Городецький В.В., Колісник Р.С., Мартинюк О.В.

НЕЛОКАЛЬНА ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ГЛАДКИМИ СИМВОЛАМИ

Доведено коректну розв'язність нелокальної за часом задачі для псевдодиференціальних рівнянь, символами яких є гладкі функції – мультиплікатори у певних просторах типу S, при цьому початкова функція є елементом протору узагальнених функцій типу ультрарозподілів. Встановлено, що розв'язок такої задачі стабілізується до нуля у слабкому сенсі при $t \to +\infty$.

Ключові слова і фрази: нелокальна задача, пвесдодференціальні оператори, коректна розв'язність, стабілізація розв'язку, перетворення Фур'є узагальненої функції.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
e-mail: *alfaolga1@gmail.com (Мартинюк О.В.)*

Важливі задачі аналізу, сучасної математичної фізики, теорія ймовірностей, теорія фракталів тісно пов'язані з пседодиференціальними операторами (ПДО) та рівняннями з ПДО. До класу ПДО належать диференціальні оператори, оператори дробового диференціювання та інтегрування, згортки тощо.

Багато математиків займалися дослідженням задачі Коші для еволюційних рівнянь з ПДО (M. Nagase, R. Shinkai, C. Tsutsumi, М.А. Шубін, М. Тейлор, Л. Хермандер, А.Н. Кочубей, Ю.А. Дубінський, Б.Й. Пташник та ін.). Ними одержані важливі результати щодо розв'язності задач в різних функціональних просторах. При цьому часто початкові функції мають особливості в одній або декількох точках і допускають регуляризацію у певних просторах узагальнених функцій типу розподілів Соболєва-Шварца, ультрарозподілів, гіперфункцій та ін. Саме тому задача Коші для зазначених рівнянь має природну постановку і в класах узагальнених функцій скінченного та нескінченного порядків.

Нелокальна багатоточкова за часом задача є узагальненням задачі Коші, коли початкова умова $u(t,\cdot)|_{t=0} = f$ замінюється умовою $\sum\limits_{k=0}^{m} \alpha_k u(t,\cdot)|_{t=t_k} = f$, де $t_0 = 0$,

---

УДК 517.956
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K55, 46T30.

$\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0, T]$, $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m \leq T$, $\{\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_m\} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, – фіксовані числа (якщо $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = ... = \alpha_m = 0$, то маємо, очевидно, задачу Коші); вказана умова трактується в класичному розумінні або в слабкому сенсі, якщо f – узагальнена функція, тобто як граничне співвідношення $\sum\limits_{k=0}^{m} \alpha_k \lim\limits_{t \to t_k} \langle u(t, \cdot), \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$ для довільної функції φ з основного простору (тут $\langle f, \cdot \rangle$ позначає дію функціонала f на основну функцію). Нелокальні за часом задачі належать до нелокальних крайових задач для рівнянь з частинними похідними. Такі задачі виникають при моделюванні багатьох процесів і задач практики крайовими задачами для рівнянь з частинними похідними з нелокальними умовами (див., напр., [1, 2]).

Дослідженням нелокальних крайових задач у різних аспектах займалося багато математиків, використовуючи при цьому різні методи й підходи (див., напр., [3, 4, 5, 6, 7, 8]). Одержано важливі результати щодо коректної розв'язності та побудови розв'язків, сформульовано умови регулярності та нерегулярності крайових умов для важливих випадків диференціально-операторних рівнянь.

У даній статті досліджується диференціально-операторне рівняння

$$\partial u(t,x)/\partial t + \varphi(i\partial/\partial x)u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \tag{1}$$

де функція $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ і задовольняє певні умови. Використовуючи явний вигляд спектральної функції самоспряженого в $L_2(\mathbb{R})$ оператора $i\partial/\partial x$, встановлено, що оператор $\varphi(i\partial/\partial x)$ можна розуміти як псевдодиференціальний оператор у певному просторі типу S (простори типу S введені І.М. Гельфандом та Г.Є. Шиловим в [9]). Зазначимо, що до (1) відноситься і еволюційне рівняння $\partial u/\partial t + \sqrt{I - \Delta}u = 0$, $\Delta = D_x^2$, з оператором диференеціювання дробового порядку $\sqrt{I - \Delta} = \varphi(i\partial/\partial x)$, де $\varphi(\sigma) = (1 + \sigma^2)^{1/2}$, $\sigma \in \mathbb{R}$.

Для рівняння (1) ставиться нелокальна багатоточкова за часом задача з початковою функцією f, яка є елементом простору типу S або типу S' – простору, топологічно спряженого з простором типу S. Встановлено властивості фундаментального розв'язку такої задачі, доведено коректну розв'язність задачі у півпросторі $t > 0$, знайдено зображення розв'язку у вигляді згортки фундаментального розв'язку з початковою функцією, досліджено поведінку розв'язку $u(t, \cdot)$ при $t \to +\infty$ (стабілізація розв'язку) у просторах типу S'.

1. Простори типу S та S'. І.М. Гельфанд та Г.Є. Шилов ввели в [9] простори нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які є підпросторами простору $S = S(\mathbb{R})$ Л. Шварца швидко спадних на нескінченності функцій. Означимо деякі з них.

Для довільно фіксованих $\alpha, \beta > 0$ покладемо

$$S_\alpha^\beta := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \Big| \exists c > 0 \ \exists A > 0 \ \exists B > 0 \, \forall \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+ \, \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$|x^k \varphi^{(m)}(x)| \leq c A^k B^m k^{k\alpha} m^{m\beta}\}.$$

Простори S_α^β нетривіальні при $\alpha + \beta \geq 1$ і утворюють щільні в $L_2(\mathbb{R})$ множини. Введені простори можна охарактеризувати так [9].

S_α^β складається з тих й лише тих нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які задовольняють нерівності

$$|\varphi^{(m)}(x)| \le cB^m m^{m\beta} \exp\{-a|x|^{1/\alpha}\}, \quad m \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R},$$

з деякими додатними сталими c, A, B, залежними від функції φ.

Простір S_α^1 складається з функцій φ, які допускають аналітичне продовження в деяку смугу $|\mathrm{Im} z| < \delta$, $\delta > 0$, $z = x + iy$, залежну від φ і задовольняють нерівність

$$|\varphi(x+iy)| \le c\exp\{-a|x|^{1/\alpha}\}, c > 0, a > 0, x \in \mathbb{R}.$$

Якщо $0 < \beta < 1$ і $\alpha \ge 1-\beta$, то S_α^β складається з тих і лише тих функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які аналітично продовжуються в комплексну площину і задовольняють нерівність

$$|\varphi(x+iy)| \le c\exp\{-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}\}, c, a, b > 0.$$

Топологічна структура в просторах S_α^β визначається так. Символом $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$, $A, B > 0$ позначимо сукупність функцій $\varphi \in S_\alpha^\beta$, які задовольняють умову:

$$\forall\delta > 0 \ \forall\rho > 0 \ \exists c_{\delta\rho} > 0: \ |x^k\varphi^{(m)}(x)| \le c_{\delta\rho}(A+\delta)^k(B+\rho)^m k^{k\alpha} m^{m\beta}, \ \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}.$$

Ця множина перетворюється в повний зліченно-нормований простір, якщо норми в ній ввести за допомогою співвідношень

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{x,k,m} \frac{|x^k\varphi^{(m)}(x)|}{(A+\delta)^k(B+\rho)^m k^{k\alpha} m^{m\beta}}, \ \{\delta, \rho\} \in \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}.$$

Цю систему норм можна замінити еквівалентною їй системою норм (див. [9]):

$$\|\varphi\|'_{\delta\rho} = \sup_{x,m} \frac{\exp\{a(1-\delta)|x|^{1/\alpha}\}|\varphi^{(m)}(x)|}{(B+\rho)^m m^{m\beta}}, \ \{\delta, \rho\} \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\},$$

де $a = \alpha/(eA^{1/\alpha})$. Якщо $A_1 < A_2$, $B_1 < B_2$, то $S_{\alpha,A_1}^{\beta,B_1}$ неперервно вкладається в $S_{\alpha,A_2}^{\beta,B_2}$ і $S_\alpha^\beta = \bigcup\limits_{A,B>0} S_{\alpha,A}^{\beta,B}$. Із результатів, наведених в [9, с. 217–220] випливає, що послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \ge 1\} \subset S_\alpha^\beta$ збігається до нуля в цьому просторі, якщо функції φ_ν і їхні похідні довільного порядку збігаються до нуля рівномірно на кожному відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$ і при цьому виконуються нерівності

$$|x^k\varphi_\nu^{(m)}(x)| \le cA^k B^m k^{k\alpha} m^{m\beta}, \quad \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}.$$

де сталі $c, A, B > 0$ не залежать від ν.

Нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}$ функція g називається мультиплікатором у просторі S_α^β, якщо $g\psi \in S_\alpha^\beta$ для довільної функції $\psi \in S_\alpha^\beta$ і відображення $\psi \to g\psi$ є лінійним і неперервним оператором з S_α^β в S_α^β.

У просторах S_α^β визначена і є неперервною операція зсуву аргумента T_x: $\varphi(\xi) \to \varphi(\xi + x)$. Ця операція є також диференційовною (навіть нескінченно диференційовною [9, с. 171, 172]) у тому розумінні, що граничні співвідношення вигляду $(\varphi(x+h) -$

$\varphi(x))h^{-1} \to \varphi'(x)$, $h \to 0$, справджуються для кожної функції $\varphi \in S_\alpha^\beta$ в сенсі збіжності за топологією простору S_α^β. У S_α^β визначена і неперервна операція диференціювання. Простори типу S є досконалими [9] (тобто просторами, всі обмежені множини яких компактні), вони тісно пов'язані між собою перетворенням Фур'є, а саме, правильною є формула $F[S_\alpha^\beta] = S_\beta^\alpha$, де

$$F[S_\alpha^\beta] := \Big\{\psi: \ \psi(\sigma) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{i\sigma x} dx, \ \varphi \in S_\alpha^\beta\Big\}.$$

Оператор F: $S_\alpha^\beta \to S_\beta^\alpha$ є лінійним і неперервним.

Символом $(S_\alpha^\beta)'$ позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю, а його елементи називатимемо узагальненими функціями.

Оскільки в основному просторі S_α^β визначена операція зсуву аргумента T_x, то згортку узагальненої функції $f \in (S_\alpha^\beta)'$ з основною функцією φ задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) = \langle f_\xi, T_{-x}\check{\varphi}(\xi)\rangle \equiv \langle f_\xi, \varphi(x-\xi)\rangle, \quad \check{\varphi}(\xi) := \varphi(-\xi)$$

(тут $\langle f_\xi, \varphi(x-\xi)\rangle$ позначає дію функціонала f на основу функцію $T_{-x}\check{\varphi}(\xi)$ як функцію аргумента ξ). Із властивості нескінченної диференційовності операції зсуву аргумента у просторі S_α^β випливає, що згортка $f * \varphi$ є звичайною нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією.

Нехай $f \in (S_\alpha^\beta)'$. Якщо $f * \varphi \in S_\alpha^\beta$, $\forall \varphi \in S_\alpha^\beta$ і зі співвідношення $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to +\infty$ за топологією простору S_α^β випливає, що $f * \varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to +\infty$ за топологією простору S_α^β, то функціонал f називається *згортувачем* у просторі S_α^β.

Перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in (S_\alpha^\beta)'$ означимо за допомогою співвідношення $\langle F[f], \varphi\rangle = \langle f, F[\varphi]\rangle$ $\forall \varphi \in S_\beta^\alpha$. Звідси випливає, що $F[f] \in (S_\beta^\alpha)'$, якщо $f \in (S_\alpha^\beta)'$, причому оператор F: $(S_\alpha^\beta)' \to (S_\beta^\alpha)'$ є неперервним.

Якщо узагальнена функція $f \in (S_\alpha^\beta)'$ – згортувач у просторі S_α^β, то для довільної функції $\varphi \in S_\alpha^\beta$ правильною є формула $F[f * \varphi] = F[f] \cdot F[\varphi]$, при цьому $F[f]$ – мультиплікатор у просторі S_β^α [9, с. 179–182].

2. Псевдодиференціальні оператори в просторах типу S. Нехай φ: $\mathbb{R} \to (0, +\infty)$ – нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}$ функція, яка задовольняє умови: а) $\varphi(\sigma) > |\sigma|^\alpha$, $\sigma \in \mathbb{R}$, де $\alpha \geq 1$ – фіксований параметр;

$$\text{б) } \exists B > 0 \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists c_{\varepsilon > 0} \ \forall x \in \mathbb{R} \ \forall s \in \mathbb{Z}_+ : \ |D_\sigma^s \varphi(\sigma)| \leq c_\varepsilon B^s s! e^{\varepsilon|\sigma|^\alpha}. \tag{2}$$

З (2) випливає, що φ – мультиплікатор у просторі $S_{1/\alpha}^1$. Справді, нехай $\psi \in S_{1/\alpha}^1$, тобто функція ψ та її похідні задовольняють нерівності

$$|D_\sigma^s \psi(\sigma)| \leq cA^s s! \exp\{-a|\sigma|^\alpha\}, \sigma \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{Z}_+, \tag{3}$$

з деякими сталими $c, A, a > 0$. Скориставшись формулою Лейбніца диференціювання добутку двох функцій, а також нерівностями (2), (3), знайдемо, що

$$|D_\sigma^s(\varphi(\sigma)\psi(\sigma))| \leq \sum_{k=0}^{s} C_s^k |D_\sigma^k \varphi(\sigma)| \cdot |D_\sigma^{s-k}\psi(\sigma)| \leq$$

$$\leq c \cdot c_\varepsilon \sum_{k=0}^{s} B^k k! A^{s-k}(s-k)! \exp\{-(a-\varepsilon)|\sigma|^\alpha\}.$$

Оскільки в (2) $\varepsilon > 0$ – довільне, то покладемо $\varepsilon = \dfrac{a}{2}$. Тоді

$$|D_\sigma^s(\varphi(\sigma)\psi(\sigma))| \leq c_1 B_1^s s! \exp\{-a_1|\sigma|^\alpha\}, s \in \mathbb{Z}_+,$$

де $c_1 = cc_\varepsilon$, $B_1 = 2\max\{A, B\}$, $a_1 = a/2$. З останньої нерівності випливає, що $\varphi\psi$ – елемент простору $S^1_{1/\alpha}$.

Операція множення на функцію φ є неперервною у просторі $S^1_{1/\alpha}$. Справді, нехай $\{\psi_n, n \geq 1\}$ – послідовність функцій з $S^1_{1/\alpha}$, яка збігається до нуля в цьому просторі. Це означає, що $\{\psi_n, n \geq 1\} \subset S^{1,B_0}_{1/\alpha,A_0}$ з деякими A_0, $B_0 > 0$ і

$$\|\psi_n\|_{\delta,\rho} = \sup_{x,k} \frac{\exp\{a(1-\delta)|\sigma|^\alpha\} \cdot |\psi^{(k)}(x)|}{(B_0+\rho)^k k!} \to 0, \;\; n \to \infty, \{\delta, \rho\} \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}, a = \frac{\alpha}{eA_0^{1/\alpha}}.$$

Іншими словами, для довільного $\tilde{\varepsilon} > 0$ існує номер $n_0 = n_0(\tilde{\varepsilon})$ такий, що для $n \geq n_0$

$$|\psi_n^{(k)}(\sigma)| < \tilde{\varepsilon}(B_0+\rho)^k k! \exp\{-a(1-\delta)|\sigma|^\alpha\}, \sigma \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_+.$$

Скориставшись нерівностями (2), поклавши при цьому в (2) $\varepsilon = \dfrac{a}{2}(1-\delta)$, дістанемо, що

$$|D_\sigma^s(\varphi(\sigma)\psi_n(\sigma))| < c_\varepsilon \tilde{\varepsilon}(\tilde{B}+\rho)^s s! \exp\{-a_2|\sigma|^\alpha\}, \sigma \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{Z}_+,$$

де $\tilde{B} = 2\max\{B, B_0+1\}$, $a_2 = a/2$. З останньої нерівності випливає, що

$$\sup_{x,k} \frac{\exp\left\{\frac{a}{2}(1-\delta)|\sigma|^\alpha\right\} |(\varphi(\sigma)\psi_n(\sigma))^{(k)}|}{(\tilde{B}+\rho)^k k!} < c_\varepsilon \tilde{\varepsilon},$$

тобто $\|\varphi\psi_n\|_{\delta\rho} < c_\varepsilon\tilde{\varepsilon}$, $\forall n \geq n_0(\tilde{\varepsilon})$. Отже, послідовність $\{\varphi\psi_n, n \geq 1\}$ збігається до нуля в просторі $S^{1,\tilde{B}}_{1/\alpha,\tilde{A}}$, де $\tilde{A} = 2^\alpha A_0$, $\tilde{B} = 2\max\{B, B_0+1\}$. Це і означає, що послідовність $\{\varphi\psi_n, n \geq 1\}$ збігається до нуля в просторі $S^1_{1/\alpha}$, що й потрібно було довести.

Прикладом функції φ може служити функція $\varphi(\sigma) = (1+\sigma^2)^{\omega/2}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, де $\omega \in [1, 2)$ – фіксований параметр. Безопсередньо переконуємося в тому, що $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi(\sigma) > |\sigma|^\omega$, $\sigma \in \mathbb{R}$, і ця функція задовольняє нерівність

$$\varphi(\sigma) \leq c_\varepsilon e^{\varepsilon|\sigma|^\omega}, c_\varepsilon = 2^{\omega/2}\max\{1, 1/\varepsilon\}, \sigma \in \mathbb{R},$$

де $\varepsilon > 0$ – довільне. При цьому

$$|D_\sigma^s \varphi(\sigma)| \leq c_\varepsilon B^s s! \leq c_\varepsilon B^s s! e^{\varepsilon|\sigma|^\omega}, B > 0, s \in \mathbb{N}, \sigma \in \mathbb{R}.$$

Отже, функція $\varphi(\sigma) = (1+\sigma^2)^{\omega/2}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, – мультиплікатор у просторі $S^1_{1/\omega}$.

Як відомо [10], оператор $A = id/dt$ – самоспряжений в гільбертову просторі $L_2(\mathbb{R})$ з областю визначення $\mathcal{D}(A) = \{\psi \in L_2(\mathbb{R}) : \exists \psi' \in L_2(\mathbb{R})\}$. Використовуючи операційне числення для самоспряжених операторів у гільбертовому просторі дістанемо, що оператор $\varphi\Big(i\dfrac{d}{dt}\Big)$ також самоспряжений оператор в $L_2(\mathbb{R})$, при цьому

$$\varphi(A)\psi \equiv \varphi\Big(i\frac{d}{dt}\Big)\psi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) dE_\lambda \psi,$$

$$\mathcal{D}(\varphi(A)) = \{\psi \in L_2(\mathbb{R}) : \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(\lambda)|^2 d(E_\lambda\psi, \psi) < \infty\},$$

де E_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$, – спектральна функція оператора $A = i\dfrac{d}{dt}$. Оскільки (див., наприклад, [11])

$$(E_\lambda\psi)(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\lambda} \Big\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau)e^{i\sigma\tau}d\tau\Big\} e^{-it\sigma}d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\lambda} F[\psi](\sigma)e^{-it\sigma}d\sigma,$$

$$dE_\lambda\psi = \frac{1}{2\pi}F[\psi](\lambda)e^{-it\lambda},$$

то

$$\varphi(A)\psi(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda)F[\psi](\lambda)e^{-it\lambda}d\lambda = F^{-1}[\varphi(\lambda)F[\psi](\lambda)](t). \quad (4)$$

Із властивостей функції φ та перетворення Фур'є у просторах типу S випливає, що (4) має зміст для довільної функції $\psi \in S_1^{1/\alpha}$, при цьому оператор $\varphi(i\partial/\partial t)$ є лінійним і неперервним та відображає простір $S_1^{1/\alpha}$ в себе. Отже, оператор $\varphi(i\partial/\partial t)$ можна розуміти як псевдодиференціальний оператор у просторі $S_1^{1/\alpha}$, побудований за функцією-символом $\varphi(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, – мультиплікатором у просторі $S^1_{1/\alpha}$.

Наприклад, якщо $\varphi(\sigma) = (1+\sigma^2)^{\omega/2}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\omega \in [1, 2)$ – фіксований параметр, то

$$\varphi(id/dx) = (I + (id/dx)^2)^{\omega/2} = (I - (d/dx)^2)^{\omega/2} -$$

оператор диференціювання дробового порядку в просторі $S_1^{1/\omega}$, при цьому

$$(I - D_x^2)^{\omega/2}\psi(t) = F^{-1}[(1+\sigma^2)^{\omega/2}F[\psi](\sigma)](t)$$

для довільної функції $\psi \in S_1^{1/\omega}$.

3. Основні результати. Розглянемо диференціально-операторне рівняння

$$\partial u(t,x)/\partial t + \varphi(i\partial/\partial x)u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R} = \Omega, \quad (5)$$

де $\varphi(i\partial/\partial t) = F^{-1}[\varphi F]$ – псевдодиференціальний оператор у просторі $S_1^{1/\alpha}$, побудований за функцією-символом φ. Під розв'язком рівняння (5) розуміємо функцію $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, неперервно диференційовну за змінною t; $u(t,\cdot) \in S_1^{1/\alpha}$ при кожному $t > 0$; $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (5)

Поставимо таку нелокальну багатоточкову за часом задачу: знайти розв'язок рівняння (5), який задовольняє умову

$$\mu u(0,x) - \mu_1 u(t,x) - \cdots - \mu_m u(t_m,x) = f(x), \quad f \in S_1^{1/\alpha}, \quad (6)$$

де $u(0,x) = \lim\limits_{t\to+0} u(t,x)$, $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \dots, \mu_m\} \subset (0,\infty)$, $\{t_1, \dots, t_m\} \subset (0,+\infty)$, – фіксовані числа, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m$, $\mu > m \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k$.

Розв'язок задачі (5), (6) шукаємо за допомогою перетворення Фур'є у вигляді $u(t,x) = F^{-1}[v(t,\cdot)]$. Для функцій $v \colon \Omega \to \mathbb{R}$ дістаємо задачу з параметром σ:

$$\frac{dv(t,\sigma)}{dt} + \varphi(\sigma) v(t,\sigma) = 0, \ (t,\sigma) \in \Omega, \tag{7}$$

$$\mu v(0,\sigma) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k v(t_k,\sigma) = \tilde{f}(\sigma), \ \sigma \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

де $\tilde{f}(\sigma) = F[f]$. Розв'язок задачі (7), (8) дається формулою

$$v(t,\sigma) = \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k \varphi(\sigma)\}\Big)^{-1} \exp\{-t\varphi(\sigma)\}, \ (t,\sigma) \in \Omega.$$

Отже, формальним розв'язком задачі (5), (6) є функція

$$u(t,x) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} v(t,\sigma) e^{-ix\sigma} d\sigma.$$

Введемо позначення: $G(t,x) = F^{-1}[Q(t,\sigma)](x)$, $Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma) Q_2(\sigma)$, де

$$Q_1(t,\sigma) = \exp\{-t\varphi(\sigma)\}, \quad Q_2(\sigma) = \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\sigma)\Big)^{-1}.$$

Далі, міркуючи формально, прийдемо до співвідношення

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} G(t,x-\xi) f(\xi) d\xi = G(t,x) * f(x), \quad (t,x) \in \Omega.$$

Справді,

$$u(t,x) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma) \Big(\int\limits_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{i\sigma\xi} d\xi \Big) e^{-i\sigma x} d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \Big((2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma) e^{-i\sigma(x-\xi)} d\sigma \Big) f(\xi) d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} G(t,x-\xi) f(\xi) d\xi =$$

$$= G(t,x) * f(x), \quad (t,x) \in \Omega.$$

Коректність проведених тут перетворень випливає з властивостей функції G, які ми наведемо нижче. Властивості функції G визначаються властивостями функції Q, оскільки $G = F^{-1}[Q]$. Отже, насамперед дослідимо властивості функції $Q(t,\sigma)$ як функції змінної σ.

Лема 1. *Для функції $Q_1(t,\sigma)$, $(t,\sigma)\subset\Omega$, та її похідних (за змінною σ) правильними є оцінки*

$$|D^s_\sigma Q_1(t,\sigma)|\le cA^s t^{\gamma s}s^s\exp\{-t|\sigma|^\alpha\},\quad s\in\mathbb{Z}_+, \tag{9}$$

сталі $c, A>0$ не залежать від t, $\gamma=0$, якщо $0<t\le 1$; $\gamma=1$, якщо $t>1$.

Доведення. Для доведення твердження скористаємося формулою Фаа де Бруно диференціювання складеної функції

$$D^s_\sigma F(g(\sigma))=\sum_{p=1}^{s}\frac{d^p}{dg^p}F(g)\sum\frac{s!}{p_1!\dots p_l!}\Big(\frac{d}{d\sigma}g(\sigma)\Big)^{p_1}\dots\Big(\frac{1}{l!}\frac{d^l}{dp^l}g(\sigma)\Big)^{p_l},\quad s\in\mathbb{N}$$

(знак суми поширюється на всі розв'язки в цілих невід'ємних числах рівняння $p_1+2p_2+\dots+lp_l=s$, $p_1+\dots+p_l=p$), де покладемо $F=e^g$, $g=-t\varphi(\sigma)$. Тоді

$$D^s_\sigma e^{-t\varphi(\sigma)}|=e^{-t\varphi(\sigma)}\sum_{p=1}^{s}\sum\frac{s!}{p_1!\dots p_l!}\Lambda,$$

де символом Λ позначено вираз

$$\Lambda:=\Big(\frac{d}{d\sigma}(-t\varphi(\sigma))\Big)^{p_1}\cdot\Big(\frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\sigma^2}(-t\varphi(\sigma))\Big)^{p_2}\dots\Big(\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\sigma^l}(-t\varphi(\sigma))\Big)^{p_l}.$$

Урахувавши оцінки (2), знайдемо, що

$$|\Lambda|\le c_\varepsilon^{p_1+\dots+p_l}t^{p_1+\dots+p_l}B^{p_1+2p_2+\dots+lp_l}\le c_0^st^pB^s, c_0=\max\{1,c_\varepsilon\}.$$

Скориставшись формулою Стірлінга, прийдемо до нерівностей

$$|D^s_\sigma Q_1(t,\sigma)|\le c_0^st^{\gamma s}B^ss!\exp\{-t\varphi(\sigma)\}\le cA^st^{\gamma s}s^s\exp\{-t|\sigma|^\alpha\},\sigma\in\mathbb{R},s\in\mathbb{N},$$

де $\gamma=0$, якщо $0<t\le 1$ і $\gamma=1$, якщо $t>1$, сталі $c>1$, $A>0$ не залежать від t.

Лема доведена. □

Зауваження 1. *Із оцінок (9) випливає, що $Q_1(t,\cdot)\in S^1_{1/\alpha}$ при кожному $t>0$.*

Лема 2. *Функція Q_2 – мультиплікатор у просторі $S^1_{1/\alpha}$.*

Доведення. З властивості а) функції φ випливають нерівності

$$Q_1(t_k,\sigma)\le\exp\{-t_k|\sigma|^\alpha\}\le 1, k\in\{1,\dots,m\},\sigma\in\mathbb{R}.$$

Оскільки $\mu>m\sum\limits_{k=1}^{m}$, то

$$\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{m}\mu_kQ_1(t_k,\sigma)\le\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{m}\mu_k<1.$$

Тоді, скориставшись поліноміальною формулою, знайдемо

$$Q_2(\sigma)=\frac{1}{\mu}\Big(1-\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{m}\mu_kQ_1(t_k,\sigma)\Big)^{-1}=\frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^{\infty}\mu^{-r}\Big(\sum_{k=1}^{m}\mu_ke^{-t_k\varphi(\sigma)}\Big)^r=$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\dots r_m!}(\mu_1 e^{-t_1\varphi(\sigma)})^{r_1}\dots(\mu_m e^{-t_m\varphi(\sigma)})^{r_m} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\dots r_m!}\mu_1^{r_1}\dots\mu_m^{r_m} Q_1(\lambda,\sigma), \tag{10}$$

де $\lambda := t_1r_1+\dots+t_mr_m$, $Q_1(\lambda,\sigma) = e^{-(t_1r_1+\dots+t_mr_m)\varphi(\sigma)}$. З (10) та (9) випливають нерівності

$$|D_\sigma^s Q_2(\sigma)| \le cA^s s^s \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\dots r_m!}\mu_0^r \lambda^{\gamma s} \exp\{-t|\sigma|^\alpha\} \le$$

$$\le cA^s t_m^{\gamma s} s^s \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)}\mu_0^r r^s \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\dots r_m!}, s\in\mathbb{N},$$

де $\mu_0 = \max\{\mu_1,\dots,\mu_m\}$. Далі скористаємося тим, що

$$\sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\dots r_m!} = m^r.$$

Тоді

$$|D_\sigma^s Q_2(\sigma)| \le cA_1^s s^s \sum_{r=0}^{\infty} \tilde{\mu}^r r^s = c' A_1^s s^s, s\in\mathbb{N}, \tag{11}$$

де $\tilde{\mu} = \mu^{-1}\mu_0 m < 1$, $c' = c\mu^{-1}\sum\limits_{r=0}^{\infty}\tilde{\mu}^r r^s$, $A_1 = At_m^\gamma$. З останньої нерівності та обмеженості функції Q_2 на $\mathbb{R}$ випливає, що Q_2 – мультиплікатор у просторі $S_{1/\alpha}^1$. Твердження доведено. □

На підставі лем 1 та 2 робимо висновок, що $Q(t,\sigma)$ як функція σ, є елементом простору $S_{1/\alpha}^\alpha$ (при кожному $t>0$).

Урахувавши (9), (11) та формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій, знайдемо

$$|D_\sigma^s Q(t,\sigma)| \le \sum_{l=0}^{s} C_s^l |D_\sigma^l Q_1(t,\sigma)|\cdot|D_\sigma^{s-l} Q_2(\sigma)| \le$$

$$\le cc'\sum_{l=0}^{s} C_s^l A^l t^{\gamma l} l^l A_1^{s-l}\exp\{-t|\sigma|^\alpha\} \le \tilde{b}B^s t^{\gamma s} s^s \exp\{-t|\sigma|^\alpha\}, \tag{12}$$

де $\tilde{b} = cc'$, $B = 2\max\{A, A_1\}$, $\gamma = 0$, якщо $0 < t \le 1$ і $\gamma = 1$, якщо $t > 1$.

Оскільки $F^{-1}[S_{1/\alpha}^1] = S_1^{1/\alpha}$, то $G(t,\cdot) = F^{-1}[Q(t,\cdot)] \in S_1^{1/\alpha}$ при кожному $t>0$. Виділимо в оцінках функції G та її похідних (за змінною x) залежність від параметра t. Для цього скористаємося співвідношеннями

$$x^k D_x^s F[\varphi](x) = i^{k+s} F[(\sigma^s\varphi(\sigma))^{(k)}] =$$

$$= i^{k+s}\int\limits_{\mathbb{R}} (\sigma^s\varphi(\sigma))^{(k)} e^{ix\sigma} d\sigma, \{k,s\}\subset\mathbb{Z}_+, \varphi\in S_{1/\alpha}^1.$$

Отже,
$$x^k D_x^s G(t,x) = (2\pi)^{-1} i^{k+s}(-1)^s \int\limits_{\mathbb{R}} (\sigma^s Q(t,-\sigma))^{(k)} e^{i\sigma x} d\sigma.$$

Із результатів, наведених в [9, с. 243] випливає, що послідовність $m_{ks} = k^k s^{s/\alpha}$ задовольняє нерівність
$$ks\frac{m_{k-1,s-1}}{m_{ks}} \le \tilde{\gamma}(k+s), \quad \tilde{\gamma} > 0.$$
Можна безпосередньо переконатися, що для даної послідовності m_{ks} параметр $\tilde{\gamma} = 2^{\alpha+1}$.

Застосувавши формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій, оцінки (12) похідних функції $Q(t,\sigma)$ та останню нерівність, знайдемо, що
$$|(\sigma^s Q(t,-\sigma))^{(k)}| = \Big|\sum_{p=0}^{k} C_k^p (\sigma^s)^{(p)} Q^{(k-p)}(t,-\sigma)\Big| \le$$
$$\le |\sigma^s Q^{(k)}(t,-\sigma)| + ks|\sigma^{s-1}Q^{(k-1)}(t,-\sigma)| + \frac{k(k-1)}{2!}s(s-1)\times$$
$$\times|\sigma^{s-2}Q^{(k-2)}(t,-\sigma)| + \dots \le \tilde{b}\Big[B^k t^{\gamma k} L^s t^{-s/\alpha} m_{ks} + ksB^{k-1}t^{\gamma(k-1)}L^{s-1}t^{-(s-1)/\alpha}m_{k-1,s-1} +$$
$$+\frac{k(k-1)}{2!}s(s-1)B^{k-2}t^{\gamma(k-2)}L^{s-2}t^{-(s-2)/\alpha}m_{k-2,s-2} + \dots\Big]e^{-\frac{t}{2}|\sigma|^\alpha},$$
де $L = \left(\frac{2}{\alpha e}\right)^{1/\alpha}$. Тоді
$$|(\sigma^s Q(t,-\sigma))^{(k)}| \le \tilde{b}B^k t^{\gamma k} L^s t^{-s/\alpha} m_{ks}\Big(1 + \frac{t^{1/\alpha-\gamma}}{BL}ks\frac{m_{k-1,s-1}}{m_{ks}} +$$
$$+\frac{1}{2!}k(k-1)s(s-1)\frac{t^{2(1/\alpha-\gamma)}}{B^2L^2}\frac{m_{k-2,s-2}}{m_{ks}}\Big)e^{-\frac{t}{2}|\sigma|^\alpha} \le \tilde{b}B^k t^{\gamma k} L^s t^{-s/\alpha} m_{ks}\times$$
$$\times\Big(1 + \frac{t^{1/\alpha-\gamma}}{BL}ks\frac{m_{k-1,s-1}}{m_{ks}} +$$
$$+\frac{1}{2!}\frac{t^{2(1/\alpha-\gamma)}}{(BL)^2}ks\frac{m_{k-1,s-1}}{m_{ks}}(k-1)(s-1)\frac{m_{k-2,s-2}}{m_{k-1,s-1}}\Big)e^{-\frac{t}{2}|\sigma|^\alpha} \le$$
$$\le \tilde{b}B^k t^{\gamma k} L^s t^{-s/\alpha} m_{ks}\Big(1 + \frac{t^{1/\alpha-\gamma}\tilde{\gamma}}{BL}(k+s) + \frac{1}{2!}\frac{t^{2(1/\alpha-\gamma)}}{(BL)^2}\tilde{\gamma}^2(k+s)^2 + \dots\Big)e^{-\frac{t}{2}|\sigma|^\alpha} =$$
$$= \tilde{b}\tilde{A}^k t^{\gamma k}\tilde{B}^s t^{-s/\alpha} m_{ks} e^{-\frac{t}{2}|\sigma|^\alpha},$$
де $\tilde{A} = B\exp\left(\frac{\tilde{\gamma}t^{1/\alpha-\gamma}}{BL}\right)$, $\tilde{B} = L\exp\left(\frac{\tilde{\gamma}t^{1/\alpha-\gamma}}{BL}\right)$.

Зауважимо, що для $t > 1$ параметр $\gamma = 1$, $1/\alpha - 1 < 0$, тому $t^{1/\alpha-\gamma} < 1$ і $\tilde{A} < B\exp\left\{\frac{\tilde{\gamma}}{BL}\right\}$, $\tilde{B} < L\exp\left\{\frac{\tilde{\gamma}}{BL}\right\}$. Якщо $0 < t \le 1$, то $\gamma = 0$, тому $t^{1/\alpha-\gamma} = t^{1/\alpha} \le 1$. Отже, для кожного $t \in (0,\infty)$ правильною є оцінка
$$|(\sigma^s Q(t,-\sigma))^{(k)}| \le cA_1^k t^{\gamma k} B_1^s t^{-s/\alpha} m_{ks} \exp\Big\{-\frac{t}{2}|\sigma|^\alpha\Big\},$$

де $A_1 = B\exp\left\{\dfrac{\tilde{\gamma}}{BL}\right\}$, $B_1 = L\exp\left\{\dfrac{\tilde{\gamma}}{BL}\right\}$. Таким чином,

$$|x^k D_x^s G(t,x)| \le (2\pi)^{-1} c A_1^k t^{\gamma k} B_1^s t^{-s/\alpha} m_{ks} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t}{2}|\sigma|^\alpha} d\sigma \le c_2 A_1^k t^{\gamma k} B_1^s t^{-(s+1)/\alpha} k^k s^{s/\alpha}.$$

Тоді

$$|D_x^s G(t,x)| \le c_2 B_1^s t^{-(s+1)/\alpha} s^{s/\alpha} \inf_k \frac{A_1^k k^k}{(t^{-\gamma}|x|)^k} \le c_3 B_1^s t^{-(s+1)/\alpha} s^{s/\alpha} \exp\{-a_0 t^{-\gamma}|x|\}, t > 0$$

($\gamma = 0$, якщо $0 < t \le 1$ і $\gamma = 1$, якщо $t > 1$), сталі c_3, $B_1, a_0 > 0$ не залежать від t. Тут ми скористалися відомою нерівністю з [9, с. 204]:

$$e^{-\frac{\alpha}{e}|\xi|^{1/\alpha}} \le \inf_k \frac{A^k k^{k\alpha}}{|x|^k} \le c e^{-\frac{\alpha}{e}|\xi|^{1/\alpha}},\ c = e^{\alpha e/2}, \alpha > 0.$$

Таким чином, правильним є таке твердження

Лема 3. *Функція $G(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, та її похідні (за змінною x) задовольняють нерівності*

$$|D_x^s G(t,x)| \le c_3 B_1^s t^{-(s+1)/\alpha} s^{s/\alpha} \exp\{-a_0 t^{-\gamma}|x|\}, s \in \mathbb{Z}_+, \tag{13}$$

де сталі $c_3, B_1, a_0 > 0$ не залежать від t.

Лема 4. *Функція $G(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $S_1^{1/\alpha}$, диференційовна по t.*

Доведення. Із властивості неперервності перетворення Фур'є (прямого та оберненого) у просторах типу S випливає, що для доведення твердження досить показати, що функція $Q(t,\sigma) = F[G(t,x)]$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $F[S_1^{1/\alpha}] = S_{1/\alpha}^1$, диференційовна по t. Іншими словами, потрібно довести, що граничне співвідношення

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) := \frac{1}{\Delta t}[Q(t+\Delta t,\sigma) - Q(t,\sigma)] \to \frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma),\ \ \Delta t \to 0,$$

виконується в тому розумінні, що:

1) $D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma) \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} D_\sigma^s(-\varphi(\sigma) Q(t,\sigma))$, $s \in \mathbb{Z}_+$, рівномірно на кожному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$;

2) $|D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \le \bar{c} \bar{B}^s s^s \exp\{-\bar{a}|\sigma|^\alpha\}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, де сталі $\bar{c}, \bar{B}, \bar{a} > 0$ не залежать від Δt, якщо Δt є досить малим.

Функція $Q(t,\sigma)$, $(t,\sigma) \in \Omega$, диференційовна по t у звичайному розумінні, тому за теоремою Лагранжа про скінченні прирости

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) = -\varphi(\sigma) Q(t + \theta\Delta t, \sigma), 0 < \theta < 1.$$

Отже,

$$D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma) = \sum_{l=0}^{s} C_s^l D_\sigma^l \varphi(\sigma) D_\sigma^{s-l} Q(t+\theta\Delta t,\sigma) \tag{14}$$

і

$$D^s_\sigma\Big(\Phi_{\Delta t}(\sigma)-\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\Big)=\sum_{l=0}^{s}C^l_sD^l_\sigma\varphi(\sigma)[D^{s-l}_\sigma Q(t+\theta\Delta t,\sigma)-D^{s-l}_\sigma Q(t,\sigma)].$$

Оскільки

$$D^{s-l}_\sigma Q(t+\theta\Delta t,\sigma)-D^{s-l}_\sigma Q(t,\sigma)=D^{s-l+1}_\sigma Q(t+\theta_1\Delta t,\sigma)\theta\Delta t,\ \ 0<\theta_1<1,$$

то звідси та з (12) випливає, що

$$D^{s-l+1}_\sigma Q(t+\theta_1\Delta t,\sigma)\theta\Delta t\to 0,\quad \Delta t\to 0,$$

рівномірно на довільному відрізку $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Тоді і $D^s_\sigma\Phi_{\Delta t}(\sigma)\to D^s_\sigma\Big(\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\Big)$ при $\Delta t\to 0$ рівномірно на довільному відрізку $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Отже, умова 1) виконується.

Доведемо, що виконується умова 2). Оскільки функція φ задовольняє умову б), то, врахувавши (12), (14), знайдемо

$$|D^s_\sigma\Phi_{\Delta t}(\sigma)|\le\tilde c_\varepsilon\tilde b\sum_{l=0}^{s}C^l_sB^l_0l^l\overline{B}^{s-l}(t+\theta\Delta t)^{\gamma(s-l)}\exp\{-(t+\theta\Delta t)|\sigma|^\alpha\Big\}\exp\{\varepsilon|\sigma|^\alpha\}.$$

Візьмемо $\varepsilon=t/2$. Тоді

$$|D^s_\sigma\Phi_{\Delta t}(\sigma)|\le\overline{c}\overline{B}^ss^s\exp\{-\overline{a}|\sigma|^\alpha\},$$

де $\overline{c}=\tilde c_\varepsilon\tilde b$, $\overline{B}=2\max\{B_0,\tilde B\}$, $\overline{a}=t/2$, причому всі сталі не залежать від Δt. Лема доведена. □

Наслідок 1. *Правильною є формула*

$$\frac{\partial}{\partial t}(f*G(t,\cdot))=f*\frac{\partial G(t,x)}{\partial t},\quad \forall f\in(S^{1/\alpha}_1)',t\in(0,\infty).$$

Доведення. За означенням згортки узагальненої функції з основною маємо

$$f*G(t,x)=\langle f_\xi,T_{-x}\check G(t,\xi)\rangle,\ \check G(t,\xi)=G(t,-\xi).$$

Тоді

$$\frac{\partial}{\partial t}(f*G(t,\cdot))=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[(f*G(t+\Delta t,\cdot))-(f*G(t,\cdot))]=$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\langle f_\xi,\frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check G(t+\Delta t,\xi)-T_{-x}\check G(t,\xi)]\rangle.$$

На підставі леми 4 граничне співвідношення

$$\frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check G(t+\Delta t,\cdot)-T_{-x}\check G(t,\cdot)]\underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow}\frac{\partial}{\partial t}T_{-x}\check G(t,\cdot)$$

виконується в сенсі збіжності за топологією простору $S^{1/\alpha}_1$, тому з урахуванням неперервності функціонала f

$$\frac{\partial}{\partial t}(f*G(t,\cdot))=\langle f_\xi,\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check G(t+\Delta t,\cdot)-T_{-x}\check G(t,\cdot)]\rangle=$$
$$=\langle f_\xi,\frac{\partial}{\partial t}T_{-x}\check G(t,\xi)\rangle=\langle f_\xi,T_{-x}\frac{\partial}{\partial t}\check G(t,\xi)\rangle=f*\frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t},$$

що й потрібно було довести. □

Лема 5. *У просторі $(S_1^{1/\alpha})'$ виконуються граничні співвідношення*

$$\begin{aligned} &1)\quad G(t,\cdot)\to F^{-1}[Q_2(\cdot)],\quad t\to+0;\\ &2)\quad \mu G(t,\cdot)-\sum_{l=1}^{m}\mu_l G(t_l,\cdot)\to\delta, t\to+0 \end{aligned} \tag{15}$$

(тут δ – дельта-функція Дірака).

Доведення. 1. Урахувавши властивість неперервності перетворення Фур'є (прямого та оберненого) у просторах типу S', для доведення твердження досить встановити, що

$$F[G(t,\cdot)]=Q_1(t,\cdot)Q_2(\cdot)\to Q_2(\cdot), t\to+0,$$

у просторі $(S^1_{1/\alpha})'$. Для цього візьмемо довільну функцію $\psi\in S^1_{1/\alpha}$ і, скориставшись тим, що Q_2 – мультиплікатор у просторі $S^1_{1/\alpha}$, а також теоремою Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега, знайдемо, що

$$\langle Q_1(t,\cdot)Q_2(\cdot),\psi(\cdot)\rangle=\langle Q_1(t,\cdot),Q_2(\cdot)\psi(\cdot)\rangle=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}}Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)\psi(\sigma)d\sigma\underset{t\to+0}{\longrightarrow}\int\limits_{\mathbb{R}}Q_2(\sigma)\psi(\sigma)d\sigma=\langle 1,Q_2(\cdot)\psi(\cdot)\rangle=\langle Q_2(\cdot),\psi\rangle.$$

Звідси вже випливає твердження 1 леми 5.

2. З урахуванням твердження 1, у просторі $(S_1^{1/\alpha})'$ маємо граничне співвідношення

$$\mu G(t,\cdot)-\sum_{l=1}^{m}\mu_l G(t_l,\cdot)\underset{t\to+0}{\longrightarrow}\mu F^{-1}[Q_2]-\sum_{l=1}^{m}\mu_l F^{-1}[Q_1(t,\cdot)]=$$

$$=F^{-1}\Big[\mu Q_2-\sum_{l=1}^{m}\mu_l Q_1(t_l,\cdot)Q_2(\cdot)\Big]=F^{-1}\Big[\Big(\mu-\sum_{l=1}^{m}\mu_l Q_1(t_l,\sigma)\Big)Q_2(\sigma)\Big]=$$

$$=F^{-1}\Big[\Big(\mu-\sum_{l=1}^{m}\mu_l Q_1(t_l,\sigma)\Big)\Big(\mu-\sum_{l=1}^{m}\mu_l Q_1(t_l,\sigma)\Big)^{-1}\Big]=F^{-1}[1]=\delta,$$

що й потрібно було довести. □

Зауваження 2. *Якщо $\mu=1$, $\mu_1=\cdots=\mu_m=0$, то задача (15), (16) вироджується в задачу Коші для рівняння (15), при цьому $Q_2(\sigma)=1$, $\sigma\in\mathbb{R}$, $F^{-1}[1]=\delta$. Отже, у випадку задачі Коші для рівняння (5) функція $G(t,x)=F^{-1}[e^{-t\varphi(\sigma)}](x)$ володіє властивістю: $G(t,\cdot)\to\delta$ при $t\to+0$ у просторі $(S_1^{1/\alpha})'$.*

Символом $(S_{1,*}^{1/\alpha})'$ позначатимемо клас згортувачів у просторі $S_1^{1/\alpha}$.

Наслідок 2. *Нехай*

$$\omega(t,x)=f*G(t,x), f\in(S_{1,*}^{1/\alpha})', (t,x)\in\Omega.$$

Тоді в просторі $(S_1^{1/\alpha})'$ виконується граничне співвідношення

$$\mu\omega(t,\cdot)-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\omega(t_k,\cdot)\to f, t\to+0. \tag{16}$$

Доведення. Урахувавши властивість неперервності перетворення Фур'є (прямого та оберненого) в просторах типу S', для доведення твердження досить встановити, що у просторі $(S^1_{1/\alpha})'$ виконується граничне співвідношення

$$F\Big[\mu\omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \omega(t_k,\cdot)\Big] \to F[f], t \to +0.$$

Оскільки узагальнена функція f – згортувач у просторі $S_1^{1/\alpha}$, то

$$F\Big[\mu\omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \omega(t_k,\cdot)\Big] = \mu F[\omega(t,\cdot)] - \sum_{k=1}^{m} \mu_k F[\omega(t_k,\cdot)] =$$

$$= \mu F[f * G(t,\cdot)] - \sum_{k=1}^{m} \mu_k F[f * G(t_k,\cdot)] =$$

$$= \mu F[f]F[G(t,\cdot)] - \sum_{k=1}^{m} \mu_k F[f]F[G(t_k,\cdot)] = F[f]\Big(\mu Q(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q(t_k,\cdot)\Big).$$

При доведенні твердження 1 леми 5 встановлено, що $Q(t,\cdot) \to Q_2(\cdot)$ при $t \to +0$ у просторі $(S^1_{1/\alpha})'$. Отже,

$$\mu Q(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q(t_k,\cdot) \underset{t\to+0}{\longrightarrow} \mu Q_2(\sigma) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\sigma)Q_2(\sigma) = 1$$

у просторі $(S^1_{1/\alpha})'$. Звідси вже дістаємо, що граничне співвідношення (16) виконується в просторі $(S_1^{1/\alpha})'$. Твердження доведено. □

Функція $G(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (5). Справді,

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} F^{-1}[Q(t,\sigma)] = F^{-1}\Big[\frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma)\Big],$$

$$\varphi\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big) G(t,x) = F^{-1}[\varphi(\sigma)]F[G(t,\sigma)] = F^{-1}[\varphi(\sigma)Q(t,\sigma)] = F^{-1}\Big[\frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma)\Big].$$

Отже,

$$\frac{\partial G(t,x)}{\partial t} + \varphi\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big) G(t,x) = 0, (t,x) \in \Omega,$$

що й потрібно було довести.

Надалі функцію G називатимемо фундаментальним розв'язком нелокальної багатоточкової за часом задачі для рівняння (5).

З наслідку 2 випливає, що для рівняння (5) нелокальну багатоточкову за часом задачу можна сформулювати так: знайти функцію $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, яка задовольняє рівняння (5)та умову

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k u(t_k,\cdot) = f, \quad f \in (S^{1/\alpha}_{1,*})', \tag{17}$$

де граничне співвідношення розглядається в просторі $(S_1^{1/\alpha})'$ (обмеження на параметри μ, μ_1, ..., μ_m, t_1, ..., t_m такі ж, як у випадку задачі (5), (6)).

Теорема 1. *Нелокальна багатоточкова за часом задача* (5), (17) *коректно розв'язна. Розв'язок визначається формулою*

$$u(t,x) = f * G(t,x), (t,x) \in \Omega,$$

де G – *фундаментальний розв'язок задачі для рівняння* (5).

Доведення. Насамперед переконаємося в тому, що функція $u(t,x)$ є розв'язком рівняння (5). Справді, (див. наслідок 1),

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,x)) = f * \frac{\partial G(t,x)}{\partial t},$$

$$\varphi\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big)u(t,x) = F^{-1}[\varphi(\sigma)F[f * G]](t,x).$$

Оскільки, f – згортувач у просторі $S_1^{1/\alpha}$, то

$$F[f * G(t,x)] = F[f]F[G(t,x)](\sigma) = F[f]Q(t,\sigma).$$

Отже,

$$\varphi\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big)u(t,x) = F^{-1}[\varphi(\sigma)Q(t,\sigma)F[f]] = -F^{-1}\Big[\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)F[f](\sigma)\Big] =$$
$$= -F^{-1}\Big[F\Big[\frac{\partial}{\partial t}G\Big] \cdot F[f]\Big] = -F^{-1}\Big[F\Big[f * \frac{\partial G}{\partial t}\Big]\Big] = -f * \frac{\partial G(t,x)}{\partial t}.$$

Звідси дістаємо, що функція $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (5). З наслідку 2 випливає, що u задовольняє умову (17) у вказаному сенсі.

Зазначимо також, що u неперервно залежить від функції $f \in (S_{1,*}^{1/\alpha})'$, оскільки операція згортки володіє властивістю неперервності.

Залишається переконатися в тому, що задача (5), (17) має єдиний розв'язок. Для цього розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \varphi^*\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big)v = 0, \ \ (t,\, x) \in [0,\, t_0) \times \mathbb{R} \equiv \Omega',\, 0 \le t < t_0 < \infty, \tag{18}$$

$$v(t,\,\cdot)\Big|_{t=t_0} = \psi, \ \ \psi \in (S_{1,*}^{1/\alpha})', \tag{19}$$

де $\varphi^*\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big) = F[\varphi F^{-1}[g]]$, $\forall g \in S_1^{1/\alpha}$, $\varphi^*\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big)$ – звуження спряженого оператора до оператора $\varphi\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big)$ на простір $S_1^{1/\alpha} \subset (S_1^{1/\alpha})'$. Умову (19) розуміємо в слабкому сенсі. Задача Коші (18), (19) є розв'язною, при цьому $v(t,\,\cdot) \in S_1^{1/\alpha}$ при кожному $t \in [0,\, t_0)$.

Нехай $Q_{t_0}^t : (S_{1,*}^{1/\alpha})' \to S_1^{1/\alpha}$ – оператор, який зіставляє функціоналу $\psi \in (S_{1,*}^{1/\alpha})'$ розв'язок задачі (18), (19). Оператор $Q_{t_0}^t$ є лінійним і неперервним, він визначений для довільних t і t_0 таких, що $0 \le t < t_0 < \infty$ і має властивості

$$\forall \psi \in (S_{1,*}^{1/\alpha})' : \ \frac{dQ_{t_0}^t\psi}{dt} - \varphi^*\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big)Q_{t_0}^t\psi = 0, \ \ \lim_{t\to t_0} Q_{t_0}^t\psi = \psi$$

(границя розглядається в просторі $(S_1^{1/\alpha})'$).

Розглянемо розв'язок $u(t,\,x)$, $(t,\,x)\in\Omega$, задачі (5), (17), який розумітимемо як регулярний функціонал з простору $(S^{1/\alpha}_{1,*})'$. Доведемо, що задача (5), (17) може мати лише єдиний розв'язок у просторі $(S^{1/\alpha}_{1,*})'$. Для цього досить довести, що єдиним розв'язком рівняння (5) при нульовій початковій умові може бути лише функціонал $u(t,\,x)\equiv 0$ (при кожному $t\in(0,\infty)$). Застосуємо функціонал $u(t,\,x)$ до функції $Q^t_{t_0}\psi\in S^{1/\alpha}_1$, де ψ – довільно фіксований елемент з простору $S^{1/\alpha}_1\subset(S^{1/\alpha}_{1,*})'$. Диференціюючи по t і використовуючи рівняння (5), (18) отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle u(t,\,\cdot),\,Q^t_{t_0}\psi\rangle=\langle\frac{\partial u}{\partial t},\,Q^t_{t_0}\psi\rangle+\langle u,\,\frac{\partial Q^t_{t_0}\psi}{\partial t}\rangle=$$

$$=\langle-\varphi\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big)u,\,Q^t_{t_0}\psi\rangle+\langle u,\,\varphi^*\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big)Q^t_{t_0}\psi\rangle=$$

$$=\langle-\varphi\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big)u,\,Q^t_{t_0}\psi\rangle+\langle\varphi\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big)u,\,Q^t_{t_0}\psi\rangle=0.$$

Звідси випливає, що $\langle u(t,\,\cdot),\,Q^t_{t_0}\psi\rangle$ є сталою величиною. Із властивостей абстрактних функцій випливає співвідношення

$$\lim_{t\to t_0}\langle u(t,\cdot),Q^t_{t_0}\psi\rangle=\langle u(t_0,\cdot),\psi\rangle=\mathrm{const}$$

у довільній точці $t_0\in(0,+\infty)$. Отже, якщо в (17) $f=0$, то

$$\mu\lim_{t\to t_0}\langle u(t,\cdot),\psi\rangle-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\langle u(t_k,\cdot),\psi\rangle=\mu c_0-\sum_{k=1}^{m}\mu_k c_k=0.$$

Звідси випливає, що $c_0=c_1=\cdots=c_m=0$. Справді, якщо припустити, що, наприклад, $c_0\neq 0$, то маємо співвідношення $\mu=\sum\limits_{k=1}^{m}\mu_k\alpha_k$, де $\alpha_k=c_k/c_0$. Оскільки $\mu,\mu_1,\ldots,\mu_m$ – фіксовані параметри, причому $\mu>m\sum\limits_{k=1}^{m}\mu_k$, то одержане протиріччя доводить, що $c_0=0$. Аналогічно доводимо, що $c_1=\cdots=c_m=0$. Таким чином, $\langle u(t_0,\cdot),\psi\rangle=0$ для довільного $\psi\in S^{1/\alpha}_1$, тобто $u(t_0,x)=0$ – нульовий функціонал з просторі $(S^{1/\alpha}_{1,*})'$. Оскільки $t_0\in(0,\infty)$ і t_0 вибрано довільним чином, то $u(t,\cdot)=0$ для всіх $t\in(0,\infty)$.

Теорема доведена. □

Теорема 2. *Нехай* $u(t,x)$, $(t,x)\in\Omega$, *– розв'язок нелокальної багатоточкової за часом задачі* (5), (17). *Тоді* $u(t,x)\to 0$ *при* $t\to+\infty$ *у просторі* $(S^{1/\alpha}_1)'$.

Доведення. Нагадаємо, що розв'язок задачі (5), (17) дається формулою

$$u(t,x)=f*G(t,x)=\langle f_\xi,T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle=\langle f_\xi,G(t,x-\xi)\rangle,$$

де G – фунламентальний розв'язок задачі, $\check{G}(t,\xi)=G(t,-\xi)$, T_{-x} – оператор зсуву аргумента у просторі $S^{1/\alpha}_1$.

Нехай $\psi\in S^{1/\alpha}_1$. Покладемо

$$\Psi_t(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(t,x-\xi)\psi(x)dx,\quad \Psi_{t,R}(\xi)=\int\limits_{-R}^{R}G(t,x-\xi)\psi(x)dx,\quad R>0,t>1.$$

У цих позначеннях перевіримо, що: а) при кожному $t > 1$ і довільному $R > 0$ функція $\Psi_{t,R}(\xi)$ є елементом простору $S_1^{1/\alpha}$ і $\Psi_{t,R}(\xi) \to \Psi_t(\xi)$ при $R \to +\infty$ у $S_1^{1/\alpha}$; б) $\Psi_t(\xi) \in S_1^{1/\alpha}$ при кожному $t > 1$. Звідси дістаємо

$$\langle u(t,x), \psi(x)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f_\xi, G(t, x-\xi)\rangle \psi(x)dx = \langle f_\xi, \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,x)\psi(x+\xi)dx\rangle =$$

$$= \langle f_\xi, \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,-y)\psi(-(y-\xi))dy\rangle = \langle f_\xi, \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,-y)\check{\psi}(y-\xi)dy\rangle, \check{\psi}(x) = \psi(-x),$$

(тут $u(t,\cdot)$ трактується як регулярна узагальнена функція з простору $(S_1^{1/\alpha})'$ при кожному $t > 0$).

Отже, встановимо властивість а). При фіксованих $\{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+$ маємо:

$$|\xi^k D_\xi^n \Psi_{t,R}(\xi)| \le \int_{-R}^{R} |\xi^k \psi(x) D_\xi^m G(t, x-\xi)|dx \le \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi^k \psi(\xi+\eta) D_\eta^m G(t,\eta)|d\eta.$$

Але $\psi \in S_1^{1/\alpha}$ і тому для деяких $c, L, M > 0$

$$|\xi^k D_\xi^m \psi(\xi)| \le cL^k M^m k^k m^{m/\alpha}, \{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+. \tag{20}$$

Звідси, при кожному $\eta \in \mathbb{R}$:

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\xi^k \psi(\xi+\eta)| = \sup_{y\in\mathbb{R}} |(y-\eta)^k \psi(y)| = \sup_{y\in\mathbb{R}} \Big| \sum_{l=0}^{k} C_k^l y^l (-\eta)^{k-l} \psi(y) \Big| \le$$

$$\le \sum_{l=0}^{k} C_k^l |\eta|^{k-l} \sup_{y\in\mathbb{R}} |y^l \psi(y)| \le c \sum_{l=0}^{k} C_k^l L^l l^l |\eta|^{k-l}.$$

Далі скористаємося оцінками (13) при $t > 1$. Тоді

$$|\xi^k D_\xi^m \Psi_{t,R}(\xi)| \le c \sum_{l=0}^{k} C_k^l L^l l^l \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta|^{k-l} |D_\xi^m G(t,\eta)|d\eta \le$$

$$\le cc_3 B_1^m t^{-(m+1)/\alpha} m^{m/\alpha} \sum_{l=0}^{k} C_k^l L^l l^l \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta|^{k-l} \exp\{-a_0 t^{-1}|\eta|\}d\eta.$$

З урахуванням формули Стірлінга знаходимо, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\eta|^{k-l} \exp\{-a_0 t^{-1}|\eta|\}d\eta = 2a_0^{-1} a_0^{-(k-l)} t^{k-l+1} (k-l)! \le a_1 a_2^{k-l} t^{k-l+1} (k-l)^{k-l},$$

$a_1 = 2a_0\sqrt{2\pi}e$, $a_2 = 2/e$.

Тоді

$$|\xi^k D_\xi^m \Psi_{t,R}(\xi)| \le c_4 a_1 t^{-(m+1)/\alpha} B_1^m m^{m/\alpha} \sum_{l=0}^{k} C_k^l l^l L^l a_0^{-(k-l)} t^{k-l+1} a_2^{k-l} (k-l)^{k-l} \le$$

$$\le c_5 L_1^k B_1^m k^k m^{m/\alpha}, t > 1, \tag{21}$$

де $c_5 = c_4 a_1 t = c c_3 a_1 t$, $L_1 = 2\max\{L, a_0^{-1} a_2 t\}$. Отже, $\psi_{t,R}(\xi) \in S_1^{1/\alpha}$ для кожного $t > 1$ і довільного $R > 0$. Далі безпосередньо переконуємося у тому, що $\Psi_{t,R}(\xi) \to \Psi_t(\xi)$ при $R \to +\infty$ рівномірно по ξ разом з усіма своїми похідними на кожному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Крім того, сукупність функцій $\xi^k D_\xi^m \Psi_{t,R}(\xi)$, $\{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+$, рівномірно обмежена в просторі $S_1^{1/\alpha}$ (ця властивість випливає з оцінок (21), у яких сталі $c_5, L_1, B_1 > 0$ не залежать від R). Це і означає виконання умови а).

З умови а) випливає умова б), оскільки в досконалому просторі кожна обмежена множина є компактною.

Використовуючи властивості а), б), отримуємо співвідношення

$$\langle u(t,\cdot), \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,-y)(f * \check{\psi})(y)dy, \quad \forall \psi \in S_1^{1/\alpha}.$$

Оскільки функціонал f – згортувач у просторі $S_1^{1/\alpha}$, то $f * \check{\psi} \in S_1^{1/\alpha}$. Звідси випливає, що

$$|(f * \check{\psi})(y)| \le c \exp\{-a|y|^\alpha\}, c, a > 0, y \in \mathbb{R}.$$

Звідси та з (13) (при $s = 0$) випливає оцінка

$$|\langle u(t,\cdot), \psi \rangle| \le \tilde{c} t^{-1/\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-a|y|^\alpha\}dy = c_0 t^{-1/\alpha} \to 0, t \to +\infty,$$

для довільної функції $\psi \in S_1^{1/\alpha}$, що й потрібно було довести.

Теорему 2 доведено. □

Якщо узагальнена функція f в умові (17) є фінітною (тобто носій f ($\operatorname{supp} f$) – обмежена множина в $\mathbb{R}$), то можна говорити про рівномірне прямування на $\mathbb{R}$ до нуля при $t \to +\infty$ розв'язку задачі (5), (17). Зазначимо також, що кожна фінітна узагальнена функція є згортувачем у просторах типу S. Ця властивість випливає із загального результату, який відноситься до теорії досконалих просторів (див. [9, с. 173]). Якщо Φ – досконалий простір із диференційовною операцією зсуву, то кожний фінітний функціонал є згортувачем у просторі Φ. Фінітні узагальнені функції утворюють досить широкий клас. Зокрема, кожна обмежена множина з $F \subset \mathbb{R}$ є носієм деякої узагальненої функції (див., наприклад, [12, с. 118]).

Теорема 3. *Нехай* $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, *– розв'язок задачі* (5), (17) *із початковою функцією* f *в умові* (17), *яка є елементом простору* $(S_1^\beta)' \subset (S_1^{1/\alpha})'$, $\beta > 1$ *і* $\operatorname{supp} f$ *– обмежена множина в* $\mathbb{R}$. *Тоді* $u(t,x) \to 0$ *при* $t \to +\infty$ *рівномірно на* $\mathbb{R}$.

Доведення. Нехай $\operatorname{supp} f \subset [a_1, b_1] \subset [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}$. Розглянемо функцію $\psi \in S_1^\beta$, $\beta > 1$, таку, що $\psi(x) = 1$ для $x \in [a_1, b_1]$, $\operatorname{supp} \psi \subset [a_2, b_2]$. Така функція існує, оскільки простір S_1^β при $\beta > 1$ містить фінітні функції. Функції $\psi(\xi)G(t, x-\xi)$, $(1-\psi(\xi))G(t,\ x-\xi)$, як функції ξ, є елементами простору S_1^β (при кожному $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}$), тому

$$u(t,x) = \langle f_\xi, \psi(\xi)G(t, x-\xi)\rangle + \langle f_\xi, \gamma(\xi)G(t, x-\xi)\rangle,$$

де $\gamma(\xi) = 1-\psi(\xi)$. Другий доданок дорівнює нулеві, бо $\operatorname{supp}(\gamma(\xi)G(t, x-\xi)) \cap \operatorname{supp} f = \varnothing$. Тоді

$$u(t,x) = t^{-1/\alpha}\langle f_\xi, t^{1/\alpha}\psi(\xi)G(t, x-\xi)\rangle.$$

Отже, для доведення сформульованого твердження досить показати, що сукупність функцій $\Phi_{t,x}(\xi) = t^{1/\alpha}\psi(\xi)G(t, x-\xi)$ є обмеженою в просторі S_1^β при великих значеннях t та $x \in \mathbb{R}$, тобто

$$|D_\xi^m \Phi_{t,x}(\xi)| \le cB^m m^{m\beta} \exp\{-a|\xi|\},\ m \in \mathbb{Z}_+, \tag{22}$$

де сталі $c, a, B > 0$ не залежать від t, x, ξ, які змінюються вказаним способом. Оцінку (22) достатньо встановити лише для $\xi \in [a_2, b_2]$, бо $\Phi_{t,x}(\xi) = 0$ для $\xi \in \mathbb{R} \setminus [a_2, b_2]$.

Оскільки $\psi \in S_1^\beta$, то

$$|D_\xi^m \psi(\xi)| \le c_2 B_2^m m^{m\beta} \exp\{-a_2|\xi|\},\ \xi \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}_+,$$

з деякими сталими $c_2, B_2, a_2 > 0$. Звідси та з оцінок (13) випливають нерівності

$$|D_\xi^m \Phi_{t,x}(\xi)| \le t^{1/\alpha} \sum_{l=0}^m C_m^l |D_\xi^l \psi(\xi)| \cdot |D_\xi^{m-l} G(t, x-\xi)| \le$$

$$\le c_2 c_3 t^{1/\alpha} \sum_{l=0}^m C_m^l B_2^l l^{l\beta} B_1^{m-l} t^{-(m-l+1)/\alpha} (m-l)^{(m-l)/\alpha} \exp\{-a_2|\xi|\} \exp\{-a_0 t^{-1}|x-\xi|\}.$$

Врахуємо тепер нерівності

$$t^{1/\alpha} t^{-(m-l+1)/\alpha} \exp\{-a_0 t^{-1}|x-\xi|\} \le 1,\ l \in \{0, 1, \dots, m\}.$$

Тоді

$$|D_\xi^m \Phi_{t,x}(\xi)| \le cB^m m^{m\beta} \exp\{-a_2|\xi|\}, m \in \mathbb{Z}_+,$$

де $c = c_2 c_3$, $B = 2\max\{B_1, B_2\}$ і всі сталі не залежать від t, x, ξ.

Теорему 3 доведено. □

Отримані результати проілюструємо на прикладі нелокальної багатоточкової за часом задачі для рівняння з оператором диференціювання дробового порядку $\varphi(i\partial/\partial x) = (I - (\partial/\partial x)^2)^{1/2}$. У цьому випадку символом оператора $\varphi(i\partial/\partial x)$ є функція $\varphi(\sigma) = (1+\sigma^2)^{1/2}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, яка є мультиплікатором у просторі S_1^1. Нелокальна за часом задача для рівняння

$$\partial u(t,x)/\partial t + \sqrt{I - (\partial/\partial x)^2}\, u(t,x) = 0, (t,x) \in \Omega,$$

коректно розв'язна, якщо початкова функція f в умові (17) є елементом простору $(S_{1,*}^1)'$, при цьому $u(t,\cdot) \to 0$ при $t \to +\infty$ у просторі $(S_1^1)'$. Якщо, наприклад, $f = \delta \in (S_{1,*}^\beta)' \subset$

$(S^1_{1,*})'$, $\beta > 1$, то $u(t,x) = \delta * G(t,x) = G(t,x) \to 0$ при $t \to +\infty$ рівномірно на $\mathbb{R}$, де $G(t,x) = F^{-1}[Q(t,\sigma)]$,

$$Q(t,\sigma) = \exp\{-t(1+\sigma^2)^{1/2}\}\Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k(1+\sigma^2)^{1/2}\}\Big)^{-1}, (t,\sigma) \in \Omega.$$

У випадку задачі Коші $\mu = 1$, $\mu_1 = \cdots = \mu_m = 0$, $G(t,x) = F^{-1}[\exp\{-t(1+\sigma^2)^{1/2}\}]$, $\sigma \in \mathbb{R}$.

Список літератури

[1] *Nakhushev A.M.* Equations of mathematical biology. – M .: Higher school, 1995. – 301 p.

[2] *Belavin I.A., Kapitsa S.P., Kurdyumov S.P.* Mathematical model of global demographic processes taking into account spatial distribution // Zhurn. calculated mathematics and mat. physics. – 1998. – V. 38, No. 6. – P. 885–902.

[3] *Dezin A.A.* General questions of the theory of boundary value problems. – M.: Nauka, 1980. – 208 p.

[4] *Romanko V.K.* Nonlocal boundary value problems for some systems of equations // Mat. notes. – 1985. – V. 37, No. 7. – P. 727–733.

[5] *Makarov A.A.* Existence of a well-posed two-point boundary value problem in a layer for systems of pseudodifferential equations // Differ. equations. – 1994. – V. 30, No. 1. – P. 144–150.

[6] Chesalin V.I. A problem with nonlocal boundary conditions for some abstract hyperbolic equations // Differ. equations. – 1979. – V. 15, No. 11. – P. 2104–2106.

[7] *Ilkiv V.S., Ptashnik B.Y.* Some nonlocal two-point problem for systems of partial equations derivatives // Sibirsk. mat. zhurn. – 2005. – V. 46, No. 11. – P. 119-129.

[8] *Chabrowski J.* On the non-local problems with a functional for parabolic equation // Funckcialaj Ekvacioj. – 1984. – Vol. 27. – P. 101–123.

[9] *Gel'fand I.M., Shilov G.E.* Spaces of basic and generalized functions. – M .: Fizmatgiz, 1958. – 307 p.

[10] *Gorbachuk VI, Gorbachuk ML* Boundary value problems for differential-operator equations. - K .: Nauk. Dumka, 1984 .– 283 p.

[11] *Horodetskyi V.V., Nagnubida N.I., Nastasiev P.P.* The methods of solve for functional analysis problems. Vyscha shkola, Kyiv, 1990. (in Russian)

[12] *Gorodetskiy V.V.* Boundary power of smooth connections in spheres of parabolic type. – Chernivtsi: Ruta, 1998. – 225 p.

Надійшло 25.02.2021

Gorodetskyi V.V., Kolisnyk R.S., Martynyuk O.V. *The non-local time problem for one class of pseudodifferential equations with smooth symbols*, Bukovinian Math. Journal. **9**, 1 (2021), 107–127.

In this paper we investigate the differential-operator equation

$$\partial u(t,x)/\partial t + \varphi(i\partial/\partial x)u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R} \equiv \Omega,$$

where the function $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ and satisfies certain conditions. Using the explicit form of the spectral function of the self-adjoint operator $i\partial/\partial x$, in $L_2(\mathbb{R})$ it is established that the operator $\varphi(i\partial/\partial x)$ can be understood as a pseudodifferential operator in a certain space of type S. The evolution equation $\partial u/\partial t + \sqrt{I-\Delta}u = 0$, $\Delta = D_x^2$, with the fractionation differentiation operator $\sqrt{I-\Delta} = \varphi(i\partial/\partial x)$, where $\varphi(\sigma) = (1+\sigma^2)^{1/2}$, $\sigma \in \mathbb{R}$ is attributed to the considered equation.

Considered equation is a nonlocal multipoint problem with the initial function f, which is an element of a space of type S or type S' which is a topologically conjugate with a space of type S space. The properties of the fundamental solution of such a problem are established, the correct solvability of the problem in the half-space $t > 0$ is proved, the representation of the solution in the form of a convolution of the fundamental solution with the initial function is found, the behavior of the solution $u(t, \cdot)$ for $t \to +\infty$ (solution stabilization) in spaces of type S'.