гаусдорфовий, тобто задовольняє аксіому T_2, а значить, і аксіому T_1. Далі, нехай $x \in X$, B – замкнена в X множина і $x \notin B$. Одноточкова множина $\{x\}$ замкнена за аксіомою T_1 і $\{x\} \cap B = \emptyset$. Оскільки простір X гаусдорфовий, то для кожного $y \in B$ існують такі відкриті множини G_y і H_y, що $G_y \cap H_y = \emptyset$, $x \in G_y$ і $y \in H_y$. Тому, за лемою 15.1, існують такі відкриті множини U_x і V_x, що $x \in U_x$ і $B \subseteq V_x$. Отже, в просторі X виконується аксіома T_3.

Нехай A і B – замкнені множини в X, для яких $A \cap B = \emptyset$. Тоді, за доведеним для кожного $x \in A$, існують такі відкриті множини U_x і V_x, що $x \in U_x$, $B \subseteq V_x$ і $U_x \cap V_x = \emptyset$. Застосувавши ще раз лему 15.1, ми побудуємо такі відкриті множини U і V, що $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ і $U \cap V = \emptyset$. Отже, виконується аксіома відокремності T_4 і простір X нормальний. □

2 Теорема Стоуна про паракомпактність метризовного простору

Система множин $\mathcal{A}$ в топологічному просторі X називається *дискретною*, якщо у кожної точки $x \in X$ є такий окіл U, який перетинається щонайбільше з одним елементом системи $\mathcal{A}$, тобто система $\mathcal{A}_U = \{A \in \mathcal{A} : A \cap U \neq \emptyset\}$ має не більше одного елемента. Кажуть, що система $\mathcal{A}$ *σ-дискретна*, якщо $\mathcal{A} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$, де всі системи $\mathcal{A}_n$ дискретні.

Наступний результат встановив американський математик А.Стоун у 1948 році. Ідея викладеного нижче доведення належить М. Рудіну.

Теорема 15.2. *Нехай X – метризовний топологічний простір і $\mathcal{U} = \{U_s : s \in S\}$ – його відкрите покриття. Тоді існує відкрите локально скінченне і σ-дискретне покриття $\mathcal{V}$ простору X, яке вписане в $\mathcal{U}$. Зокрема, простір X паракомпактний.*

Доведення. Оскільки простір X метризовний, то існує метрика d на X, яка породжує його топологічну структуру. Нехай

$$B(x,r) = \big\{u \in X : d(x,u) < r\big\}$$

– відкрита куля в X з центром у точці x і радіусом $r > 0$. Зрозуміло, що вона буде відкритою множиною в просторі X.

Потрібну нам систему $\mathcal{V}$ ми будемо шукати у вигляді об'єднання $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$ послідовності відкритих дискретний систем

$$\mathcal{V}_n = \big\{V_{n,s} : s \in S\big\},$$

які визначатимемо індуктивно.

За теоремою Цермело [4, p. 8], на множині S існує порядок $\le$, відносно якого вона цілком впорядкована. Припустимо, що $n \in \mathbb{N}$ і при $k < n$ всі системи $\mathcal{V}_k$ вже визначені. Для довільного $s \in S$ покладемо

$$G_s = \bigcup_{t<s} U_t \quad \text{i} \quad H_n = \bigcup_{k<n} \bigcup_{t<s} V_{k,t}.$$

Уведемо множини

$$A_{n,s} = \big\{a \in X : B(a, \tfrac{3}{2^n}) \subseteq U_s\big\} \setminus (G_s \cup H_n) \quad \text{i} \quad V_{n,s} = \bigcup_{a \in A_{n,s}} B(a, \tfrac{1}{2^n}),$$

з допомогою яких визначимо наступну систему $\mathcal{V}_n = \{V_{n,s} : s \in S\}$. Таким чином, системи $\mathcal{V}_n$ визначені для кожного номера n.

Покажемо, що система $\mathcal{V} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$ і є шуканою. Для цього потрібно встановити, що кожна система $\mathcal{V}_n$ дискретна, система $\mathcal{V}$ утворює локально скінченне покриття простору X і $\mathcal{V} \preceq \mathcal{U}$.

Для кожного $x \in V_{n,s}$ існує таке $a \in A_{n,s}$, що $x \in B(a, \frac{1}{2^n})$. Тоді

$$x \in B(a, \tfrac{1}{2^n}) \subseteq B(a, \tfrac{3}{2^n}) \subseteq U_s.$$

Отже, $V_{n,s} \subseteq U_s$ для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $s \in S$. Тому $\mathcal{V}_n \preceq \mathcal{U}$ для довільного n, а тому $\mathcal{V} \preceq \mathcal{U}$.

Далі, припустимо, що $x_1 \in V_{n,s_1}$ і $x_2 \in V_{n,s_2}$, де $s_1, s_2 \in S$ і $s_1 < s_2$. Покажемо, що $d(x_1, x_2) > \frac{1}{2^n}$. Виберемо такі точки $a_1 \in A_{n,s_1}$ і $a_2 \in A_{n,s_2}$, що $x_i \in B(a_i, \frac{1}{2^n})$ при $i = 1, 2$. За побудовою $B(a_1, \frac{3}{2^n}) \subseteq U_{s_1}$ і $a_2 \notin G_{s_2}$. Крім того, $s_1 < s_2$, і тому $U_{s_1} \subseteq G_{s_2}$. Отже, $a_2 \notin U_{s_1}$, і тоді $a_2 \notin B(a_1, \frac{3}{2^n})$, тобто $d(a_1, a_2) \ge \frac{3}{2^n}$. В такому разі, за нерівністю трикутника маємо

$$d(x_1, x_2) \ge d(a_1, a_2) - d(x_1, a_1) - d(a_2, x_2) > \tfrac{3}{2^n} - \tfrac{1}{2^n} - \tfrac{1}{2^n} = \tfrac{1}{2^n}.$$

Отже, $d(x_1, x_2) > \frac{1}{2^n}$.

З доведеного легко випливає, що кожна система $\mathcal{V}_n$ дискретна. Справді, для кожної точки $x \in X$ її окіл $U = B(x, \frac{1}{2^{n+1}})$ може перетинатися щонайбільше з однією з множин $V_{n,s}$, де $s \in S$. Припустимо, що це не так, тобто існують точки $x_1, x_2 \in X$ та індекси $s_1, s_2 \in S$ такі, що $s_1 < s_2$, $x_1 \in U \cap V_{n,s_1}$ і $x_2 \in U \cap V_{n,s_2}$. Тоді

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x) + d(x, x_2) < \tfrac{1}{2^{n+1}} + \tfrac{1}{2^{n+1}} = \tfrac{1}{2^n},$$

що суперечить доведеній вище властивості. Таким чином, система $\mathcal{V}_n$ чи навіть сім'я $(V_{n,s} : s \in S)$ дискретні, а система $\mathcal{V}$ σ-дискретна.

Доведемо, що система $\mathcal{V}$ покриває весь простір X. Нехай $x \in X$. Оскільки $X = \bigcup\limits_{s \in S} U_s$, то множина $T = \{s \in S : x \in U_s\}$ непорожня. Але $T \subseteq S$ і S – цілком впорядкована множина. Тому в множині T є найменший елемент s. В такому разі, $x \in U_s$ і $x \notin U_t$ для кожного $t < s$. Отже, $x \notin G_s$. Множина U_s відкрита і $\frac{3}{2^n} \to 0$. Тому знайдеться такий номер n, що $B(x, \frac{3}{2^n}) \subseteq U_s$. Нехай

$$E = \bigcup \mathcal{V} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{t \in S} V_{k,t}.$$

Ясно, що $H_n \subseteq E$. Тому якщо $x \in H_n$, то $x \in E$. Якщо ж $x \notin H_n$, то $x \in A_{n,s}$, і тоді $x \in V_{n,s}$, адже $x \in B(x, \frac{1}{2^n})$. Так чи інакше, $x \in E$. Отже, $X = E = \bigcup \mathcal{V}$.

Залишилося довести, що система $\mathcal{V}$ локально скінченна. Нехай $x \in X$. Оскільки система $\mathcal{V}$ покриває X, то існують такі елементи $j \in \mathbb{N}$ і $t \in S$, що $x \in V_{j,t}$. Множина $V_{j,t}$ відкрита. Тому існує такий номер k, що $B(x, \frac{1}{2^k}) \subseteq V_{j,t}$. Нехай $m = k + j - 1$ і $n > m$. Покажемо, що $B(x, \frac{1}{2^{m+2}}) \cap V_{n,s} = \emptyset$ для кожного $s \in S$. Візьмемо $y \in V_{n,s}$. Тоді існує такий елемент $a \in A_{n,s}$, що $y \in B(a, \frac{1}{2^n})$. Оскільки $j < n$ і $a \notin H_n$, то $a \notin V_{j,t}$, адже $V_{j,t} \subseteq H_n$. Тому $a \notin B(x, \frac{1}{2^k})$, тобто $d(a, x) \geq \frac{1}{2^k}$. Крім того, $d(y, a) < \frac{1}{2^n}$. Отже,

$$d(x, y) \geq d(x, a) - d(y, a) \geq \tfrac{1}{2^k} - \tfrac{1}{2^n} \geq \tfrac{1}{2^m} - \tfrac{1}{2^{m+1}} = \tfrac{1}{2^{m+1}},$$

адже $k \leq m < m + 1 \leq n$. Тому $y \notin B(x, \frac{1}{2^{m+1}})$. Кожна з систем $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_m$ дискретна, тому їх об'єднання $\mathcal{W}_m = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \mathcal{V}_i$ – це локально скінченна система. Отже, існує такий окіл V точки x, який перетинається лише зі скінченною кількістю елементів системи $\mathcal{W}_m$. Разом з тим, окіл $B(x, \frac{1}{2^{m+1}})$ точки x не перетинається з жодним елементом системи $\mathcal{R}_m = \bigcup\limits_{n > m} \mathcal{V}_n$. Тому окіл $U = V \cap B(x, \frac{1}{2^{m+1}})$ точки x перетинається лише зі скінченною кількістю елементів системи $\mathcal{V} = \mathcal{W}_m \cup \mathcal{R}_m$, що й завершує доведення теореми. $\square$

3 Побудова локально скінченної сім'ї замкнених множин, комбінаторно вписаної у відкрите покриття

Кажуть, що сім'я множин $\alpha = (A_s)_{s\in S}$ *комбінаторно вписана* в сім'ю $\beta = (B_s)_{s\in S}$, якщо $A_s \subseteq B_s$ для кожного $s \in S$. Наступний результат допоможе нам далі при побудові розбиттів одиниці. У ньому йдеться про різні покриття саме простору X.

Лема 15.2. *Нехай у кожне відкрите покриття регулярного простору X можна вписати деяке локально скінченне покриття. Тоді для кожного відкритого покриття $(U_s)_{s\in S}$ існує комбінаторно вписане в нього локально скінченне замкнене покриття $(F_s)_{s\in S}$.*

Доведення. Оскільки простір X регулярний і всі множини U_s відкриті, то для кожного $s \in S$ і довільної точки $x \in U_s$ існує такий її окіл $W_{x,s}$, що $\overline{W}_{x,s} \subseteq U_s$. Нехай

$$\mathcal{W}_s = \{W_{x,s} : x \in U_s\} \qquad \text{і} \qquad \mathcal{W} = \bigcup_{s\in S} \mathcal{W}_s.$$

Оскільки $\bigcup \mathcal{W}_s = U_s$ для кожного $s \in S$, то

$$\bigcup \mathcal{W} = \bigcup_{s\in S} \bigcup \mathcal{W}_s = \bigcup_{s\in S} U_s = X.$$

Отже, $\mathcal{W}$ – це відкрите покриття простору X, яке вписане в покриття $\mathcal{U} = \{U_s : s \in S\}$, причому для кожного $W \in \mathcal{W}$ існує такий індекс $s \in S$, що $\overline{W} \subseteq U_s$.

За умовою існує таке локально скінченне покриття $\mathcal{A}$ простору X, що $\mathcal{A} \preceq \mathcal{W}$. Для кожного $A \in \mathcal{A}$ існує такий індекс $s \in S$, що для деякого $W \in \mathcal{W}$ виконується включення

$$\overline{A} \subseteq \overline{W} \subseteq U_s.$$

Кожному $A \in \mathcal{A}$ зіставимо рівно один такий індекс $s \in S$ і позначимо його $\varphi(A)$. Покладемо

$$\mathcal{A}_s = \{A \in \mathcal{A} : \varphi(A) = s\} \qquad \text{і} \qquad F_s = \bigcup_{A\in\mathcal{A}_s} \overline{A}.$$

Оскільки всі системи $\mathcal{A}_s$ локально скінченні, як підсистеми локально скінченної системи $\mathcal{A}$, то всі множини F_s замкнені.

За побудовою $F_s \subseteq U_s$ для кожного $s \in S$, адже $\overline{A} \subseteq U_s$ для кожного $A \in \mathcal{A}_s$. Отже, сім'я $(F_s)_{s\in S}$ комбінаторно вписана в сім'ю $(U_s)_{s\in S}$. Крім того, $\mathcal{A} = \bigcup\limits_{s\in S} \mathcal{A}_s$, звідки випливає, що

$$\bigcup_{s\in S} F_s = \bigcup_{s\in S} \bigcup_{A\in\mathcal{A}_s} \overline{A} = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} \overline{A} = X,$$

бо $\bigcup \mathcal{A} = X$. Отже, $(F_s)_{s\in S}$ – це покриття простору X.

Нарешті з'ясуємо, що сім'я $(F_s)_{s\in S}$ локально скінченна. Зафіксуємо точку $x \in X$. Оскільки система $\mathcal{A}$ локально скінченна, то існує такий відкритий окіл U точки x, що система

$$\mathcal{A}(U) = \{A \in \mathcal{A} : A \cap U \neq \emptyset\}$$

скінченна і складається, скажімо, з елементів $A_1, \ldots, A_n$. Покладемо $s_k = \varphi(A_k)$ при $k = 1, \ldots, n$ і покажемо, що

$$\{s \in S : F_s \cap U \neq \emptyset\} \subseteq \{s_k : 1 \leq k \leq n\},$$

звідки і випливає потрібна нам локальна скінченність сім'ї $(F_s : s \in S)$ в точці x.

Нехай $F_s \cap U \neq \emptyset$, тобто існує $u \in F_s \cap U$ для деякого $s \in S$. Оскільки $u \in F_s$, то існує таке $A \in \mathcal{A}_s$, що $u \in \overline{A}$. Зауважимо, що при цьому $s = \varphi(A)$. Крім того, $u \in U$ і U відкрита множина. Тому U – це окіл точки u. У такому разі, $U \cap A \neq \emptyset$, і тому $A \in \mathcal{A}(U)$. Отже, існує такий номер $k \leq n$, що $A = A_k$. Тепер маємо

$$s = \varphi(A) = \varphi(A_k) = s_k,$$

що й завершує доведення. $\square$

4 Теорема Майкла про розбиття одиниці

Носієм функції $\varphi : X \to \mathbb{R}$ ми будемо називати множину $\operatorname{supp} \varphi = \{x \in X : \varphi(x) \neq 0\}$.

Нехай X – топологічний простір і S – множина. Сім'я $(\varphi_s)_{s\in S}$ неперервних функцій $\varphi_s : X \to [0; 1]$ називається *локально скінченним розбиттям одиниці*, якщо сім'я носіїв $\sigma = (\operatorname{supp} \varphi_s)_{s\in S}$ локально скінченна і $\sum\limits_{s\in S} \varphi_s(x) = 1$ для кожного $x \in X$. Кажуть також, що сім'я $(\varphi_s)_{s\in S}$ функцій $\varphi_s : X \to \mathbb{R}$ *підпорядкована* системі множин $\mathcal{A}$, якщо система носіїв $\{\operatorname{supp} \varphi_s : s \in S\}$ вписана в систему $\mathcal{A}$, і *комбінаторно підпорядкована* сім'ї множин $\alpha = (A_s)_{s\in S}$, якщо $\operatorname{supp} \varphi_s \subseteq A_s$ для кожного $s \in S$.

Наступний результат, встановлений американським математиком Е. Майклом у 1958 році, часто використовують для побудов тих чи інших функцій.

Теорема 15.3 (Майкл). *Нехай X – паракомпакт і $\mathcal{V}$ – відкрите покриття простору X. Тоді існують локально скінченне відкрите покриття $(U_s)_{s\in S}$ простору X, вписане в $\mathcal{V}$, і розбиття одиниці $(\varphi_s)_{s\in S}$, яке комбінаторно підпорядковане покриттю $(U_s)_{s\in S}$.*

Доведення. Існування покриття $(U_s)_{s\in S}$ випливає безпосередньо з паракомпактності простору X. За теоремою 15.1, простір X нормальний, а отже, регулярний. Крім того, в кожне його відкрите покриття можна вписати локально скінченне відкрите покриття. Можна застосувати лему 15.2, згідно з якою існує локально скінченне замкнене покриття $(F_s)_{s\in S}$, комбінаторно вписане в $(U_s)_{s\in S}$. Оскільки $F_s \subseteq U_s$ для кожного $s \in S$ і простір X нормальний, то за лемою Урисона [4, 1.5.11] існують такі неперервні функції $\psi_s : X \to [0; 1]$, що $\psi_s(x) = 1$ на F_s і $\psi_s(x) = 0$ на $X \setminus U_s$. Сім'я носіїв $(\operatorname{supp}\psi_s)_{s\in S}$ комбінаторно вписана в локально скінченну сім'ю $(U_s)_{s\in S}$, а тому і сама локально скінченна. Звідси випливає, що функція

$$\psi(x) = \sum_{s\in S} \psi_s(x)$$

визначена у неперервна на X. При цьому, $\psi(x) > 0$ на X, бо $(F_s)_{s\in S}$ – це покриття простору X і $\psi(x) \geq \psi_s(x) = 1$ на F_s для кожного $s \in S$. Тоді можна визначити на просторі X частки $\varphi_s = \frac{\psi_s}{\psi}$, які будуть утворювати шукане розбиття одиниці, адже вони неперервні, як частки двох неперервних функцій, для яких $\operatorname{supp}\varphi_s = \operatorname{supp}\psi_s$ і

$$\sum_{s\in S} \varphi_s(x) = \sum_{s\in S} \frac{\psi_s(x)}{\psi(x)} = \frac{1}{\psi(x)} \sum_{s\in S} \psi_s(x) = \frac{\psi(x)}{\psi(x)} = 1$$

для кожного $x \in X$. □

Лекція №16

Метод Рудіна і берівська класифікація

1 Оператори Рудіна

Американський математик В. Рудін узагальнив побудови Г. Гана. Йому вдалося в теоремі Гана позбиватися умови сепарабельності простору X, при цьому він розглядав відображення зі значеннями в локально опуклих просторах. Прогрес був досягнутий завдяки використанню теореми Стоуна про паракомпактність метризовного простору і теореми Майкла про розбиття одиниці. Ми тут модифікуємо його виклад, увівши оператори Рудіна подібно до операторів Гана, розглянутих раніше, а також встановивши перед теоремою про наближення нарізно неперервних функцій результат про наближення неперервних функцій з допомогою операторів Рудіна.

Нехай X – метризовний простір, d – метрика на X, яка породжує його топологічну структуру. Розглянемо для кожного номера n відкрите покриття $\mathcal{B}_n$ простору X відкритими кулями $B(x, \frac{1}{n}) = \{u \in X : d(u, x) < \frac{1}{n}\}$, де x пробігає весь простір X. Оскільки за теоремою Стоуна, простір X – це паракомпакт, то за теоремою Майкла, для кожного n існує локально скінченне розбиття одиниці $(\varphi_{n,i})_{i \in I_n}$, яке підпорядковане покриттю $\mathcal{B}_n$. Функції $\varphi_{n,i} : X \to [0; 1]$ неперервні, сім'я їх носіїв $(\operatorname{supp} \varphi_{n,i})_{i \in I_n}$ локально скінченна і для кожного $i \in I_n$ існує така куля $B(x, \frac{1}{n})$, що $\operatorname{supp} \varphi_{n,i} \subseteq B(x, \frac{1}{n})$. Крім того, ми будемо вважати, що всі функції $\varphi_{n,i}$ ненульові, бо нульові функції завжди можна викинути. А ще для кожного $n \in \mathbb{N}$ і довільного $x \in X$

$$\sum_{i \in I_n} \varphi_{n,i}(x) = 1.$$

Оскільки $\operatorname{supp} \varphi_{n,i} \neq \emptyset$ для кожного $i \in I_n$, то ми можемо вибрати точки $x_{n,i} \in \operatorname{supp} \varphi_{n,i}$, для яких $\varphi_{n,i}(x_{n,i}) > 0$. Нехай Z – топологічний векторний простір і $f : X \to Z$ – відображення. Поставимо йому у відповідність відображення $f_n = R_n f : X \to Z$, яке визначається формулою

$$f_n(x) = \sum_{i \in I_n} \varphi_{n,i}(x) f(x_{n,i}).$$

Оператор $R_n : Z^X \to Z^X$ називається *оператором Рудіна.*

Теорема 16.1. *Для кожної функції $f : X \to Z$ функція $f_n = R_n f$ неперервна.*

Доведення. Нехай $x_0 \in X$. Виберемо такий відкритий окіл U_0 точки x_0 в X, що множина

$$I_{n,0} = \{i \in I_n : U_0 \cap \operatorname{supp} \varphi_{n,i} \neq \emptyset\}$$

скінченна. Тоді для кожного $x \in U_0$ будемо мати, що $\varphi_{n,i}(x) = 0$ при $i \in I_n \setminus I_{n,0}$. Тому

$$f_n(x) = \sum_{i \in I_{n,0}} \varphi_{n,i}(x) f(x_{n,i}).$$

Оскільки операції додавання і множення на скаляр у топологічному векторному просторі неперервні, то звуження $f_n|_{U_0}$ неперервне, зокрема, неперервне і в точці $x_0 \in U_0$. Але множина U_0 відкрита, тоді й функція f_n неперервна в точці x_0. Таким чином, f_n неперервна в довільній точці з X, $f_n \in C(X, Z)$. $\square$

Отже, оператор Рудіна R_n діє з простору Z^X у простір $C(X, Z)$.

2 Апроксимація неперервних функцій з допомогою операторів Рудіна

В наступній теоремі та її доведенні ми використовуємо означення і позначення, уведені в попередньому пункті.

Теорема 16.2. *Нехай X – метризовний простір, Z – локально опуклий простір, $f \in C(X, Z)$, R_n – оператор Рудіна і $f_n = R_n f$. Тоді $f_n(x) \to f(x)$ в Z для кожного $x \in X$.*

Доведення. Нехай W – окіл нуля в просторі Z. Знайдемо такий опуклий окіл нуля W_0 в Z, що $W_0 \subseteq W$. Зафіксуємо точку $x \in X$. Оскільки функція f неперервна в точці x, то існує таке число $\delta > 0$, що для всіх $u \in X$ з нерівності $d(x, u) < \delta$ випливає, що $f(u) - f(x) \in W_0$.

Візьмемо такий номер N, що $\frac{4}{N} < \delta$ і нехай $n \geq N$. Тоді, оскільки

$$f_n(x) = \sum_{i \in I_n} \varphi_{n,i}(x) f(x_{n,i}) \qquad \text{і} \qquad f(x) = \sum_{i \in I_n} \varphi_{n,i}(x) f(x),$$

то

$$f_n(x) - f(x) = \sum_{i \in I_n} \varphi_{n,i}(x)(f(x_{n,i}) - f(x)).$$

Виберемо таке $\delta_0 > 0$, що $\delta_0 < \frac{\delta}{2}$ і для кулі $U_0 = B(x, \delta_0)$ множина

$$I_{n,0} = \{i \in I_n : U_0 \cap \operatorname{supp} \varphi_{n,i} \neq \emptyset\}$$

скінченна. Тоді $\varphi_{n,i}(x) = 0$ при $i \in I_n \setminus I_{n,0}$. Тому

$$f_n(x) - f(x) = \sum_{i \in I_{n,0}} \varphi_{n,i}(x)(f(x_{n,i}) - f(x)).$$

Для кожного $i \in I_{n,0}$ існує точка $u_{n,i} \in U_0 \cap \operatorname{supp} \varphi_{n,i}$. Крім того, існує така точка $a_i \in X$, що $\operatorname{supp} \varphi_{n,i} \subseteq B(a_i, \frac{1}{n})$. Оскільки $\{x_{n,i}, a_{n,i}\} \subseteq \operatorname{supp} \varphi_{n,i}$, то

$$d(a_i, x_{n,i}) < \tfrac{1}{n} \qquad \text{i} \qquad d(a_i, u_{n,i}) < \tfrac{1}{n}.$$

Отже,

$$d(u_{n,i}, x_{n,i}) \leq d(u_{n,i}, a_i) + d(a_i, x_{n,i}) < \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n} = \tfrac{2}{n} \leq \tfrac{2}{N} < \tfrac{\delta}{2}.$$

Але $u_{n,i} \in U_0$, тоді $d(x, u_{n,i}) < \delta_0 < \frac{\delta}{2}$. Тому

$$d(x, x_{n,i}) \leq d(x, u_{n,i}) + d(u_{n,i}, x_{n,i}) < \tfrac{\delta}{2} + \tfrac{\delta}{2} = \delta.$$

В такому разі, $f(x_{n,i}) - f(x) \in W_0$. Числа $\lambda_{n,i} = \varphi_{n,i}(x) \geq 0$ і

$$\sum_{i \in I_{n,0}} \lambda_{n,i} = \sum_{i \in I_n} \varphi_{n,i}(x) = 1.$$

Тому

$$f_n(x) - f(x) = \sum_{i \in I_{n,0}} \lambda_{n,i}(f(x_{n,i}) - f(x)) \in \sum_{i \in I_{n,0}} \lambda_{n,i} W_0 \subseteq W_0,$$

адже множина W_0 опукла. В такому разі, $f_n(x) - f(x) \in W$ при $n \geq N$. Отже, $f_n(x) \to f(x)$ в Z, що і треба було довести. $\square$

3 Теорема Рудіна

Наступний результат В.Рудін встановив у 1981 році, його ми називаємо *теоремою Рудіна.*

Теорема 16.3. *Нехай X – метризовний простір, Y – топологічний простір, Z – локально опуклий простір, $f \in CC(X \times Y, Z)$, R_n – оператор Рудіна і $f_n(x, y) = (R_n f_y)(x)$ на $X \times Y$. Тоді $f_n \in C(X \times Y, Z)$ і $f_n(x, y) \to f(x, y)$ в Z на $X \times Y$. Зокрема, $CC(X \times Y, Z) \subseteq B_1(X \times Y, Z)$.*

Доведення. За умовою

$$f_n(x, y) = \sum_{i \in I_n} \varphi_{n,i}(x) f(x_{n,i}, y) = \sum_{i \in I_n} (\varphi_{n,i} \otimes f^{x_{n,i}})(x, y)$$

при $x \in X$ і $y \in Y$. Оскільки функції $\varphi_{n,i} : X \to \mathbb{R}$ і $f^{x_{n,i}} : Y \to Z$ неперервні, то і їх тензорний добуток $g_{n,i} = \varphi_{n,i} \otimes f^{x_{n,i}} : X \times Y \to Z$ буде сукупно неперервною функцією. Сім'я $(g_{n,i})_{i \in I_n}$ буде локально скінченною разом з сім 'єю $(\varphi_{n,i})_{i \in I_n}$. Тому і функція f_n буде неперервною, як сума локально скінченної сім'ї неперервних функцій.

Крім того,

$$f_n(x,y) = (R_n f_y)(x) \to f_y(x) = f(x,y)$$

в просторі Z на $X \times Y$ за теоремою 16.2, адже функції f_y неперервні. Оскільки $f_n \in C(X \times Y, Z)$, то $f \in B_1(X \times Y, Z)$. Отже, $CC(X \times Y, Z) \subseteq B_1(X \times Y, Z)$. $\square$

Зауваження 16.1. *Зауважимо, що можна отримати підсилений варіант теореми 16.3, який, власне, і був доведений В. Рудіним, для так званих вертикально майже неперервних функцій $f : X \times Y \to Z$, які характеризуються тим, що у них множина $Y_C(f) = \{y \in Y : f_y \in C(X,Z)\} = Y$, а множина $X_C(f) = \{x \in X : f^x \in C(Y,Z)\}$ всюди щільна в X. Множина таких функцій позначається символом $C\overline{C}(X \times Y, Z)$.*

Справді, нехай $f \in C\overline{C}(X \times Y, Z)$. Тоді $\overline{X_C(f)} = X$. Оскільки носії $\operatorname{supp} \varphi_{n,i}$ функцій з розбиття одиниці непорожні і відкриті, то $X_C(f) \cap \operatorname{supp} \varphi_{n,i} \neq \emptyset$, отже, існують точки $x_{n,i} \in X_C(f) \cap \operatorname{supp} \varphi_{n,i}$. Позначивши для таких точок функції

$$f_n(x,y) = \sum_{i \in I_n} \varphi_{n,i}(x) f(x_{n,i}, y)$$

на $X \times Y$, ми отримаємо послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ функцій f_n, яка поточково прямує до функції f.

На завершення сформулюємо досі нерозв'язану проблему.

Питання 16.1. *Чи виконується включення $CC(X \times Y, Z) \subseteq B_1(X \times Y, Z)$, якщо X – метризовний простір, Y – топологічний простір і Z – топологічний векторний простір?*

4 Берівська класифікація

Окрім уведених у лекції №12 функцій першого класу Р. Бер ввів поняття функції класу α, де α – довільне скінченне або зліченне порядкове число. А саме, ми покладаємо $B_0(X,Y) = C(X,Y)$ і функціями нульового класу називаємо неперервні функції $f : X \to Y$. Нехай $\alpha > 0$ – скінченне або або зліченне порядкове число і класи $B_\xi(X,Y)$ визначені при всіх $\xi < \alpha$. Кажуть, що $f : X \to Y$ – це *функція класу* α, якщо існують такі послідовності порядкових чисел $\xi_n < \alpha$ і функцій $f_n \in B_{\xi_n}(X,Y)$, що $f_n(x) \to f(x)$ в Y на X. Множина всіх функцій $f : X \to Y$ класу α нозначається $B_\alpha(X,Y)$.

Нехай $X_1, \dots, X_n$ і Z – топологічні простори і $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to Z$ – відображення. Воно називається *нарізно неперервним* у точці $a = (a_1, \dots, a_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$, якщо для кожного $k = 1, \dots, n$ відображення $f_{a,k} : X_k \to Z$, що задається формулою

$$f_{a,k}(x_k) = f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_n), \quad x_k \in X_k$$

буде неперервним у точці a_k. Таке відображення називається *нарізно неперервним*, якщо воно є таким у кожній точці добутку $X = X_1 \times \dots \times X_n$. Сукупність усіх нарізно неперервних відображень $f : X \to Z$ ми позначаємо символом $S_n(X, Z)$. Зокрема, $S_2(X_1 \times X_2, Z) = CC(X_1 \times X_2, Z)$.

Розвиваючи метод Рудіна ми можемо довести таке узагальнення теореми Рудіна.

Теорема 16.4. *Нехай $X_1, \dots, X_n$ – метризовні простори, X_{n+1} – топологічний простір і Z – локально опуклий простір. Тоді*

$$S_{n+1}(X_1 \times \dots \times X_n \times X_{n+1}, Z) \subseteq B_n(X_1 \times \dots \times X_n \times X_{n+1}, Z).$$

При цьому добуток наділяється топологічною структурою добутку, в якій околом точки $a = (a_1, \dots, a_{n+1})$ вважається будь-яка множина U в $X_1 \times \dots \times X_{n+1}$, для якої існують такі околи U_k точок a_k у просторах X_k при $k = 1, \dots, n+1$, що $U_1 \times \dots \times U_{n+1} \subseteq U$.

Розділ IV. Пошарово рівномірне наближення нарізно неперервних функцій

Лекція №17

Топологія пошарово рівномірної збіжності

1 Топологія простору нарізно неперервних функцій

Нехай X і Y – непорожні компактні простори і $CC(X \times Y)$ – простір усіх нарізно неперервних функцій $f : X \times Y \to \mathbb{R}$. Він є лінійним підпростором простору $\mathbb{R}^{X\times Y}$ всіх дійснозначних функцій на добутку $X \times Y$. Для кожної функції $g \in C(X)$ розглянемо її рівномірну норму $\|g\|_\infty = \max\limits_{x\in X} |g(x)|$. Рівномірну норму на просторі $C(Y)$ ми позначатимемо так само.

Введемо на просторі $CC(X \times Y)$ природну сім'ю переднорм, покладаючи

$$\|f\|^x = \|f^x\|_\infty \quad \text{і} \quad \|f\|_y = \|f_y\|_\infty$$

для довільної функції $f \in CC(X \times Y)$, кожного $x \in X$ і кожного $y \in Y$. Нехай

$$\mathcal{P}_X = \big\{\| \cdot \|^x : x \in X\big\}, \quad \mathcal{P}_Y = \big\{\| \cdot \|_y : y \in Y\big\} \quad \text{і} \quad \mathcal{P} = \mathcal{P}_X \cup \mathcal{P}_Y.$$

Розглянемо на просторі $CC(X \times Y)$ локально опуклу топологію $\mathcal{T}$, що породжена сукупністю переднорм $\mathcal{P}$. Як випливає з [12], базу околів нуля топології $\mathcal{T}$ утворюють кулі

$$B_{\sigma,\tau,\varepsilon} = B_{\sigma,x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m,\varepsilon} = \big\{f \in CC(X\times Y) : \max\{\|f\|^{x_1}, \dots, \|f\|^{x_n}, \|f\|_{y_1}, \dots, \|f\|_{y_m}\} < \varepsilon\big\},$$

де $\sigma = \{x_1, \dots, x_n\}$ і $\tau = \{y_1, \dots, y_m\}$ – довільні скінченні множини у просторах X і Y відповідно, ε – довільне додатне число. Якщо $\sigma = \tau = \emptyset$, то ми вважаємо, що $B_{\sigma,\tau,\varepsilon} = CC(X\times Y)$ для кожного $\varepsilon > 0$. Локально опуклий простір $CC(X \times Y)$ з топологією $\mathcal{T}$ ми будемо позначати символом $S(X\times Y)$, Коли ж $X = Y = [0; 1]$ і $X\times Y = Q = [0; 1]^2$, то ми покладаємо $S = S(Q)$.

Теорема 17.1. *Напрямленість $(f_k)_{k\in K}$ збігається до функції f у просторі $S(X \times Y)$ тоді і тільки тоді, коли $f_k^x \rightrightarrows f^x$ на Y для кожного $x \in X$ і $f_{k,y} = (f_k)_y \rightrightarrows f_y$ на X для кожного $y \in Y$.*

Доведення. Ясно, що $f_k \to f$ у просторі $S(X\times Y)$ тоді і тільки тоді, коли $p(f_k - f)\to 0$ для кожної передномри $p\in\mathcal{P}$, тобто коли

$$\|f_k - f\|^x \to 0 \qquad \text{i} \qquad \|f_k - f\|_y \to 0$$

для довільних $x\in X$ і $y\in Y$. Але $\|f_k - f\|^x \to 0$ тоді і тільки тоді, коли $f_k^x \rightrightarrows f^x$ на Y, а $\|f_k - f\|_y \to 0$ тоді і тільки тоді, коли $f_{k,y} \rightrightarrows f_y$ на X, звідки і випливає твердження теореми. □

Якщо $f_k^x \rightrightarrows f^x$ на Y для кожного $x\in X$ і $f_{k,y}=(f_k)_y \rightrightarrows f_y$ на X для кожного $y\in Y$, то ми кажемо, що сітка з функцій f_k *пошарово рівномірно збігається* до функції f на $X\times Y$. Теорема 17.1 показує, що збіжність у просторі $S(X\times Y)$ це пошарово рівномірна збіжність на $X\times Y$. Тому топологію $\mathcal{T}$ називають *топологією пошарово рівномірної збіжності.* Зауважимо також, що збіжність напрямленості $(f_k)_{k\in K}$ до f в $S(X\times Y)$ рівносильна тому, що f_k рівномірно збігається до f на кожному хресті

$$\operatorname{cr}\{p\} = (\{x\}\times Y)\cup(X\times\{y\}),\quad p=(x,y)\in X\times Y.$$

Тому цю топологію також називають *топологією навхрест рівномірної збіжності*, або *хрест-рівномірною топологією.*

2 Повнота простору $S(X\times Y)$

Нагадаємо, що напрямленість $(t_k)_{k\in K}$ у топологічному векторному просторі T називається *фундаментальною*, якщо для кожного околу нуля U в T існує таке $k_0\in K$, що $t_k - t_j\in U$, як тільки $k,j\ge k_0$. Якщо топологія простору T задається множиною переднорм P, то фундаментальність напрямленості $(t_k)_{k\in K}$ рівносильна тому, що $p(x_k - x_j)\to 0$ для кожної переднорми $p\in P$. Простір T називається *повним*, якщо в ньому кожна фундаментальна напрямленість збіжна. Обернене виконується в кожному топологічному векторному просторі T. Кожний банаховий простір буде повним, як топологічний векторний простір (див. [12]).

Теорема 17.2. *Нехай X та Y – компактні простори. Тоді простір $S(X\times Y)$ повний.*

Доведення. Нехай $(f_k)_{k\in K}$ – фундаментальна сітка в просторі $S(X\times Y)$. Тоді $\|f_k - f\|^x\to 0$ для кожного $x\in X$ і $\|f_k - f\|_y\to 0$ для кожного $y\in Y$. З повноти банахових просторів $C(X)$ і $C(Y)$ з рівномірними нормами випливає, що для кожного $x\in X$ існує така функція

$f^x \in C(Y)$, що $f_k^x \rightrightarrows f^x$ на Y, і для кожного $y \in Y$ існує така функція $f_y \in C(X)$, що $f_{k,y} \rightrightarrows f_y$ на X. Зокрема, для довільних $x \in X$ і $y \in Y$ будемо мати

$$f^x(y) = \lim_{k\in K} f_k^x(y) = \lim_{k\in K} f_k(x,y) = \lim_{k\in K} f_{k,y}(x) = f_y(x).$$

Тоді формулою

$$f(x,y) = f^x(y) = f_y(x)$$

визначається функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, у якої вертикальний x-розріз $f(x,\cdot) = f^x$, а горизонтальний y-розріз $f(\cdot,y) = f_y$. Оскільки за побудовою функції f^x і f_y неперервні, то f – це нарізно неперервна функція, тобто $f \in S(X \times Y)$. Але

$$\|f_k - f\|^x = \|f_k^x - f^x\| \to 0 \qquad \text{і} \qquad \|f_k - f\|_y = \|f - k, y - f_y\| \to 0.$$

Отже, $f_k \to f$ у просторі $S(X \times Y)$. Таким чином, кожна фундаментальна сітка у просторі $S(X \times Y)$ збігається в ньому до деякої функції, що й дає повноту простору $S(X \times Y)$. $\square$

3 Топології $\mathcal{T}_{A,B}$ та їх властивості

Уведемо на просторі $CC(X \times Y)$ сім'ю топологій $\mathcal{T}_{A,B}$, аналогічних топології $\mathcal{T}$ пошарово рівномірної збіжності. Нехай $A \subseteq X$ і $B \subseteq Y$. Розглянемо на просторі $CC(X \times Y)$ сукупності переднорм

$$\mathcal{P}_A = \{\|\cdot\|^x : x \in A\}, \quad \mathcal{P}_B = \{\|\cdot\|_y : y \in B\} \quad \text{і} \quad \mathcal{P}_{A,B} = \mathcal{P}_A \cup \mathcal{P}_B.$$

Символом $\mathcal{T}_{A,B}$ ми позначимо локально опуклу топологію на просторі $CC(X \times Y)$, що породжена сукупністю переднорм $\mathcal{P}_{A,B}$. Ясно, що $\mathcal{T}_{X,Y}$ – це топологія пошарово рівномірної збіжності на $CC(X \times Y)$.

Теорема 17.3. *Нехай X і Y – нескінченні компакти, A і C підмножини X, B і D – підмножини Y, причому $(A,C) \neq (B,D)$. Тоді $\mathcal{T}_{A,B} \neq \mathcal{T}_{C,D}$.*

Доведення. Припустимо, наприклад, що існує точка $x_0 \in A \setminus C$. Розглянемо кулю $B_0 = B_{\{x_0\};\emptyset;1}$, яка є околом нуля в топології $\mathcal{T}_{A,B}$, адже $x_0 \in A$ та $\emptyset \subseteq B$, і покажемо, що вона не є околом нуля в топології $\mathcal{T}_{C,D}$.

Ми будемо використовувати поняття *хреста* $\mathrm{cr}(E)$ підмножини E добутку $P = X \times Y$, що визначається рівністю

$$\mathrm{cr}(E) = \mathrm{pr}_X^{-1}(\mathrm{pr}_X(E)) \cup \mathrm{pr}_Y^{-1}(\mathrm{pr}_Y(E)) = (M \times Y) \cup (X \times N),$$

де $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$, $\mathrm{pr}_X(x,y) = x$, – проекція на X, $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$, $\mathrm{pr}_Y(x,y) = y$, – проекція на Y, $M = \mathrm{pr}_X(E)$ і $N = \mathrm{pr}_Y(E)$.

Розглянемо довільну кулю $B = B_{\sigma,\tau,\varepsilon}$, де σ і τ – скінченні підмножини множин C і D відповідно, яка є базисним околом нуля в топології $\mathcal{T}_{C,D}$. Покажемо, що $B \not\subseteq B_0$. Зауважимо, що $x_0 \notin \sigma$, адже $x_0 \notin C$ і $\sigma \subseteq C$.

Розглянемо далі хрест $E = \mathrm{cr}(\sigma \times \tau)$. Зрозуміло, що E замкнений в добутку P, адже одноточкові множини замкнені в компактах X і Y і тому множини $\{x\} \times Y$ і $X \times \{y\}$ будуть замкненими в добутку P, а множина E є скінченним об'єднанням таких множин. Оскільки простір Y нескінченний, то існує точка $y_0 \in Y \setminus \tau$. Компакти X і Y та їх добуток $P = X \times Y$ є нормальними просторами. Тому до них можна застосувати теорему Тітце-Урисона про продовження неперервних функцій [4, 2.1.8]. Разом з множиною E замкненою в P буде і множина $P_0 = E \cup \{p_0\}$, де $p_0 = (x_0, y_0)$. Крім того, $p_0 \notin E$, оскільки $x_0 \notin \sigma$ і $y_0 \notin \tau$. В такому разі можна визначити функцію $f_0 : P_0 \to \mathbb{R}$, поклавши $f_0(p) = 0$ при $p \in E$ і $f_0(p_0) = 2$. Функція f_0 неперервна, оскільки її звуження $f_0|_E$ і $f_0|_{\{p_0\}}$ на замкнені множини E і $\{p_0\}$ сталі, а значить, неперервні. За теоремою Тітце-Урисона [4, 2.1.8] існує така неперервна функція $f : P \to \mathbb{R}$, що $f(p) = f_0(p)$ на P_0. Ясно, що $f \in B$, адже $f|_E = f_0|_E = 0$. Тоді $f^x = 0$ і $f_y = 0$ для довільних $x \in \sigma$ і $y \in \tau$. Тому $\|f\|^x = 0 < \varepsilon$ і $\|f\|_y = 0 < \varepsilon$, якщо $(x,y) \in \sigma \times \tau$. Але $f \notin B_0$, бо

$$\|f\|^{x_0} = \|f^{x_0}\|_\infty \geq |f^{x_0}(y_0)| = |f(p_0)| = 2 > 1.$$

Таким чином, окіл нуля B_0 в топології $\mathcal{T}_{A,B}$ не містить жодного базисного околу B в топології $\mathcal{T}_{C,D}$, а тому $\mathcal{T}_{A,B} \neq \mathcal{T}_{C,D}$. Так само міркуємо і у випадках $C \setminus A \neq \emptyset$, $B \setminus D \neq \emptyset$ і $D \setminus B \neq \emptyset$. $\square$

Припустимо, що, скажімо, простір X скінченний і $X = \{x_1, \ldots, x_n\} = A$. Зауважимо, що для кожної функції $f \in CC(X \times Y)$

$$\max\{\|f\|^{x_1}, \ldots, \|f\|^{x_n}\} = \max_{p \in P} |f(p)| = \|f\|_\infty,$$

адже $P = X \times Y = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \{x_k\} \times Y$. Тому топології $\mathcal{T}_{X,B}$ для довільного $B \subseteq Y$ збігаються з топологією, породженою нормою $\|\cdot\|_\infty$ на $CC(X \times Y) = C(P)$ у цьому випадку. Тому тут при $B \neq D$ виконується рівність $\mathcal{T}_{X,B} = \mathcal{T}_{X,D}$. Це показує, що нескінченність просторів X і Y є не тільки достатньою, але й необхідною умовою властивості, встановленої в теоремі 17.3.

Зауважимо, нарешті, що в доведенні теореми 17.3 ми використовували лише те, що добуток P цілком регулярний.

4 Гаусдорфовість топології $\mathcal{T}_{A,B}$

Надалі ми будемо вважати, що X та Y – компакти, як і в теоремі 17.1.

Нагадаємо, що полінормований простір (T, P) буде гаусдорфовим тоді і тільки тоді, коли для довільного вектора $t \neq 0$ існує така передноерма $p \in P$, що $p(t) > 0$ (див. [12]).

Теорема 17.4. *Топологічний векторний простір* $(CC(X \times Y), \mathcal{T}_{A,B})$ *буде гаусдорфовим тоді і тільки тоді, коли множини* A *щільна в* X *або* B *щільна в* Y.

Доведення. Нехай, наприклад, $\overline{A} = X$ і f – ненульова функція з простору $CC(X \times Y)$. Тоді існує така точка $p_0 = (x_0, y_0) \in P = X \times Y$, що $f(p_0) \neq 0$. Оскільки функція f_{y_0} неперервна і $f_{y_0}(x_0) = f(x_0, y_0) \neq 0$, то існує такий окіл U точки x_0 в X, що $f_{y_0}(x) \neq 0$ для кожного $x \in U$. З умови $\overline{A} = X$ випливає, що існує точка $a \in A \cap U$. В такому разі

$$\|f\|^a = \|f^a\|_\infty \geq |f^a(y_0)| = |f_{y_0}(a)| > 0.$$

Отже, простір $\big(CC(X \times Y), \mathcal{T}_{A,B}\big)$ гаусдорфовий.

Так само міркуємо у випадку, коли $\overline{B} = Y$.

Навпаки, нехай $\overline{A} \neq X$ і $\overline{B} \neq Y$. Тоді існує така точка $p_0 = (x_0, y_0) \in P = X \times Y$, що $x_0 \notin \overline{A}$ і $y_0 \notin \overline{B}$. Розглянемо хрест $E = \mathrm{cr}(\overline{A} \times \overline{B})$ множини $\overline{A} \times \overline{B}$ в добутку P, який, очевидно, є замкненою множиною в добутку P. Ясно, що $p_0 \notin E$. Тому з цілковитої регулярності простору P випливає, що існує така неперервна функція $f : P \to [0; 1]$, що $f(p_0) = 1$ і $f(p) = 0$ на E. Оскільки $A \subseteq \overline{A}$ і $B \subseteq \overline{B}$, то для довільних точок $x \in A$ і $y \in B$ множина $(\{x\} \times B) \cup (A \times \{y\}) \subseteq E$. Тому $f^x = 0$ і $f_y = 0$, тобто $\|f\|^x = \|f\|_y = 0$. Але $f \neq 0$, адже $f(p_0) = 1$. Отже, простір $(CC(X \times Y), \mathcal{T}_{A,B}$ не гаусдорфовий. □

З цієї теореми випливає, що простір $S(X \times Y) = (CC(X \times Y), \mathcal{T})$ гаусдорфовий, адже $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{X,Y}$, а $\overline{X} = X$ і $\overline{Y} = Y$, зокрема, і простір $S = S([0; 1]^2)$ гаусдорфовий.

5 Метризовність топології $\mathcal{T}_{A,B}$

Згідно з теоремою Біркгофа–Какутані [12], топологічний векторний простір T буде метризовним тоді і тільки тоді, коли він гаусдорфовий і в ньому є не більш ніж зліченна база околів нуля, тобто він задовольняє першу аксіому зліченності. Якщо топологія простору

T породжується не більш ніж зліченною множиною переднорм P, то в T, очевидно, є не більш ніж зліченна база околів нуля, отже, він буде буде метризовним, якщо виконується умова гаусдорфовості з п.4. Звідси випливає наступна теорема.

Теорема 17.5. *Простір $(CC(X\times Y), \mathcal{T}_{A,B})$ для нескінченних множин A і B буде метризовним тоді і тільки тоді, коли множини A і B зліченні і $\overline{A} = X$ або $\overline{B} = Y$.*

Доведення. Достатність негайно випливає з теореми Біркгофа–Какутані [12] і з теореми 17.4.

Доведемо *необхідність.* Якщо $\overline{A} \neq X$ і $\overline{B} \neq Y$, то наш простір не гаусдорфовий за теоремою 17.4, а отже, і не метризовний. Припустимо, що одна з множин A і B, скажімо, A, незліченна. Покажемо, що тоді простір $(CC(X\times Y), \mathcal{T}_{A,B})$ не має не більш ніж зліченну базу околів нуля, а тому не може бути метризовним.

Для цього розглянемо послідовність куль $B_n = B_{\sigma_n,\tau_n,\varepsilon_n}$, де σ_n і τ_n – скінченні підмножини множин A і B відповідно, а ε_n – додатні числа. Множина $\sigma = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \sigma_n$ не більш ніж зліченна і $\sigma \subseteq A$. Тому в незліченній множині A знайдеться точка x_0, яка не належить до σ, а значить, і до кожної множини σ_n. Розглянемо окіл нуля $B = B_{x_0;\emptyset;\frac{1}{2}}$ у нашому просторі і доведемо, що $B_n \nsubseteq B$ для кожного номера n.

Для довільного номера n в нескінченній множині B виберемо точку y_0, яка не належить до скінченної множини τ_n. Розглянемо хрест $E_n = \mathrm{cr}(\sigma_n \times \tau_n)$ у добутку $P = X \times Y$, який буде там замкненою множиною. Оскільки $x_0 \notin \sigma_n$ і $y_0 \notin \tau_n$, то $p_0 = (x_0, y_0) \notin E_n$. На основі регулярності добутку P існує така неперервна функція $f_n : P \to [0;1]$, що $f_n(p_0) = 1$ і $f_n(p) = 0$ на E. Легко переконатися в тому, що $f_n \in B_n \setminus B$. Отже, $B_n \nsubseteq B$, а це й доводить необхідність у нашій теоремі. $\square$

Якщо, скажімо, множина $X = A$ скінченна, то, як показано після доведення теореми 17.3, топологія $\mathcal{T}_{X,B}$ буде нормовною для кожної множини B, а отже, і метризовною. Тому множина B не зобов'язана бути зліченною.

З теореми 17.5 випливає, що простір $S(X\times Y)$ для нескінченних просторів X і Y, один з яких незліченний, буде неметризовним. Зокрема, неметризовним буде і простір S, адже відрізок $[0;1]$ незліченний за теоремою Кантора про незліченність відрізка.

Лекція №18

Пошарове рівномірне наближення нарізно неперервних функцій многочленами і неперервними функціями

1 Рівномірне наближення неперервної функції многочленами з даними значеннями

Розглянемо простір $S = S([0;1]^2)$ всіх нарізно неперервних функцій $f : Q \to \mathbb{R}$, заданих на квадраті $Q = [0;1]^2$, з топологією пошарово рівномірної збіжності. Символами C і P позначимо відповідно простір усіх сукупно неперервних функцій $f : Q \to \mathbb{R}$ і простір усіх многочленів

$$f(x,y) = \sum_{k,j=1}^{n} a_{k,j} x^k y^j$$

з дійсними коефіцієнтами, заданих на квадраті Q. Ясно, що $P \subset C \subset S$. Мета цієї лекції – встановити, що $\overline{P} = \overline{C} = S$ у просторі S.

Ми почнемо з одного цікавого уточнення першої теореми Вейєрштрасса.

Теорема 18.1. *Нехай $f, g : [a;b] \to \mathbb{R}$, $x_1, \dots, x_n \in [a;b]$, $\varepsilon > 0$ такі, що $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$ і $g(x_k) = f(x_k)$ при $k = 1, \dots, n$.*

Доведення. Розглянемо при $k = 1, \dots, n$ многочлени

$$\Phi_k(x) = \prod_{i=1,\, i\neq k}^{n} (x - x_i) \qquad \text{і} \qquad \varphi_k(x) = \frac{\Phi_k(x)}{\Phi_k(x_k)}.$$

Зрозуміло, що$\varphi_k(x_k) = 1$ і $\varphi_k(x_i) = 0$ при $i \neq k$. Функція

$$\gamma(x) = \sum_{k=1}^{n} |\varphi_k(x)|$$

є очевидним чином неперервною на $[a;b]$ і для неї

$$\gamma(x_i) = \sum_{k=1}^{n} |\varphi_k(x_i)| = 1$$

при $i = 1, \dots, n$. Тому $\|\gamma\|_\infty \geq \gamma(x_1) = 1$. Покладемо $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2\|\gamma\|_\infty}$. Ясно, що $0 < \varepsilon_0 \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

За першою теоремою Вейєрштрасса про наближення, існує такий многочлен $p : [a; b] :\to \mathbb{R}$, що $\|f - p\|_\infty < \varepsilon_0$. За поправками $\alpha_k = f(x_k) - p(x_k)$ побудуємо многочлен

$$q(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x),$$

для якого $q(x_k) = \alpha_k$ при $k = 1, \ldots, n$. Зауважимо, що для кожного $k = 1, \ldots, n$

$$|\alpha_k| = |f(x_k) - p(x_k)| \leq \|f - p\|_\infty \leq \varepsilon_0.$$

Тому

$$|q(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k||\varphi_k(x)| \leq \varepsilon_0 \gamma(x) \leq \varepsilon_0 \|\gamma\|_\infty = \frac{\varepsilon}{2\|\gamma\|_\infty} \|\gamma\|_\infty = \frac{\varepsilon}{2}$$

для кожного $x \in [a; b]$, і отже, $\|q\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Для многочлена

$$g(x) = p(x) + q(x)$$

будемо мати, що

$$g(x_k) = p(x_k) + q(x_k) = p(x_k) + f(x_k) - p(x_k) = f(x_k)$$

для кожного $k = 1, \ldots, n$. Крім того,

$$\|f - g\|_\infty \leq \|f - p\|_\infty + \|q\|_\infty < \varepsilon_0 + \tfrac{\varepsilon}{2} \leq \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отже, многочлен g і є шуканим. □

2 Одна інтерполяційна теорема для многочленів

Введені в доведенні теореми 18.1 многочлени $\varphi_k(x)$ є базовими для *інтерполяційного многочлена Лаґранжа*

$$L(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \varphi_k(x),$$

для якого $L(x_k) = f(x_k)$ при $k = 1, \ldots n$. Для множини різних точок $y_1, \ldots y_m$ і кожного $j = 1, \ldots, m$ теж можна визначити многочлени

$$\Psi_j(y) = \prod_{i=1, i \neq j}^{m} (y - y_i) \quad \text{і} \quad \psi_j(y) = \frac{\Psi_j(y)}{\Psi_j(y_j)},$$

а для них інтерполяційний многочлен Лаґранжа

$$M(y) = \sum_{i=1}^{m} g(y_j) \psi_j(y),$$

для якого $M(y_j) = g(y_j)$ при $j = 1, \dots m$. Їх ми використаємо при доведенні наступної інтерполяційної теореми, в якій символами $K[x]$ і $K[y]$ позначаються простори всіх многочленів від змінних x і y відповідно з коефіцієнтами з довільного поля K, а через $K[x, y]$ – простір всіх многочленів від змінних x і y з коефіцієнтами з K.

Теорема 18.2. *Нехай K – довільне поле, $x_1, \dots x_n$ – різні точки з K, $y_1, \dots, y_m$ – різні точки з K, $p_1(y), \dots, p_n(y)$ – многочлени з $K[y]$ і $q_1(x), \dots, q_m(x)$ – многочлени з $K[x]$, причому*

$$p_k(y_j) = q_j(x_k)$$

для довільних $k = 1, \dots, n$ і $j = 1, \dots m$. Тоді існує многочлен $f(x, y)$ з $K[x, y]$ такий, що

$$f(x_k, y) = p_k(y) \qquad \text{і} \qquad f(x, y_j) = q_j(x)$$

при $k = 1, \dots, n$ і $j = 1, \dots m$.

Доведення. Розглянемо многочлен $\varphi_k(x)$, що породжені точками x_k при $k = 1, \dots, n$, та многочлени $\psi_j(y)$, що породжені точками y_j при $j = 1, \dots, m$. Для таких многочленів $\varphi_k(x_i) = \delta_{k,i}$ при $k, i = 1, \dots, n$, а $\psi_j(y_i) = \delta_{j,i}$ при $j, i = 1, \dots, m$, де $\delta_{k,i}$ та $\delta_{j,i}$ – це символи Кронекера, які дорівнюють 1, коли індекси однакові, і 0, коли вони різні.

Розглянемо многочлени з $K[x, y]$

$$g(x, y) = \sum_{k=1}^{n} p_k(y)\varphi_k(x),$$

для якого $g(x_k, y) = p_k(y)$ на K для кожного $k = 1, \dots, n$. Введемо поправки $\alpha_j(x) = q_j(x) - g(x, y_j)$ при $j = 1, \dots, m$ і утворимо многочлен

$$h(x, y) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j(x)\psi_j(y),$$

для якого $h(x, y_j) = \alpha_j(x)$ при $j = 1, \dots, m$.

Покажемо, що многочлен

$$f(x, y) = g(x, y) + h(x, y)$$

і є шуканим.

Зауважимо спочатку, що

$$\alpha_j(x_k) = q_j(x_k) - g(x_k, y_j) = q_j(x_k) - p_k(y_j) = 0$$

для довільних j та k. Тому

$$h(x_k, y) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j(x_k)\psi_j(y) = 0$$

для кожного $k = 1, \ldots, n$. В такому разі,

$$f(x_k, y) = g(x_k, y) + h(x_k, y) = p_k(y) + 0 = p_k(y)$$

на K для кожного $k = 1, \ldots, n$. З іншого боку,

$$f(x, y_j) = g(x, y_j) + h(x, y_j) = g(x, y_j) + q_j(x) - g(x, y_j) = q_j(x)$$

на K при $j = 1, \ldots, m$. Теорему доведено. □

3 Щільність підпростору многочленів у просторі нарізно неперервних функцій

З першої теореми Вейєрштрасса для функцій двох змінних на квадраті Q випливає, що простір P всіх многочленів від двох змінних на квадраті Q щільний у просторі C всіх сукупно неперервних функцій $f : Q \to \mathbb{R}$ з топологією, породженою рівномірною нормою $\|f\|_\infty$. Тепер з допомогою теорем 18.1 і 18.2 ми покажемо, що це ж виконується і для простору S.

Теорема 18.3. *Множина P усіх многочленів на квадраті $Q = [0;1]^2$ щільна у просторі $S = S(Q)$. Тобто $\overline{P} = S$.*

Доведення. Нехай $f \in S$ і $B = B_{\sigma,\tau,\varepsilon}$ – довільний базисний окіл нуля в S. Покажемо, що існує такий многочлен $g \in P$, що $g - f \in B$. Нехай $\sigma = \{x_1, \ldots, x_n\}$ і $\tau = \{y_1, \ldots y_m\}$, причому всі x_k та y_j різні. За теоремою 18.1 для кожного $k = 1, \ldots, n$ існує такий многочлен $p_k(y)$, що $\|f^{x_k} - p_k\|_\infty < \varepsilon$ і $p_k(y_j) = f^{x_k}(y_j) = f(x_k, y_j)$ для кожного $j = 1, \ldots, m$. Так само для кожного $j = 1, \ldots, m$ існує такий многочлен $q_j(x)$, що $\|f_{y_j} - q_j\|_\infty < \varepsilon$ і $q_j(x_k) = f_{y_j}(x_k) = f(x_k, y_j)$ для кожного $k = 1, \ldots, n$. Зрозуміло, що $p_k(y_j) = q_j(x_k)$ для довільних $k = 1, \ldots, n$ та $j = 1, \ldots, m$.

За теоремою 18.2, існує такий многочлен $g(x, y)$ з P, що

$$g(x_k, y) = p_k(y) \qquad \text{і} \qquad g(x, y_j) = q_j(x)$$

для всіх x і y з відрізка $[0; 1]$ і довільних $k = 1, \ldots, n$ та $j = 1, \ldots, m$. Для цього многочлена маємо, що

$$\|f - g\|^{x_k} = \|f^{x_k} - g^{x_k}\|_\infty = \|f^{x_k} - p_k\|_\infty < \varepsilon$$

і

$$\|f-g\|_{y_j} = \|f_{y_j} - g_{y_j}\|_\infty = \|f_{y_j} - q_j\|_\infty < \varepsilon$$

для всіх $k = 1, \ldots, n$ та $j = 1, \ldots, m$. Отже, $f - g \in B$. Це показує, що $f \in \overline{P}$, а тому, $\overline{P} = S$. $\square$

4 Інший підхід

Почнемо з простого спостереження.

Теорема 18.4. *$\overline{P} = \overline{C}$ у просторі S.*

Доведення. Зрозуміло, що $\overline{P} \subseteq \overline{C}$, адже $P \subseteq C$. Доведемо, що $\overline{C} \subseteq \overline{P}$.

Нехай $f \in \overline{C}$, $x_1, \ldots, x_n$ – різні точки з $[0;1]$, $y_1, \ldots, y_m$ – різні точки з $[0;1]$ і $\varepsilon > 0$. Тоді існує така функція $g \in C$, що

$$\|f-g\|^{x_k} < \tfrac{\varepsilon}{2} \qquad \text{і} \qquad \|f-g\|_{y_j} < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

для довільних $k = 1, \ldots, n$ та $j = 1, \ldots, m$. За першою теоремою Вейєрштрасса для функцій двох змінних існує такий многочлен $h \in P$, що $\|g-h\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Тоді

$$\|f-h\|^{x_k} \le \|f-g\|^{x_k} + \|g-h\|^{x_k} < \tfrac{\varepsilon}{2} + \|g-h\|_\infty < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

при $k = 1, \ldots, n$ і

$$\|f-h\|_{y_j} \le \|f-g\|_{y_j} + \|g-h\|_{y_j} < \tfrac{\varepsilon}{2} + \|g-h\|_\infty < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

при $j = 1, \ldots, m$. Це показує, що $f \in \overline{P}$. Отже, $\overline{C} \subseteq \overline{P}$, а отже, $\overline{P} = \overline{C}$. $\square$

Теорема 18.5. *Нехай X і Y – компакти. Тоді простір $C(X \times Y)$ щільний у просторі $S(X \times Y)$, зокрема, $\overline{C} = \overline{S}$.*

Доведення. Нехай $f \in S(X \times Y)$, σ і τ – скінченні підмножини просторів X і Y відповідно, і $\varepsilon > 0$. Розглянемо хрест

$$E = \mathrm{cr}(\sigma \times \tau) = (\sigma \times Y) \cup (X \times \tau),$$

який є замкненою множиною в добутку $X \times Y$, бо він є скінченним об'єднанням замкнених множин

$$Y^x = \{x\} \times Y \qquad \text{і} \qquad X_y = X \times \{y\},$$

де $x \in \sigma$ і $y \in \tau$. З нарізної неперервності функції f випливає, що всі звуження $f|_{Y^x}$ і $f|_{X_y}$ неперервні. Тому неперервним буде і звуження $f|_E$. Оскільки добуток $X \times Y$ нормальний, то, за теоремою Тітце–Урисона [4, 2.1.8], існує така неперервна функція $g : X \times Y \to \mathbb{R}$, що $g|_E = f|_E$. Для неї $g^x = f^x$ для кожного $x \in \sigma$ і $g_y = f_y$ для кожного $y \in \tau$. Отже,

$$\|g - f\|^x = \|g^x - f^x\|_\infty = 0 < \varepsilon$$

для всіх $x \in \sigma$ і

$$\|g - f\|_y = \|g_y - f_y\|_\infty = 0 < \varepsilon$$

для всіх $y \in \tau$. Звідси випливає, що $f \in \overline{C(X \times Y)}$. □

З теорем 18.4 і 18.5 негайно випливає, що $\overline{P} = \overline{C} = S$, а отже, $\overline{P} = S$, що дає ще одне доведення теореми 18.3.

5 Сепарабельність простору S

З теореми 18.3 легко випливає наступне твердження.

Теорема 18.6. *Простір S сепарабельний.*

Доведення. Розглянемо множину R всіх многочленів $r(x, y) = \sum\limits_{k,j=1}^{n} a_{k,j} x^k y^j$ з раціональними коефіцієнтами. Нескладно переконатися в тому, що множина R зліченна.

Оскільки $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, то, як легко перевірити, для кожного $g \in P$ і довільного $\varepsilon > 0$ існує такий многочлен $r \in R$, що $\|g - r\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. За теоремою 18.3, для кожної функції $f \in S$ і довільних точок $x_1, \ldots, x_n$ та $y_1, \ldots, y_m$ з $[0; 1]$ існує такий многочлен $g \in P$, що $\|f - g\|^{x_k} < \frac{\varepsilon}{2}$ при $k = 1, \ldots, n$ і $\|f - g\|_{y_j} < \frac{\varepsilon}{2}$ при $j = 1, \ldots, m$. Знайшовши для многочлена g відповідний многочлен $r \in R$, для якого $\|g - r\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$, ми отримаємо, що

$$\|f - r\|^{x_k} \le \|f - g\|^{x_k} + \|g - r\|^{x_k} < \tfrac{\varepsilon}{2} + \|g - r\|_\infty < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

і аналогічно

$$\|f - r\|_{y_j} \le \|f - g\|_{y_j} + \|g - r\|_{y_j} < \tfrac{\varepsilon}{2} + \|g - r\|_\infty < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для довільних $k = 1, \ldots, n$ та $j = 1, \ldots, m$. Тому $f \in \overline{R}$.

Отже, $\overline{R} = S$ і тому простір S сепарабельний, адже він містить зліченну всюди щільну підмножину R. □

Лекція №19

Наближення нарізно неперервних функцій CP-функціями і наближення рівномірно неперервних функцій

1 Застосування многочленів Бернштейна до наближення нарізно неперервних функцій

Нагадаємо, що многочлени Бернштейна для функції $g : [0;1] \to \mathbb{R}$ визначаються формулою

$$B_n g(y) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k g(\tfrac{k}{n}) y^k (1-y)^{n-k}.$$

Як було встановлено в лекції №1, $B_n g \rightrightarrows g$ на $[0;1]$ для довільної функції $g \in C[0;1]$.

На просторі $C(Y)$, де Y – компактний простір, ми будемо розглядати дві топології: *топологію рівномірної збіжності* $\mathcal{T}_u$, яка породжується нормою

$$\|g\| = \max_{y \in Y} |g(y)|,$$

відносно якої простір $C(Y)$ є банаховим простором (його позначаємо $C_u(Y)$), і *топологію поточковою збіжності* $\mathcal{T}_p$, яка задається переднормами

$$p_y(g) = |g(y)|,\ y \in Y,$$

відповідний локально опуклий простір $(C(Y), \mathcal{T}_p)$ позначається символом $C_p(Y)$. Неперервне відображення $A : C_p(Y) \to C_u(Y)$ ми називатимемо *pu-неперервним.*

Символом $P = P[0;1]$ ми позначаємо простір всіх многочленів на відрізку $[0;1]$. Відображення B_n, яке ставить у відповідність кожній неперервній функції $g \in C[0;1]$ її многочлен Бернштейна $B_n g \in P \subseteq C[0;1]$, називається *оператором Бернштейна.*

Теорема 19.1. *Оператор Бернштейна B_n лінійний і pu-неперервний.*

Доведення. Лінійність оператора B_n очевидна. Доведемо *pu*-неперервність. Нехай $g_0 \in C[0;1]$ і $\varepsilon > 0$. Покладемо

$$U = \{g \in C[0;1] : |g(\tfrac{k}{n}) - g_0(\tfrac{k}{n})| < \varepsilon\ \forall\, k = 0, \dots, n\}.$$

Зрозуміло, що U є околом функції g_0 в просторі $C_p[0;1]$. Нехай $g \in U$ і $y \in [0;1]$. Тоді оскільки
$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k y^k (1-y)^{n-k} = 1,$$
то
$$|B_n g(y) - B_n g_0(y)| = \left| \sum_{k=0}^{n} C_n^k y^k (1-y)^{n-k} (g(\tfrac{k}{n}) - g_0(\tfrac{k}{n})) \right| \leq$$
$$\leq \sum_{k=0}^{n} C_n^k y^k (1-y)^{n-k} \left| g(\tfrac{k}{n}) - g_0(\tfrac{k}{n}) \right| \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n} C_n^k y^k (1-y)^{n-k} = \varepsilon$$
для кожного $y \in [0;1]$. Таким чином, $\|B_n g - B_n g_0\|_\infty \leq \varepsilon$ при $g \in U$, звідки випливає pu-неперервність оператора B_n. $\square$

Нехай X – топологічний простір, $Y = [0;1]$. Функцію $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ ми називаємо *CP-функцією*, якщо $f^x : [0;1] \to \mathbb{R}$ – це многочлен для кожного $x \in X$, а $f_y : X \to \mathbb{R}$ неперервна для кожного $y \in Y$. Множину таких функцій ми позначатимемо символом $CP(X \times Y)$.

Теорема 19.2. *Нехай X – топологічний простір, $Y = [0;1]$, $f \in CC(X \times Y)$ і $f_n(x,y) = (B_n f^x)(y)$ на $X \times Y$. Тоді функції $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$ неперервні за сукупністю змінних, $f_n \in CP(X \times Y)$ і $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на $[0;1]$ для кожного $x \in X$.*

Доведення. Оскільки всі функції $f_{\frac{k}{n}}$ неперервні, то всі функції f_n неперервні за сукупністю змінних, адже
$$f_n(x,y) = B_n f^x(y) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^x(\tfrac{k}{n}) y^k (1-y)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f_{\frac{k}{n}}(x) y^k (1-y)^{n-k}$$
для довільних $x \in X$ і $y \in Y$. Крім того, ясно, що $f_n \in CP(X \times Y)$. Разом з тим, за теоремою Бернштейна $f_n^x = B_n f^x \rightrightarrows f^x$ на $[0;1]$ для кожного $x \in X$. $\square$

2 Рівномірно неперервні функції зі значеннями в топологічних векторних просторах

Нехай $(X, |\cdot - \cdot|_X)$ – метричний простір і Y – топологічний векторний простір. Відображення $f : X \to Y$ називається *рівномірно неперервним*, якщо для довільного околу нуля V в просторі Y існує таке $\delta > 0$, що для довільних $x', x'' \in X$, якщо $|x' - x''|_X < \delta$, то $f(x') - f(x'') \in V$.

Нам буде потрібне наступне узагальнення відомої теореми Кантора про рівномірну неперервність неперервної на відрізку функції.

Теорема 19.3. *Нехай* $(X, |\cdot - \cdot|_X)$ *– метричний компакт,* Y *– топологічний векторний простір і* $f : X \to Y$ *– неперервне відображення. Тоді* f *рівномірно неперервне.*

Доведення. Нехай V – довільний окіл нуля в просторі Y. Тоді існує такий заокруглений окіл нуля W в Y, що $W + W \subseteq V$. За неперервністю відображення f для кожного $x \in X$ знайдемо таке число $\delta_x > 0$, що для довільного $x' \in X$ з нерівності $|x' - x|_X < 2\delta_x$ випливає включення $f(x') - f(x) \in W$. Розглянемо покриття $(U_x : x \in X)$ простору X відкритими кулями $U_x = B(x, \delta_x)$. Оскільки простір X компактний, то існує така скінченна множина $A \subseteq X$, що $X = \bigcup\limits_{x \in A} U_x$.

Покладемо $\delta = \min\{\delta_x : x \in A\}$ і покажемо, що для довільних $x', x'' \in X$, якщо $|x' - x''|_X < \delta$, то $f(x') - f(x'') \in V$. Нехай $x', x'' \in X$ такі, що $|x' - x''|_X < \delta$. Оскільки $X = \bigcup\limits_{x \in A} U_x$, то існує такий елемент $x \in A$, що $x' \in U_x$, тобто $|x' - x|_X < \delta_x$. Тоді $|x' - x|_X < 2\delta_x$ і тому $f(x') - f(x) \in W$ згідно з вибором δ_x. Крім того,

$$|x'' - x|_X \leq |x'' - x'|_X + |x' - x|_X < \delta + \delta_x \leq \delta_x + \delta_x = 2\delta_x.$$

Тому також $f(x'') - f(x) \in W$. Тепер враховуючи, що $-W = W$, одержимо, що

$$f(x') - f(x'') = (f(x') - f(x)) + (f(x) - f(x'')) \in W - W = W + W \subseteq V.$$

Отже, відображення f рівномірно неперервне. □

3 Застосування операторів Рудіна до рівномірного наближення рівномірно неперервних функцій

Спочатку нагадаємо конструкцію оператора Рудіна на метричному просторі $(Y, |\cdot - \cdot|_Y)$.

За теоремою Майкла, для кожного номера n існує локально скінченне розбиття одиниці $(\varphi_{n,i} : i \in I_n)$, яке підпорядковане покриттю $\mathcal{B}_n$ простору Y відкритими кулями $B(y, \frac{1}{n})$, причому без обмежень загальності ми можемо вважати, що всі функції $\varphi_{n,i}$ ненульові. Зазначимо також, що $\sum\limits_{i \in I_n} \varphi_{n,i}(y) = 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ та кожного $y \in Y$. Для довільних $n \in \mathbb{N}$ та $i \in I_n$ ми вибираємо точку $y_{n,i} \in \operatorname{supp} \varphi_{n,i} = V_{n,i}$. Нехай Z – локально опуклий простір і $g : Y \to Z$ – неперервне відображення. Ставимо йому у відповідність неперервне відображення $g_n = R_n g : Y \to Z$, яке визначається формулою

$$g_n(y) = \sum_{i \in I_n} \varphi_{n,i}(y) g(y_{n,i}), \quad y \in Y.$$

і побудований таким чином оператор $R_n : C(Y,Z) \to C(Y,Z)$ називається *оператором Рудіна.*

Крім того, нагадаємо, що послідовність $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ відображень $g_n : Y \to Z$ зі значеннями у топологічному векторному просторі Z *рівномірно збігається* до функції $g : Y \to Z$ на Y в Z (позначається $g_n \rightrightarrows g$ на Y в Z), якщо для довільного околу нуля W в просторі Z існує такий номер N, що для всіх $n \geq N$ і $y \in Y$ виконується включення $g_n(y) - g(y) \in W$.

Наступну теорему, яка доводиться аналогічно, як теорема 16.2, ми називатимемо *теоремою Рудіна для рівномірно неперервних функцій.*

Теорема 19.4. *Нехай $(Y, |\cdot - \cdot|_Y)$ – метричний простір, Z – локально опуклий простір і $g : Y \to Z$ – рівномірно неперервне відображення. Тоді $R_n g \rightrightarrows g$ на Y в Z.*

Доведення. Для кожного номера n покладемо $g_n = R_n g$.

Нехай W – довільний окіл нуля в просторі Z. Оскільки Z локально опуклий, то існує такий опуклий окіл нуля W_0 в Z, що $W_0 \subseteq W$. Далі, за рівномірною неперервністю відображення g існує таке $\delta > 0$, що для довільних $y', y'' \in Y$ з нерівності $|y' - y''|_Y < \delta$ випливає включення $g(y') - g(y'') \in W_0$.

Візьмемо такий номер N, що $\frac{2}{N} < \delta$ і нехай $n \geq N$ та $y \in Y$. Тоді, оскільки

$$g_n(y) = \sum_{i \in I_n} \varphi_{n,i}(y) g(y_{n,i}) \qquad \text{і} \qquad g(y) = \sum_{i \in I_n} \varphi_{n,i}(y) g(y),$$

то

$$g_n(y) - g(y) = \sum_{i \in I_n} \varphi_{n,i}(y)(g(y_{n,i}) - g(y)).$$

Розглянемо множину

$$I_n(y) = \{i \in I_n : \varphi_{n,i}(y) \neq 0\} = \{i \in I_n : y \in V_{n,i}\}.$$

Оскільки кожна сім'я $(V_{n,i} : i \in I_n)$ локально скінченна, то всі множини $I_n(y)$ скінченні. Тоді $\varphi_{n,i}(y) = 0$ при $i \in I_n \setminus I_n(y)$. Тому

$$g_n(y) - g(y) = \sum_{i \in I_n(y)} \varphi_{n,i}(y)(g(y_{n,i}) - g(y)).$$

З конструкції оператора Рудіна випливає, що для кожного $i \in I_n(y)$ існує таке $b \in Y$, що $V_{n,i} \subseteq B(b, \frac{1}{n})$. Але $y, y_{n,i} \in V_{n,i}$. Тому $y, y_{n,i} \in B(b, \frac{1}{n})$. Тоді

$$|y - y_{n,i}|_Y \leq |y - b|_Y + |b - y_{n,i}|_Y < \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n} = \tfrac{2}{n} \leq \tfrac{2}{N} < \delta,$$

і в такому разі, $g(y_{n,i}) - g(y) \in W_0$ згідно з вибором числа δ. Числа $\lambda_{n,i} = \varphi_{n,i}(y) \geq 0$ і

$$\sum_{i \in I_n(y)} \lambda_{n,i} = \sum_{i \in I_n} \varphi_{n,i}(y) = 1.$$

Тому

$$g_n(y) - g(y) = \sum_{i \in I_n(y)} \lambda_{n,i}(g(y_{n,i}) - g(y)) \in \sum_{i \in I_n(y)} \lambda_{n,i} W_0 \subseteq W_0,$$

адже множина W_0 опукла. В такому разі, $g_n(y) - g(y) \in W$ при $n \geq N$. Отже, $g_n \rightrightarrows g$ на Y в Z, що і треба було довести. $\square$

Теорема 19.5. *Нехай $(Y, |\cdot - \cdot|_Y)$ – метричний компакт і $R_n : C(Y) \to C(Y)$ – оператор Рудіна для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тоді всі оператори R_n є pu-неперервними і $R_n g \rightrightarrows g$ на Y.*

Доведення. З теорем 19.3 і 19.4 випливає, що $R_n g \rightrightarrows g$ на Y. Залишилось довести, що всі оператори R_n *pu*-неперервні.

Нехай $n \in \mathbb{N}$. Візьмемо довільну функцію $g_0 \in C(Y)$ і зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Оскільки на компактному просторі кожна локально скінченна сім'я непорожніх множин скінченна, то множина I_n скінченна. Тому множина

$$U = \{y \in C(Y) : |g(y_{n,i}) - g_0(y_{n,i})| < \varepsilon \; \forall \, i \in I_n\}$$

є околом функції g_0 в просторі $C_p(Y)$. Тепер для довільних $g \in U$ і $y \in Y$ маємо

$$|R_n g(y) - R_n g_0(y)| = \left| \sum_{i \in I_n} \varphi_{n,i}(y)(g(y_{n,i}) - g_0(y_{n,i})) \right| \leq \sum_{i \in I_n} \varphi_{n,i}(y)|g(y_{n,i}) - g_0(y_{n,i})| \leq$$

$$\leq \varepsilon \sum_{i \in I_n} \varphi_{n,i}(y) = \varepsilon.$$

В такому разі,

$$\|R_n g - R_n g_0\|_\infty = \sup_{y \in Y} |R_n g(y) - R_n g_0(y)| \leq \varepsilon$$

для кожного $g \in U$. Отже, R_n *pu*-неперервний. $\square$

Лекція №20

Асоційовані відображення і теорема Бера про проєкцію

1 Нарізно неперервні відображення і асоційовані відображення

Нехай Z – топологічний простір і T – непорожня множина. Через Z^T ми позначаємо множину всіх відображень $w : T \to Z$. *Топологією добутку* чи *топологію поточкової збіжності* на просторі Z^T називається така топологія на Z^T, у якій базисними околами точки $w_0 \in Z^T$ є множини вигляду

$$\left\{w \in Z^T : \forall\, t \in S \,\middle|\, w(t) \in W_t\right\},$$

де $S \subseteq T$ – скінченна множина і для кожного $t \in S$ множина W_t є околом точки $w_0(t)$ в просторі Z. У випадку, коли простір T топологічний, то $C(T, Z) \subseteq Z^T$, а топологія поточкової збіжності на просторі Z^T індукує топологію поточкової збіжності на просторі неперервних функцій, тобто топологічний простір $C_p(T, Z)$ є підпростором Z^T.

Для відображення $f : X \times Y \to Z$ визначимо відображення $\varphi : X \to Z^Y$, покладаючи $\varphi(x) = f^x$ для кожного $x \in X$. Кажуть, що φ – це *асоційоване з f відносно першої змінної відображення* або *вертикальне розшарування відображення f*. Аналогічно визначимо відображення $\psi : Y \to Z^X$, покладаючи $\psi(y) = f_y$ для кожного $y \in Y$. Кажуть, що ψ – це *асоційоване з f відносно другої змінної відображення* або *горизонтальне розшарування відображення f*. Таким чином,

$$\varphi(x)(y) = \psi(y)(x) = f(x, y), \text{ для довільних } x \in X, y \in Y.$$

Твердження 20.1. *Нехай X, Z – топологічні простори, Y – множина, $f : X \times Y \to Z$, а $\varphi : X \to Z^Y$ і $\psi : Y \to Z^Z$ – асоційовані з f відображення. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(i) *f неперервна відносно першої змінної;*

(ii) *$\psi(Y) \subseteq C(X, Z)$;*

(iii) *відображення φ неперервне відносно топології поточкової збіжності на Z^Y.*

Доведення. $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Неперервність f відносно першої змінної означає, що для кожного $y \in Y$ функція $f_y = \psi(y)$ неперервна, тобто $\psi(Y) \subseteq C(X, Z)$.

$(i) \Rightarrow (iii)$. Зафіксуємо точку $x_0 \in X$. Покладемо $w_0 = \varphi(x_0)$ і розглянемо базисний окіл точки w_0 в просторі Z^Y

$$W = \{w \in Z^Y : w(y) \in W_y \ \forall\, y \in B\},$$

породжений скінченною множиною $B \subseteq Y$ і сім'єю $(W_y)_{y \in B}$ околів W_y точок $w_0(y)$ у просторі Z. Оскільки для кожного $y \in B$ функція f_y неперервна в точці x_0 і множина W_y є околом точки $w_0(y) = f_y(x_0)$ в просторі Z, то кожна множина

$$U_y = \{x \in X : f_y(x) \in W_y\} = \{x \in X : \varphi(x)(y) \in W_y\}$$

є околом точки x_0 в просторі X. Тому множина

$$\varphi^{-1}(W) = \big\{x \in X : \forall\, y \in B \,\big|\, \varphi(x)(y) \in W_y\big\} = \bigcap_{y \in B} U_y$$

також є околом точки x_0 і відображення φ неперервне в точці x_0. Отже, φ – неперервне відображення.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Міркуємо аналогічно. Зафіксуємо $x_0 \in X$, $y \in Y$ і окіл W_y точки $f(x_0, y)$ в просторі Z. Покладемо $w_0 = \varphi(x_0)$ і в просторі Z^Y розглянемо базисний окіл точки w_0

$$W = \{w \in Z^Y : w(y) \in W_y\},$$

породжений одноточковою множиною множиною $B = \{y\}$ і околом W_y точки $w_0(y) = f(x_0, y)$ в просторі Z. З неперервності відображення φ в точці x_0 випливає, що множина

$$\varphi^{-1}(W) = \{x \in X : \varphi(x) \in W\} = \{x \in X : f(x, y) \in W_y\} = \{x \in X : f_y(x) \in W_y\} = f_y^{-1}(W_y)$$

є околом точки x_0. Тому f_y неперервне в точці x_0. Отже, f_y неперервне. □

Тепер легко одержується наступна характеризація нарізно неперервних відображень.

Твердження 20.2. *Нехай X, Y, Z – топологічні простори, $f : X \times Y \to Z$, $\varphi : X \to Z^Y$ і $\psi : Y \to Z^X$ – вертикальне і горизонтальне розшарування відображення f. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(i) *відображення f нарізно неперервне;*

(*ii*) *відображення* $\varphi : X \to C_p(Y, Z)$ *неперервне;*

(*iii*) *відображення* $\psi : Y \to C_p(X, Z)$ *неперервне.*

Доведення. Достатньо застосувати твердження 20.1 до відображень f і $g : Y \times X \to Z$, $g(y, x) = f(x, y)$. $\square$

2 Один критерій сукупної неперервності

Нехай Y – топологічний простір і $(Z, |\cdot - \cdot|_Z)$ – метричний простір. Символом $C_u(Y, Z)$ ми позначаємо простір усіх неперервних функцій $f : Y \to Z$ з топологією рівномірної збіжності на Y, породженою метрикою

$$|g - h|_u = \sup_{y \in Y} \{\min\{|g(y) - h(y)|_Z, 1\} : y \in Y\}.$$

Теорема 20.1. *Нехай X – топологічний простір, Y – компактний простір, $(Z, |\cdot - \cdot|_Z)$ – метричний простір і φ – вертикальне розшарування відображення $f : X \times Y \to Z$. Тоді такі умови еквівалентні:*

(*i*) $f \in C(X \times Y, Z)$*;*

(*ii*) $\varphi(X) \subseteq C(Y, Z)$ *і відображення* $\varphi : X \to C_u(Y, Z)$ *неперервне.*

Доведення. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*). Нехай $f \in C(X \times Y, Z)$. Тоді $f \in CC(X \times Y, Z)$ і $\varphi(X) \subseteq C(Y, Z)$ згідно з твердженням 20.2.

Доведемо, що відображення $\varphi : X \to C_u(Y, Z)$ неперервне. Зафіксуємо точку $x_0 \in X$ і число $\varepsilon \in (0; 1)$. Оскільки функція f сукупно неперервна у кожній точці (x_0, y), то для кожного $y \in Y$ існують окіл U_y точки x_0 в X і відкритий окіл V_y точки y в Y такі, що

$$|f(x, v) - f(x_0, v)|_Z < \varepsilon$$

для довільних $x \in U_y$ і $v \in V_y$. З відкритого покриття $\{V_y : y \in Y\}$ компактного простору Y виберемо скінченне підпокриття $\{V_y : y \in B\}$ і розглянемо окіл $U = \bigcap\limits_{y \in B} U_y$ точки x_0 в просторі X. Тепер для довільних $x \in U$ і $v \in Y$ знайдемо таке $y \in B$, що $v \in V_y$, і одержимо, що

$$|\varphi(x)(v) - \varphi(x_0)(v)|_Z = |f(x, v) - f(x_0, v)|_Z < \varepsilon.$$

Тоді

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)|_u = \sup_{v \in Y} |\varphi(x)(v) - \varphi(x_0)(v)|_Z \leq \varepsilon,$$

звідки і випливає неперервність φ в точці x_0.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Нехай $\varphi(X) \subseteq C(Y,Z)$ і відображення $\varphi : X \to C_u(Y,Z)$ неперервне. Покажемо, що f сукупно неперервна. Зафіксуємо $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ і $\varepsilon > 0$. Оскільки відображення φ неперервне в точці x_0 і функція f^{x_0} неперервна в точці y_0, то існують такі околи U точки x_0 і V точки y_0, що

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)|_u \le \tfrac{\varepsilon}{2} \qquad \text{і} \qquad |f^{x_0}(y) - f^{x_0}(y_0)|_Z \le \tfrac{\varepsilon}{2}$$

для довільних $x \in U$ і $y \in V$. Тепер для довільних $x \in U$ і $y \in V$ маємо

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)|_Z \le |f(x,y) - f(x_0,y)|_Z + |f(x_0,y) - f(x_0,y_0)|_Z =$$

$$= |\varphi(x)(y) - \varphi(x_0)(y)|_Z + |f^{x_0}(y) - f^{x_0}(y_0)|_Z \le |\varphi(x) - \varphi(x_0)|_u + \tfrac{\varepsilon}{2} \le \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

звідки випливає сукупна неперервність функції f в точці (x_0, y_0). □

3 Властивість множини точок неперервності асоційованого відображення

Нехай X, Y і Z – топологічні простори і $f : X \times Y \to Z$ – відображення. Символом $C(f)$ ми позначаємо множину тих точок в добутку $X \times Y$, в яких відображення f неперервне, а $D(f) = (X \times Y) \setminus C(f)$ – це множина точок розриву відображення f. Розглянемо множину

$$C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq C(f)\}$$

і проєкцію $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$, $\mathrm{pr}_X(x,y) = x$, на вісь X. Легко зрозуміти, що

$$C_Y(f) = X \setminus \mathrm{pr}_X(D(f)).$$

Справді, якщо $x \in C_Y(f)$, то $\{x\} \times Y \subseteq C(f)$, отже, $x \notin \mathrm{pr}_X(D(f))$, тому $x \in X \setminus \mathrm{pr}_X(D(f))$. Навпаки, нехай $x \in X \setminus \mathrm{pr}_X(D(f))$. Тоді $x \notin \mathrm{pr}_X(D(f))$, отже, $(x,y) \notin D(f)$ для кожного $y \in Y$, а тому, $\{x\} \times Y \subseteq C(f)$ і $x \in C_Y(f)$.

Наступна теорема узагальнює теорему 20.1 і має подібне доведення.

Теорема 20.2. *Нехай X, Y – топологічні простори, $(Z, |\cdot - \cdot|_Z)$ – метричний простір, $f \in CC(X \times Y, Z)$ і $\varphi : X \to C_u(Y,Z)$ – вертикальне розшарування відображення f. Тоді*

(i) $C(\varphi) \subseteq C_Y(f)$;

(ii) якщо Y компактний, то $C(\varphi) = C_Y(f)$.

Доведення. (i). Нехай $x_0 \in C(\varphi)$. Покажемо, що $x_0 \in C_Y(f)$, тобто f сукупно неперервна в кожній точці множини $\{x_0\} \times Y$. Зафіксуємо $y_0 \in Y$ і $\varepsilon > 0$. Оскільки відображення φ неперервне в точці x_0 і функція f^{x_0} неперервна в точці y_0, то існують такі околи U точки x_0 і V точки y_0, що

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)|_u \leq \tfrac{\varepsilon}{2} \qquad \text{і} \qquad |f^{x_0}(y) - f^{x_0}(y_0)|_Z \leq \tfrac{\varepsilon}{2}$$

для довільних $x \in U$ і $y \in V$. Тепер аналогічно, як при доведенні імплікації $(ii) \Rightarrow (i)$ в теоремі 20.1, одержимо, що

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)|_Z \leq \varepsilon$$

для довільних $x \in U$ і $y \in V$.

(ii). Нехай Y – компактний простір. Залишилося показати, що $C_Y(f) \subseteq C(\varphi)$.

Нехай $x_0 \in C_Y(f)$. Доведемо, що відображення $\varphi : X \to C_u(Y, Z)$ неперервне в точці x_0. Зафіксуємо число $\varepsilon \in (0; 1)$. Оскільки функція f сукупно неперервна у кожній точці (x_0, y), то для кожного $y \in Y$ існують окіл U_y точки x_0 в X і відкритий окіл V_y точки y в Y такі, що

$$|f(x, v) - f(x_0, v)|_Z < \varepsilon$$

для довільних $x \in U_y$ і $v \in V_y$. З відкритого покриття $\{V_y : y \in Y\}$ компактного простору Y виберемо скінченне підпокриття $\{V_y : y \in B\}$. Тепер аналогічно, як при доведенні імплікації $(i) \Rightarrow (ii)$ в теоремі 20.1 одержимо, що

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)|_u \leq \varepsilon$$

для довільного $x \in U = \bigcap\limits_{y \in B} U_y$. $\square$

4 Теорема Бера про проєкцію

Нехай T – непорожня множина. Символом $\ell_\infty(T)$ позначається банахів простір всіх обмежених функцій $x : T \to \mathbb{R}$ з наступною нормою

$$\|x\| = \sup_{t \in T} |x(t)|.$$

Метричні простори $(X, |\cdot - \cdot|_X)$ і $(Y, |\cdot - \cdot|_Y)$ називаються *ізометричними*, якщо існує таке відображення $f : X \to Y$, що

$$|f(x) - f(y)|_Y = |x - y|_X$$

для довільних $x, y \in X$. При цьому відображення f називається *ізометрією* між цими просторами.

Твердження 20.3. *Довільний метричний простір ізометричний до деякого підпростору банахового простору.*

Доведення. Нехай $(X, |\cdot - \cdot|_X)$ – метричний простір. Зафіксуємо довільну точку $a \in X$ і розглянемо відображення $f : X \to \mathbb{R}^X$, що визначається формулою

$$f(x)(y) = |x - y|_X - |y - a|_X.$$

Спочатку зауважимо, що $f(x) \in \ell_\infty(X)$ для кожного $x \in X$. Справді, для довільних $x, y \in X$ за нерівністю трикутника маємо

$$|f(x)(y)| = \big||x - y|_X - |y - a|_X\big| \le |x - a|_X.$$

Отже, кожна функція $f(x) \in \ell_\infty(X)$ і ми можемо вважати, що $f : X \to \ell_\infty(X)$.

Тепер нехай $x, y \in X$. З одного боку, маємо

$$\|f(x) - f(y)\| = \sup_{z \in X} |f(x)(z) - f(y)(z)| = \sup_{z \in X} ||x - z|_X - |y - z|_X| \le |x - y|_X.$$

А з іншого,

$$\|f(x) - f(y)\| = \sup_{z \in X} |f(x)(z) - f(y)(z)| \ge |f(x)(y) - f(y)(y)| = |x - y|_X.$$

Отже, $\|f(x) - f(y)\| = |x - y|_X$. Тому f є ізометрією між метричним простором $(X, |\cdot - \cdot|_X)$ і метричним підпростором $f(X)$ банахового простору $\ell_\infty(X)$. □

Тепер ми можемо довести *теорему Бера про проекцію* в загальнішій, ніж у Бера, формі. Зауважимо, що Рене Бер довів цю теорему, коли $X = [a; b]$, а $Y = [c; d]$, виклавши досить непросте її доведення у своїй дисертації у 1899 році.

Теорема 20.3. *Нехай X – топологічний простір, Y – компактний метризовний простір, Z – метризовний простір і $f \in CC(X \times Y, Z)$. Тоді $\mathrm{pr}_X(D(f))$ – це множина першої категорії, а $C_Y(f)$ залишкова множина у просторі X.*

Доведення. Як випливає з твердження 20.3 без обмеження загальності ми можемо вважати, що відображення f набуває значень у деякому банаховому просторі, тобто Z – банахів простір. Крім того, вважатимемо, що Y – метричний простір.

Нехай $\varphi : X \to C_p(Y, Z)$ – вертикальне розшарування відображення f і $(R_n)_{n=1}^\infty$ – послідовність операторів Рудіна $R_n : C_p(Y, Z) \to C_u(Y, Z)$. За твердженням 20.1 відображення φ неперервне, а згідно з теоремою 19.5, всі оператори R_n також неперервні. Тому для кожного номера n композиція $\varphi_n = R_n \circ \varphi : X \to C_u(Y, Z)$ є неперервним відображенням. Крім того, з теореми 19.4 випливає, що $\varphi_n(x) = R_n(\varphi(x)) \rightrightarrows \varphi(x)$ на Y

в просторі Z, тобто $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ в просторі $C_u(Y, Z)$ для кожного $x \in X$. Отже, відображення $\varphi : X \to C_u(Y, Z)$ належить до першого класу Бера. Згідно з теоремою 12.5, множина $C(\varphi)$ залишкова в X. Тому, за теоремою 20.2, такою ж є і множина $C_Y(f)$. Тоді $\mathrm{pr}_X(D(f)) = X \setminus C_Y(f)$ – це множина першої категорії. $\square$

Лекція №21

Оператори типу Рудіна і характеризація метризовних компактів

1 Відокремлюючі множини функцій і метризовні компакти

Нагадаємо, що бієктивне відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами X і Y називається *гомеоморфізмом*, якщо відображення f і f^{-1} неперервні. Зрозуміло, що обернене відображення до гомеоморфізму є гомеоморфізмом і композиція двох гомеоморфізмів також є гомеоморфізмом.

Твердження 21.1. *Нехай X – топологічний простір, $(Y, |\cdot - \cdot|_Y)$ – метричний простір і $f : X \to Y$ – гомеоморфізм. Тоді X також метризовний, причому метрика*

$$|x - y|_X = |f(x) - f(y)|_Y$$

породжує топологічну структуру простору X.

Доведення. Відображення $g : (Y, |\cdot - \cdot|_Y) \to (X, |\cdot - \cdot|_X)$, $g = f^{-1}$, є ізометрією, а отже, гомеоморфізмом. Тому тотожне відображення $h : X \to (X, |\cdot - \cdot|_X)$, $h = g \circ f$, також є гомеоморфізмом. Звідси випливає, що топологічні структури просторів X і $(X, |\cdot - \cdot|_X)$ збігаються. □

Твердження 21.2. *Нехай X – компактний простір, Y – гаусдорфовий простір і $f : X \to Y$ – неперервна бієкція. Тоді f є гомеоморфізмом.*

Доведення. Розглянемо відображення $g = f^{-1} : Y \to X$ і покажемо, що g неперервне. Це й означатиме, що f є гомеоморфізмом.

Нехай F – довільна замкнена множина у просторі X. Оскільки X компактний простір, то множина F також компактна. Тоді множина $K = g^{-1}(F) = f(F)$ є компактною в просторі Y, як неперервний образ компактної множини F при неперервному відображенні f. Але простір Y гаусдорфовий. Тому компактна множина K замкнена в просторі Y. Отже, за критерієм неперервності відображення g неперервне. □

Нехай X – топологічний простір і $F \subseteq \mathbb{R}^X$. Ми кажемо, що множина функцій F *відокремлює точки в просторі* X, якщо для довільних різних точок $x, y \in X$ існує функція $f \in F$ така, що $f(x) \neq f(y)$.

Твердження 21.3. *Нехай X – непорожній компакт, $F \subseteq C(X)$ – не більш ніж зліченна множина, яка відокремлює точки в просторі X. Тоді X – метризовний.*

Доведення. Зауважимо спочатку, що без обмеження загальності ми можемо вважати, що $f(X) \subseteq (0;1)$ для кожного $f \in F$, адже числова пряма є гомеоморфною до інтервалу $(0;1)$.

Розглянемо тихоновський куб $K = [0;1]^F$, який є компактним простором у топології поточкової збіжності, як добуток компактних множників $[0;1]$ за теоремою Тихонова [4, 3.2.4]. Крім того, згідно з [4, 4.2.2], простір K метризовний, як добуток не більш ніж зліченної кількості метризовних множників $[0;1]$. Отже, K – це метризовний компакт.

Тепер розглянемо відображення $\varphi : X \to K$, яке визначається формулою

$$\varphi(x) = (f(x))_{f \in F}, \quad x \in X,$$

і покажемо, що φ є ін'єктивним і неперервним.

Нехай $x, y \in X$ – різні точки. Оскільки множина F відокремлює точки в просторі X, то існує така функція $f \in F$, що $f(x) \neq f(y)$. Тоді $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Отже, φ ін'єктивне.

Тепер нехай $x \in X$ – довільна точка і $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ – сітка елементів $x_\alpha \in X$, яка збігається до елемента x у просторі X. Тоді для довільної функції $f \in F$ за її неперервністю маємо, що $f(x_\alpha) \to f(x)$, тобто $\varphi(x_\alpha)(f) \to \varphi(x)(f)$. Отже, сітка $(\varphi(x_\alpha))_{\alpha \in A}$ поточково збігається до $\varphi(x)$, тобто $\varphi(x_\alpha) \to \varphi(x)$ в просторі K. Таким чином, відображення φ неперервне у точці x. Отже, φ є неперервним.

Покладемо $Y = \varphi(X)$. Оскільки φ є ін'єктивним і неперервним, то φ – це неперервна бієкція X на Y, яка, за твердженням 21.2, є гомеоморфізмом. Тепер з метризовності простору Y і твердження 21.1 випливає, що X метризовний. □

2 Оператори типу Рудіна і компакти Бернштейна

Компактний простір Y ми називатимемо *компактом Бернштейна*, якщо тотожний оператор $I : C_p(Y) \to C_u(Y)$ належить до $B_1(C_p(Y), C_u(Y))$.

Нехай Y – компактний простір. Послідовність $(P_n)_{n=1}^\infty$ операторів $P_n : C(Y) \to C(Y)$ називатимемо *послідовністю операторів типу Рудіна*, якщо всі оператори P_n є pu-неперервними і для довільної функції $g \in C(Y)$ послідовність $P_n g \rightrightarrows g$ на Y. Як випливає з теореми 19.5, послідовність $(R_n)_{n=1}^\infty$ операторів Рудіна R_n є послідовністю операторів типу Рудіна.

Теорема 21.1. *Компактний простір Y є компактом Бернштейна тоді і тільки тоді, коли існує послідовність $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ операторів $P_n : C(Y) \to C(Y)$ типу Рудіна.*

Доведення. Необхідність. Нехай Y є компактом Бернштейна, тобто тотожний оператор $I = C_p(Y) \to C_u(Y)$ належить до першого класу Бера. Тоді існує послідовність неперервних операторів $P_n : C_p(Y) \to C_u(Y)$, яка поточково на $C(Y)$ збігається до оператора I. Іншими словами, всі оператори P_n є pu-неперервними і $P_n g \to Ig = g$ у просторі $C_u(Y)$, тобто $P_n g \rightrightarrows g$ на Y, для кожної функції $g \in C(Y)$. Отже, $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ – це послідовність операторів типу Рудіна.

Достатність. Навпаки, нехай $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність операторів типу Рудіна. Тоді всі оператори $P_n : C_p(Y) \to C_u(Y)$ є неперервними і для довільної функції $g \in C(Y)$ послідовність $P_n g \rightrightarrows g$ на Y, тобто $P_n g \to g$ у просторі $C_u(Y)$. Отже, тотожний оператор $I = C_p(Y) \to C_u(Y)$ є поточковою границею послідовності неперервних операторів P_n, значить I належить до першого класу Бера. Це й означає, що Y є компактом Бернштейна.

□

3 Компакти Бера та їх характеризація

Компактний простір Y ми називатимемо *компактом Бера*, якщо для кожного топологічного простору X виконується включення $C(X, C_p(Y)) \subseteq B_1(X, C_u(Y))$.

Теорема 21.2. *Компактний простір Y є компактом Бера тоді і тільки тоді, коли для довільного топологічного простору X і кожної нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ існує така послідовність неперервних функцій $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$, що $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на Y для кожного $x \in X$.*

Доведення. Необхідність. Нехай Y є компактом Бера, X – топологічний простір і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція. Згідно з твердженням 20.2, вертикальне розшарування $\varphi : X \to C_p(Y)$, $\varphi(x)(y) = f(x, y)$, відображення f неперервне, тобто $\varphi \in C(X, C_p(Y))$. Оскільки Y є компактом Бера, то $\varphi \in B_1(X, C_u(Y))$, тобто існує послідовність неперервних відображень $\varphi_n : X \to C_u(Y)$, яка поточково на X збігається до відображення φ. Це означає, що $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ в просторі $C_u(Y)$, тобто $\varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ на Y, для кожного $x \in X$.

Розглянемо послідовність функцій $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$, які визначаються формулою

$$f_n(x, y) = \varphi_n(x)(y),$$

для яких відображення φ_n є відповідними вертикальними розшаруваннями. За теоремою 20.1, всі функції f_n сукупно неперервні. Крім того, $f_n^x = \varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x) = f^x$ на Y для кожного $x \in X$.

Достатність. Навпаки, нехай X – топологічний простір і $\varphi \in C(X, C_p(Y))$. Розглянемо функцію $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, яка визначаються формулою

$$f(x, y) = \varphi(x)(y),$$

для якої відображення φ є вертикальним розшаруванням. Згідно з твердженням 20.2, функція f нарізно неперервна. Тоді, за умовою теореми, існує така послідовність неперервних функцій $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$, що $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на Y для кожного $x \in X$. Тепер, міркуючи аналогічно, як при доведенні необхідності, отримуємо, що відповідні вертикальні розшарування $\varphi_n : X \to C_u(Y)$, $\varphi_n(x) = f_n^x$, є неперервними і поточково на X збігаються до відображення φ. Отже, $\varphi \in B_1(X, C_u(Y))$ і Y є компактом Бера. □

4 Теореми Вери та Архангельського

Для одержання основного результату даної лекції ми потребуємо деяких попередніх знань, доведення яких виходять за межі нашого курсу. Наведемо тут лише формулювання потрібних нам результатів.

Нехай X – топологічний простір. Кажуть, що X має *властивість зліченності ланцюжків* (коротко: властивість CCC), якщо кожна диз'юнктна система непорожніх відкритих множин в X не більш ніж зліченна.

Система $\mathcal{A}$ множин в X називається *дискретною*, якщо у кожної точки $x \in X$ є такий окіл U, що перетинається щонайбільше з однією з множин системи $\mathcal{A}$. Кажуть, що X має *властивість зліченності дискретних ланцюжків* (DCCC), якщо кожна дискретна система відкритих множин в X не більш ніж зліченна.

Ясно, що кожна дискретна система множин диз'юнктна, тому

$$\text{CCC} \Rightarrow \text{ DCCC}.$$

Ми використаємо *теорему Вери* [8].

Теорема 21.3. *Нехай X – цілком регулярний простір, Y – компактний простір, $f \in CC(X \times Y)$, φ і ψ – асоційовані з f відображення. Розглянемо такі умови:*

(a) *підпростір $Y_f = \psi(Y)$ простору $C_p(X)$ метризовний;*

(*b*) *підпростір* $X_f = \varphi(X)$ *простору* $C_u(Y)$ *сепарабельний;*

(*c*) $f \in B_1(X \times Y)$.

Тоді $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$. *Якщо до того ж* X *має властивість DCCC, то і* $(c) \Rightarrow (a)$.

Згідно з [4, 2.3.18], простір $\mathbb{R}^X$, а отже, і його щільний підпростір $C_p(X)$ має властивість CCC. Тобто справедливий наступний результат, який ми називатимемо *теорема Архангельського.*

Теорема 21.4. *Нехай* X *– цілком регулярний простір. Тоді простір* $C_p(X)$ *має властивість CCC.*

Нарешті, сформулюємо ще один результат з теорії топологічних векторних просторів (див. [12]).

Теорема 21.5. *Кожний гаусдорфовий топологічний векторний простір є цілком регулярним.*

5 Характеризація метризовних компактів

Теорема 21.6. *Нехай* Y *– компакт. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(*i*) Y *– метризовний компакт;*

(*ii*) *існує послідовність* $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ *операторів* $P_n : C(Y) \to C(Y)$ *типу Рудіна;*

(*iii*) Y *– компакт Бернштейна;*

(*iv*) Y *– компакт Бера;*

(*v*) *для довільного топологічного простору* X *і кожної нарізно неперервної функції* $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ *існує така послідовність неперервних функцій* $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$, *що* $f_n^x \rightrightarrows f^x$ *на* Y *для кожного* $x \in X$.

Доведення. Імплікації $(i) \Rightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$ та $(iv) \Leftrightarrow (v)$ доведені в теоремах 19.5, 21.1 і 21.2.

$(ii) \Rightarrow (iv)$. Нехай $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність неперервних операторів типу Рудіна $P_n : C_p(Y) \to C_u(Y)$, X – топологічний простір і $\varphi \in C(X, C_p(Y))$. Розглянемо послідовність неперервних відображень $\varphi_n = P_n \circ \varphi \in C(X, C_u(Y))$. Оскільки $P_n g \to g$ у просторі $C_u(Y)$ для довільної функції $g \in C(Y)$, то

$$\varphi_n(x) = P_n(\varphi(x)) \to \varphi(x) \text{ у } C_u(Y)$$

для кожного $x \in X$. Отже, $\varphi \in B_1(X, C_u(Y))$ і Y – це компакт Бера.

$(iv) \Rightarrow (iii)$. Нехай $X = C_p(Y)$. Оскільки Y є компактом Бера, то тотожне відображення $I \in C(X, C_p(Y))$ належить до $B_1(X, C_u(Y))$. Це означає, що Y – це компакт Бернштейна.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Позначимо $X = C_p(Y)$. За теоремами 21.4 і 21.5, простір X цілком регулярний і має властивість CCC. Розглянемо функцію $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, яка визначається формулою

$$f(x, y) = x(y), \quad (x, y) \in X \times Y.$$

Вертикальним розшаруванням функції f є тотожне відображення $\varphi : X \to C_p(Y)$, яке, зрозуміло, неперервне. Тому за твердженням 20.2, функція f нарізно неперервна.

Нехай $(P_n)_{n=1}^{\infty}$, де $P_n : X = C_p(Y) \to C_u(Y)$, – це послідовність неперервних операторів типу Рудіна . Для кожного номера n розглянемо функцію $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$, для якої P_n є її вертикальним розшаруванням. За теоремою 20.1 кожна функція f_n є неперервною. Крім того, з означення операторів типу Рудіна випливає, що

$$f_n^x = P_n(x) \rightrightarrows x = f^x$$

на Y для кожного $x \in X$. Тоді, зокрема, $f_n(x, y) \to f(x, y)$ для довільних $x \in X$ і $y \in Y$. Отже, $f \in B_1(X \times Y)$. Тоді за теоремою 21.3, простір $Y_f = \psi(Y)$ метризовний, де $\psi : Y \to C_p(X)$, $\psi(y)(x) = f(x, y) = x(y)$, – горизонтальне розшарування функції f. Але відображення ψ неперервне згідно з твердженням 20.2. Крім того, оскільки Y цілком регулярний, то множина $X = C(Y)$ відокремлює точки в просторі Y, тобто відображення ψ ін'єктивне. Тепер з твердження 21.1 випливає, що Y – метризовний. $\square$

Лекція №22

Наближення нарізно неперервних функцій CT-функціями

1 Простори $CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R})$ і $CT(X \times \mathbb{R})$

Нехай X – топологічний простір. Символом $CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R})$ ми будемо позначати простір всіх нарізно неперервних функцій $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які 2π-періодичні відносно другої змінної, тобто функцій f, для яких $f_y \in C(X)$ для кожного $y \in \mathbb{R}$ і $f^x \in C_{2\pi}$ для кожного $x \in X$. Як і простір $C(Y)$ неперервних функцій на компактному просторі Y, простір $C_{2\pi}$ всіх неперервних 2π-періодичних функцій $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ наділяється двома природними топологіями: $\mathcal{T}_u$ – рівномірної збіжності і $\mathcal{T}_p$ – поточкової збіжності. Перша породжується рівномірною нормою

$$\|g\| = \max_{y\in\mathbb{R}} |g(x)| = \max_{0\le y\le 2\pi} |g(y)|,$$

відносно якої простір $C_{2\pi}$ буде банаховим простором, його ми позначаємо $C_{2\pi,u}$. Друга ж породжується переднормами $q_y(g) = |g(y)|$, де $y \in \mathbb{R}$, і є локально опуклою. Топологічний векторний простір $(C_{2\pi}, \mathcal{T}_p)$ ми позначаємо символом $C_{2\pi,p}$.

Неперервне відображення $\varphi : X \to C_{2\pi,u}$ (відповідно, $\varphi : X \to C_{2\pi,p}$) ми будемо називати *u-неперервними* (*p-неперервними*). Простір всіх сукупно неперервних функцій $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які 2π-періодичні відносно другої змінної, тобто перетин $CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R}) \cap C(X \times \mathbb{R})$ ми позначаємо $C^{2\pi}(X \times \mathbb{R})$.

Розглянемо одиничне коло $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ з індукованою з комплексної площини $\mathbb{C}$ топологією. Воно буде компактом і ми можемо розглянути банаховий простір $C_u(\mathbb{S})$ і локально опуклий простір $C_p(\mathbb{S})$. Зіставивши кожній функції $g \in C(\mathbb{S})$ функцію $h \in C_{2\pi}$, для якої

$$h(y) = g(e^{iy}), \quad y \in \mathbb{R},$$

ми отримаємо відображення $\Phi : C(\mathbb{S}) \to C_{2\pi}$, яке, очевидно, буде алгебраїчним ізоморфізмом векторних просторів. Більше того, відображення $\Phi : C_u(\mathbb{S}) \to C_{2\pi,u}$ – це лінійна ізометрія, а відображення $\Phi : C_p(\mathbb{S}) \to C_{2\pi,p}$ – це ізоморфізм топологічних векторних просторів. Наявність цього відображення дозволяє ототожнити простори $C(\mathbb{S})$ і $C_{2\pi}$ з їх природними топологіями $\mathcal{T}_u$ і $\mathcal{T}_p$.

Теорема 22.1. *Нехай X – топологічний простір, $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – функція і $\varphi : X \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\varphi(x) = f^x$, – асоційоване з f відображення. Тоді:*

(*a*) $f \in CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(X) \subseteq C_{2\pi}$ *і* $\varphi : X \to C_{2\pi}$ *– p-неперервне;*

(*b*) $f \in C^{2\pi}(X \times \mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(X) \subseteq C_{2\pi}$ *і* $\varphi : X \to C_{2\pi}$ *– u-неперервне.*

Доведення. (a). Згідно з твердженням 20.2, функція $f \in CC(X \times \mathbb{R})$ тоді і тільки тоді, коли $\varphi(X) \subseteq C(\mathbb{R})$ і відображення $\varphi : X \to C_p(\mathbb{R})$ неперервне. Залишилось зауважити, що 2π-періодичність функції f відносно другої змінної рівносильна тому, що функція $\varphi(x)$ 2π-періодична для кожного $x \in X$.

(b). Нехай $f \in C^{2\pi}(X \times \mathbb{R})$. Тоді, згідно з ($a$), $\varphi(X) \subseteq C_{2\pi}$ і $\varphi : X \to C_{2\pi}$. Застосувавши до неперервного звуження $f|_{X\times[0,2\pi]}$ теорему 20.1, одержимо, що відображення $\tilde{\varphi} : X \to C_u([0, 2\pi])$, $\tilde{\varphi}(x)(y) = f(x, y)$ неперервне, що означає u-неперервність відображення φ.

Навпаки, міркуємо аналогічно. Нехай $\varphi(X) \subseteq C_{2\pi}$ і відображення $\varphi : X \to C_{2\pi}$ – u-неперервне. Тоді, згідно з (a), функція f нарізно неперервна є 2π-періодичною відносно другої змінної. Тепер, з теореми 20.1, випливає, що функція f має сукупно неперервні звуження на всі множини виду $X \times [a; b]$, звідки негайно випливає сукупна неперервність функції f. □

Як і раніше, позначимо через T алгебру всіх тригонометричних поліномів $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, тобто функцій

$$g(y) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos ky + b_k \sin ky).$$

Як ми знаємо, T – це підалгебра алгебри $C_{2\pi}$. Позначимо символом $CT(X \times R)$ множину всіх функцій $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для яких горизонтальні y-розрізи $f_y : X \to \mathbb{R}$ неперервні для кожного $y \in \mathbb{R}$, а вертикальні x-розрізи f^x належать до T для кожного $x \in X$. Зрозуміло, що $CT(X\times\mathbb{R})$ – це лінійний підпростір простору $CC_{2\pi}(X\times\mathbb{R})$ чи навіть підалгебра алгебри $CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R})$. Елементи з простору $CT(X \times \mathbb{R})$ ми називатимемо *CT-функціями.*

2 Апроксимуючі послідовності операторів

Нехай $s = \alpha\beta \in \{pp, pu, up, uu\}$. Неперервний оператор $A : C_{2\pi,\alpha} \to C_{2\pi,\beta}$ ми будемо називати *s-неперервним.* Кожний оператор $A : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ породжує перетворення

$$\widetilde{A} : CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R}) \to CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R}),$$

яке функції $f \in CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R})$ ставить у відповідність функцію $\tilde{f} = \widetilde{A}f$, що визначається на $X \times \mathbb{R}$ формулою

$$\tilde{f}(x, y) = (Af^x)(y).$$

Нехай $\varphi(x) = f^x$ і $\tilde{\varphi}(x) = \tilde{f}^x$ – асоційовані з f і $\tilde{f}$ відображення. Зрозуміло, що $\tilde{\varphi} = A \circ \varphi$.

Теорема 22.2. *(a) Нехай $A : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ – pu-неперервний оператор, $f \in CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R})$ і $\tilde{f} = \widetilde{A}f$. Тоді $\tilde{f} \in C^{2\pi}(X \times \mathbb{R})$.*

(b) Нехай $A : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ – uu-неперервний оператор, $f \in C^{2\pi}(X \times \mathbb{R})$ і $\tilde{f} = \widetilde{A}f$. Тоді $\tilde{f} \in C^{2\pi}(X \times \mathbb{R})$.

Доведення. (a). Нехай φ і $\tilde{\varphi}$ – асоціативні відображення з функціями f і $\tilde{f}$ відповідно. Тоді $\tilde{\varphi} = A \circ \varphi$. З теореми 22.1 (a) випливає, що відображення φ p-неперервне, а оператор A – pu-неперервний за умовою. Тому відображення $\tilde{\varphi}$ за теоремою про неперервність композиції буде u-неперервним. Тоді $\tilde{f} \in C^{2\pi}(X \times \mathbb{R})$ за теоремою 22.1(b).

(b). У цьому випадку відображення φ за теоремою 22.1(b) буде вже u-неперервним, а оператор A – uu-неперервним. Тому відображення $\tilde{\varphi} = A \circ \varphi$ буде u-неперервним. Отже, $\tilde{f} \in C^{2\pi}(X \times \mathbb{R})$ за теоремою 22.1(b). □

Нехай знову $s = \alpha\beta \in \{pp, pu, up, uu\}$. Послідовність $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ операторів $A_n : C_{2\pi} \to T$ називається *s-апроксимуючою* для T, якщо $A_n g \to g$ в просторі $C_{2\pi,\beta}$ і всі оператори A_n є s-неперервними.

Теорема 22.3. *(a) Нехай $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ – pu-апроксимуюча для T послідовність операторів $A_n : C_{2\pi} \to T$, $f \in CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R})$ і $f_n = \tilde{A}_n f$. Тоді $f_n \in CT(X \times \mathbb{R}) \cap C^{2\pi}(X \times \mathbb{R})$ для кожного номера n і $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на $\mathbb{R}$ для кожного $x \in X$.*

(b) Нехай $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ – uu-апроксимуюча для T послідовність операторів $A_n : C_{2\pi} \to T$, $f \in C^{2\pi}(X \times \mathbb{R})$ і $f_n = \widetilde{A}_n f$. Тоді $f_n \in CT(X \times \mathbb{R}) \cap C^{2\pi}(X \times \mathbb{R})$ для кожного номера n і $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на $\mathbb{R}$ для кожного $x \in X$.

Доведення. Оскільки $A_n(C_{2\pi}) \subseteq T$, то $f_n \in CT(X \times \mathbb{R})$ для кожного номера n. Сукупна неперервність функцій f_n у кожному випадку випливає з теореми 22.2. Нарешті, $A_n g \to g$ в просторі $C_{2\pi,u}$ для кожного $g \in C_{2\pi}$. Тому

$$f_n^x = A_n(\varphi(x)) \rightrightarrows \varphi(x) = f^x$$

на $\mathbb{R}$ для кожного $x \in X$. □

3 Застосування операторів Фейєра до наближення сукупно неперервних функцій

У лекції № 4 ми ввели оператори Фейєра $F_n : C_{2\pi} \to T$, які задаються формулою

$$F_n g(y) = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(y+t)\Phi_n(t)dt,$$

де $\Phi_n(t) = \frac{2}{n}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\right)^2$ – ядро Фейєра. Згідно з теоремою Фейєра, $F_n g \rightrightarrows g$ на $\mathbb{R}$ для кожної функції $g \in C_{2\pi}$.

Теорема 22.4. (*a*) *Оператори Фейєра $F_n : C_{2\pi} \to T$ утворюють uu-апроксимуючу послідовність для простору T всіх тригонометричних многочленів.*

(*b*) *Для довільного топологічного простору X і кожної сукупно неперервної 2π-періодичної відносно другої змінної функції $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ всі функції*

$$f_n(x, y) = (F_n f^x)(y)$$

є сукупно неперервними на $X \times \mathbb{R}$, $f_n^x \in T$ для будь-яких $n \in \mathbb{N}$ і $x \in X$ і $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на $\mathbb{R}$ для кожного $x \in X$.

Доведення. (*a*). Лінійність оператора F_n випливає з лінійності інтеграла, а його *uu*-неперервність з оцінки

$$|F_n g(y)| \le \tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(y+t)|\Phi_n(t)dt \le \tfrac{\|g\|}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)dt = \|g\|.$$

Звідси випливає, що $\|F_n g\| \le \|g\|$, що й дає нам неперервність оператора F_n у нормованому просторі $(C_{2\pi}, \|\cdot\|)$, тобто його *uu*-неперервність.

Співвідношення $F_n g \to g$ в $C_{2\pi,u}$ для кожного $g \in C_{2\pi}$ дає нам теорема Фейєра. Це завершує доведення твердження (*a*).

Твердження (*b*) випливає з (*a*) і теореми 22.3(*b*). □

Дослідимо, чи будуть оператори F_n *pu*-неперервними.

Лема 22.1. *Нехай $K \in C_{2\pi}$, $K(t) \ge 0$ на $\mathbb{R}$, $K(0) > 0$ і $t_0 \in \mathbb{R}$. Тоді лінійний функціонал*

$$\Psi(g) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)K(t-t_0)dt$$

розривний на просторі $C_{2\pi,p}$.

Доведення. Знайдемо таку точку $a \in [-\pi, \pi)$, що $t_0 \in a + 2m\pi$ для деякого цілого числа $m \in \mathbb{Z}$. Нехай $\eta = \frac{K(0)}{2}$. Ясно, що $0 < \eta < K(0)$. Оскільки функція K неперервна в нулі, то існує таке $\delta > 0$, що $a + \delta < \pi$ і $K(t - a) \geq \eta$ при $a \leq t \leq a + \delta$. Для кожного номера n покладемо $b_n = a + \frac{\delta}{n}$ і розглянемо функцію $g_n \in C_{2\pi}$, графіком якої на відрізку $[-\pi, \pi]$ є ламана з вершинами у точках $(-\pi, 0)$, $(a, 0)$, $(\frac{a+b_n}{2}, n)$, $(b_n, 0)$ і $(\pi, 0)$. Ясно, що $g_n(t) \to 0$ для кожного $t \in \mathbb{R}$, бо $b_n \to a$ при $n \to \infty$. Але, оскільки $K(t - t_0) = K(t - a)$ для кожного $t \in \mathbb{R}$, то

$$\Psi(g_n) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} g_n(t)K(t - t_0)dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} g_n(t)K(t - a)dt = \int\limits_{a}^{b_n} g_n(t)K(t - a)dt \geq$$

$$\geq \eta \int\limits_{a}^{b_n} g_n(t)dt = \frac{\eta n(b_n - a)}{2} = \frac{\delta\eta}{2} > 0$$

для кожного номера n. Отже, $\Psi(g_n) \not\to 0$ при $n \to \infty$. Це показує нам, що лінійний функціонал Ψ розривний у точці 0 на просторі $C_{2\pi,p}$. $\square$

Теорема 22.5. *Оператори Фейєра F_n не є pp-неперервними, а значить, і pu-неперервними.*

Доведення. Оскільки

$$F_n g(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(y)\Phi_n(y - x)dy,$$

функція $K = \frac{1}{\pi}\Phi_n$ належить до простору $C_{2\pi}$, $K(t) \geq 0$ на $\mathbb{R}$ і $K(0) = \frac{n+1}{2\pi} > 0$, то згідно з лемою 22.1 функціонал

$$\Psi_x(g) = (F_n g)(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(y)\Phi_n(y - x)dy$$

розривний на просторі $C_{2\pi,p}$ для кожного $x \in \mathbb{R}$. Тому і оператор F_n не є pp-неперервним, адже його pp-неперервність рівносильна неперервності всіх функціоналів $\Psi_x : C_{2\pi,p} \to \mathbb{R}$, а у нас жоден з них не є неперервним. $\square$

4 Застосування операторів Джексона до наближення нарізно неперервних функцій

Розглянемо оператори Джексона $J_n : C_{2\pi} \to T$, які були введені у лекції №7 формулою

$$J_n g(y) = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(y_k)\Phi_n(y - y_k),$$

де $y_k = x_0 + \frac{2k\pi}{n}$ при $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $0 \leq x_0 < \frac{2\pi}{n}$, а Φ_n – ядро Фейєра. За теоремою Джексона $J_n g \rightrightarrows g$ на $\mathbb{R}$ для кожного $g \in C_{2\pi}$.

Теорема 22.6. (*a*) *Оператори Джексона $J_n : C_{2\pi} \to T$ лінійні й утворюють pu-апроксимуючу послідовність для простору T.*

(*b*) *Для довільного топологічного простору X і кожної функції $f \in CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R})$ всі функції*

$$f_n(x, y) = J_n f^x(y)$$

є сукупно неперервними на $X \times \mathbb{R}$, належать до простору $CT(X \times \mathbb{R})$ і $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на $\mathbb{R}$ для кожного $x \in X$.

Доведення. (*a*). Для довільних точок $y_1, \ldots, y_n$ і функцій $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ з простору $C_{2\pi}$ формулою

$$Ag(y) = \sum_{k=1}^{n} g(y_k)\varphi_k(y)$$

визначається функція $Ag \in C_{2\pi}$ і ми отримуємо оператор $A : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$, який, очевидно, буде лінійним. Для кожної функції $g \in C_{2\pi}$ маємо

$$\|Ag\| \leq \sum_{k=1}^{n} |g(y_k)| \cdot |\varphi_k(y)| \leq \max_{1\leq k\leq n} |g(y_k)| \sum_{k=1}^{n} \|\varphi_k\| = \gamma \max_{1\leq k\leq n} |g(y_k)|,$$

де $\gamma = \sum\limits_{k=1}^{n} \|\varphi_k\|$. На основі критерію неперервності лінійного оператора в полінормованих просторах [12] отримуємо, що оператор A *pu*-неперервний. Оскільки оператори Джексона J_n є операторами такого типу, то всі вони лінійні і *pu*-неперервні. Крім того, $J_n g \to g$ в $C_{2\pi,u}$ за теоремою Джексона і $J_n(C_{2\pi}) \subseteq T$ для кожного номера n. Отже, твердження (*a*) доведене.

Твердження (*b*) випливає з (*a*) і теореми 22.3(*a*). □

Ми бачимо, що многочлени Джексона в питаннях наближення функцій від двох змінних дають кращий результат, а ніж многочлени Фейєра.

Лекція №23

Наближення CL-функціями

1 CL-функції і s-простори

Нехай X – топологічний простір, Y – компактний простір. Для підпростору L простору $C(Y)$ простору

$$CL(X \times Y) = \{f \in CC(X \times Y) : \varphi(X) \subseteq L\},$$

де, як і раніше, $\varphi : X \to C(Y)$, $\varphi(x) = f^x$, – вертикальне розшарування нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$.

Нехай $s = \alpha\beta \in \{pp, pu, up, uu\}$. Нагадаємо, що неперервне відображення $\varphi : X \to C_\alpha(Y)$ ми називаємо *α-неперервним*, а неперервний оператор $A : C_\alpha(Y) \to C_\beta(Y)$ – *$\alpha\beta$-неперервним* чи, коротше, *s-неперервним.*

Припустимо, що L – всюди щільний підпростір простору $C_u(Y)$. Ми будемо говорити, що L – це *s-простір* для простору X, де $s = \alpha\beta$, якщо для кожного α-неперервного відображення $\varphi : X \to C(Y)$ існує послідовність β-неперервних відображень $\varphi_n : X \to L$, така, що $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ в $C_u(Y)$ на X. Як випливає з теореми 19.2 і твердження 20.2 підпростір P усіх алгебраїчних многочленів у просторі $C[0;1]$ – це pu-простір відносно кожного топологічного простору X.

Теорема 23.1. *Нехай X – топологічний простір, Y – компактний простір, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – неперервна відносно другої змінної функція і $A : C(Y) \to C(Y)$ – оператор і $g(x, y) = (Af^x)(y)$ на $X \times Y$. Тоді:*

(a) *якщо $f \in CC(X \times Y)$ і A – pp-неперервний, то $g \in CC(X \times Y)$;*

(b) *якщо $f \in CC(X \times Y)$ і A – pu-неперервний, то $g \in C(X \times Y)$;*

(c) *якщо $f \in C(X \times Y)$ і A – up-неперервний, то $g \in CC(X \times Y)$;*

(d) *якщо $f \in C(X \times Y)$ і A – uu-неперервний, то $g \in C(X \times Y)$.*

Доведення. Оскільки функція f неперервна відносно другої змінної функція, то функція g теж неперервна відносно другої змінної. Нехай $\varphi : X \to C(Y)$ і $\psi : X \to C(Y)$ – відображення, асоційовані з функціями f і g відповідно. Тоді

$$\psi(x) = g^x = Af^x = A(\varphi(x)))$$

на X. Отже, $\psi = A \circ \varphi$.

(a), (b). Згідно з твердженням 20.2, відображення $\varphi : X \to C_p(Y)$ неперервне. Тоді відображення $\psi = A \circ \varphi : X \to C_\beta(Y)$ також неперервне, якщо $\beta = p$ у випадку (a) і $\beta = u$ у випадку (b). Залишилося ще раз використати твердження 20.2 або теорему 20.1.

(c), (d). У цьому випадку відображення $\varphi : X \to C_u(Y)$ неперервне за теоремою 20.1. Далі міркуємо аналогічно. $\square$

2 Апроксимуючі послідовності операторів

Послідовність операторів $A_n : C(Y) \to L$ називається *апроксимуючою* для підпростору L, якщо $A_n g \to g$ в $C_u(Y)$ для кожного $g \in C(Y)$. Так, послідовність операторів Бернштейна $B_n : C[0;1] \to P$ є апроксимуючою для підпростору P всіх алгебраїчних многочленів на $[0;1]$.

З допомогою аксіоми вибору можна довести наступний результат.

Теорема 23.2. *Нехай L – всюди щільний підпростір банахового простору $C_u(Y)$. Тоді існує апроксимуюча послідовність операторів $A_n : C(Y) \to L$.*

Доведення. Кожній функції $g \in C(Y)$ поставимо у відповідність множину

$$S(g) = \{(g_n)_{n=1}^{\infty} \in L^{\mathbb{N}} : g_n \to g \text{ у } C_u(Y)\}.$$

Ясно, що $S(g) \neq \emptyset$ для кожного $g \in C(Y)$, адже $\overline{L} = C(Y)$. За аксіомою вибору існує функція вибору $\Phi : C(Y) \to L^{\mathbb{N}}$, така, що $\Phi(g) \in S(g)$ для кожного $g \in C(Y)$.

Нехай $Q_n : L^{\mathbb{N}} \to L$ – проєктори, які ставлять у відповідність послідовності $(g_k)_{k=1}\infty$ з $L^{\mathbb{N}}$ її n-тий елемент $g_n \in L$. Розглянемо оператори $A_n = Q_n \circ \Phi : C(Y) \to L$. Нехай $g \in C(Y)$ і $g_n = A_n g$. За побудовою

$$(g_n)_{n=1}^{\infty} = (Q_n(\Phi(g)))_{n=1}^{\infty} = \Phi(g) \in S(g).$$

Тому $g_n \to g$ в $C_u(Y)$. Отже, $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ – це апроксимуюча для L послідовність операторів. $\square$

Підпростір L простору $C(Y)$ ми називатимемо *as-простором*, якщо існує s-апроксимуюча для L послідовність операторів $A_n : C(Y) \to L$.

Теорема 23.3. *Нехай Y – компактний простір, L – підпростір $C(Y)$ і $s = \alpha\beta \in \{pp, pu, up, uu\}$. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(i) L – as-простір;

(ii) L – це s-простір для кожного топологічного простору X.

Доведення. (i) $\Rightarrow$ (ii). Нехай L – це as-простір, X – довільний топологічний простір і $\varphi : X \to C(Y)$ – α-неперервне відображення. Розглянемо апроксимуючу для L послідовність s-неперервних операторів $A_n : C(Y) \to L$ і покладемо $\varphi_n = A_n \circ \varphi$. Відображення $\varphi_n : X \to L$ будуть β-неперервні і

$$\varphi_n(x) = A_n(\varphi(x)) \to \varphi(x)$$

в просторі $C_u(Y)$ для кожного $x \in X$, Отже, L – це s-простір для X.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Нехай L – це s-простір для кожного топологічного простору X. Візьмемо за X топологічний простір $C_\alpha(Y)$. Тотожне відображення $\varphi : X \to C(Y)$, $\varphi(g) = g$, очевидно, буде α-неперервним. Тому існує така послідовність β-неперервних відображень $\varphi_n : X \to L$, що $\varphi_n(g) \to g$ в просторі $C_u(Y)$ для кожного $g \in X = C(Y)$. Оператори $A_n = \varphi_n$ будуть $\alpha\beta$-неперервними і утворюватимуть апроксимуючу послідовність для L. Отже, L – це as-простір. □

Підпростір P всіх многочленів у просторі $C[0;1]$ є apu-простором, а послідовність операторів Бернштейна $B_n : C[0;1] \to P$ – це pu-апроксимуюча послідовність для P. Оператори Фейєра F_n утворюють uu-апроксимуючу послідовність для простору T тригонометричних многочленів, а оператори Джексона J_n – pu-апроксимуючу.

Наведемо ще один приклад. Нехай M – підпростір простору $C[0;1]$, що складається з усіх неперервних кусково лінійних функцій $h : [0;1] \to \mathbb{R}$. Зіставимо кожній функції $g \in C[0;1]$ функцію $g_n : A_n g \in M$, графіком якої є ламана з вершинами у точках $(\frac{k}{n}, g(\frac{k}{n}))$, де $k = 0, 1, \ldots, n$. З рівномірної неперервності функції g випливає, що $A_n g \to g$ в просторі $C_u[0;1]$. Крім того, всі оператори A_n є pu-неперервними. Отже, M – це apu-простір в $C[0;1]$, як і P.

3 Теорема про близькі базиси

Нам знадобиться один результат з теорії базисів, який дав назву даному пункту. Щоб його сформулювати зробимо невеличкий екскурс в теорію базисів [6].

Послідовність елементів e_k банахового простору $(X, \|\cdot\|)$ називається його *базисом* або *базисом Шаудера*, якщо для кожного елемента $x \in X$ існує послідовність скалярів

$\lambda_k \in \mathbb{K}$ така, що $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$. При цьому, послідовність частинних сум $P_n x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ цього ряду збігається у просторі X до елемента x. Якщо позначити літерою L лінійну оболонку множини $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$, то послідовність операторів $P_n : X \to L$ буде апроксимуючою для L, адже $P_n x \to x$ у просторі X. Послідовність $(P_n x)_{n=1}^{\infty}$, будучи збіжною, обов'язково обмежена в X. Отже, ми можемо для кожного $x \in X$ визначити число $\|x\|_0$ за формулою

$$\|x\|_0 = \sup\{\|P_n x\| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Оскільки всі оператори P_n лінійні, то, як легко перевірити, функція $\|\cdot\|_0$ є нормою на X. Зрозуміло, що $\|P_n x\| \le \|x\|_0$ для кожного номера n, і тому

$$\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|P_n x\| \le \|x\|_0$$

для кожного $x \in X$.

Для довільних $n \ge 0$ і $l \in \mathbb{N}$ покладемо $P_{n,l} = P_{n+l} - P_n$, де $P_0 = 0$. Для лінійних операторів $P_{n,l}$ маємо

$$\|P_{n,l} x\| \le \|P_{n,l} x\| + \|P_n x\| \le 2\|x\|_0.$$

Розглянемо також послідовність *координатних функціоналів* $f_n : X \to \mathbb{K}$, що визначаються формулою

$$f_n\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k\Big) = \lambda_n.$$

Зрозуміло, що всі функціонали f_n лінійні і

$$|f_n(x)| \cdot \|e_n\| = \|f_n(x) e_n\| = \|P_{n-1,1} x\| \le 2\|x\|_0$$

для кожного $x \in X$.

Твердження 23.1. *Нормований простір $X_0 = (X, \|\cdot\|_0)$ є банаховим.*

Доведення. Нехай $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальна послідовність в просторі X_0. Оскільки

$$|f_k(x_m) - f_k(x_n)| = |f_k(x_m - x_n)| \le \tfrac{2}{\|e_k\|} \|x_m - x_n\|_0$$

для довільних $k, m, n \in \mathbb{N}$, то всі числові послідовності $(f_k(x_n))_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальними, а отже, збіжними, тобто для кожного $k \in \mathbb{N}$ існує границя $\lambda_k = \lim\limits_{n\to\infty} f_k(x_n)$. Покажемо, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$ збіжний в X і $x_n \to x$ в X_0.

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Виберемо такий номер p_0, що $\|x_p - x_q\|_0 \le \varepsilon$ для довільного $p, q \ge p_0$. Тепер для довільних $n, l \in \mathbb{N}$ та $p, q \ge p_0$ маємо

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+l} f_k(x_p)e_k - \sum_{k=n+1}^{n+l} f_k(x_q)e_k \right\| = \|P_{n,l}(x_p - x_q)\| \le \|x_p - x_q\|_0 \le \varepsilon.$$

Перейшовши до границі при $q \to \infty$, одержимо, що

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+l} f_k(x_p)e_k - \sum_{k=n+1}^{n+l} \lambda_k e_k \right\| \le \varepsilon$$

для довільних $n, l \in \mathbb{N}$ і $p \ge p_0$. Візьмемо довільне $p \ge p_0$. Оскільки ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x_p)e_k$ збіжний, то існує такий номер N, що $\left\| \sum\limits_{k=n+1}^{n+l} f_k(x_p)e_k \right\| \le \varepsilon$, а отже, за нерівністю трикутника

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+l} \lambda_k e_k \right\| \le \left\| \sum_{k=n+1}^{n+l} f_k(x_p)e_k - \sum_{k=n+1}^{n+l} f_k(x_q)e_k \right\| + \left\| \sum_{k=n+1}^{n+l} f_k(x_p)e_k \right\| \le \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

для довільних $n \ge N$ і $l \in \mathbb{N}$. Таким чином, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$ збіжний в повному просторі X.

Позначимо $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$. Тепер для довільного $p \ge p_0$ маємо

$$\|x_p - x\|_0 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n(x_p - x)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_{1,n-1}(x_p - x)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k=1}^{n} f_k(x_p)e_k - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\| \le \varepsilon,$$

звідки випливає, що $x_n \to x_0$ в просторі X_0. $\square$

Тепер розглянемо тотожний оператор $I : X_0 \to X$. Оскільки $\|x\| \le \|x\|_0$ для довільного $x \in X$, то за теоремою Банаха про обернений оператор неперервним буде також оператор $I : X \to X_0$. Отже, існує така константа $\gamma > 0$, що $\|x\|_0 \le \gamma \|x\|$ на X. В такому разі, для кожного $x \in X$ виконуються нерівності

$$\|P_n x\| \le \|x\|_0 \le \gamma \|x\| \qquad \text{і} \qquad |f_n(x)| \le 2\|e_n\|^{-1}\|x\|_0 \le 2\|e_n\|^{-1}\gamma\|x\|.$$

Вони показують, що всі проєктори P_n і координатні функціонали f_n неперервні.

Більше того, оскільки $P_n x \to x$ в X для кожного $x \in X$, то послідовність $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ поточково збіжна, а отже, і поточково обмежена. Тому, згідно з принципом рівномірної обмеженості [14, с. 47], число

$$K = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n\|$$

скінченне. Воно називається *базисною константою* базису $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Оскільки $\|P_n x\| \le \|P_n\| \cdot \|x\| \le K\|x\|$ для кожного номера n, то $\|x\|_0 \le K\|x\|$ на X. Отже,

$$|f_n(x)| \cdot \|e_n\| \le 2\|x\|_0 \le 2K\|x\|,$$

а для *нормованих базисів*, коли $\|e_n\| = 1$ для кожного n, виконується нерівність

$$|f_n(x)| \le 2K\|x\|.$$

Отже, ми встановили наступний результат.

Теорема 23.4. *Нехай $(e_n)_{n=1}^\infty$ – базис Шаудера у банаховому просторі X. Тоді всі проектори P_n і координатні функціонали f_n лінійні і неперервні, базисна константа $K = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\|$ скінченна і $\|f_n\| \le 2K\|e_n\|^{-1}$ для кожного номера n, зокрема, $\|f_n\| \le 2K$, якщо базис $(e_n)_{n=1}^\infty$ нормований.*

Нехай X і Y – банахові простори, $(x_n)_{n=1}^\infty$ – базис в X і $(y_n)_{n=1}^\infty$ – базис в Y. Ці базиси називаються *еквівалентними*, якщо ряд $\sum\limits_{n=1} \lambda_n x_n$ збігається тоді і тільки тоді, коли збігається ряд $\sum\limits_{n=1} \lambda_n y_n$.

Наступний результат називається *теоремою про близькі базиси* [6].

Теорема 23.5. *Нехай $(x_k)_{k=1}^\infty$ – нормований базис у банаховому просторі X з базисною константою K і $(y_k)_{k=1}^\infty$ – послідовність елементів з X, для якої $\sum\limits_{k=1}^\infty \|x_k - y_k\| < \frac{1}{2K}$. Тоді $(y_k)_{k=1}^\infty$ – це базис в X, що еквівалентний базису $(x_k)_{k=1}^\infty$.*

Доведення. Нехай $x = \sum\limits_{k=1}^\infty \lambda_k x_k$ і $z_k = x_k - y_k$ для кожного k. Оскільки, за теоремою 23.4, послідовність $(\lambda_k)_{k=1}^\infty$ обмежена, адже

$$\gamma = \sup_{k\in\mathbb{N}} |\lambda_k| \le 2K\|x\|,$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^\infty \lambda_k x_k$ буде збіжним в X, навіть, абсолютно, бо

$$\|\lambda_k z_k\| = |\lambda_k| \cdot \|z_k\| \le \gamma\|z_k\|$$

для кожного k, а ряд $\sum\limits_{k=1}^\infty \gamma\|z_k\|$ збіжний. Але $\lambda_k y_k = \lambda_k x_k - \lambda_k y_k$ для кожного k. Тому і ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty \lambda_n x_n$ збіжний в X.

Так само зі збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^\infty \lambda_n y_n$ випливає збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^\infty \lambda_n x_n$. □

На завершення, зауважимо, що для двох еквівалентних базисів $(x_k)_{k=1}^\infty$ і $(y_k)_{k=1}^\infty$ на банаховому просторі X оператор $T : X \to X$, який визначається формулою

$$T\Big(\sum_{n=1}^\infty \lambda_n x_n\Big) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n y_n,$$

є лінійним ізоморфізмом. Справді, оскільки всі координатні функціонали неперервні, то всі оператори $T_n : X \to X$, які визначається формулами

$$T_n\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k,$$

неперервні. Звідси за принципом рівномірної обмеженості [14, с. 47] оператор T також неперервний. Аналогічно доводиться неперервність оберненого оператора T^{-1}.

4 Застосування теореми про близькі базиси

Тут ми доведемо такий результат.

Теорема 23.6. *Нехай Y – такий компактний простір, що простір $C_u(Y)$ має базис Шаудера, і L – всюди щільний підпростір $C_u(Y)$. Тоді L – це uu-простір.*

Доведення. Нехай $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ – базис простору $C_u(Y)$ із базисною константою K і

$$M = \mathrm{sp}\{g_k : k \in \mathbb{N}\}.$$

Тоді кожна функція $g \in C_u(Y)$ єдиним чином подається у вигляді

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(g) g_k,$$

де ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(g) g_k$ збігається в просторі $C_u(Y)$. Координатні функціонали $c_k : C_u(Y) \to \mathbb{R}$ за теоремою 23.4 неперервні. Тому всі оператори $S_n : C_u(Y) \to C_u(Y)$,

$$S_n g = \sum_{k=1}^{n} c_k(g) g_k,$$

uu-неперервні. При цьому $S_n(C_u(Y)) \subseteq M$ і $S_n g \to g$ в $C_u(Y)$ для кожного $g \in C_u(Y)$.

Оскільки $\overline{L} = C_u(Y)$, то для кожного номера k існує така функція $h_k \in L$, що $\|g_k - h_k\| < \frac{1}{2^{k+1}K}$. Тоді

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k - h_k\| < \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{2^{k+1}K} = \tfrac{1}{2K}.$$

Тому, за теоремою 23.5, послідовність $(h_k)_{k=1}^{\infty}$ теж буде базисом в $C_u(Y)$, еквівалентним базису $(g_k)_{k=1}^{\infty}$. В такому разі, існує такий ізоморфізм $T : C_u(Y) \to C_u(Y)$, що $Tg_k = h_k$ для кожного номера k.

Для кожного номера n покладемо $A_n = TS_nT^{-1}$. Ясно, що всі оператори A_n є uu-неперервними, бо оператори T, S_n і T^{-1} такі. Нехай $h \in C(Y)$ і $g = T^{-1}h$. Тоді

$$A_n h = TS_n g = T\Big(\sum_{k=1}^{n} c_k(g) g_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} c_k(g) T g_k = \sum_{k=1}^{n} c_k(g) h_k \in L,$$

отже, і $A_n \subseteq L$ для кожного n. Крім того,

$$A_n h = TS_n g \to Tg = h$$

в $C_u(Y)$. Тому $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ – це uu-апроксимуюча послідовність для L. □

Зауважимо, що простір $C_u[0;1]$ має базис, який називається *базисом Фавара-Шаудера*. Більше того, простори $C_u[0;1]^n$ і навіть простори $C_u(Y)$, де Y – метризовний компакт, мають базис. Тому для них справедлива теорема 23.6.

Звідси ми можемо отримати наступний результат про наближення неперервних функцій CL-функціями.

Теорема 23.7. *Нехай Y – такий компактний простір, що простір $C_u(Y)$ має базис, і L – всюди щільний підпростір $C_u(Y)$, X – топологічний простір і $f \in C(X \times Y)$. Тоді існує така послідовність сукупно неперервних CL-функцій $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$, що $f_n^x \to f^x$ в $C_p(Y)$ для кожного $x \in X$.*

Доведення. За теоремою 23.6, підпростір L – це auu-простір. Тоді, за теоремою 23.3, він буде і uu-простором для кожного топологічного простору X. Відображення $\varphi : X \to C_u(Y)$, асоційоване з функцією f, буде неперервним за теоремою 20.1. Тоді, згідно з означенням uu-простору, існує послідовність s-неперервних відображень $\varphi_n : X \to L$, для яких $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ в $C_u(Y)$ для кожного $x \in X$. Функції $f_n(x,y) = \varphi_n(x)(y)$ за тією ж теоремою 20.1 будуть сукупно неперервними, причому $f_n^x = \varphi_n(x) \in L$ для кожного $x \in X$. Отже, f_n – це CL-функції. При цьому

$$f_n^x = \varphi_n(x) \to \varphi(x) = f^x$$

в $C_u(Y)$ для кожного $x \in X$. □

Зауважимо, нарешті, що міркування з доведення теореми 23.6 можна узагальнити й отримати такий результат.

Теорема 23.8. *Нехай L – всюди щільний лінійний підпростір банахового простору E з базисом Шаудера. Тоді існує така послідовність лінійних неперервних операторів $A_n : E \to L$, що $A_n g \to g$ в E для кожного $g \in E$.*

Лекція №24

Апроксимація нарізно неперервних функцій CL-функціями

1 Апроксимація топологічного вкладення

Нехай $\alpha, \beta \in \{p, u\}$ і $s = \alpha, \beta$. Нагадаємо, що неперервний оператор $A : C_\alpha(Y) \to C_\beta(Y)$ ми називаємо s-неперервним. Лінійний підпростір L простору $C(Y)$ називається as-простором, якщо існує така послідовність s-неперервних операторів $A_n : C(Y) \to L$, що $A_n g \to g$ в $C_u(Y)$ для кожного $g \in C(Y)$. Тут, як і раніше, Y – компактний простір.

У зв'язку з результатами, отриманими у попередніх лекціях, виникає загальна задача: чи кожний всюди щільний в $C_u(Y)$ підпростір L буде as-простором?

В попередній лекції ми з'ясували, що коли простір $C_u(Y)$ має базис Шаудера, то кожний всюди щільний лінійний підпростір L простору $C_u(Y)$ є auu-простором. Зокрема, це буде виконуватись у випадку, коли Y – метризовний компакт, бо тоді, як відомо, простір $C_u(Y)$ має базис Шаудера.

У цій лекції ми встановимо, що для метризовного компакту Y кожний всюди щільний в $C_u(Y)$ лінійний підпростір L буде apu-простором, що дозволить отримати апроксимаційну теорему для нарізно неперервних відображень.

Нам буде потрібний наступний результат про апроксимацію тотожного вкладення.

Теорема 24.1. *Нехай L – всюди щільний лінійний підпростір нормованого простору E, M – скінченновимірний лінійний підпростір E, $J : M \to E$, $Jx = x$, – тотожне вкладення і $\varepsilon > 0$. Тоді існує такий лінійний неперервний оператор $U : M \to E$, що $U(M) \subseteq L$ і $\|J - U\| < \varepsilon$.*

Доведення. Нехай $\dim M = m$ і $x_1, \dots, x_m$ – базис в M. Для кожного $x \in M$ існує такий єдиний набір скалярів $\xi_1, \dots, \xi_m$, що $x = \sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k x_k$. Функція $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \le k \le m} |\xi_k|$ – це норма на M, яка буде еквівалентною до звуження на M норми $\|\cdot\|$ простору E. Тому існує така константа $\gamma > 0$, що $\|x\|_\infty \le \gamma \|x\|$ для кожного $x \in M$.

Оскільки $\overline{L} = E$, то для кожного $k = 1, \dots, m$ існує такий такий елемент $y_k \in L$, що $\|x_k - y_k\| \le \frac{\varepsilon}{m\gamma}$. Для кожного $x = \sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k x_k \in M$ покладемо $Ux = \sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k x_k \in L$. Зрозуміло, що $U : M \to E$ – це лінійний оператор, для якого $U(M) \subseteq L$. Оскільки простір M

скінченновимірний, то лінійний оператор U буде неперервним. Це, зокрема, випливає з такої оцінки

$$\|Ux\| \le \sum_{k=1}^{m} |\xi_k|\|y_k\| \le \left(\sum_{k=1}^{m} \|y_k\|\right) \|x\|_\infty \le \gamma\|x\| \sum_{k=1}^{m} \|y_k\|,$$

де $x = \sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k x_k$. Тепер для кожного $x \in M$ маємо

$$\|(J-U)x\| = \left\|\sum_{k=1}^{m} \xi_k(x_k - y_k)\right\| \le \sum_{k=1}^{m} |\xi_k| \cdot \|x_k - y_k\| \le \tfrac{\varepsilon}{m\gamma} n\|x\|_\infty \le \varepsilon\|x\|.$$

Отже, $\|J-U\| \le \varepsilon$. □

2 Побудова pu-апроксимаційної послідовності операторів і апроксимація нарізно неперервних функцій

Перейдемо тепер до розгляду основної апроксимаційної теореми.

Теорема 24.2. *Нехай Y – метризовний компакт і L – всюди щільний лінійний підпростір нормованого простору $C_u(Y)$. Тоді існує така послідовність лінійних pu-неперервних операторів $A_n : C(Y) \to C(Y)$, що $\mathrm{Im} A_n \subseteq L$ і $\dim(\mathrm{Im} A_n) < \infty$ для кожного номера n, причому $A_n g \to g$ в $C_u(Y)$ для кожного $g \in C(Y)$.*

Доведення. Згідно з теоремою 19.5, послідовність операторів Рудіна $R_n : C(Y) \to C(Y)$ складається з pu-неперервних операторів і $R_n g \to g$ в $C_u(Y)$ для кожного $g \in C(Y)$. Крім того, всі простори $\mathrm{Im} R_n$ скінченновимірні, адже відповідні множини I_n скінченні разом з локально скінченними розбиттями одиниці на компактному просторі Y.

Нехай $J_n : M_n \to C_u(Y)$ – тотожне вкладення. Застосовуючи теорему 24.1 до банахового простору $E = C_u(Y)$, для кожного номера n визначимо такий лінійний неперервний оператор $U_n : M_n \to C_u(Y)$, що $\mathrm{Im}\, U_n \subseteq L$ і $\|J_n - U_n\| \le \frac{1}{n}$.

Покладемо $A_n = U_n R_n$ і покажемо, що послідовність операторів A_n є шуканою. Справді,

$$\mathrm{Im}\, A_n \subseteq \mathrm{Im}\, U_n = U_n(M_n) \subseteq L.$$

Крім того, всі образи $\mathrm{Im}\, A_n$ скінченновимірні, адже такі є підпростори M_n, і всі оператори A_n pu-неперервні, бо оператори R_n pu-неперервні, а оператори U_n uu-неперервні.

Нехай $g \in C(Y)$. Оскільки $R_n g \to g$ в $C_u(Y)$, то послідовність елементів $R_n g$ обмежена за нормою у просторі $C_u(Y)$. Крім того, $\|J_n - U_n\| \to 0$. Тому $(U_n - J_n)(R_n g) \to 0$ в просторі

$C_u(Y)$. Разом з тим, $R_ng - g \to 0$ в $C_u(Y)$. Оскільки

$$A_ng - g = U_nR_ng - R_ng + R_ng - g = (U_n - J_n)(R_ng) + (R_ng - g),$$

то $A_ng - g \to 0$ в просторі $C_u(Y)$, що й завершує доведення теореми. $\square$

Зрозуміло, що з теореми 24.2 випливає наступний результат.

Наслідок 24.1. *Нехай Y – метризовний компакт. Тоді кожний всюди щільний в $C_u(Y)$ лінійний підпростір L є apu-простором.*

Тепер доведемо теорему про наближення нарізно неперервних функцій CL-функціями.

Теорема 24.3. *Нехай X – топологічний простір, Y – метризовний компакт, L – всюди щільний лінійний підпростір нормованого простору $C_u(Y)$ і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція. Тоді існує така послідовність сукупно неперервних CL-функцій $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$, що $f_n^x \to f^x$ в $C_u(Y)$ для кожного $x \in X$.*

Доведення. Згідно з твердженням 20.2, відображення $\varphi : X \to C_p(Y)$, асоційоване з функцією f, буде неперервним, а за наслідком 24.1 і теоремою 23.3 простір L буде pu-простором для кожного топологічного простору, зокрема, і для простору X. Тому існує така послідовність неперервних відображень $\varphi_n : X \to C_u(Y)$, що $\varphi_n(X) \subseteq L$ для кожного n і $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ в $C_u(Y)$ на X. Згідно з теоремою 20.1, всі функції $f_n(x, y) = \varphi_n(x)(y)$ сукупно неперервні, причому $f_n^x = \varphi_n(x) \in L$ для кожного $x \in X$. Отже, f_n – це CL-функції, для яких $f_n^x = \varphi_n(x) \to \varphi(x) = f^x$ в $C_u(Y)$ для кожного $x \in X$. $\square$

3 Неперервність проєкцій на строго проксимінальний підпростір

Непорожня множина L у метричному просторі (X, d) називається *строго проксимінальною*, якщо для довільного елемента $x \in X$ в L існує єдиний елемент $u = Qx$ найкращого наближення для x. Відображення $Q : X \to L$, яке тут виникає, ми будемо називати *проєкцією* на множину L.

З курсу функціонального аналізу [15, с. 30] відомо, що кожний замкнений лінійний підпростір L гільбертового простору H строго проксимінальний. З результатів лекції №9 випливає, що кожний скінченновимірний лінійний підпростір строго опуклого простору є строго проксимінальним. Далі з теореми Гаара з лекції №10 ми вивели, що для кожного компактного простору K скінченновимірний підпростір $L = \mathrm{sp}\{f_1, \dots, f_n\}$ простору

$C_u(K)$, що породжений системою Гаара $f_1, \dots, f_n$ є строго проксимінальним. Зокрема, для кожного n простір всіх многочленів степеня $\le n$ у банаховому просторі $C_u[a;b]$ є строго проксимінальним.

Теорема 24.4. *Для кожного строго проксимінального скінченновимірного підпростору L нормованого простору E проекція $Q : E \to L$ є неперервною.*

Доведення. Нехай $x_n \to x_0$ у просторі E і $u_n = Qx_n$ для кожного $n = 0, 1, \dots$. Доведемо, що $u_n \to u_0$ в E.

Спочатку зазначимо, що послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, будучи збіжною, є обмежена, тобто існує таке число $\gamma > 0$, що $\|x_n\| \le \gamma$ для кожного n. Оскільки $0 \in L$, то

$$\|x_n - u_n\| \le \|x_n - 0\| = \|x_n\| \le \gamma,$$

а тому

$$\|u_n\| = \|u_n - x_n + x_n\| \le \|x_n - u_n\| + \|x_n\| \le 2\gamma$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. Таким чином, послідовність $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ також обмежена.

Припустимо, що $u_n \not\to u_0$. Тоді існує таке $\varepsilon > 0$, що множина $\{n \in \mathbb{N} : \|u_n - u_0\| \ge \varepsilon\}$ нескінченна. Оскільки обмежена множина в скінченновимірних нормованих просторах є відносно зліченно компактною, то існує така підпослідовність $(u_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ послідовності $(u_n)_{n=1}^{\infty}$, яка збігається до деякого елемента $v_0 \in L$ і при цьому $\|u_{n_k} - u_0\| \ge \varepsilon$ для кожного k. Переходячи до границі при $k \to \infty$, отримаємо, що $\|v_0 - u_0\| \ge \varepsilon$. Отже, $v_0 \ne u_0$. Далі

$$\|x_{n_k} - u_{n_k}\| \le \|x_{n_k} - u_0\|$$

для кожного k, адже u_{n_k} – це елемент найкращого наближення в L для x_{n_k}. Перейшовши в цій нерівності до границі, одержимо, що

$$\|x_0 - v_0\| \le \|x_0 - u_0\|.$$

Оскільки u_0 – це елемент найкращого наближення в L для x_0 і $v_0 \in L$, то $\|x_0 - v_0\| = \|x_0 - u_0\|$ і v_0 також є елементом найкращого наближення в L для x_0. Тому елемент x_0 має в L два різних елементи найкращого наближення u_0 і v_0, що суперечить строгій проксимінальності простору L.

Таким чином, $Qx_n = u_n \to u_0 = Qx_0$. Отже, проекція $Q : E \to L$ неперервна. □

4 Одна теорема про перенормування

Нагадаємо, що нормований простір $(E, \|\cdot\|)$ називається *строго опуклим* [3], якщо для довільних ненульових елементів $x, y \in E$ з рівності $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ випливає існування такого скаляра $\lambda > 0$, що $y = \lambda x$. При цьому норму $\|\cdot\|$ ми називатимемо *строго опуклою.* Зауважимо, норма $\|\cdot\|$ на E є строго опуклою тоді і тільки тоді, коли для довільних різних елементів $x, y \in E$ з $\|x\| = \|y\| = 1$ і довільних скалярів $\lambda, \mu > 0$ з $\lambda + \mu = 1$ виконується нерівність $\|\lambda x + \mu y\| < 1$.

Розпочнемо з простого зауваження: *якщо $\|\cdot\|_1$ – норма і $\|\cdot\|_2$ – строго опукла норма на векторному просторі E, то формулою $\|x\| = \|x\|_1 + \|x\|_2$ визначається строго опукла норма на E.* Зрозуміло, що $\|\cdot\|$ – це норма на E, як сума норм. Нехай $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ для деяких ненульових елементів $x, y \in E$. Тоді за нерівністю трикутника обов'язково $\|x + y\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1$ і $\|x + y\|_2 = \|x\|_2 + \|y\|_2$. Тепер зі строгої опуклості норми $\|\cdot\|_2$ випливає, що $y = \lambda x$ для деякого скаляра $\lambda > 0$, що і означає строгу опуклість норми $\|\cdot\|$.

На просторі $C[0; 1]$ розглянемо дві норми: рівномірну $\|g\|_\infty = \max\limits_{0 \le t \le 1} |g(t)|$ і квадратичну $\|g\|_2 = \left(\int\limits_0^1 |g(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$. Друга норма є строго опуклою за теоремою 9.2, адже вона породжується скалярним добутком $\langle g, h\rangle = \int\limits_0^1 g(t)h(t)dt$. Тому формулою $\|g\|_0 = \|g\|_\infty + \|g\|_2$ визначається строго опукла норма на просторі $C[0; 1]$. Крім того, оскільки $\|g\|_2 \le \|g\|_\infty$, то

$$\|g\|_\infty \le \|g\|_0 \le \|g\|_\infty + \|g\|_\infty = 2\|g\|_\infty.$$

Тому норми $\|\cdot\|_0$ і $\|\cdot\|_\infty$ є еквівалентними.

Нам буде потрібний один добре відомий результат з теорії банахових просторів [6].

Теорема 24.5. *Нехай E – сепарабельний нормований простір. Тоді існує ізометричний ізоморфізм $J : E \to L$ простору E на лінійний підпростір L банахового простору $C_u[0; 1]$.*

З допомогою цієї теореми про вкладення ми встановимо потрібний нам результат про перенормування.

Теорема 24.6. *Нехай $(E, \|\cdot\|)$ – сепарабельний нормований простір. Тоді існує строго опукла норма $\|\cdot\|_0$ на E, така, що $\|x\| \le \|x\|_0 \le \|x\|$ на E.*

Доведення. Згідно з теоремою 24.5 існує ізометричний ізоморфізм $J : E \to L$ простору E на лінійний підпростір L банахового простору $C_u[0; 1] = (C[0; 1], \|\cdot\|_\infty)$. Розглянемо на просторі L норму $\|g\|^0 = \|g\|_\infty + \|g\|_2$, яка, як показано вище, є строго опуклою. При цьому

$\|g\|_\infty \leq \|g\|^0 \leq \|g\|_\infty$. Перенесемо цю норму на простір E з допомогою відображення J, поклавши $\|x\|_0 = \|Jx\|^0$. Норма $\|\cdot\|_0$ на E і буде шуканою. Справді, зі строгої опуклості норми $\|\cdot\|^0$ і лінійності відображення J випливає строга опуклість норми $\|\cdot\|_0$. Крім того,

$$\|x\|_\infty = \|Jx\|_\infty \leq \|x\|_0 \leq \|Jx\|^0 \leq 2\|Jx\|_\infty = 2\|x\|$$

для кожного $x \in X$. □

5 Апроксимаційна теорема для нормованих просторів

Тепер ми можемо отримати основний результат.

Теорема 24.7. *Нехай L – всюди щільний лінійний підпростір сепарабельного нормованого простору E. Тоді існує така послідовність лінійних неперервних операторів $A_n : E \to L$, що $A_n x \to x$ в E для кожного $x \in E$.*

Доведення. Спочатку ми будемо вважати, що простір E строго опуклий. Підпростір L сепарабельного нормованого простору сам буде сепарабельним, тому існує така послідовність точок $x_n \in L$, що множина $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ щільна в L, а отже, і в E, адже $\overline{M} \supseteq \overline{L} = E$. Для кожного номера n розглянемо лінійну оболонку $L_n = \mathrm{sp}\{x_1, \dots, x_n\}$ перших n елементів множини M. Як встановлено в лекції №9 (твердження 9.4 і теорема 9.3), скінченновимірний лінійний простір L_n буде строго проксимінальною множиною у строго опуклому просторі E, тобто для кожного $x \in E$ існує єдиний елемент $u_n \in A_n$ такий, що $\|x - u_n\| = d(x, L_n)$. За теоремою 24.4, проєкції $A_n : E \to L_n$ неперервні.

Візьмемо $x \in E$ і покажемо, що $A_n x \to x$ в E. Нехай $\varepsilon > 0$. Оскільки множина M щільна в E, то існує такий номер N, що $\|x - x_N\| < \varepsilon$. Тепер для кожного $n \geq N$ маємо $x_N \in L_n$ і тому

$$\|x - A_n x\| = d(x, L_n) \leq \|x - x_N\| < \varepsilon.$$

Отже, $A_n x \to x$ в E. Оскільки $\mathrm{Im} A_n \subseteq L_n \subseteq L$, послідовність $(A_n)_{n=1}^\infty$ шукана.

В загальному випадку, згідно з теоремою 24.6, визначимо на E строго опуклу норму $\|\cdot\|_0$, яка еквівалентна вихідній нормі $\|\cdot\|$. За доведеним у нормованому просторі $(E, \|\cdot\|_0)$ існує послідовність неперервних операторів $A_n : E \to L$ така, що $\|A_n - x\|_0 \to 0$ для кожного $x \in E$. Оскільки норми $\|\cdot\|$ і $\|\cdot\|_0$ еквівалентні, то всі оператори A_n будуть неперервними і в нормованому просторі E і $\|A_n - x\| \to 0$ для кожного $x \in E$. □

Лекція №25

Пошарово рівномірне наближення нарізно неперервних функцій послідовностями многочленів

1 Постановка задачі та історія

Для простоти будемо розглядати у цій лекції лише простір $S = CC[0;1]^2$ всіх нарізно неперервних функцій $f : Q \to \mathbb{R}$, заданих на квадраті $Q = [0;1]^2$, з топологією пошарово рівномірної збіжності, хоча можна було б вивчати і загальніші простори $CC(X \times Y)$, де X і Y – компактні простори. Основну роль будуть відігравати такі підпростори простору S: простір $C = C[0;1]^2$ усіх сукупно неперервних функцій $f : Q \to \mathbb{R}$ і простір $P = P[0;1]^2$ усіх многочленів

$$f(x, y) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{j,k} x^j y^k$$

від двох дійсних змінних, для яких $P \subseteq C \subseteq S$. Ми їх вивчали у лекції №18 і з'ясували, що $\overline{P} = \overline{C} = S$.

Тут нас буде цікавити така задача: побудувати для даної функції $f \in S$ таку послідовність многочленів $f_n \in P$, яка пошарово рівномірно збігається до f, тобто для якої $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на $[0;1]$ і $f_{n,y} \rightrightarrows f_y$ на $[0;1]$ чи, інакше, $f_n \to f$ у просторі S.

Нагадаємо, що *секвенціальне замикання* $\overline{A}^s$ множини A у топологічному просторі X називається множина усіх точок $x \in X$, для яких існує послідовність точок $x_n \in A$, така, що $x_n \to x$ в X.

Отже, у цій лекції вивчататимемо секвенціальне замикання $\overline{P}^s$ простору P у просторі S. Зауважимо, що у метризовному просторі чи, загальніше, у просторі з першою аксіомою зліченності для довільної множини A виконується рівність $\overline{A} = \overline{A}^s$. Але простір S не задовольняє першу аксіому зліченності, тому питання про секвенціальне замикання $\overline{P}^s$ потребує окремого розгляду.

Розпочнемо з такого простого спостереження.

Теорема 25.1. $\overline{P}^s = \overline{C}^s$.

Доведення. Оскільки $P \subseteq C$, то $\overline{P}^s \subseteq \overline{C}^s$. Покажемо, що виконується і обернене включення.

Нехай $f \in \overline{C}^s$. Тоді існує така послідовність функцій $f_n \in C$, що $f_n \to f$ в просторі S. За теоремою Вейєрштрасса для функцій двох змінних (дивись лекцію № 2) простір P є всюди щільним у просторі $C_u(Q)$. Тому для кожного номера n існує такий многочлен $g_n \in P$, що $\|g_n - f_n\|_\infty < \frac{1}{n}$. Легко бачити, що $g_n \to f$ у просторі S. $\square$

Надалі ми будемо вивчати саме секвенціальне замикання $\overline{C}^s$ простору C в S. Зауважимо, що цю задачу можна розглядати і у загальному випадку, коли квадрат Q замінено на добуток $X \times Y$ довільних компактних просторів і поняття многочленів втрачає зміст.

2 Функції зі скінченною кількістю точок розриву

Оскільки рівномірна границя послідовності неперервних функцій на квадраті Q є неперервною функцією, то виникає підозра: а може пошарово рівномірна границя зберігає неперервність? Звуження на квадрат Q функції Шварца sp одразу ж спростовує цю гіпотезу.

Теорема 25.2. $f = \mathrm{sp}|_Q \in \overline{C}^s \setminus C$.

Доведення. Як ми знаємо, $f \in S \setminus C$. Покажемо, що $f \in \overline{C}^s$. Для кожного номера n покладемо $Q_n = (0, \frac{1}{n})^2$ і $A_n = Q \setminus Q_n$. Легко бачити, що звуження $f|_{A_n}$ функції f на замкнену множину A_n є неперервним. Тому, за теоремою Тітце–Урисона [4, 2.1.8], існує така неперервна функція $f_n : Q \to \mathbb{R}$, що $f_n|_{A_n} = f_{A_n}$. Тепер нескладно переконатися, що $f_n \to f$ в S.

Справді, за побудовою $f_n^0 = f^0$ і $f_{n,0} = f_0$ для кожного номера n. Якщо ж $x, y > 0$, то, вибравши такий номер N, що $\frac{1}{N} \le \max\{x, y\}$, одержимо, що $f_n^x = f^x$ і $f_{n,y} = f_y$ для кожного номера $n \ge N$. Тому, так чи інакше, $f_n^x \rightrightarrows f^x$ і $f_{n,y} \rightrightarrows f_y$ на $[0; 1]$, тобто $f_n \to f$ в просторі S. $\square$

Кажуть, що послідовність точок t_n деякої множини T *стабільно* збігається до точки $t_0 \in T$ (позначається: $t_n \xrightarrow{d} t_0$), якщо існує такий номер N, що $t_n = t_0$, як тільки $n \ge N$. Стабільна збіжність – це збіжність у дискретному просторі T, у якому для кожної точки $t \in T$ одноточкова множина $\{t\}$ є околом точки t. Насправді, для функції $f = \mathrm{sp}|_Q$ ми побудували таку послідовність функцій $f_n \in C$, що $f_n^x \xrightarrow{d} f^x$ і $f_{n,y} \xrightarrow{d} f_y$ в $C[0; 1]$, а це більше, ніж твердження в теоремі 25.2, адже зі стабільної збіжності випливає рівномірна. Виникає запитання: для яких функцій $f \in S \setminus C$ таке можливо? Наступна теорема дає відповідь на це запитання.

Теорема 25.3. *Нехай $f \in S$ і множина $D(f)$ скінченна. Тоді існує така послідовність функцій $f_n \in C$, що $f_n^x \xrightarrow{d} f^x$ і $f_{n,y} \xrightarrow{d} f_y$ в $C[0;1]$ для довільних $x, y \in [0;1]$.*

Доведення. Позначимо $D = D(f)$. Для кожної точки $p = (x, y) \in D$ і довільного номера $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$Q_{n,p} = (x - \tfrac{1}{n}, x + \tfrac{1}{n}) \times (y - \tfrac{1}{n}, y + \tfrac{1}{n})$$

і розглянемо множини

$$G_n = \bigcup_{p \in D} Q_{n,p} \qquad \text{і} \qquad A_n = Q \setminus G_n.$$

Оскільки кожна відкрита множина G_n містить кожну точку $p \in D$, то звуження функції f на кожну множину A_n є неперервним.

Крім того, розглянемо множину

$$B = \mathrm{cr}(D) = \bigcup_{p \in D} \mathrm{cr}(p).$$

Зауважимо, що хрест одноточкової множини є замкненим, а звуження функції f на нього є неперервним, адже f – це нарізно неперервна функція. Тому множина B є замкненою, а звуження функції f на B є неперервним.

Таким чином, для кожного номера n множина $C_n = A_n \cup B$ є замкненою і звуження $f|_{C_n}$ є неперервним. Тому за теоремою Тітце-Урисона [4, 2.1.8] існує така неперервна функція $f_n : Q \to \mathbb{R}$, що $f_n|_{C_n} = f_{C_n}$. Залишилось показати, що $f_n^x \xrightarrow{d} f^x$ і $f_{n,y} \xrightarrow{d} f_y$ в $C[0;1]$ для довільних $x, y \in [0;1]$.

Беручи до уваги симетричність наших побудов, ми покажемо лише, що $f_n^x \xrightarrow{d} f^x$ в $C[0;1]$ для довільного $x \in [0;1]$, адже відповідна властивість горизонтальних y-розрізів перевіряється цілком аналогічно. Нехай $x \in \mathrm{pr}_X([4, 2.1.8])$. Тоді $x = \mathrm{pr}_X(p)$ для деякої точки $p \in D$ і тому

$$\{x\} \times [0;1] \subseteq \mathrm{cr}(p) \subseteq B \subseteq C_n,$$

отже, $f_n^x = f^x$ для кожного номера n. Таким чином, $f_n^x \xrightarrow{d} f^x$ в $C[0;1]$.

Тепер нехай $x \in [0;1] \setminus \mathrm{pr}_X(D)$. Тоді $\delta = d\big(x, \mathrm{pr}_X(D)\big) > 0$. Вибравши такий номер N, що $\frac{1}{N} \le \delta$, одержимо, що $(\{x\} \times [0;1]) \cap G_n = \emptyset$, тобто $\{x\} \times [0;1] \subseteq A_n$ і отже, $f_n^x = f^x$ для кожного номера $n \ge N$. Тому $f_n^x \xrightarrow{d} f^x$ в $C[0;1]$. □

3 Нормальна і рівномірна збіжність

Свою дисертацію Рене Бер [2] починає з розгляду функції $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яка задається формулою

$$f(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{2^k} \operatorname{sp}(p - p_k),$$

де $(p_k)_{k=1}^{\infty}$ – довільна послідовність точок площини $\mathbb{R}^2$. Ця функція нарізно неперервна і у неї $D(f) = \{p_k : k \in \mathbb{N}\}$. Якщо всі точки p_k різні і лежать у квадраті $(0;1)^2$, то всі вони будуть точками розриву звуження $f_0 = f|_Q$, яке має, на відміну від функцій, розглядуваних у попередньому пункті, нескінченну кількість розривів. Виникає природне запитання: чи $f_0 \in \overline{C}^s$? Тут ми дамо на нього ствердну відповідь, використовуючи нормальну збіжність функціональних рядів.

Нагадаємо, що функціональний ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *нормально збігається* на множині E, якщо існує такий номер m, що числовий ряд $\sum\limits_{k=m}^{\infty} \|u_k\|_\infty$ збігається. Оскільки $|\frac{1}{2^k} \operatorname{sp}(p - p_k)| \le \frac{1}{2^k}$ на $\mathbb{R}^2$ для кожного k і ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ збігається, то ряд, що його розглядав Р. Бер, збігається нормально на всій площині $\mathbb{R}^2$, а отже, і на квадраті Q.

Належність $f_0 \in \overline{C}^s$ випливає з теореми 25.2 і такого результату.

Теорема 25.4. *Нехай $f(p) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(p)$, причому ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(p)$ збігається нормально на Q, і $u_k \in \overline{C}^s$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Тоді $f \in \overline{C}^s$*

Доведення. За умовою існує такий номер m, що ряд $\sum\limits_{k=m}^{\infty} \|u_k\|_\infty$ збігається. Нехай

$$g(p) = \sum_{k=1}^{m} u_k(p) \qquad \text{і} \qquad \sum_{k=m}^{\infty} u_k(p)$$

для кожного $p \in Q$. C S $\overline{C}^s$ $g \in \overline{C}^s$

Для функцій u_k при $k \le m$ виконується нерівність

$$|u_k(p)| \le \|u_k\|_\infty = c_k < +\infty$$

на Q. Оскільки $u_k \in \overline{C}^s$, то існує така послідовність $(u_{k,n})_{n=1}^{\infty}$ функцій $u_{k,n} \in C$, що $u_{k,n} \to u_k$ в S при $n \to \infty$. При $k \ge m$ покладемо

$$v_{k,n}(p) = \max\{-c_k, \min\{u_k(p), c_k\}\}.$$

Нескладно перевірити, що $|v_{k,n}(p)| \le c_k$ на Q, $v_{k,n} \in C$ і $v_{k,n} \to u_k$ в S при $n \to \infty$, якщо $k \ge m$.

Розглянемо на квадраті Q функції

$$h_n(p) = \sum_{k \geq m} v_{k,n}(p).$$

Оскільки $|v_{k,n}(p)| \leq c_k$ на Q при $k \geq m$ і ряд $\sum\limits_{k \geq m} c_k$ збігається, то функціональний ряд $\sum\limits_{k \geq m} v_{k,n}(p)$ рівномірно збігається на Q для кожного n. Крім того, $v_{k,n} \in C$ при $k \geq n$. Тому $h_n \in C$ для кожного n.

Покажемо, що $h_n \to h$ в S. Для фіксованого $x \in [0; 1]$ і довільного номера n маємо

$$\|h_n - h\|^x \leq \sum_{k=m}^{\infty} \|v_{k,n} - u_k\|^x = \varphi_n(x).$$

Оскільки

$$\|v_{k,n} - u_k\|^x \leq \|v_{k,n}\|_\infty + \|u_k\|_\infty \leq 2c_k$$

і ряд $\sum\limits_{k \geq m} c_k$ збігається, то ряд $\sum\limits_{k=m}^{\infty} \|v_{k,n} - u_k\|^x$ збігається рівномірно відносно $n \in \mathbb{N}$. Тому за теоремою про граничний перехід під знаком нескінченної суми маємо

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \sum_{k=m}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \|v_{k,n} - u_k\|^x = \sum_{k=m}^{\infty} 0 = 0.$$

Тоді $\|h_n - h\|^x \to 0$ при $n \to \infty$.

Аналогічно перевіряється, що $\|h_n - h\|_y \to 0$ при $n \to \infty$ для кожного $y \in [0; 1]$. Тому $h_n \to h$ в S і отже, $h \in \overline{C}^s$. Тоді $f = g + h \in \overline{C}^s$, що треба було довести. □

З доведеної теореми нескладно вивести такий наслідок.

Теорема 25.5. *Нехай $f_n \in \overline{C}^s$ для кожного n і $f_n \rightrightarrows f$ на Q. Тоді $f \in \overline{C}^s$*

Доведення. Потрібно виділити таку підпослідовність $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ послідовності $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(p) - f_{n_k}(p))$ нормально збігається на Q і скористатись теоремою 25.4. □

4 Застосування лінійної інтерполяції

Нехай A – скінченна підмножина скінченного інтервалу (a, b) на числовій прямій, і $\widetilde{A} = A \cup \{a, b\}$. Нехай $n = |A|$. Тоді множину $\widetilde{A}$ можна подати у вигляді

$$\widetilde{A} = \big\{a_k : 0 \leq k \leq n+1\big\},$$

де

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n < a_{n+1} = b.$$

Кожній функції $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ поставимо у відповідність кусково лінійну функцію $h = L_A g : [a;b] \to \mathbb{R}$, графіком якої є ламана лінія з вершинами $(a_k, g(a_k))$, де $0 \le k \le n+1$. Іншими словами, функція h – це кусково лінійна функція, яка на кожному відрізку $[a_k, a_{k+1}]$, де $0 \le k \le n$, визначається формулою

$$h(x) = g(a_k) + \frac{g(a_{k+1}) - g(a_k)}{a_{k+1} - a_k}(x - a_k) = \frac{a_{k+1} - x}{a_{k+1} - a_k} g(a_k) + \frac{x - a_k}{a_{k+1} - a_k} g(a_{k+1}).$$

Розглянемо прирости $\Delta a_k = a_{k+1} - a_k$ при $0 \le k \le n$ і число

$$\eta_A = \eta_{[a;b],A} = \max_{0 \le k \le n} \Delta a_k.$$

Лема 25.1. *Нехай $A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ – зліченна щільна підмножина інтервалу $(a;b)$ і $A_n = \{a_k : 1 \le k \le n\}$. Тоді послідовність чисел η_{A_n} прямує до нуля.*

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$ і

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$$

– розбиття відрізка $[a;b]$, для якого $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} < \frac{\varepsilon}{2}$ при $i = 1, \dots, m$. Оскільки множина A щільна у відрізку $[a;b]$, то для кожного $i = 1, \dots, m$ існує такий номер $k_i \in \mathbb{N}$, що $a_{k_i} \in (x_{k_{i-1}}, x_{k_i})$. Покладемо

$$N = \max\{k_i : 1 \le i \le m\}.$$

Нескладно переконатися, що $\eta_{A_n} < \varepsilon$ для всіх $n \ge N$. □

Теорема 25.6. *Нехай $A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ – зліченна щільна підмножина інтервалу $(a;b)$, $a_k \ne a_j$ при $k \ne j$, $A_n = \{a_k : 1 \le k \le n\}$, $g \in C[a;b]$ і $g_n = L_{A_n} g$. Тоді $g_n \rightrightarrows g$ на $[a;b]$.*

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$. Оскільки g рівномірно неперервна на $[a;b]$, то існує таке $\delta > 0$, що $|g(x') - g(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$, як тільки $|x' - x''| < \delta$. За лемою, 25.1, існує номер N такий, що $\eta_{A_n} < \delta$ при $n \ge N$. Тепер для довільних $n \ge N$ і $x \in [a;b]$ існують такі $u, v \in A_n \cup \{a, b\}$, що $x \in [u, v]$, $|v - u| \le \eta_{A_n}$ і $g_n(x) = \lambda g(u) + \mu g(v)$ для деяких додатних чисел $\lambda, \mu \in [0;1]$ з $\lambda + \mu = 1$. Згідно з вибором δ, маємо $|g(x) - g(u)| < \varepsilon$ і $|g(x) - g(v)| < \varepsilon$. Тому

$$|g(x) - g_n(x)| = |\lambda(g(x) - g(u)) + \mu(g(x) - g(v))| \le \lambda|g(x) - g(u)| + \mu|g(x) - g(v)| < \varepsilon(\lambda + \mu) = \varepsilon.$$

Отже, $|g(x) - g_n(x)| < \varepsilon$ для всіх $n \ge N$ і $x \in [a;b]$. Тому, $g_n \rightrightarrows g$ на $[a;b]$. □

Теорема 25.7. *Нехай $f \in S$, $X = Y = [0;1]$, $A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ – зліченна підмножина інтервалу $(0;1)$, яка є щільною в ньому, $a_k \ne a_j$ при $k \ne j$, $A_n = \{a_k : 1 \le k \le n\}$ і $f_n(x, y) = (L_{A_n} f_y)(x)$ на Q. Тоді $f_n \in C$ для кожного n, $f_{n,y} \rightrightarrows f_y$ на X для кожного $y \in Y$, $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на Y для кожного $x \in C_Y(f)$ і $f_n^x \xrightarrow{d} f^x$ для кожного $x \in \widetilde{A} = A \cup \{0, 1\}$.*

Доведення. Нехай $\widetilde{A}_n = A_n \cup \{0,1\} = \{x_0, \ldots, x_{n+1}\}$, де $0 = x_0 < \cdots < x_{n+1} = 1$. На замкненому прямокутнику $Q_n = [x_n, x_{n+1}] \times Y$, де $k = 0, 1, \ldots, n$, функція f_n задається формулою

$$f_n(x,y) = f(x_k, y) + \frac{f(x_{k+1}, y) - f(x_k, y)}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k).$$

Оскільки функції f^{x_k} і $f^{x_{k+1}}$ неперервні, то звуження $f|_{Q_k}$ неперервне. Але $Q = \bigcup\limits_{k=1}^{n} Q_k$ і множини Q_k замкнені, тому $f_n \in C$.

Оскільки $f_{n,y} = L_{A_n} f_y$ і $f_y \in C[0;1]$, то $f_{n,y} \rightrightarrows f_y$ на X для кожного $y \in Y$ на основі теореми 25.6.

Візьмемо $x \in C_Y(f)$ і покажемо, що $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на Y. Згідно з теоремою 20.2, маємо $C_Y(f) = C(\varphi)$, де $\varphi : X \to C_u(Y)$ – асоційоване з f відображення, то $x \in C(\varphi)$. Візьмемо $\varepsilon > 0$ і знайдемо такий δ-окіл U точки x в X, що $\|\varphi(t) - \varphi(x)\| < \varepsilon$, як тільки $T \in U$. За лемою 25.1, існує номер N такий, що $\eta_{A_n} < \delta$ при $n \geq N$. Тепер для кожного $n \geq N$ існують такі $u, v \in \widetilde{A}_n$, що $x \in [u; v]$, $|v - u| \leq \eta_{A_n}$ і $f_n(x,y) = \lambda f(u,y) + \mu f(v,y)$ для деяких додатних чисел $\lambda, \mu \in [0;1]$ з $\lambda + \mu = 1$ і кожного $y \in Y$. У цьому випадку маємо $\|\varphi(x) - \varphi(u)\| < \varepsilon$ і $\|\varphi(x) - \varphi(v)\| < \varepsilon$ і тому

$$\|f_n^x - f^x\| = \|\lambda f^u + \mu f^v - (\lambda + \mu) f^x\| \leq \lambda \|\varphi(x) - \varphi(u)\| + \mu \|\varphi(x) - \varphi(v)\| < \varepsilon(\lambda + \mu) = \varepsilon.$$

Отже, $\|f_n^x - f^x\| < \varepsilon$ для всіх $n \geq N$. Тому, $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на Y.

Нарешті, для $x \in \widetilde{A}$ існує такий номер N, що $x \in \widetilde{A}_N$. Тоді $x \in \widetilde{A}_n$ для кожного $n \geq N$. За побудовою $f_n^x = f^x$ при $n \geq N$. Отже, $f_n^x \xrightarrow{d} f^x$ і теорема доведена. □

Теорема 25.8. *Нехай $f \in S$ і проекція множини $D(f)$ на вісь абсцис чи ординат не більш ніж зліченна. Тоді $f \in \overline{C}^s$.*

Доведення. Позначимо $X = Y = [0;1]$. Припустимо, що не більш, ніж зліченною буде множина $E_1 = \mathrm{pr}_X(D(f))$. Виберемо зліченну множину $E_2 \supseteq E_1$, яка всюди щільна на $[0;1]$. Покладемо $A = E_1 \cap (0;1)$ і $\widetilde{A} = A \cup \{0,1\}$. Оскільки $X \setminus C_Y(f) = \mathrm{pr}_X(D(f)) = E_1 \subseteq \widetilde{A}$, то $X = C_Y(f) \cup \widetilde{A}$. Розглянемо послідовність неперервних функцій $f_n(x,y) = (L_{A_n} f_y)(x)$. Згідно з теоремою 25.7, маємо, що $f_{n,y} \rightrightarrows f_y$ на X для кожного $y \in Y$, $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на Y для кожного $x \in C_Y(f)$ і $f_n^x \xrightarrow{d} f^x$ для кожного $x \in \widetilde{A} = A \cup \{0,1\}$. Отже, $f_n \to f$ в S і тому $f \in \overline{C}^s$. □

5 Прикінцеві зауваження

Ми виклали тут початкові результати, що стосуються пошарово рівномірного наближення нарізно неперервних функцій f послідовностями многочленів чи неперервних функцій, одержані Г. Волошин, В. Маслюченком і О. Маслюченком у 2013 році [9]. Після цього з'явилось багато праць, де ці результати дістали значний розвиток. Зокрема, у 2017 році О.Карлова і В.Михайлюк [5] встановили, що $\overline{P}^s = \overline{C}^s = S$. При цьому автори досягли успіху завдяки нетривіальній модифікації методу Рудіна, отримавши разом з тим ще багато інших цікавих результатів. Цей метод використовує розбиття одиниці і не належить до конструктивної теорії функцій, на відміну від методів Бернштейна, Фейєра, Джексона, Лебеґа, Гана і методу, застосованого у цій лекції. Тому цікаво було б отримати конструктивне доведення рівності $\overline{C}^s = S$.

Бібліоґрафія

[1] Arkhangel'skii A. *Topological Function Spaces*, Kluwer Academic publishers, (1992).

[2] Baire R. *Sur les fonctions de variables reélles*, Ann. Mat. Pura Appl. ser. 3. (3) (1899) 1-123.

[3] Diestel J. *Geometry of Banach Spaces - Selected Topics*, Springer (1975) (Lecture Notes in Mathematics, 485) 304.

[4] Engelking R. *General topology*, Revised and completed ed. – Berlin: Heldermann (1989) (Sigma Series in Pure Mathematics. Vol. 6.) viii+599.

[5] Karlova O., Mykhaylyuk V. *Baire classification of fragmented maps and approximation of separately continuous functions*, Eur. J. of Math. **3** (1) (2017) 87-110.

[6] Lindenstrauss J., Tzafriri L. *Classical Banach Spaces I and II. Sequence Spaces and Function Spaces*, Springer-Verlag GmbH Germany (1996) xvii+433.

[7] Moran W. *Separate continuity and support of measures*, J. London. Math. Soc. **44** (1969) 320-324.

[8] Vera G. *Baire measurability of separately continuous functions*, Quart. J. Math. Oxford. **39** (153) (1988) 109-116.

[9] Волошин Г., Маслюченко В., Маслюченко О. *Про пошарово рівномірне наближення нарізно неперервних функцій многочленами*, Мат. вісник НТШ **3** (2013) 135-158.

[10] Маслюченко В.К. *Перші типи топологічних векторних просторів*, Чернівці: Рута, (2002) 72 с.

[11] Маслюченко В.К. *Лінійні неперервні оператори*, Чернівці: Рута, (2002) 72 с.

[12] Маслюченко В.К. *Елементи теорії двоїстості*, Чернівці: Рута, (2005) 160 с.

[13] Маслюченко В. К. *Лекції з функціонального аналізу. Ч.1. Метричні і нормовані простори.* Чернівці: Чернівецький національний університет (2010) 184 с.

[14] Маслюченко В. К. *Лекції з функціонального аналізу. Ч.2. Лінійні оператори і функціонали.* Чернівці: Чернівецький національний університет (2010) 192 с.

[15] Маслюченко В. К. *Лекції з функціонального аналізу. Ч.3. Гільбертові простори.* Чернівці: Чернівецький національний університет (2011) 72 с.

Навчальне видання

ТЕОРІЯ НАБЛИЖЕНЬ

Конспект лекцій

Укладачі:

Маслюченко Володимир Кирилович, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математичного аналізу;

Маслюченко Олександр Володимирович, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математичного аналізу;

Михайлюк Володимир Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математичного аналізу.

Підписано до друку 23.10.2024. Формат 60x84/16.
Електронне видання.
Умов.-друк. арк. 9,3. Обл.-вид. арк. 10,0.
Зам. Н-080.
Видавництво Чернівецького національного університету.
58002, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2.
e-mail: ruta@chnu.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 891 від 08.04.2002