Крайова задача з імпульсним впливом для параболічного рівняння з виродженням

Пукальський Іван

i.pukalsky@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Яшан Богдан

b.yashan@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Нехай $\eta, t_0, t_1, \ldots, t_{N+1}$ – фіксовані числа, $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_{N+1}$, $\eta \in (t_0, t_{N+1})$, $\eta \neq t_\lambda$, $\lambda \in \{1, ..., N\}$, Ω – деяка обмежена область $dim\Omega \le n-1$, D – обмежена область в R^n з межею ∂D, $dim D = n$, $\overline{\Omega} \subset \overline{D}$, $Q = [t_0, t_{N+1}) \times D$, $Q_0 = \{(t,x) | t \in [t_0, t_{N+1}), x \in \overline{\Omega}\} \cup \{(t,x) | t = \eta, x \in \overline{Q}\}$.

Розглянемо в області $Q = [t_0, t_{N+1}) \times D$ задачу знаходження функції $u(t,x)$, яка задовольняє при $(t,x) \in Q \setminus Q_{(0)}, t \neq t_\lambda$ рівняння

$$[\partial_t - \sum_{|k|=2b} a_k(t,x)\partial_x^k - \sum_{|p|\le 2b-1} a_p(t,x)\partial_x^p] u(t,x) = f_0(t,x), \tag{1}$$

умови за змінною t:

$$u(t_0+0,x) = \varphi_0(x), \quad x \in R^n \setminus \overline{\Omega}, \tag{2}$$

$$u(t_\lambda+0,x) - u(t_\lambda-0,x) = b_\lambda u(t_\lambda-0,x) + \varphi_\lambda(x), x \in ((\Pi \setminus D) \cap (t = t_\lambda)), \tag{3}$$

а на межі області $\Gamma = [t_0, t_{N+1}) \times \partial D$ крайові умови

$$\lim_{x \longrightarrow z \in \partial D} (B^{(\mu)} u - f_\mu)(t,x) \equiv \lim_{x \longrightarrow z \in \partial D} [\sum_{|k|=r_\mu} b_k(t,x)\partial_x^k u +$$

$$+ \sum_{|p|\le r_\mu - 1} b_p^{(\mu)}(t,x)\partial_x^p u - f_\mu(t,x)] = 0 \tag{4}$$

Степеневі особливості коефіцієнтів рівняння (1) у точці $P(t,x) \in Q \setminus Q_{(0)}$ характеризуватимуть функції $s_1(\beta_i^{(1)}, t)$ і $s_2(\beta_i^{(2)}, x)$: $s_1(\beta_i^{(1)}, t) = |t - \eta|^{\beta_i^{(1)}}$ при $|t-\eta| \le 1$, $s_1(\beta_i^{(1)}, t) = 1$ при $|t - \eta| \ge 1$; $s_2(\beta_i^{(2)}, x) = \rho(x)^{\beta_i^{(2)}}$ при $\rho(x) \le 1$, $s_2(\beta_i^{(2)}, x) = 1$ при $\rho(x) \ge 1$, $\rho(x) = \inf_{z \in \overline{\Omega}} |x - z|$, $i \in \{1, ..., n\}$, $\beta_i^{(\nu)} \in (-\infty, \infty)$, $\nu \in \{1, 2\}$, $\beta^{(\nu)} = (\beta_1^{(\nu)}, \ldots, \beta_n^{(\nu)})$, $\beta = \{\beta^{(1)}, \beta^{(2)}\}$.

Позначимо через $Q^{(r)} = [t_r, t_{r+1}) \times D$, $r \in \{0, 1, \ldots, N\}$, $q^{(\nu)}$, $\gamma^{(\nu)}$, $\mu_{p_i}^{(\nu)}$, $\mu_0^{(\nu)}$, $\delta_{\mu,p_i}^{(\nu)}$, $\delta_\mu^{(\nu)}$, $i \in \{1, ..., n\}$ – дійсні невід'ємні числа, $[l]$ – ціла частина числа l, $l>0$, $\{l\}=l-[l]$, $P_1(t^{(1)},x^{(1)})$, $P_2(t^{(2)},x^{(1)})$, $H_i(t^{(1)},x^{(2)})$ – довільні точки із Q, $x^{(1)}=(x_1^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$, $x^{(2)}=(x_1^{(1)},\dots,x_{i-1}^{(1)},x_i^{(2)},x_{i+1}^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$.

Означимо простори, в яких вивчається задача (1) – (4). $C^l(\gamma;\beta;q;Q)$ – множина функцій $u:(t,x)\in Q$, які мають неперервні частинні похідні в області $Q^{(r)}\backslash Q_{(0)}$ вигляду $\partial_t^j\partial_x^k u$, $2bj+|k|\le[l]$, для яких скінченна норма

$$\|u;\gamma;\beta;q;\Pi\|_l=\sup_r\textstyle\sum_{2bj+|k|\le[l]}[\sup\limits_{P\in\overline{Q}^{(r)}}S(q;s_1;s_2;2bj+|k|;t,x)|\partial_t^j\partial_x^k u(P)|]+$$

$$+\sup_r\left\{\textstyle\sum_{2bj+|k|=[l]}\left[\sum_{i=1}^n\sup\limits_{(P_1,H_i)\in\overline{Q}^{(r)}}\Big(S(q;s_1;s_2;|l|;t^{(1)},\widetilde{x})s_1(\{l\}(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)}),t^{(1)})\times\right.\right.$$

$$\times s_2(\{l\}(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}),\widetilde{x})|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}|^{-\{l\}}|\partial_t^j\partial_x^k u(P_1)-\partial_t^j\partial_x^k u(H_i)|\Big)+$$

$$+\sup_{(P_1,P_2)\in\overline{Q}^{(r)}}\big(S(q;s_1;s_2;|l|;\widetilde{t},x^{(1)})s_1(\{l\}\gamma^{(1)},t^{(1)})s_2(\{l\}\gamma^{(2)},x^{(1)})\times$$

$$\left.\left.\times|t^{(1)}-t^{(2)}|^{-\{\frac{l}{2b}\}}|\partial_t^j\partial_x^k u\,(P_1)-\partial_t^j\partial_x^k u\,(P_2)\big)\right]\right\}.$$

Тут позначено: $s_1(a,\tilde{t})=\min\{s_1(a,t^{(1)}),s_1(a,t^{(2)})\}$,
$s_2(a,\tilde{x})=\min\{s_2(a,x^{(1)}),s_2(a,x^{(2)})\}$,
$S(q;s_1,s_2;[l];t,x)=s_1(q^{(1)}+[l]\gamma^{(1)},t)s_2(q^{(2)}+[l]\gamma^{(2)},x)\times$
$\times\prod_{i=1}^n s_1(-k_i\beta_i^{(1)},t)s_2(-k_i\beta_i^{(2)},x)$.

Щодо задачі (1)-(4), вважаємо виконаними умови:

а) коефіцієнти рівняння (1) $a_k(t,x)\prod\limits_{i=1}^n s_1(k_i\beta_i^{(1)},t)s_2(k_i\beta_i^{(2)},x)\in$

$\in C^\alpha(\gamma;\beta;0;Q)$, $a_p(t,x)\prod\limits_{i=1}^n s_1(p_i\mu_{p_i}^{(1)},t)s_2(p_i\mu_{p_i}^{(2)},x)\in C^\alpha(\gamma;\beta;0;Q)$,
$1\le|p|\le 2b-1$, $a_0(t,x)s_1(\mu_0^{(1)},t)\ s_2(\mu_0^{(2)},x)\in C^\alpha(\gamma;\beta;0;Q)$,
$a_0(t,x)\le K<\infty$ і задача

$$[\partial_t-\sum_{|k|=2b}a_k(t,x)\prod_{i=1}^n s_1(k_i\beta_i^{(1)},t)s_2(k_i\beta_i^{(2)},x)\partial_x^k]u(t,x)=\tilde{f}(t,x),$$

$$u(t_0+0)=\widetilde{\varphi}(x),$$

$$\lim_{x\longrightarrow z\in\partial D}[\sum_{|k|=r_\mu}b_k^{(\mu)}(t,x)\prod_{i=1}^n s_1(k_i\beta_i^{(1)},t)s_2(k_i\beta_i^{(2),x})\partial_x^k u(t,x)-\widetilde{f}_\mu(t,x)]=0,$$

задовольняє в області Q рівномірну умову параболічності та умову Я.Б. Лопатинського;

б) функції $f_0(t,x)\in C^\alpha(\gamma;\beta;2b\gamma;Q)$, $\varphi_0\in C^{2b+\alpha}(\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;D)$, $\widetilde{\gamma}=(0,\gamma^{(2)})$, $\widetilde{\beta}=(0,\beta^{(2)})$, $\varphi_\lambda\in C^{2b+\alpha}(\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;Q\cap\{t=t_\lambda\})$, $f_\mu(t,x)\in C^{2b-r_\mu+\alpha}(\gamma;\beta;r_\mu\gamma;Q)$, $\partial D\in C^{2b+\alpha}$, $\lim\limits_{x\longrightarrow z\in\partial D}(B^{(\mu)}\varphi_0-f_\mu)(0,x)=0$, $\lim\limits_{x\longrightarrow z\in\partial D}\{[B^{(\mu)}\varphi_\lambda+(1+$

$b_\lambda)f_\mu](t_\lambda-0,x)-f_\mu(t_\lambda+0,x)\}=0,$

$\gamma^{(\nu)}=\max\{\max\limits_i \beta_i^{(\nu)}, \max\limits_{i,p_i}\dfrac{p_i(\mu_{p_i}^{(\nu)}-\beta_i^{(\nu)})}{2b-|p|}, \max\limits_{i,\mu,p_i}\dfrac{p_i(\delta_{\mu,p_i}^{(\nu)}-\beta_i^{(\nu)})}{2\mu-|p|}, \dfrac{\mu_0^{(\nu)}}{2b}, \max\limits_\mu \dfrac{\delta_\mu^{(\nu)}}{r_\mu}\},$

$\nu\in\{1,2\}.$

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай для задачі* (1)–(4) *виконані умови а), б). Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (1)–(4) *із простору* $C^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ *і справджується нерівність*

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_{2b+\alpha}\le c\Bigg\{\sum_{r=1}^{N}\Bigg[\prod_{\lambda=r}^{N}((1+\|b_\lambda\|))[\sum_{\mu=1}^{b}\|f_\mu;\gamma;\beta;r_\mu\gamma;Q^{(r-1)}\|_{2b-r_\mu+\alpha}+$$

$$+\|f;\gamma;\beta;2b\gamma;Q^{r-1}\|_\alpha+\|\varphi_{r-1};\tilde\gamma;\tilde\beta;0;Q\cap\{t=t_{r-1}\}\|_{2b+\alpha})\Bigg]+ \qquad (5)$$

$$+\|f;\gamma;\beta;2b\gamma;Q^{N}\|_\alpha+\|\varphi_{N};\tilde\gamma;\tilde\beta;0;Q\cap\{t=t_{N}\}\|_{2b+\alpha}+$$

$$+\sum_{\mu=1}^{b}\|f_\mu;\gamma;\beta;r_\mu\gamma;Q^{(N)}\|_{2b-r_\mu+\alpha}\Bigg\}.$$

Для доведення теореми встановлюється розв'язність допоміжних крайових задач з гладкими коефіцієнтами. З множини одержаних розв'язків виділяється збіжна послідовність, граничне значення якої є розв'язком задачі (1)–(4).