Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

**В.В. Городецький, С.Б. Боднарук**

# *Вступ до теорії гіперкомплексних чисел та їх функцій*

**Навчальний посібник**

Чернівці
Чернівецький національний університет
2021

УДК 511.11(075.8)
ББК 22.131я73
Г 701

Друкується за ухвалою Вченої ради
Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича
(протокол №6  від 31 травня 2021року)

Рецензенти: Сумарюк М.І. – канд. фіз.-мат. наук, вчитель математики та інформатики ОЗ Сторожинецький ліцей, вчитель вищої категорії, старший вчитель.
Готинчан І.З. – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри економічної кібернетики та міжнародних економічних відносин ЧТЕІ КНТЕУ.

**Городецький В.В., Боднарук С.Б.**
Г 701 Вступ до теорії гіперкомплексних чисел та їх функцій: навч. посібник. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2021. – 136 с.

У посібнику викладено основний теоретичний матеріал, який стосується гіперкомплексних систем чисел, наведено основні положення теорії комплексних чисел, кватерніонів, октав, та деякі їх застосування у задачах елементарної алгебри. Дається розв’язання типових задач різного ступеня складності.

Для здобувачів вищої освіти спеціальностей „Середня освіта (математика)”, „Математика”.

**УДК 511.11(075.8)**
**ББК 22.131я73**

## Вступ

В елементарній алгебрі поряд з дійсними числами розглядається і більш широка система комплексних чисел. Причина, що змушує розглядати комплексні числа, пов'язана з розв’язанням квадратних рівнянь. Деякі квадратні рівняння, наприклад,

$$x^2+1=0, \tag{1}$$

не можна розв’язати, обмежуючись лише дійсними числами (не існує такого дійсного числа $a$, що $a^2=-1$).

Історія комплексних чисел починається з XVI століття. Італійські математики Джироламо Кардано (1501-1576) і Рафаель Бомбеллі (1526-1572), розв’язуючи квадратні рівняння, ввели в розгляд символ $\sqrt{-1}$ — формальний розв’язок рівняння (1), а також вираз $b\sqrt{-1}$ — формальний розв’язок рівняння

$$x^2+b^2=0.$$

Тоді вираз більш загального вигляду $a+b\sqrt{-1}$ можна розглядати як формальний розв’язок рівняння

$$(x-a)^2+b^2=0. \tag{2}$$

Згодом вирази $a+b\sqrt{-1}$ стали називати «уявними», а потім «комплексними» числами і записувати $a+bi$ (символ $i$ для позначення $\sqrt{-1}$ увів Л. Ейлер у XVIII ст.). Цих чисел виявляється вже досить для розв’язання будь-якого квадратного рівняння (якщо дискримінант квадратного рівняння додатний, то, як відомо, корені такого рівняння – дійсні числа, якщо ж дискримінант від’ємний, то рівняння обов'язково зводиться до вигляду (2)).

На основі комплексних чисел виникла і розвинулась важлива математична дисципліна – теорія функції комплексної змінної, яка широко застосовується в самій математиці, в гідро- та аеромеханіці та в багатьох інших науках. Ініціатива використання комплексних чисел у природничих науках належить М.Є.Жуковському (1847–1921).

У 1848 році ірландський математик Вільям Гамільтон (1805-1865) відкрив кватерніони як числову систему, яка є розширенням множини комплексних чисел. Пошуки такої системи були зумовлені тим, що множення комплексних чисел описує повороти на площині. Виникало бажання знайти щось аналогічне для поворотів у тривимірному просторі. Цього, якоюсь мірою, вдалося досягти за допомогою кватерніонів. А саме, через 20 років, використовуючи кватерніони, американський математик і фізик Гіббс (1839-1903) відкриває вектори і векторну алгебру в тривимірному евклідовому просторі.

Спочатку винайдення кватерніонів та інших гіперкомплексних чисел спонукало математиків до досить активних досліджень у цій області. Особливо відчутний внесок зробив німецький математик Ф. Г. Фробеніус.

Проте досить швидко інтерес до цієї тематики спав, бо роль власне гіперкомплексних чисел виявилася не настільки важливою, як роль комплексних чисел. Так що подальший розвиток у цій галузі відбувався досить повільно. Щодо досліджень цього періоду, можна, наприклад, зазначити, що в 1940-х роках виходили статті канадсько-американського математика Івана Найвена (1915-1999), у яких досліджувалися різні властивості кватерніонів, наприклад, добування з них коренів.

Проте останнім часом спостерігається активізація досліджень, пов'язаних з гіперкомплексними числами. Достатньо потужні осередки такої активності є, наприклад, у Бельгії, Польщі, Болгарії, США, Мексиці, Росії. Прихильники таких досліджень звертають увагу на те, що деякі математичні твердження набувають значно простішого вигляду або значно легше доводяться, якщо записати їх мовою дій над кватерніонами чи іншими гіперкомплексними числами. Проте на сьогодні є дуже значна кількість і таких математиків, які вважають, що користі від досліджень гіперкомплексних систем небагато.

Щодо українських дослідників гіперкомплексних систем, то насамперед слід згадати, що деякий час цією тематикою займався Ю. М. Березанський: така діяльність почалась у 1950-х роках під керівництвом М. Г. Крейна, а пізніше вийшла книга Ю. М. Березанського та О. О. Калюжного «Гиперкомплексные системы с локально компактным базисом». Обидва автори – співробітники відділу функціонального аналізу Інституту математики НАН України, так що дослідження відбувалися з точки зору функціонального аналізу. Відтак ці дослідження носили дуже абстрактний характер. Розглядувані при цьому гіперкомплексні системи могли бути нескінченновимірними. Ці дослідження дуже суттєво відрізнялися від усіх тих досліджень, про які йдеться нижче.

Інший осередок гіперкомплексних досліджень зародився у відділі комплексного аналізу та теорії потенціалу того самого Інституту математики: нині покійний співробітник цього відділу І. П. Мельниченко почав досліджувати різні гіперкомплексні системи, розглядаючи для них питання, аналогічні до тих, що стосувалися проблематики цього відділу. Ці дослідження дали початок розвитку в Україні так званого гіперкомплексного аналізу у вузькому розумінні, тобто теорії, аналогічної до комплексного аналізу, але для гіперкомплексних чисел замість комплексних (як відомо, словосполученням «комплексний аналіз» прийнято позначати теорію функцій комплексної змінної, особливо аналітичних функцій).

Згодом до гіперкомплексної діяльності приєдналися ще двоє співробітників Інституту математики НАНУ: проф. А. Ф. Турбін, основною спеціальністю якого є теорія ймовірностей, і С. А. Плакса, що працює в уже згаданому відділі комплексного аналізу та теорії потенціалу. Окремого відділу, присвяченого гіперкомплексним дослідженням, в Інституті нема; цією діяльністю там займаються щойно згадані двоє науковців і ще кілька молодих математиків, тяжіючи при цьому здебільшого до проблематики відділу комплексного аналізу та теорії потенціалу (однак останнє не стосується проф. А. Ф. Турбіна).

Ще один осередок українських гіперкомплексних досліджень знаходиться в Житомирі. Історія цього осередку почалася близько 2000 року завдяки тому, що завідувач кафедри математичного аналізу Житомирського державного університету (ЖДУ) доц. О. Ф. Герус випадково познайомився під час наукової конференції з мексиканським математиком, колишнім одеситом проф. М. Шапіро, який займається дуже різноманітними питаннями, пов'язаними з гіперкомплексними системами (переважно кватерніонами). Розпочалася співпраця цих двох науковців, і згодом О. Ф. Герус почав залучати до гіперкомплексних досліджень деяких студентів і викладачів фізико-математичного факультету ЖДУ. Поступово утворилася команда житомирських гіперкомплексників, яка демонструє досить успішну наукову роботу, в тому числі міжнародну співпрацю. Слід зазначити, що наказом ректора ЖДУ в університеті було утворено спеціальний підрозділ під назвою «Науково-дослідна лабораторія комплексного та гіперкомплексного аналізу». [25]

## §1. Комплексні числа

У цьому параграфі коротко зупинимось на основних питаннях з теорії комплексних чисел.[10]

### 1.1. Означення комплексного числа, дії над комплексними числами

Комплексним числом називається число вигляду

$$z = x + yi,$$

де $\{x, y\} \subset \mathbb{R}, \quad i^2 = -1.$

Додавання, віднімання і множення комплексних чисел визначається так:

1) $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$ ;

2) $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$ ;

3) $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$ ;

та правило множення дійсного числа $\alpha$ на комплексне $c+di$ :

4) $a(c+di)=ac+adi.$

Для визначених вище операцій над комплексними числами справедливими є такі закони:

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ – переставний (комутативний) закон додавання;

2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ – сполучний (асоціативний) закон додавання;

3) $z_1 z_2 = z_2 z_1$– переставний (комутативний) закон множення;

4) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ – сполучний (асоціативний) закон множення;

5) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ – розподільний (дистрибутивний) закон.

### 1.2. Операція спряження

Кожному комплексному числу $z = a + bi$ , можна поставити у відповідність інше комплексне число $\overline{z} = a - bi,$ що називається спряженим до $z$.

Для операції спряження справедливими є такі властивості:

1) $\overline{\overline{z}} = z;$

2) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;

3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;

4) $z + \overline{z} = 2a$;

5) $z\overline{z} = a^2 + b^2$.

Сума і добуток комплексного числа та спряженого з ним завжди є дійсними числами.

**1.3. Модуль комплексного числа. Тотожність для двох квадратів**

Невід'ємне дійсне число $\sqrt{a^2 + b^2}$ називається модулем комплексного числа $z = a + bi$ і позначається $|z|$: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Враховуючи властивість 5) і означення модуля комплексного числа, отримуємо, що $z\overline{z} = |z|^2$.

Звідси, якщо $z_1, z_2$ – два комплексні числа, то:

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)\left(\overline{z_1 z_2}\right) = z_1 z_2 \overline{z_1}\,\overline{z_2} =$$

$$= z_1 \overline{z_1} \cdot z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 |z_2|^2.$$

Отже, $|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2 \Rightarrow |z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, тобто модуль добутку дорівнює добутку модулів.

Розпишемо рівність $|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2$ детальніше:

$\left(a^2 + b^2\right)\left(a'^2 + b'^2\right) = \left(aa' - bb'\right)^2 + \left(ab' + a'b\right)^2$, а саме: добуток суми двох квадратів на суму двох квадратів є знову сумою двох квадратів.

**1.4. Ділення комплексних чисел**

Нехай $z_1$ і $z_2$ – два комплексних числа, причому $z_2 \neq 0 + 0 \cdot i$. Тоді часткою від ділення $z_1$ на $z_2$ називається комплексне число $x$, яке є розв'язком такого рівняння:

$$z_2 x = z_1.$$

Помножимо обидві частини останнього рівняння на $\overline{z}_2$:

$$\overline{z}_2 z_2 x = \overline{z}_2 z_1 \Leftrightarrow \left| z_2 \right|^2 x = \overline{z}_2 z_1 .$$

Якщо тепер помножити обидві частини останнього рівняння на дійсне число $\dfrac{1}{\left|z_2\right|^2}$, то отримаємо $x = \dfrac{1}{\left|z_2\right|^2}\overline{z}_2 z_1.$

## 1.5. Тригонометрична форма запису комплексного числа

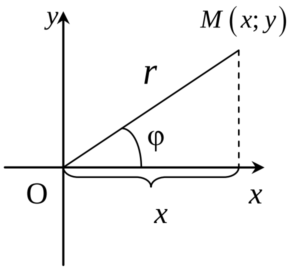
Кожному комплексному числу відповідає одна єдина точка $M$ на площині, віднесеній до прямокутної системи координат. Таку площину називають *комплексною площиною (або Гауссовою площиною*, оскільки геометричну інтерпретацію для комплексних чисел вперше використав Гаусс (1777-1855)).

Аргумент ненульового комплексного числа $z$ визначається з точністю до доданку $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ і лише одне значення його $\varphi$ задовольняє умову $-\pi < \varphi \le \pi$. *Це значення аргументу називається головним* і позначається $\arg z$. Отже, $Arg\, z = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Оскільки на комплексній площині введена прямокутна декартова система координат, то $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi.$ Тоді ненульове комплексне число набуває нової форми

$$z = x + yi = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right),$$

яку називають *тригонометричною формою комплексного числа*, де $r, \varphi$ – дійсні числа, причому $r = OM$ додатне.




Початок координат є *геометричним зображенням комплексного числа* $0 + 0i$, яке має модуль, рівний нулеві, і невизначений аргумент.

Точки комплексної площини з однаковим, відмінним від нуля, модулем належать колу з центром у початку координат, радіус якого дорівнює модулю комплексного числа. Точки комплексної площини з сталим головним значенням аргументу – це точки променя з вершиною у початку координат.

Для переходу від однієї форми запису комплексного числа до іншої користуються такими формулами:

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\ \cos\varphi=\frac{x}{r},\ \sin\varphi=\frac{y}{r}.$$

Виконання дій над комплексними числами, записаними в тригонометричній формі, відомі з курсу алгебри. Тому їх буде виписано при розв'язанні відповідних вправ нижче.

З використанням операції піднесення до комплексного степеня та відомої формули Ейлера можна переписати тригонометричну форму так:

$$z=re^{i\varphi}=r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right).$$

**1.6. Приклади розв'язування задач**

**1.** Знайти суму і добуток комплексних чисел $z_1=-3+2i$ і $z_2=13-i$.

□ $z_1+z_2=(-3+2i)+(13-i)=10+i;$

$z_1z_2=(-3+2i)(13-i)=-39+3i+26i+2=-37+29i.$ ■

**2.** Задано комплексні числа $z_1=-3+2i$ і $z_2=13-i$. Знайти різницю $z_2-z_1$ і частку $\frac{z_2}{z_1}$, $z_1\neq 0$.

□ $z_2-z_1=(13-i)-(-3+2i)=16-3i;$

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{13-i}{-3+2i}=\frac{(-3)\cdot 13+2\cdot(-1)}{(-3)^2+2^2}+\frac{(-3)\cdot(-1)-13\cdot 2}{(-3)^2+2^2}i=$$

$$=-\frac{41}{13}-\frac{23}{13}i.$$

Формула частки достатньо громіздка і важко запам'ятовується. Тому краще нею не користуватися. простіше помножити чисельник і знаменник дробу $\frac{z_2}{z_1}$ на $\overline{z_1}$, тобто на число, спряжене до знаменника. Тоді знаходження частки зведеться до множення числа $z_2$ на число $\overline{z_1}$ і до ділення отриманого добутку на додатне число $z_1\overline{z_1}=|z_1|^2$.

Іншими словами, для ділення комплексних чисел рекомендується користуватися формулою $\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_2\overline{z_1}}{z_1\overline{z_1}}$. Маємо:

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{13-i}{-3+2i}=\frac{(13-i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)}=\frac{-39-26i+3i-2}{9+4}==$$

$$-\frac{41}{13}-\frac{23}{13}i. \blacksquare$$

**3.** Записати комплексне число $z=\frac{3+i}{(1+i)(1-2i)}$ в алгебраїчній формі.

$$\square\quad z=\frac{3+i}{(1+i)(1-2i)}=\frac{3+i}{1-2i+i+2}=\frac{3+i}{3-i}=\frac{(3+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=$$

$$=\frac{9+6i-1}{9+1}=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i \quad \blacksquare$$

**4.** Знайдіть дійсні числа $x$ і $y$ такі, що:

$$(2x-3yi)(2x+3yi)+xi=97+2i$$

$\square$ $4x^2+9y^2+xi=97+2i$.

З умови рівності комплексних чисел маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}4x^2+9y^2=97;\\ x=2;\end{cases}\qquad \begin{cases}16+9y^2=97;\\ x=2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}y^2=9;\\ x=2;\end{cases}\qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=3;\\ y=-3;\end{array}\right.\\ x=2.\end{cases}$$

Відповідь: (– 3;2), (3;2).■

**5.** Спростіть вирази:

**1)** $\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}i}{b\sqrt{a}-a\sqrt{b}i}$;

□

$$\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{ai}}{b\sqrt{a}-a\sqrt{bi}}=\frac{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{bi}\right)}{\sqrt{ab}\left(\sqrt{b}-\sqrt{ai}\right)}=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{bi}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{ai}\right)}{a+b}=$$

$$=\frac{\sqrt{ab}+ai+bi+\sqrt{ab}i^2}{a+b}=\frac{\sqrt{ab}-\sqrt{ab}+(a+b)i}{a+b}=i\ .\ \blacksquare$$

**2)** $\dfrac{2\left(\sqrt{5}i+3i\right)^2\left(\sqrt{15}-4\right)\left(\sqrt{3}i+i\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}{\left(7+5\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}i-i\right)^3}$;

□ $$\frac{2\left(\sqrt{5}i+3i\right)^2\left(\sqrt{15}-4\right)\left(\sqrt{3}i+i\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}{\left(7+5\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}i-i\right)^3}=$$

$$=\frac{-2\left(\sqrt{5}+3\right)^2\left(\sqrt{15}-4\right)(-2i)}{-\left(7+5\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)^3 i}=$$

$$=\frac{2\left(14+6\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{15}-4\right)(-2)}{\left(7+5\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}-6+3\sqrt{2}-1\right)}=$$

$$=\frac{-4\left(14\sqrt{15}-56+30\sqrt{3}-24\sqrt{5}\right)}{\left(5\sqrt{2}+7\right)\left(5\sqrt{2}-7\right)}=$$

$$=-4\left(14\sqrt{15}-56+30\sqrt{3}-24\sqrt{5}\right)=$$

$$=224-56\sqrt{15}-120\sqrt{3}+96\sqrt{5}.\ \blacksquare$$

**6.** Записати число $z=\left(i-\sqrt{3}\right)^{13}$ в алгебраїчній формі.

□ Спочатку запишемо дане число в тригонометричній формі, а потім перейдемо від тригонометричної форми до алгебраїчної. Знайдемо модуль і один з аргументів числа $i-\sqrt{3}$:

$r=\left|i-\sqrt{3}\right|=2, \varphi=\dfrac{5\pi}{6}$.

Подамо число $i-\sqrt{3}$ у тригонометричній формі:

$$i-\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

Тепер, застосовуючи формулу Муавра піднесення комплексного числа $z=r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)$ до $n$-го степеня

$$z^n=\left(r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)\right)^n=r^n\left(\cos n\varphi+i\sin n\varphi\right), n\in\mathbb{N},$$

отримаємо:

$$\left(i-\sqrt{3}\right)^{13}=\left(2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\right)^{13}=$$

$$=2^{13}\left(\cos\frac{65\pi}{6}+i\sin\frac{65\pi}{6}\right)=$$

$$=8192\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

Це тригонометична форма шуканого комплексного числа. Запишемо отримане число в алгебраїчній формі:

$$\left(i-\sqrt{3}\right)^{13}=8192\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=8192\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=$$

$$=-4096\sqrt{3}+4096i\text{ . ■}$$

**7.** Піднести до куба число $z=2\left(\cos 20°+i\sin 20°\right)$.

□ За формулою Муавра дістанемо:

$$z^3=\left(2\left(\cos 20°+i\sin 20°\right)\right)^3=2^3\left(\cos\left(3\cdot 20°\right)+i\sin\left(3\cdot 20°\right)\right)=$$

$$=8\left(\cos 60°+i\sin 60°\right)=4\left(1+i\sqrt{3}\right).■$$

**8.** Розв'язати рівняння: $x^3+8=0$.

□Маємо: $x^3=-8$, $x=\sqrt[3]{-8}$. $-8=8\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)$.

Застосовуючи відому з алгебри формулу обчислення кореня $n$-го степеня з комплексного числа

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

де $k\in\{0,1,2,\ldots,n-1\}$, отримаємо:

$$x_k=\sqrt[3]{-8}=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3}\right)\right),\quad k=0,\ 1,\ 2.$$

Отже,

$$x_0=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=1+\sqrt{3}i;$$

$$x_1=2(\cos\pi+i\sin\pi)=2(-1+0i)=-2;$$

$$x_2=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=1-\sqrt{3}i.$$

Відповідь: $\left\{1+\sqrt{3}i;-2;1-\sqrt{3}i\right\}$. ■

**9.** Знайти всі значення $\sqrt[6]{-64}$.

□Запишемо число $z=-64$ у тригонометричній формі:

$$-64=64(\cos\pi+i\sin\pi).$$

Застосовуючи формулу обчислення кореня $n$-го степеня з числа $z$, отримаємо:

$$z_k=\sqrt[6]{-64}=\sqrt[6]{64}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{6}\right)\right),$$

$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$

Отже, $z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+i$;

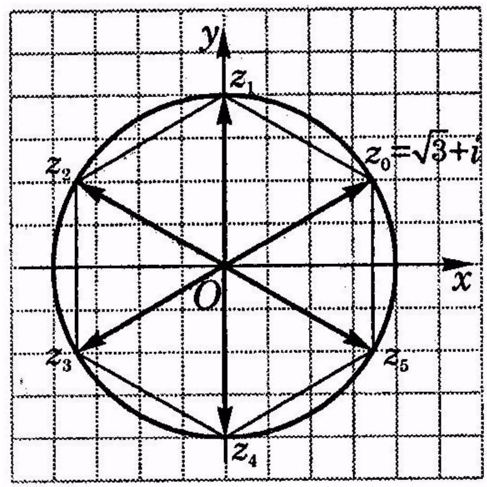
$$z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2i;$$

$$z_2=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}+i;$$

$$z_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i\,;$$

$$z_4 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i\,;$$

$$z_5 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i\,.$$



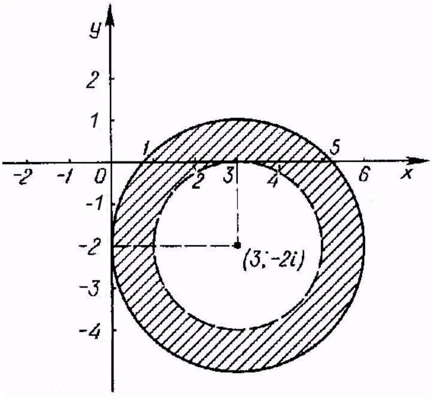

Точки, що відповідають числам $z_k$, розміщені у вершинах правильного шестикутника, вписаного в коло радіуса 2 з центром у точці $z = 0$. ■

**10.** Визначити множину точок $z$ комплексної площини, для яких $2 < \left|z - 3 + 2i\right| \le 3$.

□ Вираз під модулем подамо як різницю двох комплексних чисел: $z - 3 + 2i = z - (3 - 2i)$.

Розглянемо нерівність $\left|z - (3 - 2i)\right| \le 3$. Рівність $\left|z - (3 - 2i)\right| = 3$ є рівнянням кола радіуса 3 з центром у точці $3 - 2i$, оскільки коло є множиною віх точок площини, що віддалені від точки $3 - 2i$ на відстань 3.

Отже, нерівність $\left|z-\left(3-2i\right)\right|\le 3$ задовольняють внутрішні точки відповідного круга разом з точками, що утворюють коло $\left|z-\left(3-2i\right)\right|=3$.



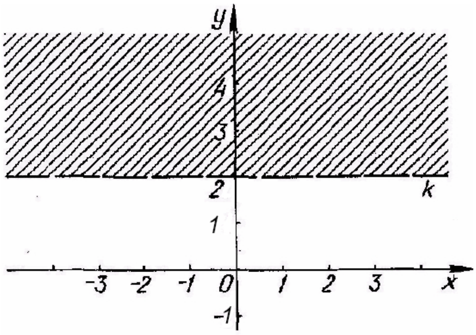

Нерівністю $2<\left|z-\left(3-2i\right)\right|$ описується множина точок, розміщених зовні кола радіуса 2, концентричного першому.

Шукана множина точок є перерізом двох визначених множин. Отже, подвійна нерівність $2<\left|z-3+2i\right|\le 3$ виконується для множини точок, які на комплексній площині зображаються кільцем, утвореним двома концентричними колами, причому точки меншого кола цій множині не належать.■

**11.**Визначити множину точок комплексної площини, для яких виконується нерівність $|z|>|z-4i|$.

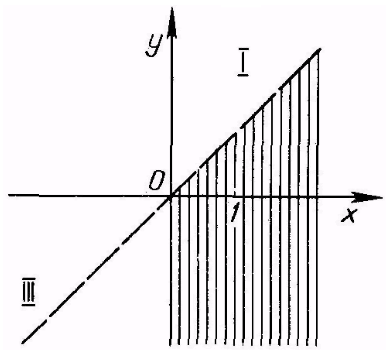
□Рівність $|z-4i|=|z|$ є рівнянням прямої $k$, що паралельна осі $Ox$ і проходить через точку $(0;2)$ (множина точок, які знаходяться на однаковій відстані від точок $(0;4)$ та $(0;0)$.

Дану нерівність задовольняють точки, розміщені вище від прямої $k$, тобто $y>2$, $\forall x\in\mathbb{R}$.




Точки прямої $k$ не входять до цієї множини. ■

**12.** Знайти на комплексній площині множину точок, яка описується нерівностями: $|z-1|<|z-i|, \quad \operatorname{Re} z>0$.

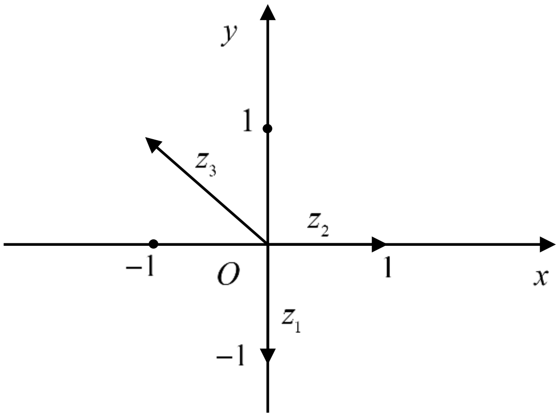



□ Нехай $z=x+iy$ – шукане комплексне число. Рівняння $|z-1|=|z-i|$ рівносильне такому: $|x-1+iy|=|x+i(y-1)|$, тобто $y=x$. Отже, рівняння $|z-1|=|z-i|$ є рівнянням бісектриси I і III координатних кутів, яка розбиває комплексну площину на дві півплощини. Нерівність $|z-1|<|z-i|$ визначає ту з них, яка містить, точку $(1;0)$ і не включає самої бісектриси, а нерівність $\operatorname{Re} z>0$ визначає півплощину $x>0$.

Множину точок, що задовольняє обидві нерівності, заштриховано на малюнку, при цьому точки контуру фігури не належать цій множині. ■

**13.** Знайти аргументи комплексних чисел: $z_1=-i, \;\; z_2=1, \;\; z_3-1+i$.

□ Побудувавши вектори $z_1, z_2, z_3$, знаходимо один з аргументів для кожного числа:




$\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}, \varphi_2 = 0, \varphi_3 = \frac{3\pi}{4}$. Отже,

$\arg z_1 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \arg z_2 = 2k\pi,\ \arg z_3 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, де $k$ – довільне ціле число. ■

**14.** Знайти аргументи комплексного числа $z = -\sqrt{3} + i$.

□ Кожен із аргументів $\varphi$ числа $z = -\sqrt{3} + i$ задовольняє рівняння $tg\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. З рівняння випливає, що $\varphi = -\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Оскільки число $z = -\sqrt{3} + i$ розміщене в другій чверті комплексної площини, то його аргументами будуть числа $\varphi_k$ при непарних значеннях $k$. Отже:

$$\arg\left(-\sqrt{3} + i\right) = -\frac{\pi}{6} + \pi\left(2n+1\right) = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \ ■$$

**15.** Записати числа $z_1 = -1 - i, z_2 = -2, z_3 = i$ у тригонометричній формі.

□Оскільки $\left|z_1\right| = \sqrt{2}$, а $\varphi_1 = -\frac{3\pi}{4}$, то

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

Модуль числа $z_2$ дорівнює 2, а один з аргументів $z_2$ є кут $\varphi_2 = \pi$, тому $z_2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Враховуючи, що $|z_3| = 1$, а $\varphi_3 = \frac{\pi}{2}$ – один з аргументів $z_3$, отримуємо тригонометричну форму запису:

$$z_3 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right). \blacksquare$$

**16.** Записати числа $z_1 = 2\cos\frac{7\pi}{4} - 2i\sin\frac{\pi}{4}$, $z_2 = -\cos\frac{\pi}{17} + i\sin\frac{\pi}{17}$ у тригонометричній формі.

□Для запису чисел $z_1$ і $z_2$ в тригонометричній формі немає необхідності заздалегідь знаходити їх модулі та аргументи (хоча зробити це зовсім нескладно). Скористаємося тим, що

$$\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right), \text{ а } -\sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

і відразу отримаємо тригонометричну форму для першого числа

$$z_1 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Аналогічно, враховуючи, що

$$-\cos\frac{\pi}{17} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{17}\right) = \cos\frac{16\pi}{17},$$

$$\sin\frac{\pi}{17} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{17}\right) = \sin\frac{16\pi}{17},$$

отримаємо $z_2 = \cos\frac{16\pi}{17} + i\sin\frac{16\pi}{17}$. ■

**17.** Знайти добуток чисел

$$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{4}+i\sin\frac{11\pi}{4}\right) \text{ і } z_2=\sqrt{8}\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right).$$

□Оскільки $|z_1|=\sqrt{2}$, $|z_2|=\sqrt{8}$, $|z_1z_2|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=4$. Аргумент добутку $z_1z_2$ даних чисел буде $\varphi_1+\varphi_2=\frac{11\pi}{4}+\frac{3\pi}{8}=\frac{25\pi}{8}$. Отже:

$$z_1z_2=4\left(\cos\frac{25\pi}{8}+i\sin\frac{25\pi}{8}\right) \text{ або}$$

$$z_1z_2=4\left(\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}\right). \blacksquare$$

**18.** Записати число $z=\dfrac{i-1}{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}$ у тригонометричній формі.

□ Введемо позначення $z_1=i-1$, $z_2=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$. Число $z_2$ записано у тригонометричні формі. Очевидно, що $|z_2|=1$ і $\varphi_2=\frac{\pi}{3}$. Знайдемо модуль і аргумент числа $z_1$: $|z_1|=\sqrt{2}$ , $\varphi_1=\frac{3\pi}{4}$. Згідно з формулою обчислення частки двох комплексних чисел отримаємо:

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right), \quad \text{тобто}$$

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right). \blacksquare$$

### 1.7. Завдання для самостійної роботи

**1.** Виконати додавання і віднімання комплексних чисел:

1) $\left(2a-3bi\right)+\left(-a-bi\right)+\left(4a+2bi\right)-\left(2a-5bi\right)$;

2) $\left(2c-8di\right)-\left(\left(5c-2di\right)+\left(c-di\right)-\left(-4c+3di\right)\right)$;

3) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}i\right)-\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{3}i\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}i\right)$;

4) $\left(1,(3)+0,2(6)i\right)-\left(-2,1(3)+0,6(2)i\right)$;

5) $\left(2\sqrt{3}-4i\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{27}-i\sqrt{32}\right)+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{2i}{\sqrt{3}}\right)$;

6) $\left(\frac{m}{n}-\frac{n}{m}i\right)+\left(\frac{n}{m}-\frac{m}{n}i\right)-\left(\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}i\right)-\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}i\right)\right)$.

**2.** Знайти $z_1+z_2$, $z_1 z_2$, $z_2-z_1$, $\frac{z_2}{z_1}$, якщо:

1) $z_1=2+5i$, $z_2=1-7i$;

2) $z_1=\sqrt{2}-\sqrt{3}i$, $z_2=\sqrt{2}+\sqrt{3}i$

**3.** Виконати множення і ділення комплексних чисел:

1) $\left(4+\sqrt{3}i\right)\left(2\sqrt{3}-\sqrt{3}i\right)$; 2) $\left(a+3bi\right)\left(2a-bi\right)$;

3) $\left(1+\sqrt{3}i\right):\left(1-\sqrt{3}i\right)$; 4) $\frac{(5-7i)}{\sqrt{3}+i}$; 5) $\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}i}{\sqrt{m}-\sqrt{n}i}$.

**4.** Записати $z$ в алгебраїчній формі:

1) $z=\frac{-41+63i}{50}-\frac{6i+1}{1-7i}$; 2) $z=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2i}\right)^2$;

3) $z=\frac{13+12i}{6i-8}+\frac{\left(2i+1\right)^2}{i+2}$; 4) $z=\left(2+i\right)^6$.

**5.** Знайти комплексне число $z$, яке задовольняє рівняння:

$$\left(i-z\right)\left(1+2i\right)+\left(1-iz\right)\left(3-4i\right)=1+7i.$$

**6.** Розв’язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} z_1 + 2z_2 = 1 + i, \\ 3z_1 + iz_2 = 2 - 3i. \end{cases}$$

**7.** При яких дійсних значеннях $x$ та $y$ комплексні числа $z_1 = 9y^2 - 4 - 10xi^5$ і $z_2 = 8y^2 + 20i^{11}$ є спряженими?

**8.** Довести рівності:

1) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$; 2) $\overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \ldots + \overline{z_n}$;

3) $\overline{z_1 z_2 \ldots z_n} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}\ldots\overline{z_n}$.

**9.** Піднести до степеня комплексне число:

1) $\left(2\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)\right)^{10}$; 2) $\left(3\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)\right)^{4}$;

3) $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^6$; 4) $\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^8$;

5) $\left(\cos\dfrac{\pi}{6} - i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^5$; 6) $\left(\dfrac{\sqrt{3} + i}{2}\right)^{24}$;

7) $\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^{30}$; 8) $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{20}$.

**10.** За формулою добування кореня з комплексного числа знайти корінь $n$-го степеня з числа $z$:

1) $z = 2\left(\cos 180° + i\sin 180°\right),\ \ n = 2,\ 4$;

2) $z = \sqrt{3} + i,\ \ n = 2,\ 3$.

**11.** Знайти усі корені $n$-го степеня з числа $z$ і дати їх геометричну інтерпретацію, якщо:

1) $z = -1,\ \ n = 2,\ 3$;

2) $z = i,\ \ n = 3$;

3) $z = 1 + i\sqrt{3},\ \ n = 2,\ 3$.

**12.** Довести, що для будь-якого натурального $n$ :

1) $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$;

2) $\left(\sqrt{3}+i\right)^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$.

**13.** Показати, що коли $n$ – натуральне число, кратне 3, то:

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n=2.$$

**14.** Знайдіть на комплексній площині точки *A, B, C, D,* що є геометричним зображенням комплексних чисел $2-i$; $-i$; $4+2i$; $-3-3i$.

**15.** Точка $M$ на комплексній площині є геометричним зображенням комплексного числа $4+2i$. Знайдіть комплексні числа, гометричними зображеннями яких є точки, симетричні $M$ відносно дійсної осі, уявної осі, початку координат, бісектриси першого координатного кута, бісектриси другого координатного кута.

**16.** Дайте геометричну інтерпретацію нерівності, доведіть її для довільних комплексних чисел $z_1$ та $z_2$ і з'ясуйте, за яких умов досягається рівність:

а) $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$;

б) $|z_1-z_2|\ge\big||z_1|-|z_2|\big|$.

**17.** Знайдіть довжини сторін трикутника *ABC,* якщо: *A* ($2-3i$); B($3+4i$); C($1-12i$).

**18.** Знайдіть геометричні місця точок комплексної площини, які задовольняють умову:

а) $|z-i|=1$; б) $|z+2|<|z-2|$; в) $2\le|z-1+2i|<3$.

**19.** Знайдіть геометричні місця точок комплексної площини, які задовольняють умову:

а) $|z+2|=1$; б) $|z-i|>2$; в) $1<|z+1|<3$;

г) $\operatorname{Re}z>3$; д) $\operatorname{Im}z\le2$; е) $2\le\operatorname{Re}z<4$.

**20.** Знайти множину точок комплексної площини, які задовольняють умову:

1) $(1-i)\overline{z}=(1+i)z$;

2) $\arg z=(2n+1)\pi, n\in\mathbb{Z}$;

3) $\lg|z+i|<1$;

4) $\frac{\pi}{4}(8n+1)<\arg(z+i)<\frac{\pi}{2}(4n+1), n\in\mathbb{Z}$.

**21.** Серед комплексних чисел $z$, які задовольняють умови:

1) $|z+1-i|\le 1$; 2) $|z-5i|\le 3$

знайти число, яке має найменший додатний аргумент.

**22.** Записати $z$ у тригонометричній формі:

1) $z=-\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}$;

2) $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2i(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)}$;

3) $z=\dfrac{i-1}{i\left(1-\cos\frac{2\pi}{5}\right)+\sin\frac{2\pi}{5}}$.

## §2. Комплексні числа, подвійні числа, дуальні числа (інші арифметики для чисел $a+bi$)

### 2.1. Постановка задачі

Отже, при введенні комплексних чисел, побудовано числову систему із виразів $a+bi$, додавання та множення яких здійснюється за формулами:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i\,, \tag{2.1}$$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i\,. \tag{2.2}$$

Формула (2.1) для дії додавання виглядає повністю природно. Що ж стосується формули (2.2), то цього сказати не можна. Виникає питання: чи можна із цих же виразів $a+bi$ отримати ще якусь числову систему, зберігши правило додавання (2.1), але змінивши (2.2) якимось новим законом множення?

Вкажемо ті вимоги, які ми збираємося поставити до нового правила множення:

1) Множення дійсного числа $a$ (якщо його розглядати як елемент нової числової системи $a=a+0\cdot i$) на довільне число $z=b+ci$ повинно дати той же результат, що і у випадку комплексних чисел, тобто:

$$\left(a+0\cdot i\right)\left(b+ci\right)=ab+aci \quad \text{і}$$

$$\left(b+ci\right)\left(a+0\cdot i\right)=ab+aci$$

В частковому випадку це означає, що для дійсних чисел нове множення має співпадати із звичайним:

$$\left(a+0\cdot i\right)\left(b+0\cdot i\right)=ab+0\cdot i\,.$$

Оскільки те ж саме справедливе і у відношенні додавання ($\left(a+0\cdot i\right)+\left(b+0\cdot i\right)=\left(a+b\right)+0\cdot i$), то дійсні числа включаються в нову числову систему з їх природною арифметикою.

2) Має виконуватись рівність:

$\left(az_1\right)\left(bz_2\right)=\left(ab\right)\left(z_1z_2\right)$, де $a,b$ – довільні дійсні числа.

3) Має виконуватися розподільний (дистрибутивний) закон:

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3\,, \qquad (z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3\,.$$

Звичайно, що ці вимоги ще не дозволяють написати до кінця новий закон множення, але, врахувавши їх, маємо, наприклад,

$$(a+bi)(c+di)=a(c+di)+(bi)(c+di)=$$
$$=ac+adi+bci+bdi^2.$$

Тепер, щоб записати результат, залишається тільки вказати, чому дорівнює $i^2$.

Взявши $i^2=-1$, приходимо до множення комплексних чисел. Але це не єдина можливість, бо треба тільки вимагати, щоб добуток $i\cdot i$ належав нашій системі, тобто був числом вигляду $p+qi$. Знайшовши (задавши) числа $p$ та $q$ ми остаточно отримаємо вигляд закону множення:

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bdp)+(ad+bc+bdq)i. \qquad (2.3)$$

Тепер можна підвести підсумки:

***Висновки.*** *Розглядається система чисел виду* $a+bi$ *з законом додавання (2.1) і законом множення (2.3),* $p,q$ *– два фіксовані дійсні числа (ці числа* $p$ *і* $q$ *і будуть «визначати арифметику» даної системи чисел).* [5]

Із (2.3) випливає: (можна легко довести безпосередньою перевіркою)

1) для правила (2.3) має місце комутативний закон: $z_1z_2=z_2z_1$;

2) для правила (2.3) виконується асоціативний закон $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$.

Доведемо, наприклад, 2).

Маємо:

$$\left[(a+bi)(c+di)\right](e+fi)=$$
$$=\left[(ac+bdp)+(ad+bc+bdq)i\right](e+fi)=$$
$$=\underline{\left((ac+bdp)e+(ad+bc+bdq)fp\right)}+$$
$$\underline{\underline{+\left((ac+bdp)f+(ad+bc+bdq)e+(ad+bc+bdq)fq\right)i}},$$

$$\left(a+bi\right)\left[\left(c+di\right)\left(e+fi\right)\right]=$$

$$=\left(a+bi\right)\left[\left(ce+dfp\right)+\left(cf+de+dfq\right)i\right]=$$

$$=\underline{\left(a\left(ce+dfp\right)+b\left(cf+de+dfq\right)p\right)}+$$

$$+\underline{\underline{\left(a\left(cf+de+dfq\right)+b\left(ce+dfp\right)+b\left(cf+de+dfq\right)q\right)i.}}$$

Порівнюючи результати обох обчислень, легко переконатися у їх тотожності (щоб полегшити перевірку, ми підкреслили рівні вирази однаковою кількістю прямих ліній).

### 2.2. Зведення до трьох систем

Може здатися, що ми знайшли нескінченно багато числових систем, бо до формули (2.3) входять два довільні дійсні числа $p$ та $q$. Але це не зовсім так. Зараз ми покажемо, що будь-яка система зводиться до однієї з трьох:

I) числа $a+bi$, де $i^2=-1$ (комплексні числа);

II) числа $a+bi$, де $i^2=1$ (подвійні числа);

III) числа $a+bi$, де $i^2=0$ (дуальні числа). [5]

▲Зведення будь-якого випадку до одного з цих трьох здійснюється так:

Із рівності $i^2=p+qi$ випливає: $i^2-qi=p$ або

$$\left(i-\frac{q}{2}\right)^2=p+\frac{q^2}{4}. \qquad (2.4)$$

Маємо три випадки:

I) $p+\dfrac{q^2}{4}=-k^2$ (від'ємне число), $k\in\mathbb{R},\ k\neq 0$.

Тоді

$$\left(i-\frac{q}{2}\right)^2=-k^2,\quad \text{тобто}\quad \underbrace{\left(-\frac{q}{2k}+\frac{1}{k}i\right)}_{j}^{2}=-1. \qquad (2.5)$$

(позначимо $j=-\dfrac{q}{2k}+\dfrac{1}{k}i$).

Маємо $j^2=-1$. При цьому $i=\frac{q}{2}+kj$, тобто будь-яке число $a+bi$ допускає представлення у вигляді:

$$\grave{a}+bi=a+b\left(\frac{q}{2}+kj\right)=\underbrace{\left(a+\frac{b}{2}q\right)}_{a'}+\underbrace{bk}_{b'}\,j=a'+b'j\,,$$

де $j^2=-1$.

Отже, маємо *комплексні числа*.

II) $p+\frac{q^2}{4}=k^2$ (додатне число), $k\neq 0$.

Тоді замість (5) будемо мати: $\left(-\frac{q}{2k}+\frac{1}{k}i\right)^2=1$.

Позначимо $-\frac{q}{2k}+\frac{1}{k}i=E$. Маємо $E^2=1$. Отже, будь-яке число $a+bi$ нашої системи допускає представлення: $a'+b'E$, але тепер $E^2=1$.

Закон множення таких чисел має вигляд:

$$\left(a'+b'E\right)\left(c'+d'E\right)=\left(a'c'+b'd'\right)+\left(a'd'+b'c'\right)E\,.$$

Отже, при $p+\frac{q^2}{4}>0$ отримуємо *систему подвійних чисел*.

III) $p+\frac{q^2}{4}=0$. Позначимо через $\Omega$ число $i-\frac{q}{2}$. Маємо: $\Omega^2=0$.

($\Omega=i-\frac{q}{2},\quad i=\frac{q}{2}+\Omega$). Тоді будь-яке число $a+bi$ нашої системи може бути записане у вигляді $\left(a+\frac{b}{2}q\right)+b\Omega$ (бо $a+bi=a+b\left(\frac{q}{2}+\Omega\right)=\left(a+\frac{b}{2}q\right)+b\Omega$). Отже, число $a+bi$ подається у вигляді $\tilde{a}+\tilde{b}\Omega$.

Закон множення:

$$\left(\tilde{a}+\tilde{b}\Omega\right)\left(\tilde{c}+\tilde{d}\Omega\right)=\tilde{a}\tilde{c}+\left(\tilde{a}\tilde{d}+\tilde{b}\tilde{c}\right)\Omega.$$

Це – *система дуальних чисел*. ▲

**Висновок.** Будь-яка система чисел $a+bi$ з правилами дій (1), (3) фактично є одна із трьох:

I) комплексні числа $a+bj$, $j^2=-1$,

II) подвійні числа $a+bE$, $E^2=1$,

III) дуальні числа $a+b\Omega$, $\Omega^2=0$.

Основна відмінність подвійних і дуальних чисел від комплексних чисел – їх не можна ділити (немає операції ділення). Згадаємо, що «ділення» означає: щоб розділити $z_1$ на $z_2$ ( $z_2\neq 0$ ) треба розв'язати рівняння $z_2x=z_1$.

Покажемо, що в системі подвійних чисел неможливо, наприклад, поділити число $z_1=1$ ( $z=1+0\cdot E$ ) на $z_2=1+E$. Дійсно, якби рівняння $\left(1+E\right)x=1+0\cdot E$ мало розв'язок, то помноживши обидві частини рівняння на $1-E$, ми отримали б:

$$\left(1-E^2\right)x=1-E,$$

тобто $0=1-E$ – неправильна рівність.

Аналогічно в системі дуальних чисел неможливо, наприклад, поділити 1 на $\Omega$. Справді, для $\forall\, x=a+b\Omega$ маємо $x\cdot\Omega=a\cdot\Omega\neq 1$.

Отже, система подвійних і система дуальних чисел – системи без ділення. [5]

### 2.3. Завдання для самостійної роботи

1. Вкажіть вимоги, які ставляться до нового правила множення в числовій системі із виразів $a+bi$.
2. Доведіть, що для правила (2.3) має місце комутативний закон: $z_1 z_2 = z_2 z_1$.
3. За якої умови на числа $p$ та $q$ із (2.3) отримують систему комплексних чисел? Обґрунтуйте відповідь.
4. За якої умови на числа $p$ та $q$ із (2.3) отримують систему подвійних чисел? Обґрунтуйте відповідь.
5. За якої умови на числа $p$ та $q$ із (2.3) отримують систему дуальних чисел? Обґрунтуйте відповідь.
6. Наведіть приклади, які ілюструють те, що система подвійних чисел – система без ділення.
7. Наведіть приклади, які ілюструють те, що система дуальних чисел – система без ділення.

## §3. Кватерніони

### 3.1. Означення кватерніонів

Кватерніони, як видно з назви, це чотиричленні числа $(n = 4)$. В частинному випадку вони вироджуються в тричленні вектори. [3, 5, 10]

За першу з чотирьох одиниць, з яких складається кватерніон, як і у випадку звичайних комплексних чисел, приймають звичайну одиницю. Три інших одиниці зазвичай позначають за Гамільтоном $i,\ j,\ k$.

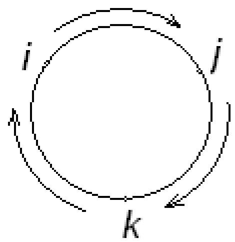
Отже, кватерніонами називаються числа вигляду $a+bi+cj+dk$ із законом додавання:

$$\left(a+bi+cj+dk\right)+\left(a'+b'i+c'j+d'k\right)=$$
$$=\left(a+a'\right)+\left(b+b'\right)i+\left(c+c'\right)j+\left(d+d'\right)k$$

і законом множення уявних одиниць $i, j, k$:

$$\begin{gathered} i^2=-1,\quad j^2=-1,\quad k^2=-1,\\ ij=k,\quad ji=-k,\\ jk=i,\quad kj=-i,\\ ki=j,\quad ik=-j. \end{gathered} \qquad \textbf{(*)}$$

Запам'ятати цю «таблицю множення» допомагає малюнок, на якому одиниці $i, j, k$ відображені трьома точками кола, розташованими по напряму руху годинникової стрілки.




Добуток будь-яких двох чисел з трійки $i, j, k$ дорівнює третьому, якщо рух від першого множника до другого відбувається за годинниковою стрілкою і дорівнює третьому із знаком мінус, якщо рух відбувається проти годинникової стрілки. Як бачимо, переставна властивість множення тут не виконується:

множення залежить від порядку співмножників!

Але для множення кватерніонів виконується сполучний (асоціативний) закон: $\left(q_1 q_2\right) q_3 = q_1\left(q_2 q_3\right)$.

Множення довільних кватерніонів здійснюється з допомогою таблиці (*). За правилом множення суми на суму маємо:

$$\begin{aligned} & q \cdot q' = \\ & = \left(a + bi + cj + dk\right)\left(a' + b'i + c'j + d'k\right) = \\ & = \left(aa' - bb' - cc' - dd'\right) + \\ & + \left(ab' + ba' + cd' - dc'\right)i + \\ & + \left(ac' + ca' + db' - bd'\right)j + \\ & + \left(ad' + da' + bc' - cb'\right)k. \end{aligned} \tag{**}$$

**3.2. Спряження кватерніонів**

За аналогією з комплексними числами вводиться таке означення: спряженим до кватерніона $q = a + bi + cj + dk$ називається кватерніон $\overline{q} = a - bi - cj - dk$.

Властивості:

1) $q + \overline{q} = 2a \in \mathbb{R}$;

2) $q \cdot \overline{q} = \left(a + bi + cj + dk\right)\left(a - bi - cj - dk\right) =$
$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \in \mathbb{R}.$

Продовжуючи аналогію з комплексними числами, назвемо число

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2},$$

модулем кватерніона $q$ і позначатимемо його $|q|$. Тоді властивість 2) переписується у вигляді $q \cdot \overline{q} = |q|^2$. [7]

**Зауваження 3.1.** *Якщо* $q' = bi + cj + dk$ *є «суто уявний» кватерніон, тоді*

$$q'^2 = -(b^2 + c^2 + d^2) \leq 0.$$

*Навпаки, якщо квадрат деякого кватерніона є від'ємним* *дійсним числом або дорівнює нулеві, тоді цей кватерніон – «суто уявний».*

Враховуючи дане зауваження, можна дати інший опис операції спряження.

Для запису у вигляді $a+q'$, де $q'$ – кватерніон, квадрат якого є додатним дійсним числом або дорівнює нулеві маємо: $\overline{q}=a-q'$ – спряжений кватерніон до кватерніона $q=a+q'$.

Крім того, операція спряження володіє ще властивостями:

3) $\overline{q_1+q_2}=\overline{q_1}+\overline{q_2}$ ;

4) $\overline{q_1\cdot q_2}=\overline{q_2}\cdot\overline{q_1}$.

**3.3. Ділення в системі кватерніонів**

Із чисел вигляду: $a+bi+cj$ (тричленних чисел) побудувати систему з діленням неможливо, але виявляється, що якщо ввести ще один символ $k$, то можна отримати систему з діленням.

Для комплексних чисел часткою від ділення $z_1$ на $z_2$ називається розв’язок рівняння $z_2x=z_1$. Але для кватерніонів добуток залежить від порядку співмножників, тому замість одного рівняння потрібно розглядати два:

$$q_2x=q_1, \tag{3.1}$$

$$xq_2=q_1. \tag{3.2}$$

Розв’язок першого рівняння будемо називати лівою часткою від ділення $q_1$ на $q_2$ і позначати $x_л$, а розв’язок другого – правою часткою $x_п$ (у випадку комплексних чисел, обидві частини співпадають).

Щоб розв’язати рівняння (3.1) і (3.2), застосуємо той же метод, що й у випадку комплексних чисел. Помножимо обидві частини рівняння (3.1) зліва спочатку на $\overline{q_2}$, а потім на $\frac{1}{|z_2|^2}$.

Одержимо $x=\frac{1}{|q_2|^2}\overline{q_2}q_1.$

Підставивши $x$ в рівняння (3.1), отримаємо, що цей вираз дійсно є розв'язком рівняння (3.1). Отже, $x_л = \frac{1}{|q_2|^2}\overline{q_2}q_1.$

Аналогічно $x_n = \frac{1}{|q_2|^2}q_1\overline{q_2}.$

**Приклад.** Знайти ліву і праву частки від ділення кватерніонів $q_1$ і $q_2$, де $q_1 = 2+\sqrt{2}j$, $q_2 = 3-i+\sqrt{2}k$.

**Розв'язання.** Скористаємося означенням лівої і правої частки:

$$x_л = \frac{1}{|q_2|^2}\overline{q_2}q_1, \quad x_n = \frac{1}{|q_2|^2}q_1\overline{q_2}.$$

Знайдемо $|q_2|^2$: $|q_2|^2 = 9+1+0+2 = 12$;

$\overline{q_2}$: $\overline{q_2} = 3+i-\sqrt{2}k$;

$$\overline{q_2}\cdot q_1 = (6-0-0-0)+(0+2+0+2)i+3\sqrt{2}+0+0-0)j+$$
$$+(0-2\sqrt{2}+\sqrt{2}-0)k = 6+4i+3\sqrt{2}j-\sqrt{2}k.$$

Звідси, $x_л = \frac{1}{12}\left(6+4i+3\sqrt{2}j-\sqrt{2}k\right).$

Обчисливши ліву частку, перейдемо до обчислення правої частки.

$$q_1\cdot\overline{q_2} = (6-0-0-0)+(2+0-2-0)i+(0+3\sqrt{2}+0-0)j+$$
$$+(-2\sqrt{2}+0+0-\sqrt{2})k = 6+3\sqrt{2}j-3\sqrt{2}k.$$

Звідси, $x_n = \frac{1}{12}\left(6+3\sqrt{2}j-3\sqrt{2}k\right).$

Отже,

1) для множення кватерніонів справедливий сполучний закон;

2) кватерніони – система з діленням;

3) множення кватерніонів некомутативне.

Можна переконатись, що для того, щоб $yz = zy$, де

$y = y_1 + y_2 i + y_3 j + y_4 k, \quad z = z_1 + z_2 i + z_3 j + z_4 k$ – кватерніони, необхідно, щоб $z = z_1 + \dfrac{y_2}{y_4} z_2 i + \dfrac{y_3}{y_4} z_3 j + k z_4.$ Зазначимо, що можна побудувати безліч кватерніонів, які будуть комутативними до даного.

### 3.4. Модуль добутку. Тотожність для чотирьох квадратів. Загальна постановка задачі про суму квадратів

Ще одна важлива властивість кватерніонів полягає в тому, що модуль добутку дорівнює добуткові модулів.

$$|q_1 q_2|^2 = (q_1 q_2)\overline{(q_1 q_2)} = (q_1 q_2)\left(\overline{q_2}\,\overline{q_1}\right) = q_1\left(q_2 \overline{q_2}\right)\overline{q_1} = |q_1|^2 |q_2|^2 .$$

Розпишемо отриману рівність $|q_1 q_2|^2 = |q_1|^2 |q_2|^2$ в попередньому пункті більш детальніше: нехай $q_1 = a + bi + cj + dk$, $\quad q_2 = a' + b'i + c'j + d'k$. Тоді попередня формула, якщо її прочитати справа наліво, набуває вигляду:

$$\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)\left(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2\right) =$$
$$=(aa' - bb' - cc' - dd')^2 +$$
$$+\left(ab' + ba' + cd' - dc'\right)^2 +$$
$$+\left(ac' + ca' + db' - bd'\right)^2 +$$
$$+\left(ad' + da' + bc' - cb'\right)^2 .$$

Нагадаємо, що у випадку комплексних чисел рівність $|z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$ привела нас до аналогічної тотожності:

$$\left(a^2 + b^2\right)\left(a'^2 + b'^2\right) =$$
$$= \left(aa' - bb'\right)^2 + \left(ab' + a'b\right)^2 ,$$

яку ми читали так: добуток суми двох квадратів на суму двох квадратів є знову сумою двох квадратів.

Аналогічно можна міркувати про аналогічну рівність для кватерніонів: добуток суми чотирьох квадратів на суму чотирьох квадратів є знову сумою чотирьох квадратів.

Виникає питання: для яких $n$ знайдеться така тотожність «добуток суми $n$ квадратів на суму $n$ квадратів дорівнює сумі $n$ квадратів?»

При $n=1$ розв'язок є: $a^2 \cdot b^2 = \left(ab\right)^2$ .

При $n=2$ і $n=4$ відповідь ми вже знаємо ($n$ = 2 – з теорії комплексних чисел, $n$ = 4 – з теорії кватерніонів), хоч з початку це було не зовсім очевидно.

Що ж буде при $n=5,6$ і т.д.? Це питання довго залишалося без відповіді. Вичерпну відповідь дав німецький математик А. Гурвіц, який довів цікаву теорему: тотожністі вказаного типу можливі тільки при $n=1,2,4,8$ і не можливі при жодних інших $n$ .

Сформулюємо задачу «про суму квадратів» більш точно.

Нехай $a_1, a_2, ..., a_n$ і $b_1, b_2, ..., b_n$ – два ряди букв. Назвемо формою другого степеня від цих букв будь-яку суму, доданки якої будуються так: кожен із доданків є добутком однієї з букв першого ряду на одну із букв другого ряду, взятий із числовим множником.

Наприклад, $a_1b_1 + 8a_1b_2 - 2a_3b_5 + 3a_3b_n$ –форма другого степеня.

Постановка «задачі про суму квадратів» полягає в наступному. Необхідно відповісти: яким має бути число $n$ і яким чином повинні бути вибрані форми другого степеня (позначимо їх коротко $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n$ ) для того, щоб виконувалась тотожність

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{\text{ї}}^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_{\text{ї}}^2\right) =$$

$$= \Phi_1^2 + \Phi_2^2 + ... + \Phi_n^2.$$

Відповідні тотожності для комплексних чисел і для кватерніонів ( $n=2$ і $n=4$ ) є тотожностями саме такого типу.

### 3.5. Приклади розв'язування задач

**1.** Задано два кватерніона: $q_1 = 7 + 6i - 4j + 9k$ і $q_2 = -3 + 7i + 12j - 27k$. Знайти суму $q_1 + q_2$, різницю $q_2 - q_1$ та добуток $q_1 \cdot q_2$.

□ За означеннями вказаних дій:

$$q_1 + q_2 = (7-3) + (6+7)i + (-4+12)j + (9-27)k =$$
$$= 4 + 13i + 8j - 18k;$$
$$q_2 - q_1 = (-3-7) + (7-6)i + (-12-(-4))j +$$
$$+(-27-9)k = -10 + i + 16j - 36k;$$
$$q_1 \cdot q_2 = (7 + 6i - 4j + 9k)(-3 + 7i + 12j - 27k) =$$
$$= (-21 - 42 + 48 + 243) + (49 - 18 + 108 + 108)i +$$
$$+(84 + 12 + 63 + 162)j + (-189 - 27 + 72 + 32)k =$$
$$= 228 + 247i + 312j - 112k. \blacksquare$$

**2.** Перевірити, чи

А. $q_1(q_2 + q_3) = q_1q_2 + q_1q_2$;

Б. $(q_1q_2)q_3 = q_1(q_2q_3)$

при $q_1 = 1 - i + j + 2k$; $q_2 = 2 + 2i - j + k$; $q_3 = 2 + i - k$.

□А) Скористаємося означенням:

$q_2 + q_3 = (2+2) + (2+1)i + (-1+0)j + (1-1)k = 4 + 3i - j$.

Запишемо для зручності коефіцієнти $q_1$ і $q_2 + q_3$ до таблиці

| | |
|---|---|
| 1 | 4 |
| -1 | 3 |
| 1 | -1 |
| 2 | 0 |

і обчислимо ліву частину рівності, скориставшись формулою (**):

$$q_1(q_2 + q_3) = (4 + 3 + 1 - 0) + (3 - 4 + 0 + 2)i +$$

$$+(-1+4+6-0)j+(0+8+1-3)k=$$

$$=\underline{8+i+9j+6k}\,. \qquad \text{(I)}$$

Тепер обчислимо праву частину рівності. Аналогічно запишемо коефіцієнти $q_1$ та $q_2$ до таблиці:

| | |
|---|---|
| 1 | 2 |
| -1 | 2 |
| 1 | -1 |
| 2 | 1 |

$$q_1 \cdot q_2 = (2+2+1-2)++(2-2+1+2)i++(1+2+4+1)j+$$

$$+(1+4+1-2)k = 3+3i+6j+4k\,.$$

Коефіцієнти $q_1$ та $q_3$:

| | |
|---|---|
| 1 | 2 |
| -1 | 1 |
| 1 | 0 |
| 2 | -1 |

$q_1 \cdot q_3 = (2+1-0+2)++(1-2-1-0)i+(0+2+2-1)j+$
$+(-1+4+0-1)k = 5-2i+3j+2k$ . Тоді

$$q_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot q_3 = (3+5)+(3-2)i+(6+3)j+(4+2)k=$$

$$=\underline{8+i+9j+6k}\,. \qquad \text{(II)}$$

З рівностей (I) і (II): $q_1\left(q_2+q_3\right)=q_1q_2+q_1q_2$ . ■

Б) Доведемо рівність $\left(q_1q_2\right)q_3 = q_1\left(q_2q_3\right)$.

Коефіцієнти $q_1$ та $q_2$:

| | |
|---|---|
| 1 | 2 |
| -1 | 2 |
| 1 | -1 |
| 2 | 1 |

$$q_1 \cdot q_2 = (2+2+1-2) + (2-2+1+2)i +$$
$$+(1+2+4+1)j + (1+4+1-2)k = 3+3i+6j+4k \; .$$

Коефіцієнти $q_1 \cdot q_2$ та $q_3$:

| | |
|---|---|
| 3 | 2 |
| 3 | 1 |
| 6 | 0 |
| 4 | -1 |

$$\left(q_1 \cdot q_2\right) \cdot q_3 = (6-3-0+4) + (3+6-6-0)i +$$
$$+(0+12+4+3)j + (-3+8+0-6)k = \underline{7+3i+19j-k} \; . \text{ (I)}$$

Коефіцієнти $q_2$ та $q_3$:

| | |
|---|---|
| 2 | 2 |
| 2 | 1 |
| -1 | 0 |
| 1 | -1 |

$$q_2 \cdot q_3 = (4-2+0+1) + (2+4+1-0)i +$$
$$+(0-2+1+2)j + (-2+2+0+1)k == 3+7i+j+k \; .$$

Коефіцієнти $q_1$ та $q_2 \cdot q_3$:

| | |
|---|---|
| 1 | 3 |
| -1 | 7 |
| 1 | 1 |
| 2 | 1 |

$$q_1 \cdot \left(q_2 \cdot q_3\right) = (3+7-1-2) + (7-3+1-2)i +$$
$$+(1+3+14+1)j + (1+6-1-7)k = \underline{7+3i+19j-k} \; . \text{ (II)}$$

З рівностей (I) і (II): $\left(q_1 q_2\right) q_3 = q_1 \left(q_2 q_3\right)$. ■

**3.** Знайти ліву і праву частки від ділення кватерніонів $q_1$ і $q_2$, де $q_1 = 2 + \sqrt{2} j$ та $q_2 = 3 - i + \sqrt{2}k$.

□ Скористаємося означенням лівої і правої частки:

$x_л = \frac{1}{|q_2|^2} \overline{q_2} q_1$, $x_п = \frac{1}{|q_2|^2} q_1 \overline{q_2}$.

Знайдемо $|q_2|^2 = 9 + 1 + 0 + 2 = 12$; $\overline{q_2} = 3 + i - \sqrt{2}k$.

Коефіцієнти $\overline{q_2}$ та $q_1$:

| | |
|---|---|
| 3 | 2 |
| 1 | 0 |
| 0 | $\sqrt{2}$ |
| $-\sqrt{2}$ | 0 |

$$\overline{q_2} \cdot q_1 = (6 - 0 - 0 - 0) + (0 + 2 + 0 + 2)i +$$
$$+(3\sqrt{2} + 0 + 0 - 0) j + (0 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} - 0)k =$$
$$= 6 + 4i + 3\sqrt{2} j - \sqrt{2}k$$
$$x_л = \frac{1}{12}\left(6 + 4i + 3\sqrt{2} j - \sqrt{2}k\right).$$

Обчисливши ліву частку, перейдемо до обчислення правої частки.

Коефіцієнти $q_1$ та $\overline{q_2}$:

| | |
|---|---|
| 2 | 3 |
| 0 | 1 |
| $\sqrt{2}$ | 0 |
| 0 | $-\sqrt{2}$ |

$$q_1 \cdot \overline{q_2} = (6 - 0 - 0 - 0) + (2 + 0 - 2 - 0)i +$$
$$+(0 + 3\sqrt{2} + 0 - 0) j + (-2\sqrt{2} + 0 + 0 - \sqrt{2})k =$$
$$= 6 + 3\sqrt{2} j - 3\sqrt{2}k.$$

Отже, $x_n = \frac{1}{12}\left(6 + 3\sqrt{2}\,j - 3\sqrt{2}k\right)$. ■

### 3.6. Завдання для самостійної роботи

**1.** Сформулювати закон множення уявних одиниць $i, j, k$ для кватерніонів.

**2.** Довести, що для множення кватерніонів виконується сполучний (асоціативний) закон.

**3.** Довести зауваження 3.1 пункту 3.2 про квадрат «суто уявного кватерніона».

**4.** Задано два кватерніона. Знайти суму $q_1 + q_2$, різницю $q_2 - q_1$ та добуток $q_1 \cdot q_2$, якщо:

1) $q_1 = 31 + 12i - 11j + 76k$; $q_2 = -15 - 43i - 70j - 27k$;

2) $q_1 = \frac{1}{3} + \frac{3}{7}i - \frac{7}{2}j + \frac{3}{4}k$; $q_2 = \frac{1}{5}i + \frac{3}{5}j - 2k$;

3) $q_1 = 1 + 1\frac{1}{2}i - 7j + \frac{3}{4}k$; $q_2 = -1 + 7i + 1\frac{1}{3}j - 1\frac{5}{6}k$.

**5.** З'ясувати, чи справедлива рівність:

$\left(q_1 + q_2\right)^3 - 3q_1q_2\left(q_1 + q_2\right) = q_1^3 + q_2^3$, якщо $q_1 = 2i - 3k$, $q_2 = 1 + j + k$. Чи буде вона справедлива для довільних $q_1, q_2$?

**6.** Знайти ліву і праву частки від ділення кватерніонів $q_1$ і $q_2$, де

$$q_1 = \sqrt{3} + 3\sqrt{5}i + 6j - \sqrt{2}k \text{ та } q_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{5}{\sqrt{5}}i + 3j + 4\sqrt{2}k.$$

**7.** Доведіть, що для того, щоб $yz = zy$, де $y = y_1 + y_2 i + y_3 j + y_4 k$, $z = z_1 + z_2 i + z_3 j + z_4 k$ – задані кватерніони, необхідно, щоб $z = z_1 + \frac{y_2}{y_4}z_2 i + \frac{y_3}{y_4}z_3 j + kz_4$.

## §4. Кватерніони і векторна алгебра

Відкриття кватерніонів у середині XIX століття дало поштовх різноманітним дослідженням в області математики і фізики. Зокрема, завдяки кватерніонам виникла надзвичайно плідна область математики – векторна алгебра. [25]

### 4.1. Числова і векторна частини кватерніона

Якщо ввести в звичайному просторі прямокутну систему координат і позначити через $i, j, k$ вектори довжини 1, які виходять із початку координат і напрямлені вздовж координатних осей (Рис. 1), то тоді будь-яка сума вигляду $bi + cj + dk,$ де $b, c, d$ – довільні дійсні числа, є деяким вектором цього простору.

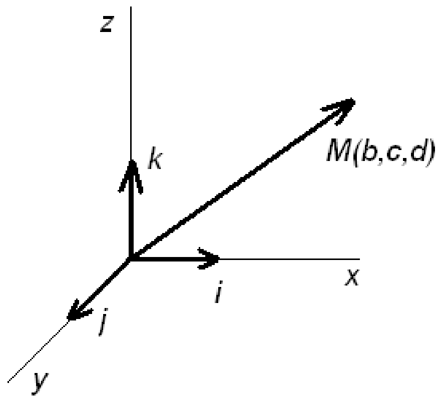



Рис. 1

Кожний кватерніон $q = a + bi + cj + dk$, є сумою дійсного числа $a$ та вектора $bi + cj + dk$. Число $a$ ми називаємо числовою (дійсною) частиною, а вираз $bi + cj + dk$ – векторною (уявною) частиною кватерніона $q$.

Розглянемо два векторних кватерніони

$$q_1 = b_1 i + c_1 j + d_1 k \text{ і } q_2 = b_2 i + c_2 j + d_2 k.$$

Перемножимо їх за правилом множення кватерніонів:

$$q_1 q_2 = -(b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + (c_1 d_2 - d_1 c_2)i +$$

$$+(d_1b_2 - b_1d_2)j + (b_1c_2 - c_1b_2)k \qquad (4.1)$$

і випишемо окремо дійсну і уявну частини кватерніонів $q_1q_2$.

Дійсна частина

$$q_1q_2 = -(b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2). \qquad (4.2)$$

Уявна частина

$$q_1q_2 = (c_1d_2 - d_1c_2)i + (d_1b_2 - b_1d_2)j + (b_1c_2 - c_1b_2)k. \qquad (4.3)$$

**4.2. Скалярний добуток**

Кожен з виразів (4.2), (4.3) має певний геометричний зміст. Сума $b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2$ дорівнює $|q_1||q_2|\cos\varphi$, тобто добутку довжин векторів $q_1$ і $q_2$ на косинус кута між ними. Такий добуток носить спеціальну назву «скалярний добуток векторів $q_1$ і $q_2$» (скалярний добуток є число, а не вектор) і позначається $(q_1, q_2)$. Таким чином, за означенням

$$(q_1, q_2) = |q_1||q_2|\cos\varphi.$$

Доведемо, що $(q_1, q_2) = b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2$.

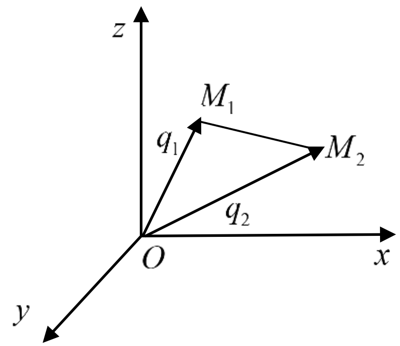



Рис. 2

На Рис. 2 зображений трикутник, побудований на векторах $q_1$ і $q_2$. Одна його вершина знаходиться в початку координат, дві інші вершини – точки $M_1$ і $M_2$ (кінці векторів $q_1$ і $q_2$), координати яких рівні відповідно $b_1, c_1, d_1$ і $b_2, c_2, d_2$. Маємо

$$OM_1^2 = b_1^2 + c_1^2 + d_1^2,\ OM_2^2 = b_2^2 + c_2^2 + d_2^2,$$

$$M_1M_2^2 = (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2 + (d_1 - d_2)^2,$$

звідки

$$M_1M_2^2 = OM_1^2 + OM_2^2 - 2(b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2). \qquad (4.4)$$

За теоремою косинусів

$$M_1M_2^2 = OM_1^2 + OM_2^2 - 2OM_1 \cdot OM_2 \cdot \cos\varphi, \qquad (4.5)$$

де $\varphi$ – кут при вершині $O$ (кут між векторами $q_1$ і $q_2$).

З рівностей (4.4) і (4.5) отримуємо:

$$OM_1 \cdot OM_2 \cdot \cos\varphi = b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2,$$

що і потрібно було довести.

Отже, дійсна частина добутку векторних кватерніонів $q_1$ і $q_2$ дорівнює скалярному добутку $q_1$ і $q_2$, взятому зі знаком мінус. Якщо вектори $q_1$ і $q_2$ перпендикулярні, тоді їх скалярний добуток дорівнює нулеві ($\varphi = \dfrac{\pi}{2},\ \cos\varphi = 0$), звідси, дорівнює нулеві і дійсна частина добутку $q_1\, q_2$. В цьому випадку $q_1\, q_2$ буде суто вектором. Навпаки: якщо $q_1\, q_2$ – вектор, то скалярний добуток $q_1$ на $q_2$ дорівнює нулеві, а отже, $\cos\varphi = 0$ і вектори $q_1$ і $q_2$ перпендикулярні. Слід відзначити, що у випадку, коли $q_1$ і $q_2$ перпендикулярні, $q_1\, q_2 = -\, q_2\, q_1$, це зразу видно із формули (4.1), якщо зауважити, що дійсна частина добутку $q_1\, q_2$ рівна нулеві.

**4.3. Векторний добуток**

Що ж стосується векторної частини добутку $q_1\, q_2$, тобто виразу, який записаний в правій частині рівності (4.3), то встановити його геометричний зміст дещо складніше. Цей вираз називають векторним добутком вектора $q_1$ на $q_2$ і позначають $[q_1, q_2]$:

$$[q_1, q_2] = (c_1 d_2 - d_1 c_2) i + (d_1 b_2 - b_1 d_2) j + (b_1 c_2 - c_1 b_2) k.$$

Виявляється, що вектор $[q_1, q_2]$ перпендикулярний до кожного з векторів $q_1$ і $q_2$, а довжина його дорівнює $|q_1||q_2|\sin\varphi$ (площі $S$ паралелограма, який побудований на векторах $q_1$ і $q_2$). Щоб довести перпендикулярність векторів $[q_1, q_2]$ і $q_1$, досить перевірити, що дійсна частина добутку цих кватерніонів дорівнює нулеві. З (4.1) маємо, $[q_1, q_2] = q_1 q_2 + (q_1, q_2)$, тому

$$q_1 [q_1, q_2] = q_1 (q_1 q_2 + (q_1, q_2)) = q_1^2 q_2 + (q_1, q_2) q_1 =$$
$$= -|q_1|^2 q_2 + (q_1, q_2) q_1.$$

Справа отримали суму двох векторів, тобто знову вектор.

Перпендикулярність векторів $[q_1, q_2]$ і $q_2$ доводиться аналогічно. Знайдемо тепер довжину вектора $[q_1, q_2]$. Квадрат її дорівнює

$$(c_1 d_2 - d_1 c_2)^2 + (d_1 b_2 - b_1 d_2)^2 + (b_1 c_2 - c_1 b_2)^2$$

або (після піднесення до степеня)

$$(b_1^2 + c_1^2 + d_1^2)(b_2^2 + c_2^2 + d_2^2) - (b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2)^2.$$

Останній вираз є $|q_1|^2 |q_2|^2 - (q_1, q_2)^2$ або, якщо згадати означення скалярного добутку, то $|q_1|^2 |q_2|^2 - |q_1|^2 |q_2|^2 \cos^2\varphi$, тобто $|q_1|^2 |q_2|^2 \sin^2\varphi$.

Отже, квадрат довжини вектора $[q_1, q_2]$ дорівнює $|q_1|^2 |q_2|^2 \sin^2\varphi$, тобто $S^2$, що й треба було довести.

Проте досліджені властивості ще не визначають вектор $[q_1, q_2]$: такими властивостями володіють рівно два взаємно-протилежні вектори.

Отже, остання властивість вектора $[q_1, q_2]$ полягає в наступному: треба, щоб вектори $q_1$, $q_2$, $[q_1, q_2]$ були орієнтовані в просторі так само, як і $i, j, k$, тобто якщо дивитися з кінця вектора $\left[q_1, q_2\right]$ на площину векторів $q_1$ і $q_2$, то поворот на найменший кут від $q_1$ до $q_2$ має відбуватися у тому ж напряму (проти чи за годинниковою стрілкою), в якому з кінця вектора $k$ видно поворот на найменший кут від $i$ до $j$.

**Висновок:** Отже, для множення суто векторних кватерніонів справедлива формула:

$$q_1 \cdot q_2 = -\left(q_1, q_2\right) + \left[q_1, q_2\right],$$

де $\left(q_1, q_2\right)$ – скалярний добуток, $\left[q_1, q_2\right]$ – векторний добуток $q_1$ і $q_2$.

Скалярне та векторне множення (разом з операціями додавання векторів і множенням вектора на число) є основою векторної алгебри, яка використовується як в математиці, так і в фізиці (наприклад, робота – це скалярний добуток вектора сили на вектор переміщення).

Зауважимо, що векторна алгебра з’явилася значно пізніше, ніж перші роботи з теорії кватерніонів (праці основоположника теорії кватерніонів англійського математика В.Гамільтона відносяться до 50-х років позаминулого століття, а основні положення векторної алгебри були сформовані в працях американського фізика Д.Гіббса тільки у 80-х роках позаминулого століття).

### 4.4. Геометричний зміст множення довільного кватерніона на векторний кватерніон

Завдяки тому, що множення кватерніонів об’єднує в собі два види множення векторів (скалярне та векторне), кватерніони є засобом для розв’язання багатьох задач геометрії та механіки.

В літературі [5] зустрічаємо доведення наступних цікавих тверджень.

**Твердження 4.1.** *Якщо* $p$ *– довільний кватерніон одиничної довжини,* $v$ *– довільний вектор, перпендикулярний до* $p$*, то множення* $v$ *зліва на кватерніон* $q = \cos\varphi + p\sin\varphi$ *здійснює поворот вектора* $v$ *навколо осі* $p$ *на кут* $\varphi$.

**Твердження 4.2.** *При повороті навколо осі* $p$ *на кут* $2\varphi$

*довільний вектор* $v$ *переходить в* $qvq^{-1}$*, де* $q = \cos\varphi + p\sin\varphi$*, тобто вказаний поворот відповідає кватерніону* $q$.

**Твердження 4.3.** *В результаті послідовного виконання двох поворотів, що відповідають кватерніонам* $q_1$ *та* $q_2$ *отримується третій поворот, що відповідає кватерніону* $q_2 q_1$.

### 4.5. Приклади розв'язування задач

**1.** Знайти числову і векторну частини кватерніона $q_1 \cdot q_2$, якщо: $q_1 = 2i - j + k$ і $q_2 = -i + 3j - k$.

□ Запишемо коефіцієнти при уявних одиницях:

| | |
|---|---|
| 2 | –1 |
| –1 | 3 |
| 1 | –1 |

Числова частина добутку $q_1 \cdot q_2$:

$$-\left(2\cdot(-1)+(-1)\cdot 3+1\cdot(-1)\right) = -(-2-3-1) = 6;$$

Векторна частина $q_1 \cdot q_2$:

$$\left(-1\cdot(-1)-1\cdot 3\right)i+\left(1\cdot(-1)-2\cdot(-1)\right)j+\left(2\cdot 3-(-1)\cdot(-1)\right)k =$$
$$= -2i + j + 5k\ .\blacksquare$$

**2.** Знайти скалярний і векторний добутки чисто векторних кватерніонів $q_1$ і $q_2$, якщо $q_1 = \dfrac{i}{2} - 2j + 6k$ та $q_2 = -4i + \dfrac{j}{2} + 2k$.

□ Коефіцієнти кватерніонів $q_1$ і $q_2$.

| | |
|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | $-4$ |
| $-2$ | $\frac{1}{2}$ |
| 6 | 2 |

Скалярний добуток векторів $q_1$ і $q_2$:

$$\left(q_1, q_2\right) = \frac{1}{2}\cdot(-4) + (-2)\cdot\frac{1}{2} + 6\cdot 2 = -2 - 1 + 12 = 9.$$

Векторний добуток векторів $q_1$ і $q_2$:

$$\left[q_1, q_2\right] = \left(-2\cdot 2 - 6\cdot\frac{1}{2}\right)i + \left(6\cdot(-4) - \frac{1}{2}\cdot 2\right)j +$$

$$+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - (-2)\cdot(-4)\right)k = -7i - 25j - 7\frac{3}{4}k. \blacksquare$$

3. Знайти кут між суто векторними кватерніонами $q_1$ і $q_2$, якщо: $q_1 = 2i - 3j + 6k$, $q_2 = -6i + 2j - 3k$. Обчислити площу паралелограма, побудованого на цих векторах.

□ Як відомо, $\left(q_1, q_2\right) = b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2$, а з іншого боку $\left(q_1, q_2\right) = \left|q_1\right|\cdot\left|q_2\right|\cdot\cos\varphi$, звідки $\cos\varphi = \dfrac{\left(q_1, q_2\right)}{\left|q_1\right|\cdot\left|q_2\right|}$.

Коефіцієнти $q_1$ і $q_2$:

| | |
|---|---|
| 2 | – 6 |
| –3 | 2 |
| 6 | –3 |

Обчислимо скалярний добуток $q_1 \cdot q_2$:

$$\left(q_1, q_2\right) = 2\cdot(-6) + (-3)\cdot 2 + 6\cdot(-3) = -12 - 6 - 18 = -36;$$

$$\left|q_1\right| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = 7; \ \left|q_2\right| = \sqrt{(-6)^2 + 2^2 + (-3)^2} = 7;$$

$$\cos\varphi = -\frac{36}{7\cdot 7} = -\frac{36}{49};$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{36}{49}\right); \varphi = 180° - \arccos\frac{36}{49} \approx 133°.$$

Обчислимо площу паралелограма, побудованого на цих векторах.

I спосіб:

Обчислимо $\sin\varphi$, знаючи $\cos\varphi$:

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\left(\frac{36}{49}\right)^2} = \sqrt{\frac{49^2-36^2}{49^2}} = \sqrt{\frac{13\cdot 85}{49^2}} = \frac{\sqrt{1105}}{49}.$$

$$\left\|[q_1, q_2]\right\| = 7\cdot 7\cdot\frac{\sqrt{1105}}{49} = \sqrt{1105}.$$

II спосіб:

Маємо:

$$[q_1, q_2] = \left(-3\cdot(-3) - 6\cdot 2\right)i + \left(6\cdot(-6) - 2\cdot(-3)\right)j +$$
$$+\left(2\cdot 2 - (-3)\cdot(-6)\right)k = -3i - 30j - 14k.$$

$$\left\|[q_1, q_2]\right\| = \sqrt{(-3)^3 + (-30)^2 + (-14)^2} = \sqrt{1105}. \blacksquare$$

**8.** При яких значеннях $x$ кут $\varphi$ між векторами $q_1 = 2i + xj - 3k$ і $q_2 = xi + 4j + 6k$:

1) гострий; 2) прямий; 3) тупий.

□ Використаємо скалярний добуток векторів. Обчислимо $(q_1, q_2)$:

$$(q_1, q_2) = 2x + 4x - 18 = 6x - 18.$$

1) Якщо $6x - 18 > 0$, тобто $(q_1, q_2) > 0$ при $x > 3 \Rightarrow \varphi$ – гострий;

2) Якщо $x = 3$, то $(q_1, q_2) = 0 \Rightarrow \varphi$ – прямий;

3) Якщо $x < 3$, то $(q_1, q_2) < 0 \Rightarrow \varphi$ – тупий. ■

**8.** Перший поворот відбувається навколо осі $x$ на кут $\frac{\pi}{2}$, другий

– навколо осі $y$ теж на кут $\frac{\pi}{2}$. Знайти вісь та кут результуючого повороту.

□ Першому повороту відповідає кватерніон $q_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, а другому – кватерніон $q_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)$. Добуток цих кватерніонів:

$$q_2q_1 = \frac{1}{2}(1+j)(1+i) = \frac{1}{2}(1+i+j-k).$$

Запишемо цей кватерніон у вигляді $\cos\psi + p\sin\psi$. Для цього запишемо його дійсну частину $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$. Тоді

$$q_2q_1 = \cos\frac{\pi}{3} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(i+j-k)\right)\sin\frac{\pi}{3}.$$

Отже, згідно з твердженням 4.3, результуючий поворот відбувається навколо вектора $p = \frac{1}{\sqrt{3}}(i+j-k)$ на кут $\frac{2\pi}{3}$.■

### 4.6. Завдання для самостійної роботи

**1.** Знайти числову і векторну частини $q_1 \cdot q_2$, якщо:

1) $q_1 = -i - 2j + k$, $q_2 = i + 2j + 3k$;

2) $q_1 = -3j + 4k$, $q_2 = -6i - 5k$;

3) $q_1 = \frac{2}{3}i - 3j + \frac{1}{2}k$, $q_2 = -i + \frac{1}{6}j - 3k$;

4) $q_1 = \sqrt{2}i + k$, $q_2 = i - 2j$.

**2.** Знайти скалярний і векторний добутки суто векторних кватерніонів $q_1$ і $q_2$, якщо:

1) $q_1 = -2i + 3j + k$, $q_2 = -4i - 5j + 2k$;

2) $q_1 = 4j - 7k$, $q_2 = -3i + 2k$;

3) $q_1 = 2i - j + 4k$, $q_2 = 3i + 2j - k$.

**3.** Знайти кут між суто векторними кватерніонами $q_1$ і $q_2$ та обчислити площу паралелограма, побудованого на цих векторах, якщо:

1) $q_1 = 2i - j + 2k$, $\qquad q_2 = -4i + j + 3k$;

2) $q_1 = 5i - j - 2k$, $\qquad q_2 = 2i + 6j - 3k$;

3) $q_1 = -4i + j + 2k$, $\qquad q_2 = -6i + 8j - 10k$.

**4.** Дано два суто векторних кватерніони $q_1 = i - 2j + 8k$ і $q_2 = 3i + j - 4k$. Знайти значення $n$, при якому вектори $nq_1 + q_2$ і $q_1$ – перпендикулярні.

**5.** Довести твердження 4.1 та 4.2.

# §5. Гіперкомплексні числа

## 5.1. Означення гіперкомплексної системи чисел

Розглянуті комплексні числа і кватерніони охоплюються більш загальним поняттям гіперкомплексної системи чисел. Тепер, коли ми знаємо найпростіші приклади таких систем, наведемо загальне означення гіперкомплексної системи чисел.[5]

Зафіксуємо натуральне число $n$ і розглянемо вираз вигляду

$$a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + ... + a_n i_n, \tag{5.1}$$

де $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ – довільні дійсні числа, а $i_1, i_2, ..., i_n$ – деякі символи (які ми будемо іноді називати «уявними одиницями»).

Рівність двох таких виразів

$$a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + ... + a_n i_n = b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + ... + b_n i_n$$

означає, за означенням, що

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, ..., a_n = b_n.$$

Додавання і віднімання виразів вигляду (5.1) визначаються такою формулою:

$$(a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + ... + a_n i_n) \pm (b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + ... + b_n i_n) =$$
$$= (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1) i_1 + (a_2 \pm b_2) i_2 + ... + (a_n \pm b_n) i_n.$$

Множення вводиться наступним чином: задається «таблиця множення», тобто вказується, чому дорівнюють добутки $i_\alpha i_\beta$, де $\alpha, \beta$ – будь-які номери $1, 2, ..., n$ (всього таких добутків є $n \cdot n = n^2$). Кожен добуток $i_\alpha i_\beta$ повинен бути знову виразом вигляду (5.1), тобто

$$i_\alpha i_\beta = p_0 + p_1 i_1 + p_2 i_2 + ... + p_n i_n, \tag{5.2}$$

де $p_0, p_1, ..., p_n$ – деякі дійсні числа.

Будь-якій комбінації номерів $\alpha, \beta$ відповідає свій набір коефіцієнтів $p_0, p_1, ..., p_n$. Щоб підкреслити залежність цих коефіцієнтів від $\alpha, \beta$ перепишемо рівність (5.2) наступним чином:

$$i_\alpha i_\beta = p_{\alpha\beta,0} + p_{\alpha\beta,1} i_1 + p_{\alpha\beta,2} i_2 + ... + p_{\alpha\beta,n} i_n. \tag{5.3}$$

Набір чисел $p_{\alpha\beta,\gamma}$ задає таблицю множення (всього цих чисел повинно бути $n^2(n+1)$ по $(n+1)$ числу для кожної комбінації $\alpha, \beta$).

Наприклад, у випадку комплексних чисел таблиця множення складається з єдиної рівності

$$i \cdot i = -1 + 0i.$$

У випадку кватерніонів таблиця містить дев'ять рівностей і може бути записана так:

| | $i$ | $j$ | $k$ |
|---|---|---|---|
| $i$ | $-1$ | $k$ | $-j$ |
| $j$ | $-k$ | $-1$ | $i$ |
| $k$ | $j$ | $-i$ | $-1$ |

Після того, як задана таблиця множення, можна обчислити добуток

$$(a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots + a_n i_n)(b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + \ldots + b_n i_n)$$

за звичайним правилом множення суми на суму, причому добуток вигляду $(a_\alpha i_\alpha)(b_\beta i_\beta)$ переписуємо як $a_\alpha b_\beta (i_\alpha i_\beta)$ і замінюємо $i_\alpha i_\beta$ за формулою (5.3), далі зводимо подібні члени. В результаті отримуємо деякий вираз вигляду (5.1).

Множина всіх виразів вигляду (5.1), у якій операції додавання і множення введені як зазначено вище, називається гіперкомплексною системою розмірності $n+1$, а самі вирази (5.1) називаються гіперкомплексними числами. Гіперкомплексна система даної розмірності цілком визначається своєю таблицею множення [5].

Зазначимо деякі властивості операції множення, справедливі в будь-якій гіперкомплексній системі.

**1.** Множення дійсного числа $a$, яке розглядається як гіперкомплексне число

$$a + 0i_1 + 0i_2 + \ldots + 0i_n$$

на довільне число $b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + \ldots + b_n i_n$ зводиться до множення всіх коефіцієнтів $b_0, b_1, \ldots, b_n$, на $a$:

$$(a + 0i_1 + 0i_2 + \ldots + 0i_n)(b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + \ldots + b_n i_n) =$$

$$ab_0 + ab_1 i_1 + \ldots + ab_n i_n$$

і

$$(b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + \ldots + b_n i_n)(a + 0i_1 + 0i_2 + \ldots + 0i_n) =$$
$$= ab_0 + ab_1 i_1 + \ldots + ab_n i_n.$$

Зокрема,

$$1 \cdot v = v \quad \text{і} \quad v \cdot 1 = v,$$

де $v$ — будь-яке гіперкомплексне число.

**2.** Якщо $u$ і $v$ — гіперкомплексні числа, то

$$(au)(bv) = (ab)(uv),$$

де $a$ і $b$ – довільні дійсні числа.

**3.** Справедливі обидва варіанти (лівий і правий) розподільного закону:

$$u(v + w) = uv + uw,$$
$$(v + w)u = vu + wu.$$

Зазначимо, що нулем у гіперкомплексній системі є гіперкомплексне число такого вигляду:

$$0 + 0i_1 + 0i_2 + \ldots + 0i_n.$$

## 5.2 Комутативні, асоціативні системи, системи з діленням

На противагу зазначеним вище властивостям, інші властивості операції множення такі, як переставний і сполучний закони

$$uv = vu,$$
$$(uv)w = u(vw)$$

виконуються далеко не в кожній гіперкомплексній системі. Якщо для будь-яких двох чисел $u, v,$ які належать даній гіперкомплексній системі, справедлива рівність

$$uv = vu,$$

то тоді така система називається комутативною.

У випадку, якщо для будь-яких трьох чисел $u, v, w$ з даної гіперкомплексної системи виконується рівність

$$(uv)w = u(vw),$$

то така система називається асоціативною.

Відповідно до означення гіперкомплексних чисел, над ними можна виконувати дії додавання, віднімання і множення.

Кажуть, що дана гіперкомплексна система є системою з діленням (або що в ній можливе ділення), якщо кожне з рівнянь

$$vx = u,$$

$$xv = u$$

має розв’язок, і при цьому єдиний, при будь-яких $u$, $v$ де $v \neq 0$. Розв’язок першого рівняння називається лівою часткою від ділення $u$ на $v$, розв’язок другого – правою часткою.

Ліва і права частки не збігаються. Прикладами систем з діленням є комплексні числа і кватерніони. Слід зауважити, що гіперкомплексні системи, в яких можливе ділення, зустрічаються дуже рідко. Це системи з розмінностями 2, 4, 8. Гіперкомплексна система, складена із чисел вигляду $a + bi + cj$ з довільною таблицею множення (розмірність таблиці 3) є системою без ділення.

## §6. Октави

Октави (вісімкові числа) – це вираз, який складається з восьми членів – доданків

$$a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7,$$

де $a_0, a_1, a_2, ..., a_7$ – довільні дійсні числа, а $i_1, i_2, ..., i_7$ – уявні одиниці. [3, 5]

### 6.1. Подвоєння гіперкомплексних систем. Означення октав

Нехай задана гіперкомплексна система $U,$ яка складається з чисел вигляду

$$u = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + ... + a_n i_n$$

з деяким законом множення.

Елемент $\bar{u} = a_0 - a_1 i_1 - a_2 i_2 - ... - a_n i_n$ називається спряженим до $u.$

Подвоєнням системи $U$ називається нова гіперкомплексна система $U^{(2)}$ розмірності вдвічі більшої, ніж $U,$ яка записується наступним чином:

$$u_1 + u_2 e, \tag{6.1}$$

де $u_1, u_2$ – довільні елементи з $U,$ а $e$ – деякий символ.

Додавання елементів із $U^{(2)}$ визначається за формулою

$$(u_1 + u_2 e) + (v_1 + v_2 e) = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)e, \tag{6.2}$$

а множення – за формулою

$$(u_1 + u_2 e)(v_1 + v_2 e) = (u_1 v_1 - \bar{v}_2 u_2) + (v_2 u_1 + u_2 \bar{v}_1)e. \tag{6.3}$$

Може видатись дивним, що визначаючи систему $U^{(2)}$, було відступлено, по-перше, від звичайного способу запису гіперкомплексного числа, по-друге, від задання дії множення за допомогою таблиці. Числа з $U^{(2)}$ повинні були б мати наступний вигляд:

$$a_0 + a_1 i_1 + ... + a_n i_n + a_{n+1} i_{n+1} + ... + a_{2n+1} i_{2n+1}. \tag{6.4}$$

Однак, досить зручно використовувати більш короткий запис (6.1). Річ у тому, що кожному виразу (6.4) можна поставити у відповідність два елементи початкової гіперкомплексної системи:

$$u_1 = a_0 + a_1 i_1 + ... + a_n i_n,$$

$$u_2 = a_{n+1} + a_{n+2} i_1 + ... + a_{2n+1} i_n.$$

Отже, вираз (6.1) є «кодом» гіперкомплексного числа (6.4) і навпаки, якщо заданий вираз вигляду (6.4), то по ньому можна записати (6.1).

Короткий запис (6.1) в порівнянні з (6.4) має перевагу, адже замість того, щоб задавати множення в $U^{(2)}$ за допомогою таблиці, можна записати його у формі вигляду (6.3).

Таким чином, процедура подвоєння визначена. Прикладом може бути перехід від комплексних чисел до кватерніонів, тобто довільний кватерніон $q = a + bi + cj + dk$ можна записати, користуючись тим, що $ij = k$, у вигляді

$$q = (a + bi) + (c + di)j$$

або

$$q = z_1 + z_2 j,$$

де $z_1 = a + bi, z_2 = c + di.$

В свою чергу, комплексні числа отримуються подвоєнням дійсних чисел.

Означення октав тепер можна сформулювати в декількох словах: система октав – це подвоєння системи кватерніонів.

## 6.2. Таблиця множення в системі октав

Згідно з означенням, октави – це вирази вигляду

$$q_1 + q_2 e,$$

де $q_1, q_2$ – довільні кватерніони, при цьому закон множення має вигляд

$$(q_1 + q_2 e)(r_1 + r_2 e) = (q_1 r_1 - \overline{r}_2 q_2) + (r_2 q_1 + q_2 \overline{r}_1)e. \quad (6.5)$$

Встановимо, який зв'язок це означеня має з представленням октав у вигляді

$$a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7. \quad (6.6)$$

Точніше, складемо таблицю множення для уявних одиниць $i_1, i_2, ..., i_7$. Кватерніони $q_1, q_2$, що відповідають запису (6.6), записуються у вигляді

$$q_1 = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k, \;\; q_2 = a_4 + a_5 i + a_6 j + a_7 k.$$

Вираз (6.6) можна записати наступним чином:

$$a + bi + cj + dk + AE + BI + CJ + DK,$$

де $a, b, c, d, A, B, C, D$ – це попередні символи $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7,$ а $i, j, k, E, I, J, K$ – нові позначення для уявних одиниць $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7.$

При таких позначеннях кватерніони $q_1, q_2$ матимуть вигляд

$$q_1 = a + bi + cj + dk, \quad q_2 = A + BI + CJ + DK.$$

Виходячи з (6.5), можна скласти таблицю множення для одиниць $i, j, k, E, I, J, K.$ Для кращого запам'ятовування таблиці множення використовують рисунок 1. На ньому зображений трикутник з вершинами $I, J, K$ і серединами сторін $i, j, k,$ точка $E$ є точкою перетину медіан. На кожній прямій лежать три «уявні» одиниці. Крім того, вважається, що три одиниці $i, j, k$ також належать одній «прямій» (на рисунку позначеній колом). Отже, на рисунку є 7 «прямих» і на кожній з них розміщені три одиниці. Для того, щоб знайти добуток довільних двох одиниць, потрібно розглянути «пряму», визначену цими одиницями і взяти третю одиницю цієї «прямої» зі знаком «плюс» або «мінус».

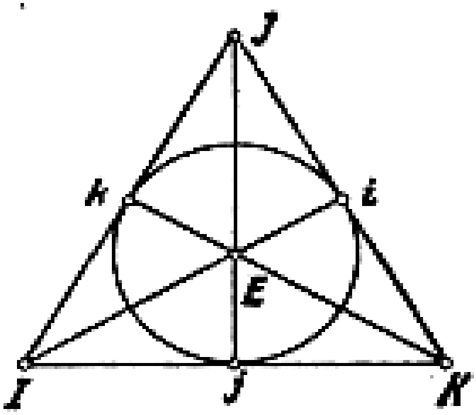



Рис. 1

## 6.3. Спряження в системі октав. Модуль октави

Нехай

$$u = a + bi + cj + dk + AE + BI + CJ + DK \qquad (6.7)$$

довільна октава. Октаву

$$\bar{u} = a - bi - cj - dk - AE - BI - CJ - DK$$

називають спряженою до $u$.

Якщо замість (6.7) використати більш короткий запис

$$u = q_1 + q_2 e,$$

де $q_1 = a + bi + cj + dk, \quad q_2 = A + Bi + Cj + Dk,$ то для спряженої октави отримаємо вираз $\bar{u} = \bar{q}_1 - q_2 e.$

З'ясуємо тепер чому дорівнює добуток $u\bar{u}$:

$$u\bar{u} = (q_1 + q_2 e)(\bar{q}_1 - q_2 e) = (q_1\bar{q}_1 + \bar{q}_2 q_2) + (-q_2 q_1 + q_2 q_1)e.$$

Враховуючи, що для кватерніонів $q\bar{q} = \bar{q}q = |q|^2$, знаходимо

$$u\bar{u} = q_1\bar{q}_1 + q_2\bar{q}_2 = |q_1|^2 + |q_2|^2. \qquad (6.8)$$

Квадратний корінь з виразу $|q_1|^2 + |q_2|^2$ називається *модулем* або *нормою* октави $u$ і позначається $|u|$. Відмітимо, що для октави $u$, заданої у вигляді (6.7) квадрат її модуля рівний

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + A^2 + B^2 + C^2 + D^2. \qquad (6.9)$$

Таким чином, за означенням модуля $u\bar{u} = |u|^2$. [7]

## 6.4. Модуль добутку октав

Система октав має багато спільного з системами комплексних чисел і кватерніонів. Одним із прикладів є та важлива властивість, що модуль добутку довільних двох октав рівний добутку модулів цих октав:

$$|uv| = |u||v| \qquad (6.10)$$

або

$$|uv|^2 = |u|^2|v|^2. \qquad (6.11)$$

Доведення рівності (6.11) можна провести безпосереднім обчисленням. Обчислимо окремо $|uv|^2$ і $|u|^2|v|^2$. Оскільки

$$uv=(q_1+q_2e)(r_1+r_2e)=(q_1r_1-\overline{r}_2q_2)+(r_2q_1+q_2\overline{r}_1)e,$$

то, застосовуючи формулу (6.8), отримаємо

$$|uv|^2=(q_1r_1-\overline{r}_2q_2)\overline{(q_1r_1-\overline{r}_2q_2)}+(r_2q_1+q_2\overline{r}_1)\overline{(r_2q_1+q_2\overline{r}_1)}$$

або, враховуючи властивість спряження для кватерніонів,

$$|uv|^2=(q_1r_1-\overline{r}_2q_2)(\overline{r}_1\overline{q}_1-\overline{q}_2r_2)+(r_2q_1+q_2\overline{r}_1)(\overline{q}_1\overline{r}_2+r_1\overline{q}_2).$$

З іншого боку,

$$|u|^2|v|^2=(q_1\overline{q}_1+q_2\overline{q}_2)(r_1\overline{r}_1+r_2\overline{r}_2).$$

Порівнюючи два вирази, бачимо, що вони відрізняються на суму чотирьох доданків

$$S=r_2q_1r_1\overline{q}_2+q_2\overline{r}_1\overline{q}_1\overline{r}_2-q_1r_1\overline{q}_2r_2-\overline{r}_2q_2\overline{r}_1\overline{q}_1.$$

Тому залишається показати, що $S=0$ для довільних чотирьох кватерніонів $q_1,q_2,r_1,r_2.$

Зауважимо, що $S=0,$ якщо $r_2$ – дійсне число. З іншого боку, якщо $r_2$ є суто уявним кватерніоном (звідси $\overline{r}_2=-r_2$), то

$$S=r_2(q_1r_1\overline{q}_2+q_2\overline{r}_1\overline{q}_1)-(q_1r_1\overline{q}_2+q_2\overline{r}_1\overline{q}_1)r_2.$$

Вираз в дужках є сумою двох спряжених кватерніонів і тому дорівнює дійсному числу; позначимо його буквою $c.$ Тоді

$$S=r_2c-cr_2=0.$$

Тепер слід врахувати очевидну властивість для виразу $S$: якщо $S=0$ при $r_2=a$ і $r_2=b,$ то $S=0$ при $r_2=a+b.$ Оскільки довільний кватерніон $r_2$ подається у вигляді суми дійсного числа і суто уявного кватерніона, причому в обох випадках $S=0$, то звідси $S=0$ тотожно.

### 6.5. Тотожність для восьми квадратів

Встановлена в попередньому пункті рівність

$$|uv|^2=|u|^2|v|^2 \tag{6.12}$$

вносить новий вклад у розв’язуванні «задачі про суму квадратів», оскільки в детальному записі вона є (якщо читати її справа на ліво) тотожністю: «добуток суми восьми квадратів на суму восьми квадратів є знову сумою восьми квадратів».

Дійсно, нехай

$$u = a + bi + cj + dk + AE + BI + CJ + DK\,,$$

$$v = a' + b'i + c'j + d'k + A'E + B'I + C'J + D'K,$$

а

$$uv = \Phi_0 + \Phi_1 i + \Phi_2 j + \Phi_3 k + \Phi_4 E + \Phi_5 I + \Phi_6 J + \Phi_7 K,$$

тоді рівність (6.12) набуває вигляду

$$(a^2 + ... + D^2)(a'^2 + ... + D'^2) = \Phi_0{}^2 + \Phi_1{}^2 + ... + \Phi_7{}^2.$$

Зрозуміло, що замість $\Phi_0, \Phi_1, ..., \Phi_7$ сюди потрібно підставити їх вирази через $a, ..., D, a', ..., D',$ виходячи із закону множення октав. Виконавши цю громіздку роботу, приходимо до такої тотожноті:

$$\begin{aligned}
&(a^2 + ... + D^2)(a'^2 + ... + D'^2) = (aa' - bb' - ... - DD')^2 + \\
&+(ab' + ba' + cd' - dc' - A'B + B'A + C'D - D'C)^2 + \\
&+(ac' + ca' - bd' + db' - A'C + C'A - B'D + D'B)^2 + \\
&+(ad' + da' + bc' - cb' - A'D + D'A + B'C - C'B)^2 + \\
&+(A'a - B'b - C'c - D'd + Aa' + Bb' + Cc' + Dd')^2 + \\
&+(A'b + B'a + C'd - D'c - Ab' + Ba' - Cd' + Dc')^2 + \\
&+(A'c + C'a - B'd + D'b - Ac' + Ca' + Bd' - Db')^2 + \\
&+(A'd + D'a + B'c - C'b - Ad' + Da' - Bc' + Cb')^2.
\end{aligned}$$

Відмітимо, що саме пошуки тотожності для восьми квадратів привели автора системи октав англійського математика А. Келі до їх відкриття.

## 6.6. Неасоціативність множення в системі октав. Властивість альтернативності

Як зазначалося вище, багато властивостей октав співпадають з властивостями комплексних чисел і кватерніонів, проте є важлива відмінність між цими системами, а саме: множення комплексних чисел і кватерніонів володіє асоціативним законом, а для множення октав асоціативний закон не виконується. Наприклад,

$$(ij)E \neq i(jE),$$

оскільки $(ij)E = kE = K,$ а $i(jE) = iJ = -K.$

Відсутність асоціативного закону для октав ще не означає, що для довільних трьох октав $u, v\, w$

$$(uv)w \neq u(vw).$$

Більше того, можна довести, що справедливими є дві наступні формули:

$$(uv)v = u(vv), \tag{6.13}$$

$$v(vu) = (vv)u, \tag{6.14}$$

в яких $u, v$ – довільні дві октави.

Формули (6.13) і (6.14) можна розглядати як деякий послаблений варіант асоціативності. Існує спеціальна назва для систем, в яких справедливими є ці формули; такі системи називаються *альтернативними*.

Повертаючись до доведення формул (6.13) і (6.14), відмітимо, що замість них можна довести такі:

$$(uv)\overline{v} = u(v\overline{v}), \tag{6.15}$$

$$\overline{v}(vu) = (\overline{v}v)u, \tag{6.16}$$

оскільки, замінюючи в цих рівностях $\overline{v}$ на $-v + 2a$ (де $a$ – дійсна частина октави $v$), легко отримати (6.13) і (6.14).

Доведемо формулу (6.15), формула (6.16) доводиться аналогічно.

Нехай $u = q_1 + q_2 e, v = r_1 + r_2 e.$ Тоді

$$(uv)\overline{v} = ((q_1 + q_2 e)(r_1 + r_2 e))(\overline{r_1} - r_2 e) = ((q_1 r_1 - \overline{r_2} q_2) +$$

$$+ (r_2 q_1 + q_2 \overline{r_1})e)(\overline{r_1} - r_2 e) = ((q_1 r_1 - \overline{r_2} q_2)\overline{r_1} + \overline{r_2}(r_2 q_1 + q_2 \overline{r_1})) +$$

$$+((-r_2)(q_1 r_1 - \overline{r_2} q_2) + (r_2 q_1 + q_2 \overline{r_1})r_1)e = (|r_1|^2 +$$

$$+|r_2|^2)q_1 + (|r_1|^2 + |r_2|^2)q_2 e = (|r_1|^2 + |r_2|^2)(q_1 + q_2 e) = |v|^2 u.$$

З іншого боку, $|u\overline{v}| = |v|^2$, тому $u(v\overline{v}) = |v|^2 u.$ Звідси випливає (6.15).

## 6.7. Октави – система з діленням

Ще однією важливою властивістю системи октав, яка зближує їх з комплексними числами та кватерніонами, є дія ділення. Нехай $u, v$ – довільні октави, причому $v \neq 0.$ Нагадаємо, що *ліва частка* від ділення $u$ на $v$ є розв'язком рівняння

$$vx = u, \tag{6.17}$$

а *права частка* – розв'язок рівняння

$$xv = u. \tag{6.18}$$

Розв'яжемо спочатку (6.17). Домножимо обидві частини (6.17) зліва на $\overline{v}$:

$$\overline{v}(vx) = \overline{v}u$$

або, враховуючи (6.16)

$$|v|^2 x = \overline{v}u.$$

Звідси

$$x = \frac{1}{|v|^2}\overline{v}u.$$

Безпосередня перевірка (з використанням знову формули (6.16)) показує, що знайдене значення $x$ задовольняє рівняння (6.17). Отже, ліва частка від ділення $u$ на $v$ рівна

$$x_л = \frac{1}{|v|^2}\overline{v}u.$$

Аналогічно доводиться, що права частка від ділення $u$ на $v$ рівна

$$x_п = \frac{1}{|v|^2}u\overline{v},$$

При цьому необхідно скористатися формулою (6.15).

Отже, октави утворюють систему з діленням.

## §7. Алгебри

### 7.1. Означення алгебри

**Означення 7.1.** *Алгеброю розмірності* $n$ *називається множина виразів вигляду*

$$a_1 i_1 + a_2 i_2 + ... + a_n i_n,$$

*(де* $a_1, a_2, ..., a_n$ *– довільні дійсні числа,* $i_1, i_2, ..., i_n$ *– деякі символи), в якій визначені наступні операції:*

**1)** *множення на дійсне число* $k$*, що виконується за формулою*

$$k(a_1 i_1 + a_2 i_2 + ... + a_n i_n) = k a_1 i_1 + k a_2 i_2 + ... + k a_n i_n;$$

**2)** *додавання (віднімання)*

$$(a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + ... + a_n i_n) \pm (b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + ... + b_n i_n) =$$
$$= (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1) i_1 + (a_2 \pm b_2) i_2 + ... + (a_n \pm b_n) i_n.$$

**3)** *множення, що задається таблицею вигляду*

$$i_\alpha i_\beta = p_{\alpha\beta,1} i_1 + p_{\alpha\beta,2} i_2 + ... + p_{\alpha\beta,n} i_n,$$

*де* $\alpha$, $\beta$ *– будь-які номери від* $1$ *до* $n$.

Якщо $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0,$ то алгебра називається *нульовою*. [9,10]

### 7.2. Гіперкомплексна система — окремий випадок алгебри

Для кращого розуміння поняття алгебри, введене вище, давалось аналогічно до поняття гіперкомплексної системи. Але варто чітко усвідомити, що поняття алгебри – більш широке. Будь-яка гіперкомплексна система може розглядатися як алгебра тієї ж розмірності.

Головна особливість довільної гіперкомплексної системи полягає в тому, що гіперкомплексна система – це *алгебра з одиницею*, тобто містить елемент $e$ такий, що $ae = ea = a$ для довільного елемента $a$ з цієї системи. [10, 11]

### 7.3. Комутативна, асоціативна алгебра, алгебра з діленням

Вище розглядалося ряд термінів для позначення деяких властивостей гіперкомплексних систем. Ця термінологія без змін переноситься на алгебру. А саме, якщо для будь-яких двох елементів $a$ і $b$ алгебри $A$ виконується рівність

$$ab = ba,$$

тоді алгебра називається *комутативною*; якщо для будь-яких трьох елементів $a, b, c$ справедлива рівність

$$(ab)c = a(bc),$$

тоді алгебра називається *асоціативною*. Далі, якщо кожне з рівнянь

$$ax = b, \qquad (7.1)$$

$$ya = b, \qquad (7.2)$$

де $a$ і $b$ – довільні елементи алгебри $A$, причому $a \neq 0,$ має єдиний розв’язок, то кажуть, що *алгебра $A$ з діленням;* елемент $x,$ знайдений з допомогою рівності рівняння (7.1), називається в цьому випадку *лівою часткою,* а елемент $y$, знайдений з допомогою (7.2) – *правою часткою* при діленні $b$ на $a$. Неважко бачити, що в алгебрах з діленням справедлива така властивість: якщо добуток $ab$ дорівнює нулеві, то хоча б один із співмножників $a$ або $b$ дорівнює нулеві.

Якщо в алгебрі $A$ існує такий елемент $e$, що $ae = a$ і $ea = a$ для довільного $a \in A$, то цей елемент називають *одиницею алгебри $A$* і алгебра $A$ є *алгеброю з одиницею*. Будь – яка гіперкомплексна ситсема є алгеброю з одиницею. [10, 11]

Найпростішим прикладом алгебри з одиницею є одновимірна алгебра з таблицею множення $i_1 i_1 = i_1$. Закон множення $(ai_1)(bi_1) = abi_1$ в цій алгебрі зводиться до множення дійсних чисел. Цю алгебру називають *алгеброю дійсних чисел.*

### 7.4. Ізоморфні алгебри. Підалгебри. Нормовані алгебри

Довільну алгебру розмірності $n$ можна трактувати як $n$ – вимірний векторний простір $A_n$, в якому задано таблицю множення базисних елементів $i_1, i_2, ..., i_n$. Така точка зору дозволяє легко ввести поняття ізоморфізму алгебр.

**Означення 7.2.** *Дві алгебри однієї розмірності $n$ називаються подібними (ізоморфними), якщо в них можна* *вибрати базиси з однаковими таблицями множення.*

Відомо, що будь – яку гіперкомплексну систему можна розглядати як алгебру, в якій за перший базисний елемент взято одиницю алгебри. Навпаки: довільна алгебра з одиницею ізоморфна деякій гіперкомплексній системі. Наприклад, довільна алгебра розмірності 2, що має одиницю, ізоморфна одній з трьох гіперкомплексних систем: комплексних, подвійних або дуальних чисел.

При вивченні різних систем чисел часто стикаємося з ситуацією, коли одна алгебра є частиною іншої. Наприклад: алгебра дійсних чисел є частиною алгебри комплексних чисел, яка є частиною алгебри кватерніонів; алгебра кватерніонів входить в алгебру октав.

Множина $P$ елементів алгебри $A$ назиається *підалгеброю* алгебри $A$, якщо:

1) $P$ є підпростором векторного простору $A$;

2) $P$ замкнена відносно множення в алгебрі $A$, тобто якщо $a \in P$ та $b \in P$, то $ab \in P$.

Наприклад, в алгебрі кватерніонів підалгеброю є підпростір з базисом $1, j$. В більш загальному випадку: підпростір з базисом $1, q$, де $q$ — довільний кватерніон. Що не пропорційний $1$. Кожна з таких підалгебр ізоморфна алгебрі комплексних чисел.

В алгебрі $A$ розмірності $n$ задамо *скалярний добуток* $(x, y)$ її елементів $x = \sum_{k=1}^{n} x_k i_k$ та $y = \sum_{k=1}^{n} y_k i_k$, визначивши його за допомогою координат векторів $x$ та $y$ в базі $i_1, i_2, \ldots, i_n$ так: $(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

*Довжину (норму)* елемента $x \in A$ визначають за формулою $|x| = \sqrt{(x, x)}$. *Перпендикулярними (ортогональними)* називають елементи $\{x, y\} \subset A$, скалярний добуток яких дорівнює нулеві: $(x, y) = 0$.

Алгебра $A$ називається *нормованою*, якщо в ній можна ввести скалярний добуток її елементів таким чином, що буде виконуватися співвідношення $(xy, xy) = (x, x)(y, y)$.

Прикладами нормованих алгебр є алгебри комплексних чисел, кватерніонів та октав.

Очевидно, що задача про суму квадратів, сформульована в п.3.4, рівносильна двом таким задачам:

1) пошук всіх нормованих алгебр;
2) запис закону множення для кожної з таких алгебр в кожному її ортонормованому базисі.

### 7.5. Теорема Гурвіца про нормовані алгебри з одиницею

Для доведення теореми Гурвіца потрібними є наступні дві леми, що описують властивості нормованих алгебр і відомі читачеві з курсу алгебри. [5]

**Лема 7.1.** *У довільній нормованій алгебрі $A$ виконується тотожність*

$$(a_1b_1, a_2b_2) + (a_1b_2, a_2b_1) = 2(a_1, a_2)(b_1, b_2).$$

**Лема 7.2.** *У нормованій алгебрі $A$ з одиницею виконується тотожність $(ab)\overline{b} = (b,b)a$ (тобто елемент $(ab)\overline{b}$ пропорційний до $a$, при чому коефіцієнт пропорційності дорівнює скалярному добутку $(b,b)$).*

**Наслідок 7.1.** *Із тотожності $(ab)\overline{b} = (b,b)a$ при заміні $b$ на суму $x + y$ випливає тотожність*

$$(ax)\overline{y} + (ay)\overline{x} = 2(x, y)a.$$

*Окрім того, справедливими є тотожності:*

$$(ab)b = a(bb) \text{ та } b(ba) = (bb)a,$$

*які вказують на те, що алгебра $A$ є альтернативною.*

Пропонуємо читачеві самостійно провести доведення леми 7.1, леми 7.2 та наслідку 7.1.

Розглянемо теорему, вперше доведену німецьким математиком А. Гурвіцем у 1898 році.

**Теорема Гурвіца.** *Будь – яка нормована алгебра з одиницею ізоморфна одній з чотирьох алгебр: дійсних чисел,* *комплексних чисел, кватерніонів або октав.*

Перед тим, як доводити теорему, зауважимо, що в її формулюванні умову існування в алгебрі одиниці не можна відкинути, хоча й існують нормовані алгебри, що не містять одиниці. Але такі алгебри не можуть бути ізоморфні жодній з чотирьох алгебр, вказаних в теоремі Гурвіца, бо кожна з цих чотирьох алгебр має одиницю.

**Доведення теореми Гурвіца.** Нехай $A$ – нормована алгебра з одиницею, яку позначимо $1$. Кожен елемент $a \in A$ можна подати у вигляді двох доданків, один з яких пропорційний $1$, а інший ортогональний до $1$: $a = k \cdot 1 + a'$. Для доведення цього твердження покажемо, що існує таке число $k$, для якого елемент $a - k \cdot 1$ ортогональний до $1$, тобто $\left(a - k \cdot 1, 1\right) = 0$, або $\left(a, 1\right) = k\left(1, 1\right)$. З останньої рівності знаходимо шукане число $k$:
$$k = \frac{\left(a, 1\right)}{\left(1, 1\right)}.$$

Ведемо в алгебрі операцію спряження: елемент спряжений до $a$ визначається так: $\overline{a} = k \cdot 1 - a'$. Очевидно, що $\overline{\overline{a}} = a$.

Далі сформулюємо ідею, що лежить в основі доведення теореми.

Нехай $U$ – деяка підалгебра алгебри $A$, що містить $1$ і не співпадає з усією алгеброю. Виберемо в $U$ базис із елементів $1, i_1, i_2, \ldots, i_n$, де $i_1, i_2, \ldots, i_n$ ортогональні до $1$. Тоді для довільного елемента $a_0 + a_1 i_1 + \cdots + a_n i_n \in U$ спряженим буде елемент $a_0 - a_1 i_1 - \cdots - a_n i_n$. Отже, якщо $u \in U$, то спряжений до нього елемент $\overline{u} \in U$.

Очевидно (пропонуємо читачеві переконатись в цьому самостійно), що тоді існує ненульовий вектор, ортогональний до кожного вектора з $U$, тобто ортогональний до $U$. Нехай $e$ – орт цього вектора. Таким чином $e$ – одиничний вектор, ортогональний до $U$. Доведемо далі, що множина елементів виду

$$u_1 + u_2 e, \ (u_1 \in U, u_2 \in U) \qquad (7.3)$$

замкнена відносно множення, тобто знову утворює підалгебру $U+Ue$. Крім того, потрібно буде довести, що

I) подання довільного елемента із $U+Ue$ у вигляді $u_1+u_2e$, ( $u_1\in U, u_2\in U$ ) єдине;

II) для довільного елемента $u_1+u_2e$ виконується співвідношення
$$(u_1+u_2e)(v_1+v_2e)=(u_1v_1-\overline{v}_2u_2)+(v_2u_1+u_2\overline{v}_1)e. \quad (7.4)$$

Порівнявши ці твердження з процедурою подвоєння, описаною в п.6.1, робимо висновок, що підалгебра $U+Ue$ ізоморфна подвоєній підалгебрі $U$.

Перед тим, як довести твердження I), II), проведемо деякі міркування, що випливають з них.

Зауважимо, що алгебра $A$ має одиницю. Тоді в ній містяться підалгебра $D$, яка складається з елементів виду $k\cdot 1$. Ця підалгебра ізоморфна алгебрі дійсних чисел. Якщо в попередніх міркуваннях покласти $U=D$, то в ролі $e$ можна взяти довільний одиничний вектор, ортогональний до 1. З формули (7.4) випливає, що $e^2=-1$. Звідси випливає, що для довільного елемента $a'$, який ортогональний до 1, маємо: $(a')^2=\lambda\cdot 1$, де $\lambda\in\mathbb{R},\lambda\le 0$. Очевидно й навпаки, що якщо квадрат деякого елемента дорівнює $\lambda\cdot 1$, де $\lambda\in\mathbb{R},\lambda\le 0$, то цей елемент ортогональний до 1. Отже, елементи, ортогональні до 1 і тільки вони характеризуються тим, що їх квадрати дорівнюють $\lambda\cdot 1$, де $\lambda\in\mathbb{R},\lambda\le 0$. Це дає можливість по-новому описати спряження в алгебрі $A$: для довільного елемента $a\in A$ розглядаємо його єдине подання у вигляді $k\cdot 1+a'$, де $(a')^2=\lambda\cdot 1$, $\lambda\in\mathbb{R},\lambda\le 0$ і тоді $\overline{a}=k\cdot 1-a'$.

Завершальною частиною доведення є наступні міркування.

Розглянемо знову підалгебру $D$. Якщо вона не співпадає з алгеброю $A$, то існує одиничний вектор $e$, ортогональний до $D$. Розглянемо підалгебру $K=D+De$, яка є повоєнням алгебри $D$. Отже, $K=D+De$ ізоморфна алгебрі комплексних чисел. Із попередніх міркувань про операцію спряження в алгебрі $A$ випливає, що для елементів із $K = D + De$ дія спряження співпадає з дією спряження для звичайних комплексних чисел.

Якщо підалгебра $K$ не співпадає з усією алгеброю $A$, то знову знайдеться одиничний вектор $e'$, ортогональний до $K$. Тоді розглядаємо підалгебру $Q = K + Ke'$, що є подвоєнням $K$ і ізоморфна алгебрі кватерніонів. При цьому, дія спряження для елементів з $Q$ співпадає із звичайною дією спряження в алгебрі кватерніонів.

Якщо підалгебра $Q$ не співпадає з усією алгеброю $A$, то знову вибираємо одиничний вектор $e''$, ортогональний до $Q$, і розглядаємо підалгебру $\mathrm{O} = Q + e''Q$, що є подвоєнням $Q$ і, таким чином, ізоморфна алгебрі октав. Виявляється, що ця підалгебра обов'язково співпадає з $A$, бо, як буде доведено нижче, будь – яка підалгебра, що містить $1$ і не співпадає з усією алгеброю $A$, асоціативна. Оскільки множення октав не асоціативне, то підалгебра $\mathrm{O} = Q + e''Q$ обов'язково має співпадати із усією алгеброю $A$.

Із наведених вище міркувань робимо висновок, що якщо алгебра $A$ не ізоморфна жодній з алгебр $D$, $K$, чи $Q$, то вона ізоморфна алгебрі $\mathrm{O}$. Це твердження й співпадає з твердженням теореми.

Для повного доведення теореми залишилось довести твердження I), II), сформульвані вище, та

III) будь – яка підалгебра $U$, що містить $1$ і не співпадає з усією алгеброю $A$, асоціативна.

Нагадаємо позначення: $U$ – довільна підалгебра алгебри $A$, що містить $1$ і не співпадає з усією алгеброю, а $e$ – довільний одиничний вектор, що ортогональний $U$.

Скориставшись лемою 7.1, доведемо, що підпростори $U$ та $Ue$ ортогональні, тобто $u_1 \perp u_2 e$, $\forall \{u_1, u_2\} \subset U$.

В тотожності

$$(a_1 b_1, a_2 b_2) + (a_1 b_2, a_2 b_1) = 2(a_1, a_2)(b_1, b_2)$$

покладемо $a_1 = u_1$, $b_1 = u_2$. $a_2 = e$, $b_2 = 1$. Маємо:

$$\left(u_1u_2, e\right) + \left(u_1, u_2e\right) = 2\left(u_1, e\right)\left(u_2, 1\right).$$

Оскільки $U$ – підалгебра, то $u_1u_2 \in U$. Отже, $u_1 \perp e$, $u_1u_2 \perp e$. Тоді $\left(u_1, u_2e\right) = 0$, тобто $u_1 \perp u_2e$. Таким чином, підпростори $U$ та $Ue$ ортогональні.

Із цього твердження легко бачити, що I) подання довільного елемента із $U + Ue$ у вигляді $u_1 + u_2e$, ($u_1 \in U, u_2 \in U$) єдине. Припустимо від супротивного, тобто, що $u_1 + u_2e = u_1' + u_2'e$ або $u_1 - u_1' = \left(u_2' - u_2\right)e$. Отже, елемент $u_1 - u_1' \in U$ і $u_1 - u_1' \in Ue$ одночасно. Але підпростори $U$ та $Ue$ ортогональні між собою, тобто $\left(u_1 - u_1', u_1 - u_1'\right) = 0$. Звідси маємо: $u_1 - u_1' = 0$ і $\left(u_2 - u_2'\right)e = 0$. Оскільки $e \neq 0$, то $u_1 = u_1'$ та $u_2 = u_2'$, що й доводить твердження I).

Для доведення твердження II) потрібно довести співвідношення (7.4). Спочатку доведемо, що для $\forall \left\{u, v\right\} \subset U$ виконуються такі рівності:

$$\left(ue\right)v = \left(u\overline{v}\right)e, \qquad (\alpha)$$

$$u\left(ve\right) = \left(vu\right)e, \qquad (\beta)$$

$$\left(ue\right)\left(ve\right) = -\overline{v}u, \qquad (\gamma)$$

з яких очевидним чином випливає (7.4). Справді:

$$\left(u_1 + u_2e\right)\left(v_1 + v_2e\right) = u_1v_1 + \left(u_2e\right)\left(v_2e\right) + \left(u_2e\right)v_1 + u_1\left(v_2e\right) =$$

$$= \left(u_1v_1 - \overline{v}_2u_2\right) + \left(v_2u_1 + u_2\overline{v}_1\right)e.$$

Для доведення $(\alpha)$, $(\beta)$ та $(\gamma)$ скористаємось, записаною в наслідку 7.1, тотожністю $\left(ax\right)\overline{y} + \left(ay\right)\overline{x} = 2\left(x, y\right)a$. Покладаємо $a = u$, $x = e$, $y = \overline{v}$. Врахувавши, що $\overline{v} \perp e$, маємо: $\left(ue\right)v + \left(u\overline{v}\right)\overline{e} = 0$. Оскільки $\overline{e} = -e$ (бо $e \perp 1$), то

$(ue)v = (u\bar{v})e$.

Для доведення $(\beta)$, в тотожності $(ax)\bar{y} + (ay)\bar{x} = 2(x, y)a$ покладемо $a = 1$, $x = u$, $y = \overline{ve}$ і врахуємо, що $\overline{ve} = -ve$ (бо $ve \perp U$, тобто $ve \perp 1$). Тоді:

$$u(ve) - (ve)\bar{u} = 0.$$

Скориставшись вже доведеною формулою $(\alpha)$, отримаємо:

$$u(ve) = (ve)\bar{u} = (vu)e.$$

Для доведення формули $(\gamma)$ скористаємось тим очевидним зауваженням, що якщо вона виконується для $v = c$ та $v = d$, то виконується й для $v = c + d$. Оскільки кожен елемент $v$ можна подати у вигляді суми двох доданків, з яких один пропорційний 1, а інший оортогональний до 1, то із наведеного вище зауваження очевидним чином виливає, що формулу $(\gamma)$ досить довести для двох випадків: коли $v = k1$ і коли $v \perp 1$.

Якщо $v = k1$, то формула $(\gamma)$ набуває вигляду $k(ue)e = -ku$. Остання рівність виконується згідно з лемою 7.2.

Нехай $v \perp 1$ (отже, $\bar{v} = -v$). В тотожності $(ax)\bar{y} + (ay)\bar{x} = 2(x, y)a$ покладемо $a = u$, $x = e$, $y = -ve$:

$$(ue)(ve) - (u(ve))\bar{e} = -2(e, ve)u.$$

Згідно з лемою 7.1 вираз $(e, ve) = (1, v)(e, e) = 0$, та, згідно з формулою $(\beta)$: $-(u(ve))\bar{e} = -vu = \bar{v}u$. Отже, $(ue)(ve) = -\bar{v}u$. Формули $(\alpha)$, $(\beta)$ та $(\gamma)$ доведено. Таким чином, доведенно і II).

Для завершення доведення теореми Гурвіца залишилось довести:

III) будь – яка підалгебра $U$, що містить 1 і не співпадає з усією алгеброю $A$, асоціативна, тобто $(uv)w = u(vw)$ для

$\forall \{u, v.w\} \subset U$ .

Скористаємось знову тотожністю $(ax)\bar{y} + (ay)\bar{x} = 2(x, y)a$, замінивши в ній $a = ve$, $x = \bar{w}$, $y = \bar{u}e$. Скориставшись формулами $(\alpha)$ та $(\gamma)$ отримаємо, що $((ve)\bar{w})(-\bar{u}e) + ((ve)(\bar{u}e))w = 0$, тобто $(uv)w - u(vw) = 0$.

Теорема Гурвіца доведена.

Нехай $E$ та $G$ – два ортогональні перетворення в алгебрі $A$ (тобто два пертворення, що зберігають норму довільного елемента $x \in A$). У векторному просторі алгебри $A$ задамо нове множення за формулою: $u \circ v = E(u)G(v)$. Векторний простір із цією дією позначимо символом $A_0$. Можна довести, що довільну нормовану алгебру $A_0$ можна отримати із деякої нормованої алгебри $A$ з одиницею за допомогою введення нового множення за формулою $u \circ v = E(u)G(v)$. Це означає, що без винятку всі нормовані алгебри можна отримати з чотирьох відомих алгебр $D$, $K$, $Q$ та O за допомогою нового множення за формулою $u \circ v = E(u)G(v)$. Певною міою це твердження можна трактувати як спосіб опису всіх нормованих алгебр. Крім цього, очевидно, що в п. 3.4 число $n$ в тотожності

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{ї}^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_{ї}^2\right) =$$
$$= \Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \ldots + \Phi_n^2.$$

може дорівнювати тільки одному з чотирьох чисел: 1, 2, 4 і 8.

## 7.6. Теорема Фробеніуса про алгебри з діленням

Одна з класичних задач теорії алгебр – задача про пошук всіх алгебр з діленням. В повному об’ємі ця задача не розв’язана й досі. Відомо, що розмірність довільної такої алгебри дорівнює одному з чисел 1,2,4,8.

Якщо окрім умови існування операції ділення накласти ще й умову асоціативності дії множення, то задача спрощується. В 1878 році німецький математик Г.Фробеніус довів таку теорему.

**Теорема Фробеніуса.** *Будь – яка асоціативна алгебра з діленням ізоморфна одній з трьох алгебр: алгебрі дійсних чисел, алгебрі комплексних чисел або алгебрі кватерніонів.*

Згодом було встановлено більш загальний результат, який називають узагальненою теоремою Фробеніуса.

**Теорема (узагальнена теорема Фробеніуса).** *Будь – яка альтернативна алгебра з діленням ізоморфна одній з чотирьох алгебр: алгебрі дійсних чисел, алгебрі комплексних чисел, алгебрі кватерніонів або алгебрі октав.*

Будь – яка асоціативна алгебра є альтернативною. Отже, теорема Фробеніуса випливає із узагальненої теореми Фробеніуса.

При доведенні теореми Фробеніуса будемо користуватися відомими в алгебрі твердженнями про властивості асоціативних алгебр з діленням.

**Твердження 7.1.** *Асоціативна алгебра $A$ з діленням містить одиницю.*

**Твердження 7.2.** *Якщо елемент $a \in A$ не пропорційний одиниці, то сукупність $K_a$ елементів виду $\alpha 1 + \beta a$ утворює підалгебру, ізоморфну алгебрі комплексних чисел.*

**Твердження 7.3.** *Якщо елементи $a_1 \in A$, $a_2 \in A$ не належать одній підалгебрі $K_a$, то сукупність $Q_{a_1,a_2}$ елементів вигляду $\alpha 1 + \beta a_1 + \gamma a_2 + \delta a_1 a_2$ утворює підалгебру, ізоморфну алгебрі кватерніонів. Якщо $b_1$ та $b_2$ – два елементи, квадрати яких дорівнюють $-1$, то $b_1 b_2 + b_2 b_1 = \lambda 1$, де $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Доведення тверджень 7.2 та 7.3 містяться в пункті 7.7. Доведення твердження 7.1 пропонуємо читачеві провести самостійно.

**Доведення теореми Фробеніуса.** Нехай $A$ – асоціативна алгебра з діленням. Згідно з твердженням 7.1, алгебра $A$ має одиницю. Елементи виду $k1$ утворюють підалгебру $D$, яка ізоморфна алгебрі дійсних чисел. Якщо $D$ не співпадає з усією алгеброю $A$, то, згідно з твердженням 7.2, в $A$ міститься підалгебра $K_a$, ізоморфна алгебрі комплексних чисел. Якщо $K_a$

не співпадає з усією алгеброю $A$, то, згідно з твердженням 7.3, в $A$ міститься підалгебра $Q_{a_1,a_2}$, що ізоморфна алгебрі кватерніонів. Якщо $Q_{a_1,a_2}$ співпадає з усією алгеброю $A$, то доведення завершене. Припустимо, що існує елемент $c \notin Q_{a_1,a_2}$, і доведемо, що тоді алгебра $A$ не може бути алгеброю з діленням.

В кватерніонній алгебрі $Q_{a_1,a_2}$ виберемо базис $1$, $i$, $j$, $k$ із відомою таблицею множення:

$$i^2 = -1, \quad j^2 = -1, \quad k^2 = -1,$$

$$ij = k, \quad ji = -k, \quad jk = i, \quad kj = -i, \quad ki = j, \quad ik = -j.$$

Елемент $c$ запишемо у вигляді: $p1 + qe$ де $e^2 = -1$ ($e$ — уявна одиниця комплексної алгебри $K_a$).

Перетворимо тепер елемент $ie$, використовуючи асоціативність множення в алгебрі $A$ та співвідношення $b_1 b_2 + b_2 b_1 = \lambda 1$ із твердження 7.3. Маємо:

$$ie = (jk)e = j(ke) = j(-ek + \lambda' 1) = -(je)k + \lambda' j =$$

$$= -(-ej + \lambda'' 1)k + \lambda' j = ei - \lambda'' k + \lambda' j .$$

Отже, $ie - ei = \lambda' j - \lambda'' k$. З іншого боку, знову використавши співвідношення $b_1 b_2 + b_2 b_1 = \lambda 1$, маємо: $ie + ei = \lambda''' 1$. Додавши останні дві рівності, отримаємо, що $ie \in Q_{a_1,a_2}$ і також $ic = i(p1 + qe) \in Q_{a_1,a_2}$. Бачимо, що при множенні $i$ на довільний елемент, що не належить $Q_{a_1,a_2}$, отримуємо елемент із $Q_{a_1,a_2}$. Але якщо $c' \in Q_{a_1,a_2}$, то теж $ic' \in Q_{a_1,a_2}$. Отже , добуток елемента $i$ на довільний елемент із алгебри $A$ завжди є елементом із $Q_{a_1,a_2}$. Це можливо тільки тоді, коли алгебра $A$ є алгеброю з діленням (рівняння $ix = c, c \notin Q_{a_1,a_2}$ не має розв'язку). Теорема Фробеніуса доведена.

**Зауваження 7.1.** *Висновки тверджень 7.1. 7.2 та 7.3 про властивості асоціативної алгебри, очевидно виконуються у* *випадку, коли алгебра є альтернативною.*

Крім того, дане в §6 означення альтернативної алгебри, рівносильне такому означенню.

**Означення 7.3.** *Нехай* $a$ *та* $b$ *– два довільні елементи алгебри* $A$. *Розглянемо всеможливі добутки, утворені з них. Якщо кожен з таких добутків не залежить від способу розстановки дужок, то алгебра* $A$ *називається альтернативною.*

**Доведення узагальненої теореми Фробеніуса.** Доведемо, що будь – яка альтернативна алгебра з діленням $A$ є нормованою. Тоді з теореми Гурвіца та зауваження 7.1 безпосередньо випливатиме твердження узагальненої теореми Фробеніуса.

Введемо в алгебрі $A$ операцію спряження. Якщо елемент $a$ пропорційний до 1, то $\overline{a} = a$. Якщо ж елемент $a$ не пропорційний до 1, то згідно з твердженням 7.2, він належить комплексній підалгебрі $K_a$. В цій підалгебрі для елемента $a$ існує спряжений елемент $\overline{a}$, який і будемо вважати спряженими до $a$ в алгебрі $A$.

Із означення спряженого елемента маємо: $\overline{\overline{a}} = a$ та

$$\overline{ka} = k\overline{a}, k \in \mathbb{R}. \tag{7.4}$$

Для доведення інших властивостей дії спряження дамо спочатку відповідь на наступне питання. Нехай елемент $a$ не пропорційний до 1. Розглянемо довільну кватерніонну алгебру $Q_{a_1,a_2}$, що містить цей елемент. В цій алгебрі теж є елемент $\tilde{a}$, спряжений до $a$. Чи буде виконуватись рівність $\overline{a} = \tilde{a}$?

Для спряжених в комплексній алгебрі елементів $a$ та $\overline{a}$ виконуються такі рівності:

$$a + \overline{a} = k \cdot 1, \tag{7.5}$$

$$a \cdot \overline{a} = k \cdot 1, \tag{7.6}$$

де $k \in \mathbb{R}$.

Для спряжених в алгебрі кватерніонів елементів $a$ та $\tilde{a}$ виконуються такі рівності:

$$a + \tilde{a} = \tilde{k} \cdot 1, \tag{7.7}$$

$$a \cdot \tilde{a} = \tilde{k} \cdot 1, \tag{7.8}$$

де $\tilde{k} \in \mathbb{R}$. Віднявши від рівностей (7.5) та (7.6) відповідно рівності (7.7) та (7.8), отримаємо $\overline{a} - \tilde{a} = l \cdot 1$ та $a\left(\overline{a} - \tilde{a}\right) = l \cdot 1$, де $l \in \mathbb{R}$. Якщо $\overline{a} \neq \tilde{a}$, то із останніх співвідношень випливає, що елемент $a$ пропорційний 1, що суперечить припущенню. Отже, $\overline{a} = \tilde{a}$.

Аналогічне твердження справджується і для модуля елемента $a$. Оскільки квадрат модуля елемента $a$ дорівнює добутку $a\overline{a}$, як у випадку комплексних чисел, так і у випадку кватерніонів, то модуль елемента $a$ не залежить від того, якій із підалгебр належить $a$: $a \in K_a$, чи $a \in Q_{a_1,a_2}$.

Із доведених вище властивостей дії спряження, для $\forall\left\{a,b\right\} \subset A$ маємо:

$$\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}\ , \tag{7.9}$$

$$\overline{ab} = \overline{b}\,\overline{a}\ . \tag{7.10}$$

Із властивості $\overline{\overline{b}} = b$ та формули (7.10) отримуємо, що $\overline{a\overline{b}} = b\overline{a}$, отже $a\overline{b} + b\overline{a} = m \cdot 1, m \in \mathbb{R}$.

В алгебрі $A$ визначимо скалярний добуток $\left(a,b\right)$ за допомогою такої рівності: $a\overline{b} + b\overline{a} = 2\left(a,b\right) \cdot 1$. Вираз $\left(a,b\right)$ володіє, очевидно, наступними властивостями скалярного добутку:

1) $\left(a,a\right) > 0$, якщо $a \neq 0$, і $\left(0,0\right) = 0$;

2) $\left(a,b\right) = \left(b,a\right)$;

3) $\left(a,kb\right) = k\left(a,b\right)$;

4) $\left(a,b_1 + b_2\right) = \left(a,b_1\right) + \left(a,b_2\right)$.

Наприклад, для доведення властивості 1) досить записати, що

$$\left(a,a\right) \cdot 1 = a\overline{a} = (\textit{модуль } a)^2 \cdot 1 = \left|a\right|^2 \cdot 1. \tag{7.11}$$

Зауважимо, що із рівності (7.11) випливає

$$\sqrt{(a,a)} = \textit{модуль}\, a = |a|,$$

тобто норма елемента $a$ в алгебрі $A$ співпадає з модулем $a$ як і у випадку комплексного числа (чи кватерніона).

Оскільки довільні два елементи $\{a,b\} \subset A$ належать одній і тій же комплексній або кватерніонній підалгебрі, то

$$|ab|^2 = |a|^2 |b|^2,$$

адже алгебра комплексних чисел і алгебра кватерніонів – нормовані. Останнє співвідношення запишемо у вигляді $(ab,ab) = (a,a)(b,b)$, що і означає нормованість алгебри $A$.

Далі, за теоремою Гурвіца, твердимо, що алгебра $A$ ізоморфна одній із чотирьох «стандартних» алгебр: дійсних чисел, комплексних чисел, кватерніонів, октав. Узагальнена теорема Фробеніуса доведена. [5]

### 7.7. Приклади розв'язування задач

**1.** Доведемо наступні твердження:

**Твердження 7.2**. *Якщо елемент* $a \in A$ *не пропорційний одиниці, то сукупність* $K_a$ *елементів виду* $\alpha 1 + \beta a$ *утворює підалгебру, ізоморфну алгебрі комплексних чисел.*

**Доведення.** Досить довести, що елемент $a$ задовольняє таке квадратне рівняння з від'ємним дискримінантом

$$a^2 + sa + t1 = 0. \tag{7.12}$$

Розглянемо послідовні степені елемента $a$:

$$a^0 = 1,\ a^1,\ a^2,\ a^3, \ldots,\ a^n,$$

де $n$ – розмірність алгебри $A$. Із відомої теореми з курсу алгебри випливає, що ця система з $(n+1)$ векторів лінійно залежна, тобто деякий степінь елемента $a$ можна записати у вигляді лінійної комбінації решти степенів:

$$a^m = k_{m-1}a^{m-1} + \cdots + k_2 a^2 + k_1 a + k_0 1.$$

Отже, елемент $a$ є розв'язком рівняння:

$$x^m - k_{m-1}x^{m-1} - \cdots - k_2 x^2 + k_1 x - k_0 1 = 0,$$

(тобто коренем многочлена степеня $m$

$P(x)=x^m-k_{m-1}x^{m-1}-\dots-k_2x^2+k_1x-k_0$ ).

Розкладемо многочлен $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами на добуток незвідних многочленів першого і другого степенів:

$$P(x)=P_1(x)P_2(x)\dots P_s(x).$$

Оскільки алгебра $A$ асоціативна (тобто виконується співвідношення $a^k\cdot a^l=a^{k+l}$ для $\forall a\in A$), то остання рівність справедлива і у випадку, коли замість невідомої змінної $x$ взяти елемент $a\in A$:

$$P(a)=P_1(a)P_2(a)\dots P_s(a).$$

Оскільки $P(a)=0$ та алгебра $A$ є алгеброю з діленням, то із рівності $P_1(a)P_2(a)\dots P_s(a)=0$ отримуємо, що для деякого номера $i\in\{1,2,\dots,s\}$ виконується $P_i(a)=0$, тобто елемент $a\in A$ задовольняє рівняння першого або другого степеня. За умовою твердження елемент $a\in A$ не пропорційний одиниці, тобто не може бути розв'язком рівняння першого степеня $a+t1=0$. Таким чином, $a\in A$ є коренем деякого незвідного над полем дійсних чисел квадратного рівняння $a^2+sa+t1=0$. Твердження 7.2 доведено.

**Твердження 7.3.** *Якщо елементи $a_1\in A$, $a_2\in A$ не належать одній підалгебрі $K_a$, то сукупність $Q_{a_1,a_2}$ елементів вигляду $\alpha 1+\beta a_1+\gamma a_2+\delta a_1a_2$ утворює підалгебру, ізоморфну алгебрі кватерніонів. Якщо $b_1$ та $b_2$ – два елементи, квадрати яких дорівнюють $-1$, то $b_1b_2+b_2b_1=\lambda 1$, де $\lambda\in\mathbb{R}$.*

**Доведення.** В підалгебрі $K_{a_1}$ виберемо такий елемент $b_1$, що $b_1^{\,2}=-1$ ($b_1$ є уявною одиницею в комплексній алгебрі $K_{a_1}$). Аналогічно в підалгебрі $K_{a_2}$ виберемо такий елемент $b_2$, що $b_2^{\,2}=-1$. Елементи $b_1$ та $b_2$ відрізняються від $a_1$ та $a_2$ на доданки, що кратні одиниці. Тоді сукупність елементів виду

$\alpha 1+\beta a_1+\gamma a_2+\delta a_1 a_2$ співпадає з сукупністю елементів виду $\alpha' 1+\beta' b_1+\gamma' b_2+\delta' b_1 b_2$, тобто $Q_{a_1,a_2}$ співпадає з $Q_{b_1,b_2}$.

Якщо $e_1=b_1$, $e_2=k_1 b_1+k_2 b_2$ та $k_2\neq 0$, то множина $Q_{e_1,e_2}$ буде співадати із $Q_{b_1,b_2}$, а, отже, із $Q_{a_1,a_2}$.

*Доведемо, що числа $k_1$ та $k_2$ можна вибрати так, щоб виконувались наступні рівності:*

$$e_1^2=-1,\ e_2^2=-1,\ \left(e_1 e_2\right)^2=-1. \qquad (7.13)$$

Зауважимо, що перша рівність виконується для довільних $k_1$ та $k_2$. Далі запишемо:

$$\left(b_1+b_2\right)^2=b_1^2+b_2^2+\left(b_1 b_2+b_2 b_1\right)=-2\cdot 1+\left(b_1 b_2+b_2 b_1\right).$$

Але квадрат елемента $b_1+b_2$ можна розкласти за 1 та $b_1+b_2$: $\left(b_1+b_2\right)^2=p1+q\left(b_1+b_2\right)$. Отже,

$$b_1 b_2+b_2 b_1=\left(p+2\right)1+q\left(b_1+b_2\right). \qquad (7.14)$$

Аналогічно,

$$\left(b_1+2b_2\right)^2=b_1^2+4b_2^2+2\left(b_1 b_2+b_2 b_1\right)=-5\cdot 1+2\left(b_1 b_2+b_2 b_1\right)$$

і $\left(b_1+2b_2\right)^2=p'1+q'\left(b_1+2b_2\right)$. Отже,

$$b_1 b_2+b_2 b_1=\frac{1}{2}\left(p'+5\right)1+\frac{1}{2}q'\left(b_1+2b_2\right).$$

Якщо б $q\neq 0$, то, прирівнявши два вирази для $b_1 b_2+b_2 b_1$, отримали б, що $b_1$ відрізняється від $b_2$ на елемент, кратний 1, тобто $b_2\in K_{b_1}$. Це суперечить умові. Отже, $q=0$ і із рівності (7.14) маємо $b_1 b_2+b_2 b_1=\lambda 1$. Отже, якщо $b_1$ та $b_2$ – два елементи, квадрати яких дорівнюють $-1$, то $b_1 b_2+b_2 b_1=\lambda 1$, де $\lambda\in\mathbb{R}$.

Визначимо далі елементи $e_1$ та $e_2$. Для цього розглянемо елемент $c=\lambda b_1+2b_2$, де $\lambda$ взято із рівності $b_1 b_2+b_2 b_1=\lambda 1$. Квадрат елемента $c$:

$$c^2=\left(\lambda b_1+2b_2\right)^2=-\lambda^2 1-4\cdot 1+2\lambda\left(b_1b_2+b_1b_2\right)=\left(\lambda^2-4\right)\cdot 1,$$

тобто $\lambda^2-4<0$ (в протилежному випадку отримали б $\left(c-\sqrt{\rho}\cdot 1\right)\left(c+\sqrt{\rho}\cdot 1\right)=0$, а це суперечить тому, що елементи $b_1$ і $b_2$ не лежать в одній комплексній підалгебрі). Покладаємо $e_2=\dfrac{1}{\sqrt{4-\lambda^2}}c$. Тоді із попередньої рівності $e_2^2=-1$, тобто маємо другу із рівностей (7.13). Для доведення третьої рівності (7.13) зауважимо спочатку, що

$$e_1e_2+e_2e_1=0, \tag{7.15}$$

Отже,

$$e_1e_2+e_2e_1=\frac{1}{\sqrt{4-\lambda^2}}\left(b_1\left(\lambda b_1+2b_2\right)+\left(\lambda b_1+2b_2\right)b_1\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4-\lambda^2}}\left(-2\lambda\cdot 1+2\left(b_1b_2+b_2b_1\right)\right)=0.$$

Використавши (7.15), отримаємо

$$\left(e_1e_2\right)^2=\left(e_1e_2\right)\left(e_1e_2\right)=\left(e_1e_2\right)\left(-e_2e_1\right)=-\left(e_1e_2^2\right)e_1=e_1^2=-1,$$

що завершує доведення рівностей (7.13).

Доведемо тепер, що множина $Q_{e_1,e_2}$ (яка співпадає з $Q_{a_1,a_2}$) елементів виду $\alpha 1+\beta a_1+\gamma a_2+\delta a_1a_2$ є підалгеброю алгебри $A$.

Для цього досить первірити, що добуток довільних двох елементів 1, $e_1$, $e_2$, $e_1e_2$ можна розкласти за цими ж елементами. Нам уже відомі всі добутки, окрім наступних:

$$e_1\left(e_1e_2\right),\ \left(e_1e_2\right)e_1.\ e_2\left(e_1e_2\right),\ \left(e_1e_2\right)e_2.$$

Обчислимо:

$$e_1\left(e_1e_2\right)=e_1^2e_2=-e_2,$$

$$\left(e_1e_2\right)e_1=-\left(e_2e_1\right)e_1=-e_2e_1^2=e_2,$$

$$e_2\left(e_1e_2\right)=-e_2\left(e_2e_1\right)=-e_2^2e_1=e_2,$$

$$\left(e_1e_2\right)e_2=e_1e_2^2=-e_1.$$

Отже, множина $Q_{e_1,e_2}$ є підалгеброю.

Перевірку того, що ця підалгебра ізоморфна алгебрі кватерніонів пропонуємо провести читачеві самостійно. Нагадаємо,що для цього треба довести, по – перше, що елементи $1,\ e_1,\ e_2,\ e_1e_2$ утворюють в цій підалгебрі базу, і , по – друге, що таблиця множення для цього базису така, як і для базису $1, i, j, k$ в алгебрі кватерніонів. Твердження 7.3 доведено. ■

**2.** Доведемо, що алгебра кватерніонів ізоморфна алгебрі комплексних матриць другого порядку виду $\begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}$.

**Доведення.** Дійсно, в алгебрі вказаних матриць можна вибрати базис:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

і поставити у відповідність цим базисним елементам базисні елементи $1, i, j, k$ алгебри кватерніонів. При цьому ізоморфізмі кватерніону $a+bi+cj+dk$ відповідає матриця:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+di & b+ci \\ -b+ci & a-di \end{pmatrix}. \blacksquare$$

### 7.8. Завдання для самостійної роботи

**1.** Довести, що нульова алгебра довільної розмірності $n$ не є гіперкомплексною системою.

**2.** Довести, що в двовимірній алгебрі з таблицею множення

| | $i_1$ | $i_2$ |
|---|---|---|
| $i_1$ | $i_1$ | $i_2$ |
| $i_2$ | $-i_2$ | $i_1$ |

а) немає одиниці;

б) вказана алгебра є алгеброю з діленням.

**3.** Довести, що алгебра тривимірних векторів $ai+bj+ck$ з операцією векторного добутку не є гіперкомплексною системою.

**4.** Довести, що в алгебрі октав підалгеброю є підпростір з базисом $1, i.E, I$ . Довести, що ця підалгебра ізоморфна алгебрі кватерніонів.

**5.** Довести, що в алгебрі квадратних матриць порядку $n$ підалгеброю є підпростір матриць, у яки всі елементи перших $k$ рядків ($k < n$ – фіксоване число) дорівнюють нулеві.

**6.** Довести лему 7.1.

**7.** Довести лему 7.2.

**8.** Довести зауваження 7.1.

**9.** Довести твердження 7.1: асоціативна алгебра $A$ з діленням містить одиницю.

**10.** Довести, що алгебра кватерніонів ізоморфна алгебрі дійсних матриць четвертого порядку.

## §8. n – вимірний афінний простір та гіперквадрики і деякі рівняння в алгебрі кватерніонів

### 8.1. Основні теоретичні відомості

Нагадаємо деякі основні поняття із курсу аналітичної геометрії афінних просторів. [4]

Нехай $P=\{a,b,c,...\}$ – будь - яке поле з елементами довільної природи, яке ми називатимемо полем скалярів, а його елементи – скалярами, $V_n=\{\overline{a},\overline{b},\overline{c},\overline{x},\overline{y},...\}-n$ — вимірний векторний простір над полем $P$, $\mathsf{A}=\{A,B,C,\ldots\}$ – деяка непорожня множина, де $A,B,C,\ldots$ – елементи довільної природи, $f:\mathsf{A}\times\mathsf{A}\to V_n$ – відображення, тобто кожній впорядкованій парі $(A,B)$ елементів $\{A,B\}\subset\mathsf{A}$ ставиться у відповідність вектор $f(A,B)\in V_n$, який надалі позначатимемо символом $\overline{AB}$.

**Означення.** Афінним точковим простором над векторним простором $V_n$ над полем $P$ називається множина $\mathsf{A}$ із заданим відображенням $f$, яке задовольняє такі вимоги (аксіоми Вейля афінного простору):

1. Для кожного елемента $A\in\mathsf{A}$ відображення $f_A:\mathsf{A}:\to V_n$, що діє за правилом $\forall\ \mathrm{B}\in\mathsf{A}$: $f_A(B):=f(\mathrm{A},\mathrm{B})\equiv\overline{\mathrm{AB}}\in V_n$ є бієкцією;

2. $\forall\{A,B,C\}\subset\mathsf{A}$: $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$.

Елементи $A,B,C$ називаються точками афінного точкового простору $\mathsf{A}$, векторний простір $V_n$– простором паралельних перенесень цього афінного простору, вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c},\overline{x},\overline{y},...$ з $V_n$ – перенесеннями або вільними векторами простору $\mathsf{A}$.

**Означення 2.** Алгебраїчною гіперповерхнею порядку $m$ афінного простору $\mathsf{A}_n$ називається фігура цього простору, утворена з усіх таких тчок простору декатові координати яких задовольняють алгебраїчне рівняння степеня $m$ : $f\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)=0$, де $f$ – многочлен степеня $m$ за сукупністю всіх змінних.

Алгебраїчні поверхні 2-го порядку афінного простору $\mathrm{A}_n$ називається гіперквадриками. Зупинимось на питанні про зведення гіперквадрики в $\mathrm{A}_n$ до канонічного вигляду. Нехай гіперквадрика $Q$ має в декартовому репері $R=\left\{0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\right\}$ рівняння $a_{IK}x^I x^K+2a_{I0}x^I+a_{00}=0$.

З теорії квадратичних форм відомо, що для будь – якої квадратичної форми, зокрема і для форми $\varphi=a_{IK}x^I x^K$, існує лінійне невироджене перетворення $x^I=c_K^I x'^K$, $\det(c_K^I)\neq 0$, яке зводить цю форму до канонічного вигляду

$$\varphi=b_{11}(x'^1)^2+b_{22}(x'^2)^2+\ldots+b_{rr}(x'^r)^2,$$

де $r=rg(a_{IK})$, $b_{11}\neq 0$, $b_{22}\neq 0$,..., $b_{rr}\neq 0$.

Якщо $\vec{e}'_I=c_I^K\vec{e}_K$, то в системі координат $R'=\{0,\vec{e}'_1,\ldots,\vec{e}'_n\}$ рівняння гіперквадрики має вигляд

$$b_{11}(x'^1)^2+b_{22}(x'^2)^2+\ldots+b_{rr}(x'^r)^2+2b_{I0}x'^I+a_{00}=0, \quad (8.1)$$

де $b_{I0}=c_I^K a_{K0}$, а рівняння центра є такими:

$$\begin{cases} b_{ii}x^i+b_{i0}=0, \\ b_{\alpha 0}=0. \end{cases}$$

В останніх рівняннях центра підсумування по індексу $i$ немає; $i=1,2,\ldots,r$; $\alpha=r+1,\ldots,n$. Можливі такі два випадки:

**I.** Всі $b_{\alpha 0}=0$; тоді $x_0^i=-\dfrac{b_{i0}}{b_{ii}}$ і при паралельному перенесенні $x'^i=\mathrm{X}^i+x_0^i$, $x'^\alpha=\mathrm{X}^\alpha$, що відповідає переходу до декартової системи

$$R''=\{O',\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\ldots,\vec{e}'_n\}, \quad \text{де} \quad \overline{OO'}=x_0^i\vec{e}'_i,$$

рівнянням гіперквадрики є таке рівняння:

$$b_{11}(\mathrm{X}^1)^2 + b_{22}(\mathrm{X}^2)^2 + \ldots + b_{rr}(\mathrm{X}^r)^2 + a'_{00} = 0, \qquad (8.2)$$

де

$$a'_{00} = b_{ii}(x_0^i)^2 + 2b_{i0}x_0^i + a_{00}.$$

В цьому випадку проводимо такі можливі спрощення рівняння (8.1).

$$c_I^\alpha x^I = c^\alpha,\ rg(c_I^\alpha) = n - m,\ \ m + 1 \le \alpha \le n \qquad (8.3)$$

**1)** $r = n$, рівняння (8.2) визначає центральну гіперквадрику з центром в точці $\mathrm{X}^I = 0$.

а) $a'_{00} \neq 0$ – центр не лежить на гіперквадриці.

а₁) Числа $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{nn}$ одного знаку, а $a'_{00}$ – протилежного. Рівняння (8.2) можна звести до вигляду $(x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2 = 1$ – нормальне рівняння еліпсоїда.

а₂) Числа $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{nn}$, $a'_{00}$ одного знаку, рівняння (8.2) можна звести до вигляду $(x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2 = -1$ – нормальне рівняння уявного еліпсоїда.

а₃) Числа $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{n-l,n-l}$ одного знаку, а числа $b_{SS}$, $a'_{00}$ – протилежного знаку ($s = n - e + 1, \ldots, n$). Рівняння (8.2) зводиться до нормального вигляду

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^{n-l})^2 - (x^{n-l+1})^2 - \ldots - (x^n)^2 = 1.$$

Таку гіперквадрику називатимемо гіперболоїдом індекса *l*.

**Зауваження.** Еліпсоїд можна було б називати гіперболоїдом індекса 0, а уявний еліпсоїд – гіперболоїдом індекса *n*.

б) $a'_{00} = 0$ – центр лежить на гіперквадриці. В цьому випадку гіперквадрика називається конусом з вершиною в точці О.

б₁) Числа $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{nn}$ одного знаку. Рівняння (8.2) можна звести до нормального виду

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2 = 0.$$

Гіперквадрика в цьому випадку називається уявним конусом і складається лише з однієї точки.

б2) $b_{ii} > 0$, $b_{\alpha\alpha} < 0$, $i = \overline{1, n-l}$, $\alpha = n-l+1, \dots, n$, $l \le n-1$. Рівняння (8.2) можна звести до нормального виду

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^{n-e})^2 - (x^{n-e+1})^2 - \dots - (x^n)^2 = 0.$$

В цьому випадку гіперквадрика називається конусом індекса $l$.

**2)** $r < n$. Система рівнянь центра $\mathrm{X}^i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r)$ визначає площину центрів $\Pi_{n-r} = \left\{ \mathrm{M} \,|\, \overline{\mathrm{OM}} = t^\alpha \overline{e}'_\alpha, \alpha = r+1, \dots, n \right\}$ – координатну площину.

а) $a'_{00} \ne 0$ – гіперквадрика називається циліндром.

а1) Числа $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{rr}, -a'_{00}$ одного знаку. В цьому випадку гіперквадрику можна звести до вигляду $(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^r)^2 = 1$, яке в координатній площині $\Pi_r = \left\{ \mathrm{M} \,|\, \overline{\mathrm{OM}} = t^i \overline{e}_i, \right\}$ канонічної декартової системи координат визначає еліпсоїд $Q'$, а в просторі $\mathrm{A}_n$ – еліптичний циліндр з $(n-r)$ – вимірними твірними, кожна з яких проходить через точку $\mathrm{M} \in Q'$ і має напрямний підпростір $\Pi_{n-r} = L(\overline{e}_{r+1,\dots,} \overline{e}_n)$.

а2) Числа $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{rr}, a'_{00}$ одного знаку. В цьому випадку рівняння гіперквадрики можна звести до нормального вигляду $(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^r)^2 = -1$ – уявний циліндр, який не містить жодної точки.

а3) $b_{ii}, -a'_{00}$ – одного знаку, $b_{\alpha\alpha}$ – протилежного знаку, де $i = \overline{1, r-l}$; $\alpha = r-l+1, \dots, r$. Рівняння гіперквадрики можна звести до нормального вигляду

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^{r-l})^2 - (x^{r-l+1})^2 - \dots - (x^r)^2 = 1$$

В цьому випадку гіперквадрика $Q$ називається гіперболічним циліндром індекса $l$ з $(n-r)$ – вимірними твірними, паралельними координатній площині $\Pi_{n-r} = \left\{ \mathrm{M} \,|\, \overline{\mathrm{OM}} = t^u \overline{e}_u, u = r+1, \dots, n \right\}$.

б) $a'_{00}=0$. В цьому випадку гіперквадрика $Q$ має рівняння $b_{11}(x^1)^2+\ldots+b_{rr}(x^r)^2=0$. В координатній площині $\Pi_r=\left\{\mathrm{M}\,|\,\overline{\mathrm{OM}}=t^1\overline{e}_1+\ldots+t^r\overline{e}_r\right\}$ це рівняння визначає конус $Q'$. Якщо конус $Q'$ є уявним (має лише одну точку $O$), то гіперквадрика $Q$ має лише $(n-r)$ – вимірну координатну площину $\Pi_r=\left\{\mathrm{M}\,|\,\overline{\mathrm{OM}}=t^{r+1}\overline{e}_{r+1}+\ldots+t^r\overline{e}_r\right\}$. Така гіперквадрика $Q$ називається уявним конусом з $(n-r)$ – вимірною вершиною $\Pi_{n-r}$.

Якщо ж $Q'$ – конус індекса $l$, то гіперквадрика $Q$ називається конусом індекса $l$ з $(n-r)$ – вимірною вершиною $\Pi_{n-r}$. Його нормальне рівняння має вигляд

$$(x^1)^2+\ldots+(x^{r-l})^2-(x^{r-l+1})^2-\ldots-(x^r)^2=0,\ \ l\le\frac{r}{2}.$$

**II.** Серед чисел $b_{\alpha 0}$ є не рівні нулеві. Спеціальним вибором декартової системи координат рівняння (8.1) гіперквадрики $Q$ можна звести до вигляду

$$b_{11}(x^1)^2+b_{22}(x^2)^2+\ldots+b_{rr}(x^r)^2+2bx^{r+1}=0,\ \ b\ne 0. \quad (8.4)$$

Дослідимо рівняння (8.4).

**1)** Якщо $r=n-1$, то гіперквадрика називається параболоїдом.

а₁) Всі числа $b_{11},b_{22},\ldots,b_{rr}$ одного знаку. В цьому випадку рівняння (8.4) можна звести до нормального вигляду $(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^{n-1})^2=2x^n$, а параболоїд називається еліптичним.

а₂) $b_{11},b_{22},\ldots,b_{n-l-1,n-l-1}$ – одного знаку; $b_{n-l,n-l},\ldots,b_{n-1,n-1},b$ – протилежного знаку. В цьому випадку рівняння (8.4) можна звести до такого нормального вигляду

$$(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^{n-l-1})^2-(x^{n-l})^2-\ldots-(x^{n-1})^2=2x^n,$$

де $1 \le l \le \dfrac{n-1}{2}$, а гіперквадрику $Q$ називають гіперболічним параболоїдом індекса $l$.

**2)** Якщо $r \le n-2$, то рівняння (8.4) в координатній площині $\Pi_{r+1} = \left\{ \mathrm{M} \mid \overline{\mathrm{OM}} = t^1\overline{e}_1 + \ldots + t^{r+1}\overline{e}_{r+1} \right\}$ канонічної декартової системи координат визначає параболоїд $Q'$, а при $\forall \mathrm{M} \in Q'$ площина $\Pi_{n-r-1} = \left\{ \mathrm{N} \mid \overline{\mathrm{MN}} = t^{r+2}\overline{e}_{r+2} + \ldots + t^n\overline{e}_n \right\}$ належить гіперквадриці $Q$. В цьому випадку гіперквадрика $Q$ називається параболічним циліндром з $(n-r-1)$ – вимірними твірними. Індекс $l \le \dfrac{r}{2}$ параболоїда $Q'$ називається індексом параболічного циліндра $Q$.

Зупинимось на питанні про геометричне тлумачення в $\mathrm{A}_4$ розв’язків квадратного рівняння

$$x^2 + bx + c = 0, \tag{8.5}$$

де $x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$, $x_l \in \mathbb{R}$, $l = \overline{1,4}$ – невідомий кватерніон; $b = b_1 + ib_2 + jb_3 + kb_4$, $c = c_1 + ic_2 + jc_3 + kc_4$, $b_l, c_l \in \mathbb{R}$, $l = \overline{1,4}$, – відомі кватерніони.

Рівняння (8.5) рівносильне такій системі:

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + b_1x_1 - b_2x_2 - b_3x_3 - b_4x_4 + c_1 = 0; \\ 2x_1x_2 + b_1x_2 + b_2x_1 + b_3x_4 - b_4x_3 + c_2 = 0; \\ 2x_1x_3 + b_1x_3 + b_3x_1 + b_4x_2 - b_2x_4 + c_3 = 0; \\ 2x_1x_4 + b_1x_4 + b_4x_1 + b_2x_3 - b_3x_2 + c_4 = 0. \end{cases} \tag{8.6}$$

Кожне з рівнянь цієї системи зведемо до канонічного вигляду.

**1)** $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + b_1x_1 + b_2x_2 - b_3x_3 - b_4x_4 + c_1 = 0$:

$$\left(x_1 + \frac{b_1}{2}\right)^2 - \left(x_2 + \frac{b_2}{2}\right)^2 - \left(x_3 + \frac{b_3}{2}\right)^2 - \left(x_4 + \frac{b_4}{2}\right)^2 +$$

$$+c_1-\frac{b_1^2}{4}+\frac{b_2^2}{4}+\frac{b_3^2}{4}+\frac{b_4^2}{4}=0.$$

Нехай

$$\mathrm{X}_1=x_1+\frac{b_1}{2};\ \mathrm{X}_2=x_2+\frac{b_2}{2};\ \mathrm{X}_3=x_3+\frac{b_3}{2};\ \mathrm{X}_4=x_4+\frac{b_4}{2};$$

$$-\mathrm{B}=c_1-\frac{b_1^2}{4}+\frac{b_2^2}{4}+\frac{b_3^2}{4}+\frac{b_4^2}{4}.$$

Отримаємо:

$$\mathrm{X}_1^2-\mathrm{X}_2^2-\mathrm{X}_3^2-\mathrm{X}_4^2=\mathrm{B}. \tag{8.7}$$

При $\mathrm{B}\neq 0$ рівняння (8.7) в залежності від знаку числа $B$ визначає гіперболоїд індекса 3 ( $B>0$ ) або гіперболоїд індекса 1 ( $B<0$ ).

Якщо $\mathrm{B}=0$, тобто $\frac{b_1^2}{4}=\frac{b_2^2}{4}+\frac{b_3^2}{4}+\frac{b_4^2}{4}+c_1$, рівняння (8.7) рівносильне рівнянню $\mathrm{X}_1^2-\mathrm{X}_2^2-\mathrm{X}_3^2-\mathrm{X}_4^2=0$ і визначає конус індекса 1 з точковою вершиною.

**2)** $2x_1x_2+b_1x_2+b_2x_1+b_3x_4-b_4x_3+c_2=0$.

Для зведеня цього рівняння до канонічного вигляду, зробимо заміну: $x_1=y_1-y_2$; $x_2=y_1+y_2$; $x_3=y_3$; $x_4=y_4$.

Рівняння перепишемо у вигляді:

$$\left(y_1-y_2\right)\left(y_1+y_2\right)+\frac{b_1}{2}\left(y_1+y_2\right)+\frac{b_2}{2}\left(y_1-y_2\right)+$$

$$+\frac{b_3}{2}y_4-\frac{b_4}{2}y_3+c_2=0;$$

$$y_1^2-y_2^2+y_1\,\frac{b_1+b_2}{2}+y_2\,\frac{b_1-b_2}{2}+\frac{b_3}{2}y_4-\frac{b_4}{2}y_3+c_2=0;$$

$$y_1^2-y_2^2+d_1y_1+d_2y_2+d_3y_4-d_4y_3+c_2=0,$$

де $d_1=\frac{b_1+b_2}{2}$; $d_2=\frac{b_1-b_2}{2}$; $d_3=\frac{b_3}{2}$; $d_4=\frac{b_4}{2}$.

Здійснивши послідовно ще декілька лінійних невироджених перетворень змінних отримаємо рівняння гіперквадрики: $z_1^2 - z_2^2 = dz_3$. $d \in \mathbb{R}$.

Можливі випадки

а) $m = 0$, тобто рівняння гіперквадрики набуває вигляду $z_1^2 - z_2^2 = 0$ і визначає пару гіперплощин.

б) $m \neq 0,$ рівняння $z_1^2 - z_2^2 = dz_3$, визначає параболічний циліндр індекса 1 з одновимірними твірними.

Аналогічні міркування проводимо для третього та четвертого рівнянь системи (8.6).

Отже, розглядаючи коефіцієнти кватерніона $x$, як координати $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ деякої точки в $\mathrm{A}_4$, робимо висновок, що розв'язки рівняння $x^2 + bx + c = 0$ лежать на перетині вище вказаних гіперквадрик.

## 8.2. Приклади розв'язування задач

**1**. Знайти геометричне тлумачення розв'язків рівняння

$$x^2 + 8x - 65 - 10i - 18k = 0, \tag{8.8}$$

де $x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$, $x_l \in \mathbb{R}$, $l = \overline{1,4}$ – невідомий кватерніон.

□ Після підстановки в рівняння (8.8) кватерніона $x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$, отримаємо:

$$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 2ix_1x_2 + 2jx_1x_3 + 2kx_1x_4 +$$
$$+8x_1 + 8ix_2 + 8jx_3 + 8kx_4 - 65 - 10i - 18k = 0.$$

Останнє рівняння рівносильне такій системі:

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 8x_1 - 64 = 0; \\ 2x_1x_2 + 8x_2 - 10 = 0; \\ 2x_1x_3 + 8x_3 = 0; \\ 2x_1x_4 + 8x_4 - 18 = 0. \end{cases}$$

Кожне з рівнянь цієї системи є рівнянням деякої алгебраїчної гіперповерхні 2-го порядку (гіперквадрики) в афінному просторі $\mathrm{A}_4$. Дослідимо окремо кожне з цих рівнянь.

1) $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 8x_1 - 64 = 0$;

$$\left(x_1^2 + 8x_1 + 16\right) - 16 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - 64 = 0;$$

$$\frac{\left(x_1 + 4\right)^2}{80} - \frac{x_2^2}{80} - \frac{x_3^2}{80} - \frac{x_4^2}{80} = 1.$$

Здійснимо лінійне перетворення: $\mathrm{X}_1 = \dfrac{x_1 + 4}{4\sqrt{5}}$; $\mathrm{X}_2 = \dfrac{x_2}{4\sqrt{5}}$; $\mathrm{X}_3 = \dfrac{x_3}{4\sqrt{5}}$; $\mathrm{X}_4 = \dfrac{x_4}{4\sqrt{5}}$.

Тоді останнє рівняння перепишемо у вигляді: $\mathrm{X}_1^2 - \mathrm{X}_2^2 - \mathrm{X}_3^2 - \mathrm{X}_4^2 = 1$. Як відомо, дане рівняння визначає гіперболоїд індекса 3.

2) $2x_1x_2 + 8x_2 - 10 = 0$; $x_1x_2 + 4x_2 - 5 = 0$.

Перепозначимо: $x_1 = y_1 + y_2$; $x_2 = y_1 - y_2$; $x_3 = y_3$; $x_4 = y_4$. Отримаємо:

$$y_1^2 - y_2^2 + 4y_1 - 4y_2 - 5 = 0;$$

$$\left(y_1 + 2\right)^2 - \left(y_2 + 2\right)^2 - 5 = 0.$$

Нехай $\mathrm{Y}_1 = \dfrac{y_1 + 2}{\sqrt{5}}$; $\mathrm{Y}_2 = \dfrac{y_2 + 2}{\sqrt{5}}$, $Y_3 = y_3$; $Y_4 = y_4$. Тоді отримаємо $\mathrm{Y}_1^2 - \mathrm{Y}_2^2 = 1$ – дане рівняння визначає гіперболічний циліндр індекса 1 з двовимірними твірними.

3) Розглянемо третє рівняння системи: $2x_1x_3 + 8x_3 = 0$, тобто $x_1x_3 + 4x_3 = 0$.

Перепозначимо: $x_1 = z_1 + z_3$; $x_2 = y_2$; $x_3 = z_1 - z_3$; $x_4 = z_4$.

Отримаємо: $z_1^2 - z_3^2 + 4z_1 - 4z_3 = 0$;

$$\left(z_1^2 + 4z_1 + 4\right) - \left(z_3^2 + 4z_3 + 4\right) = 0;$$

$$\left(z_1 + 2\right)^2 - \left(z_3 + 2\right)^2 = 0.$$

Нехай: $Z_1 = z_1 + 2$; $Z_3 = z_3 + 2$; $Z_2 = z_2$; $Z_4 = z_4$. Тоді маємо рівняння $Z_1^2 - Z_3^2 = 0$, що визначає пару гіперплощин, які перетинаються.

4) Для четвертого рівняння: $2x_1x_4 + 8x_4 - 18 = 0$; $x_1x_4 + 4x_4 - 9 = 0$.

Позначимо $x_1 = u_1 + u_4$; $x_2 = u_2$; $x_3 = u_3$; $x_4 = u_1 - u_4$. Тоді: $u_1^2 - u_4^2 + 4u_1 - 4u_4 - 9 = 0$;

$$\left(u_1^2 + 4u_1 + 4\right) - \left(z_4^2 + 4z_4 + 4\right) - 9 = 0;$$

$$\left(z_1 + 2\right)^2 - \left(z_4 + 2\right)^2 - 9 = 0.$$

Нехай: $U_1 = \dfrac{u_1 + 2}{3}$; $U_2 = u_2$; $U_3 = u_3$; $U_4 = \dfrac{u_4 + 2}{3}$, тоді отримаємо рівняння $U_1^2 - U_4^2 = 1$ – гіперболічний циліндр індекса 1 з двовимірними твірними.

Отже, якщо розв'язок рівняння $x^2 + 8x - 65 - 10i - 18k = 0$, де $x$ – невідомий кватерніон, існує, то він знаходиться на перетині вище отриманих чотирьох гіперквадрик. ■

**2.** Розв'язати рівняння $x^2 + 4x - 10j = 0$, де $x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$, $x_l \in \mathbb{R}$, $l = \overline{1,4}$,– невідомий кватерніон.

□ Зведемо останнє рівняння до вигляду:

$$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 2ix_1x_2 + 2jx_1x_3 + 2kx_1x_4 +$$
$$+4x_1 + 4ix_2 + 4jx_3 + 4kx_4 - 10j = 0.$$

Прирівнюючи відповідно дійсні і уявні частини останнього рівняння до нуля, отримаємо систему чотирьох рівнянь:

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 4x_1 = 0; \\ 2x_1x_2 + 4x_2 = 0; \\ 2x_1x_3 + 4x_3 - 10 = 0; \\ 2x_1x_4 + 4x_4 = 0. \end{cases} \tag{8.9}$$

Зведемо кожне з рівнянь системи (8.9) до канонічного вигляду.

1) $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 4x_1 = 0$;

$$\left(x_1 + 2\right)^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - 4 = 0.$$

Перепозначимо: $X_1 = \dfrac{x_1 + 2}{2}$; $X_2 = \dfrac{x_2}{2}$; $X_3 = \dfrac{x_3}{2}$; $X_4 = \dfrac{x_4}{2}$; отримаємо рівняння $X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 - X_4^2 = 1$ – гіперболоїд індекса 3.

2) $2x_1x_2 + 4x_2 = 0$; $x_1x_2 + 2x_2 = 0$.

Нехай $x_1 = y_1 + y_2$; $x_2 = y_1 - y_2$; $x_3 = y_3$; $x_4 = y_4$, тоді отримаємо:

$$y_1^2 - y_2^2 + 2y_1 - 2y_2 = 0;$$

$$(y_1^2 + 2y_1 + 1) - (y_2^2 + 2y_2 + 1) = 0;$$

$$(y_1 + 1)^2 - (y_2 + 1)^2 = 0.$$

Нехай $Y_1 = y_1 + 1$; $Y_2 = y_2 + 1$; $Y_3 = y_3$; $Y_4 = y_4$, тоді маємо $Y_1^2 - Y_2^2 = 0$ – пара гіперплощин, що перетинаються.

3) $2x_1x_3 + 4x_3 - 10 = 0$; $x_1x_3 + 2x_3 - 5 = 0$.

Перепозначимо: $x_1 = z_1 + z_3$; $x_2 = z_2$; $x_3 = z_1 - z_3$; $x_4 = z_4$. Отримаємо: $z_1^2 - z_3^2 - 2z_1 - 2z_3 - 5 = 0$;

$$\left(z_1 + 1\right)^2 - \left(z_3 + 1\right)^2 - 5 = 0 .$$

Нехай $Z_1 = \dfrac{z_1 + 1}{\sqrt{5}}$; $Z_2 = z_2$; $Z_3 = \dfrac{z_3 + 1}{\sqrt{5}}$; $Z_4 = z_4$, тоді останнє рівняння перепишемо у вигляді: $Z_1^2 - Z_2^2 = 1$. Як відомо, дане рівняння визначає гіперболічний циліндр індекса 1 з двовимірними твірними та площиною центрів.

4) $2x_1x_4 + 4x_4 = 0$.

Дане рівняння подібне до другого, отже, отримаємо пару гіперплощин, що перетинаються.

Якщо існує розв'язок вихідного рівняння, то він знаходиться на перетині вище знайдених гіперквадрик. Чи не можна явно знайти цей розв'язок? Отже, розв'яжемо систему (8.9), яка рівносильна такій системі:

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 4x_1 = 0; \\ x_1 x_2 + 2x_2 = 0; \\ x_1 x_3 + 2x_3 - 5 = 0; \\ x_1 x_4 + 2x_4 = 0. \end{cases} \tag{8.10}$$

I. Якщо $x_1 = -2$ система (8.10) не має сенсу, бо з третього рівняння випливає: $-5 = 0$, що неможливо.

II. Нехай $x_1 \neq -2$. Тоді система (8.10) рівносильна такій системі:

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 4x_1 = 0; \\ x_2 = 0; \\ x_3 = \dfrac{5}{x_1 + 2}; \\ x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^2 - 0 - \dfrac{25}{\left(x_1 + 2\right)^2} - 0 + 4x_1 = 0; \\ x_2 = 0; \\ x_3 = \dfrac{5}{x_1 + 2}; \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо окремо перше рівняння останньої системи.

$$x_1^2 - \frac{25}{\left(x_1 + 2\right)^2} + 4x_1 = 0;$$

$$\frac{x_1^2 (x_1^2 + 4x_1 + 4) - 25 + 4x_1 (x_1^2 + 4x_1 + 4)}{\left(x_1 + 2\right)^2} = 0;$$

$$x_1^4+4x_1^3+4x_1^2-25+4x_1^3+16x_1^2+16x_1=0;$$
$$x_1^4+8x_1^3+20x_1^2+16x_1-25=0.$$

Зробимо заміну: $x_1=y+2$. Тоді отримаємо:

$$(y-2)^4+8(y-2)^3+20(y-2)^2+16(y-2)-25=0;$$
$$\left(y^2-4y+4\right)^2+8\left(y^3-6y^2+12y-8\right)+$$
$$+20\left(y^2-4y+4\right)+16(y-2)-25=0;$$
$$y^4+16y^2+16-8y^3+8y^2-32y+8y^3-48y^2+$$
$$+96y-64+20y^2-80y+80+16y-32-25=0;$$
$$y^4-4y^2-25=0.$$

Введемо заміну змінних $y^2=\overline{y}$, $\overline{y}\geq 0$. Останнє рівняння набуває вигляду $\overline{y}^2-4\overline{y}-25=0$ і його дискримінант $D=16+100=116$. Тоді $\overline{y}_1=\dfrac{4+2\sqrt{29}}{2}=2+\sqrt{29}$; $\overline{y}_2=\dfrac{4-2\sqrt{29}}{2}=2-\sqrt{29}$.

Корінь $\overline{y}_2=2-\sqrt{29}$ не задовольняє умову $\overline{y}\geq 0$. Розглянемо рівняння $y^2=2+\sqrt{29}$. Звідси $y_1=\sqrt{2+\sqrt{29}}$; $y_2=-\sqrt{2-\sqrt{29}}$, тобто $(x_1)_1=\sqrt{2+\sqrt{29}}-2$; $(x_1)_2=-\sqrt{2+\sqrt{29}}-2$.

Повертаючись до системи (8.10), отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{2+\sqrt{29}} - 2; \\ x_2 = 0; \\ x_3 = \dfrac{5}{\sqrt{2+\sqrt{29}}}; \\ x_4 = 0; \end{cases}$$

$A(\sqrt{2+\sqrt{29}} - 2\,;0\,;\dfrac{5}{\sqrt{2+\sqrt{29}}}\,;0)$, або

$$\begin{cases} x_1 = -\sqrt{2+\sqrt{29}} - 2; \\ x_2 = 0; \\ x_3 = -\dfrac{5}{\sqrt{2+\sqrt{29}}}; \\ x_4 = 0; \end{cases}$$

$B(-\sqrt{2+\sqrt{29}} - 2\,;0\,;-\dfrac{5}{\sqrt{2+\sqrt{29}}}\,;0)$.

Отже, бачимо, що розв'язок рівняння $x^2 + 4x - 10j = 0$ знаходиться на перетині чотирьох гіперквадрик (гіперболоїд індекса 3; дві пари гіперплощин, що перетинаються; гіперболічний циліндр індекса 1 з двовимірними твірними та площиною центрів). Цим перетином є дві точки $A(\sqrt{2+\sqrt{29}} - 2\,;0\,;\dfrac{5}{\sqrt{2+\sqrt{29}}}\,;0)$ та $B(-\sqrt{2+\sqrt{29}} - 2\,;0\,;-\dfrac{5}{\sqrt{2+\sqrt{29}}}\,;0)$.■

### 8.3.Завдання для самостійної роботи

**1.** Знайти геометричне тлумачення розв'язків рівняння $x^2+8x-65-10i+j-18k=0$, де $x=x_1+ix_2+jx_3+kx_4$, $x_l\in\mathbb{R}$, $l=\overline{1,4}$ – невідомий кватерніон.

**2.** Розв'язати рівняння $x^2+4x-i+10j=0$, якщо $x=x_1+ix_2+jx_3+kx_4$, $x_l\in\mathbb{R}$, $l=\overline{1,4}$,– невідомий кватерніон.

**3.** Розв'язати рівняння $x^2=a$, якщо $x=x_1+ix_2+jx_3+kx_4$, $x_l\in\mathbb{R}$, $l=\overline{1,4}$,– невідомий кватерніон, $a$ – відомий кватерніон.

**4.** Розв'язати рівняння $x^3=a$, якщо $x=x_1+ix_2+jx_3+kx_4$, $x_l\in\mathbb{R}$, $l=\overline{1,4}$,– невідомий кватерніон, $a$ – відомий кватерніон.

**5.** Розв'язати рівняння $x^2=a$, якщо $x=x_1+ix_2+jx_3+kx_4$, $x_l\in\mathbb{R}$, $l=\overline{1,4}$,– невідома октава, $a$ – відома октава.

## §9. Сучасні підходи до введення поняття похідної функцій кватерніонної змінної

У цьому параграфі розглянемо деякі із відомих в сучасному кватерніонному аналізі підходів до побудови теорії диференціального числення функцій кватерніонної змінної.

### 9.1. Історія розвитку кватерніонного числення

Кватерніони зустрічаються ще в XVIII столітті в роботах Л. Ейлера і К. Ф. Гаусса. Відзначимо також, що Б. О. Родрігес в 1840 р. прийшов до закону еквівалентному правилу множення кватерніонів, при вивченні поворотів твердого тіла. Проте творцем кватерніонного числення прийнято вважати видатного ірландського вченого В. Р. Гамільтона. У 1843 р. він незалежно відкрив кватерніони в результаті пошуку алгебраїчних об'єктів, що мають в тривимірному просторі ту ж геометричну інтерпретацію, що і комплексні числа на площині. Такий підхід виявився незвичайно плідним, оскільки дозволяв оперувати геометричними об'єктами як алгебраїчними величинами. Тому не дивно, що залишок свого життя В. Р. Гамільтон присвятив розробці, популяризації застосувань алгебри кватерніонів в механіці і фізиці. В подальшому розвитку алгебри кватерніонів і її застосувань в математиці і фізиці умовно виділимо три напрямки [1].

До першого з них можна віднести суто алгебраїчні роботи А. Келі, В. К Кліффорда, Б. Пірса, К. С. Парса, Г. Фробеніуса, виконані приблизно з 1850 по 1900 роки, в яких було встановлено зв'язок кватерніонів з матрицями і визначено місце кватерніонів в системі різних алгебр, доведені положення, звані відповідно теоремами Фробеніуса і Гурвіца.

Другий напрямок пов'язаний в основному з іменами В. К. Кліффорда і А. П. Котельникова. У роботах Кліффорда отримала подальший розвиток теорія комплексних кватерніонів (бікватерніонів). Висунута Котельниковим ідея побудови теорії векторів в неевклідових просторах постійної кривини розвивається на основі поєднання кватерніонного числення з векторною параметризацією.

Третій напрям розвитку кватерніонного числення і його фізичних застосувань можна умовно характеризувати як аналітичний.

Після В. Р. Гамільтона значну роль у розвитку застосувань кватерніонного числення у фізиці, а також в пропаганді широкого застосування кватерніонів в різних областях природознавства зіграв П. Г. Тет. Ймовірно під його впливом Дж. К. Максвелл використовував кватерніони в своєму «Трактаті з електрики і магнетизму». Необхідно відзначити, що Дж. К. Максвелл, котрий використовував у своєму «Трактаті…» векторні частини кватерніонів, дав потужний поштовх розвитку векторного числення і, судячи за деякими його висловлюваннями, був близький до того, щоб вважати кватерніонне числення чимось на кшталт «універсальної арифметики».

На сучасному етапі є актуальним питання розвитку теорії функцій кватерніонної змінної. Існує ряд можливостей для визначення аналітичності кватерніоннозначних функцій кватерніонного аргумента. У зв'язку з цим можна відзначити різні, – більш менш вдалі спроби побудови теорії кватерніонних функцій від кватерніонів-аргументів. Однак роботи Фютера (R. Fueter), ймовірно, є найбільш конструктивними вже хоча б тому, що вони пов'язані з рівняннями Максвелла [5]. Коротко охарактеризуємо застосування кватерніонів у фізиці. Воно ґрунтується на можливості параметризації з їх допомогою важливих для практичних застосувань груп просторово-часової та внутрішньої симетрії, а також ряду їх представлень. Використання об'єктів однієї алгебраїчної природи дозволяє при цьому істотно спростити аналіз відповідних динамічних рівнянь і їх розв’язків.

Іншим застосуванням кватерніонів в даний період є узагальнення квантової механіки, що складається з заміни стандартного гільбертового простору цієї теорії, визначеного над полем комплексних чисел, на гільбертів простір, визначеного над тілом кватерніонів.

Теорія кватерніонів захопила багатьох математиків. Тільки в XIX ст. було видано близько 600 наукових робіт, присвячених кватерніонам. В цих роботах кватерніони успішно застосовуються для вирішення різних задач з фізики, геометрії, теорії чисел. У ряді університетів викладання кватерніонів стало обов'язковим, з ними знайомили учнів в багатьох середніх школах. У 1895 р. була організована Міжнародна асоціація сприяння вивченню кватерніонів і родових систем.

### 9.2. Один із найбільш відомих підходів до побудови теорії кватерніонного аналізу

Одним із найбільш відомих підходів до побудови теорії функції кватерніонної змінної (та кватерніонного аналізу в цілому) є підхід описаний у роботі Ентоні Садбері [23]. Зупинимося коротко на основних положеннях цієї статті, переклад якої А. Виноградовой російською мовою вперше був опублікований у журналі «Гиперкомплексные числа в геометрии и физике» у 2004 році [15].

Функція $f:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ називається дійсно диференційовною, якщо вона диференційовна як функція чотирьох дійсних змінних [15]. Тоді її диференціал у точці $q\in\mathbb{H}$ буде $\mathbb{R}$-лінійним відображенням $df_q:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$.

Зовнішня алгебра, алгебра Грассмана, векторного простору $V$ над полем $k$ – асоціативна алгебра над $k$, операції в якій позначається знаком ∧, породженими елементами якої є $1, e_1,\ldots,e_n$, де $e_1,\ldots,e_n$ – базис простору $V$, а визначальні співвідношення мають вигляд [15]:

$$e_i\wedge e_j=-e_j\wedge e_i\left(i,j=1,\ldots,\mathrm{n}\right),\ e_i\wedge e_i=0,$$

$$1\wedge e_i=e_i\wedge 1=e_i\left(i,j=1,\ldots,\mathrm{n}\right),\ 1\wedge 1=1.$$

Зовнішня $k$ – форма в $\mathbb{R}^n$ – це функція векторних аргументів, які лінійно залежать від кожного аргументу і є антисиметрична. Множина зовнішніх $k$ – форм утворює лінійний простір з базисом із форм $dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}$, $i_1<i_2<\ldots<i_k$. Останні визначаються рівностями:

$$dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k},\left(e_{j_1},\ldots e_{j_k}\right)=\begin{cases}1,\ \textit{якщо}\ i_1=j_1,\ldots i_k=j_k,\\0\ \ \textit{в інших випадках при}\ \ j_1<\ldots<j_k,\end{cases}$$

де $\left(e_1,...,e_n\right)$ базис в $\mathbb{R}^n$.

Диференціальні $k$ форми – це функції змінної $x \in \mathbb{R}^n$, які приймають значення в просторі зовнішніх $k$ форм. Таким чином, диференціальна $k$ форма $\omega$ це зовнішня форма $\omega = \sum_{i_1<..<i_k} f_{i_1...i_k} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$ з функціональними коефіцієнтами $f_{i_1...i_k}$, які залежать від $x$. [15]

Ідентифікуючи дотичний простір у кожній точці $\mathbb{H}$ з самим $\mathbb{H}$, можна розглядати диференціал як кватерніоннозначну 1-форму [15]

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz .$$

Диференціал тотожної функції має вигляд [10]: $dq = dt + idx + jdy + kdz$ і розглядається як $\mathbb{R}$-лінійне перетворення $\mathbb{H}$, $dq$ – тотожне відображення. Його зовнішній добуток на себе має вигляд:

$$dq \wedge dq = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} e_i dx_i = idydz + jdzdx + kdxdy .$$

Нарешті, 3 – форма $Dq$ визначається як $\left\langle h_1, Dq\left(h_2,h_3,h_4\right)\right\rangle = v\left(h_1,h_2,h_3,h_4\right)$,

для всіх $h_1,...,h_4 \in \mathbb{H}$. Таким чином $Dq\left(i,j,k\right) = 1$ і $Dq\left(1,e_i,e_j\right) = -e_{ijk}e_k$. В координатах для $Dq$ отримаємо:

$$Dq = dx \wedge dy \wedge dz - \frac{1}{2}e_{ijk}e_i dt \wedge dx_j \wedge dx_k =$$

$$= dx \wedge dy \wedge dz - idt \wedge dy \wedge dz - jdt \wedge dz \wedge dx - kdt \wedge dx \wedge dy.$$

Оскільки, диференціал кватерніоннозначної функції на $\mathbb{H}$ є елементом $F_1$ ($F_1$: множина $\mathbb{R}$-лінійних відображень з $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$, яка формує двосторонній векторний простір на $\mathbb{H}$ розмірності 4), то до нього можна застосувати відображення $\Gamma_r$:

$$\Gamma_r\left(df\right)=\frac{\partial f}{\partial t}+i\frac{\partial f}{\partial x}+j\frac{\partial f}{\partial y}+k\frac{\partial f}{\partial z} \tag{9.1}$$

Введемо наступні позначення для диференціального оператора, записаного в (9.1), і для інших пов'язаних з ним диференціальних операторів:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{\partial}_l f &= \frac{1}{2}\Gamma_r\left(df\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}+e_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\\
\partial_l f &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}-e_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\\
\overline{\partial}_r f &= \Gamma_l\left(df\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x_i}e_i\right)\\
\partial_r f &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}-e_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\\
\Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned}\right\} \tag{9.2}$$

Зауважимо, що $\overline{\partial}_l,\partial_l,\overline{\partial}_r,\partial_r$ усі комутують і

$$\Delta=4\partial_r\overline{\partial}_r=4\partial_l\overline{\partial}_l \tag{9.3}$$

Функція $f:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ кватерніонно-диференційовна зліва в точці $q$ [23], якщо границя $\frac{df}{dq}=\lim\limits_{h\to 0}\left[h^{-1}\left(f\left(q+h\right)-f\left(q\right)\right)\right]$ існує.

Функція $f:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ регулярна зліва в $q\in\mathbb{H}$, якщо вона дійсно-диференційовна в $q$ і існує кватерніон $f_l^{'}\left(q\right)$ такий, що

$$d\left(dq\wedge dqf\right)=Dqf_l^{'}\left(q\right). \tag{9.4}$$

Вона є регулярною справа, якщо в $q\in\mathbb{H}$ існує кватерніон $f_r^{'}\left(q\right)$ такий, що $d\left(fdq\wedge dq\right)=f_r^{'}\left(q\right)Dq.$

Очевидно, що теорія регулярних зліва функцій повністю еквівалентна теорії функцій регулярних справа. Для визначеності розглядаються тільки регулярні зліва функції, які називають просто регулярними [15].

Запишемо $f_l^{'}(q) = f'(q)$ і назвемо її похідною функції $f$ в $q$.

Переписавши (9.4) у вигляді $dq \wedge dq \wedge df = Dqf^{'}(q)$ і виразивши ці трилінійні функції через аргументи $(i, j, k)$ і $(1, i, j)$, маємо два рівняння, перше з яких дає зображення похідної

$$f' = -2\partial_l f = -\frac{\partial f}{\partial t} + i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z} \qquad (9.5)$$

а друге – критерій Коші-Рімана-Фютера регулярності функції кватерніонної змінної.

**Твердження.** [15] (Рівняння Коші-Рімана-Фютера). Дійсно-диференційовна функція $f$ регулярна в точці $q$ тоді й тільки тоді, коли $\overline{\partial}_l f = 0$, тобто

$$\frac{\partial f}{\partial t} + i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \ . \qquad (9.6)$$

Якщо позначити $q = v + iw,\ f(q) = g(u, w) + jh(u, w)$, співвідношення (9.6) стає парою комплексних рівнянь

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{v}} = \frac{\partial h}{\partial \overline{w}},\ \frac{\partial g}{\partial w} = -\frac{\partial h}{\partial v} \qquad (9.7)$$

які можуть розглядатися як комплексифікація рівнянь Коші-Рімана для функції комплексної змінної.

Рівняння (9.6) називається рівнянням Коші-Рімана-Фютера, а диференціальний оператор $\overline{\partial}_l = \frac{\partial}{\partial t} + i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$ – оператором Коші-Рімана-Фютера.

У статті [23] зустрічаємо опис алгоритму Фютера побудови аналітичних функцій кватерніонної змінної, використовуючи який легко будуємо основні елементарні функції від кватерніонів.

Так, наприклад, функції синус і косинус кватерніонної змінної зображаються так [17 ]:

$$\sin q = \sin t \cdot ch\left|Puq\right| + \frac{Puq}{\left|Puq\right|} \cdot \cos t \cdot sh\left|Puq\right|,$$

$$\cos q = \cos t \cdot ch\left|Puq\right| - \frac{Puq}{\left|Puq\right|} \cdot \sin t \cdot sh\left|Puq\right|,$$

де $Puq = xi + yj + zk$, $\left|Puq\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $q = t + xi + yj + zk$, $t, x, y, z \in \mathbb{R}$.

У [17] детально описано область аналітичності функції $y = \sin q$ та ряд інших властивостей цієї функції. Легко бачити, що, задовольняючи умову (9.6) отримаємо умову регулярності для функції $y = \sin q$: $-2\cos t \cdot \frac{sh\left|Puq\right|}{\left|Puq\right|} = 0$.

Окрім цього, використовуючи формулу (9.5), маємо: $\left(\sin q\right)' = -2\cos q$ в області регулярності функції $y = \sin q$.

Зауважимо, що у виданні статті під такою ж назвою опублікованій автором на два роки раніше [19] спостерігаємо співпадання матеріалу аж до моменту коли вводиться поняття регулярної зліва функції. Наведемо наш переклад цієї частини статті. [19]

Функція $f: \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ регулярна зліва в $q \in \mathbb{H}$, якщо вона дійсно-диференційовна в $q$ і існує кватерніон $f_l^{'}\left(q\right)$ такий, що

$$d\left(dq \wedge dqf\right) = -2Dqf_l^{'}\left(q\right) \tag{9.8}$$

Вона є регулярною справа, якщо в $q \in \mathbb{H}$ існує кватерніон $f_r^{'}\left(q\right)$ такий, що

$$d\left(fdq \wedge dq\right) = -2f_r^{'}\left(q\right)Dq.$$

Також доведення теореми про рівняння Коші– Рімана – Фютера подано більш детально.

*Теорема ( Рівняння Коші – Рімана – Фютера)*

Дійсна диференційовна функція $f$ є регулярною тоді і тільки тоді коли

$$\Gamma_r\left(df_q\right)=0. \tag{9.9}$$

*Доведення.* Нехай $f$ є регулярною в $q$. Тоді з (9.8)

$$dq\wedge dq\wedge df_q=-Dqf'(q)$$

Виразивши ці трилінійні функції через аргументи $(i,j,k)$ і використавши в якості аргументів $(1,\mathrm{i},\mathrm{j})$ отримаємо: $(ij-ji)df_q(1)=2kf'(q)$.

Отже,

$$f'(q)=df_q(1)=-\left\{idf_q(i)+jdf_q(j)+kdf_q(k)\right\} \tag{9.10}$$

У порівнянні з (9.2), ми бачимо, що $\Gamma_r\left(df_q\right)=0.$ І навпаки, якщо $\Gamma_r\left(df_q\right)=0$ ми можемо стверджувати, що $f'(q)=df_q(1)$, а потім з оцінки як зазначено вище показуємо $dq\wedge dq\wedge df_q=2D_q f'(q)$, тобто $f$ є регулярна.

Звернемо увагу на те, що (9.9) і (9.10) можна записати у вигляді

$$2\bar{d}_l f=\frac{\partial f}{\partial t}+i\frac{\partial f}{\partial x}+j\frac{\partial f}{\partial y}+k\frac{\partial f}{\partial z}=0 \tag{9.11}$$

$$\text{і } f'(q)=\frac{\partial f}{dt}. \tag{9.12}$$

Отже,

$$f'=\partial_l f=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial t}-i\frac{\partial f}{\partial x}-j\frac{\partial f}{\partial y}-k\frac{\partial f}{\partial z}\right). \tag{9.13}$$

Отже, цікавим є те, що Садбері у статті [24] наводить формулу (9.12), для обчислення $f'(q)$ для функцій кватерніонної змінної, що володіють властивістю регулярності в певній області множини $\mathbb{H}$. В перевиданні цієї статті [23] аналог цієї формули відсутній. Але легко бачити, що аналогом формули (9.12) у статті [15] є формула:

$$f'(q) = -2\frac{\partial f}{\partial t} \tag{9.14}$$

Окрім того очевидною є відмінність в означеннях функцій регулярних зліва (справа) і формулах (9.5) і (9.13) для обчислення похідних.

Самостійною частиною цього параграфа даної роботи є знаходження умов регулярності та обчислення похідних функцій $y = \operatorname{sh} q$ та $y = ch\, q$ за запропонованим у [15] алгоритмом.

**Приклади розв'язування задач**

Розглянемо ще деякі приклади функцій кватерніонної змінної та знайдемо їх похідні. Функції синус і косинус гіперболічні кватерніонної змінної зображаються так [18 ]:

$$\operatorname{sh} q = \operatorname{sh t} \cdot \cos|Puq| + \frac{Puq}{|Puq|}\cdot \operatorname{ch} t \cdot \sin|Puq|,$$

$$\operatorname{ch} q = \operatorname{ch} t \cdot \cos|Puq| + \frac{Puq}{|Puq|}\cdot \operatorname{sh} t \cdot \sin|Puq|$$

**1.** Знайдемо похідну функції $y = \operatorname{sh} q$.

□Обчислимо:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \operatorname{ch} t \cdot \cos|Puq| + \frac{Puq}{|Puq|}\cdot \operatorname{sh} t \cdot \sin|Puq|,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\operatorname{sh} t \cdot \sin|Puq| \cdot \frac{x}{|Puq|} + \operatorname{sh} t \cdot \frac{i}{|Puq|}\cdot \sin|Puq| - \frac{\operatorname{sh} t \cdot x \cdot Puq}{|Puq|^3}\cdot \sin|Puq| + \cos|Puq| \cdot \frac{x \cdot Puq}{|Puq|^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\operatorname{sh} t \cdot \sin|Puq| \cdot \frac{y}{|Puq|} + \operatorname{sh} t \cdot \frac{j}{|Puq|}\cdot \sin|Puq| - \frac{\operatorname{sh} t \cdot y \cdot Puq}{|Puq|^3}\cdot \sin|Puq| + \cos|Puq| \cdot \frac{y \cdot Puq}{|Puq|^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\operatorname{sh} t \cdot \sin|Puq| \cdot \frac{z}{|Puq|} + \operatorname{sh} t \cdot \frac{k}{|Puq|}\cdot \sin|Puq| - \frac{\operatorname{sh} t \cdot z \cdot Puq}{|Puq|^3}\cdot \sin|Puq| + \cos|Puq| \cdot \frac{z \cdot Puq}{|Puq|^2}$$

Задовольняючи умову регулярності (9.6) отримаємо:

$$\operatorname{ch} t \cdot \cos|Puq| - 2\operatorname{sh} t \cdot \frac{\sin|Puq|}{|Puq|} - \cos|Puq| = 0.$$

Знайдемо похідну функції синус гіперболічний кватерніонної змінної, використовуючи формулу (9.5). Очевидно, що в області аналітичності $\left(\operatorname{sh} q\right)' = -2\operatorname{ch} q$ .■

**2.** Знайдемо похідну функції $y = ch\, q$ .

□Задовольняючи умову (9.6) і міркуючи так само як і в попередньому прикладі, отримаємо умову аналітичності для вказаної функції:

$$\operatorname{sh} t \cdot \cos\left|Puq\right| - 2\operatorname{sh} t \cdot \frac{\sin\left|Puq\right|}{\left|Puq\right|} - \cos\left|Puq\right| = 0 .$$

Знайдемо похідну функції косинус гіперболічний кватерніонної змінної, використовуючи формулу (5). Нами доведено, що в області аналітичності $\left(\operatorname{ch} q\right)' = -2\operatorname{sh} q$ .■

## 9.3. Спроби узгодження умов лівої і правої аналітичності кватерніонних функцій

У цьому параграфі наведемо здійснений нами переклад деяких найбільш цікавих положень статті: Quaternion analysis Khaled Abdel-Khalek Dipartimento di Fisica – Universita di Lecce – Lecce, 73100, Italy – 1996. [22]. При цьому будемо намагатися зберегти стиль викладу матеріалу та позначення автора статті.

У чотиривимірному просторі кватерніони є природним узагальненням комплексних чисел. В $\mathbb{R}^4$ добре відомі координати були об'єднанні в кватерніон $x_\mu = \left\{x_0, x_1, x_2, x_3\right\} \Rightarrow q = x_0 + e_i x_i$, де $e_i$ є уявними кватерніонними одиницями, що задовольняють рівність $e_i e_j = -\delta_{ij} + e_{ijk} e_k$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$, де $\delta_{ij}$ – символ Кронекера-Капеллі, $e_{ijk}$ – символ Леві-Чевіти.

Кватерніон $\overline{q} = x_0 - e_i x_i$ називається спряженим до $q$ .

Але, на жаль, кватерніонний аналіз виявився дуже делікатною темою. В повній аналогії до комплексного аналізу, кватерніонна функція

$$f(q) = f_0(x_\mu)e_0 + f_1(x_\mu)e_1 + f_2(x_\mu)e_2 + f_3(x_\mu)e_3$$

є аналітичною, якщо вона задовольняє наступні узагальнені умови Коші – Рімана:

$$\frac{\partial f(q)}{\partial x_0} = -e_1 \frac{\partial f(q)}{\partial x_1} = -e_2 \frac{\partial f(q)}{\partial x_2} = -e_3 \frac{\partial f(q)}{\partial x_3}. \qquad (9.15)$$

Наступні чотири рівності теж задають ту ж похідну незважаючи на зміну порядку множників. Ми тільки що зустріли першу перешкоду, а саме положення множників $e_i$ в добутках. Чому б умову Коші – Рімана не записати у вигляді:

$$\frac{\partial f(q)}{\partial x_0} = -\frac{\partial f(q)}{\partial x_1}e_1 = -\frac{\partial f(q)}{\partial x_2}e_2 = -\frac{\partial f(q)}{\partial x_3}e_3 ? \qquad (9.16)$$

Існує невизначеність у зв'язку з некомутативністю множення кватерніонів. Рівності (9.15), (9.16) називають лівою і правою умовами кватерніонної аналітичності відповідно. Але якщо ми хочемо перевести чотиривимірну фізику на кватерніонну мову, то якою похідною ми повинні користуватися? Насправді обидві рівності (9.15), (9.16) є занадто обмежені. Щоб показати це просто підставимо $f(q)$ в (9.15), (9.16), і отримаємо для компонент біля уявних одиниць наступні рівності:

а) для лівого випадку

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f_0}{\partial x_0} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_3}{\partial x_3};\\
&\frac{\partial f_1}{\partial x_0} = -\frac{\partial f_0}{\partial x_1} = -\frac{\partial f_3}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_3};\\
&\frac{\partial f_2}{\partial x_0} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = -\frac{\partial f_0}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_3};\\
&\frac{\partial f_3}{\partial x_0} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_0}{\partial x_3},
\end{aligned} \qquad (9.17)$$

б) для правого випадку

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_0}=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}=\frac{\partial f_2}{\partial x_2}=\frac{\partial f_3}{\partial x_3};$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial x_0}=-\frac{\partial f_0}{\partial x_1}=\frac{\partial f_3}{\partial x_2}=-\frac{\partial f_2}{\partial x_3};$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_0}=-\frac{\partial f_3}{\partial x_1}=-\frac{\partial f_0}{\partial x_2}=\frac{\partial f_1}{\partial x_3}; \tag{9.18}$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial x_0}=\frac{\partial f_2}{\partial x_1}=-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}=-\frac{\partial f_0}{\partial x_3}.$$

Співвідношення (9.17), (9.18) можна записати у такому вигляді:

$$\frac{\partial^2 f_0(q)}{\partial x_0^2}=-\frac{\partial^2 f_0(q)}{\partial x_1^2}=-\frac{\partial^2 f_0(q)}{\partial x_2^2}=-\frac{\partial^2 f_0(q)}{\partial x_3^2}=0\,.$$

Аналогічні співвідношення можуть бути отримані для $f_1, f_2\, і\, f_3$.

Єдину успішну спробу послабити це обмеження зробив Фютер, він так визначив умову аналітичності:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{q}} f(q)=0, \text{ де } \frac{\partial}{\partial \bar{q}} \equiv \frac{\partial}{\partial x_0}+e_1\frac{\partial}{\partial x_1}+e_2\frac{\partial}{\partial x_2}+e_3\frac{\partial}{\partial x_3}\,.$$

Але, знову ж виникає проблема з некомутативністю множення кватерніонів. Фютер визначив ліву умову аналітичності:

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_0}-\frac{\partial f_1}{\partial x_1}-\frac{\partial f_2}{\partial x_2}-\frac{\partial f_3}{\partial x_3}=0;$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial x_0}+\frac{\partial f_0}{\partial x_1}+\frac{\partial f_3}{\partial x_2}-\frac{\partial f_2}{\partial x_3}=0;$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_0}-\frac{\partial f_3}{\partial x_1}+\frac{\partial f_0}{\partial x_2}+\frac{\partial f_1}{\partial x_3}=0;$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial x_0}+\frac{\partial f_2}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+\frac{\partial f_0}{\partial x_3}=0,$$

в той час як для правої умови аналітичності маємо:

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_0}-\frac{\partial f_1}{\partial x_1}-\frac{\partial f_2}{\partial x_2}-\frac{\partial f_3}{\partial x_3}=0;$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial x_0}+\frac{\partial f_0}{\partial x_1}-\frac{\partial f_3}{\partial x_2}+\frac{\partial f_2}{\partial x_3}=0;$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_0}+\frac{\partial f_3}{\partial x_1}+\frac{\partial f_0}{\partial x_2}-\frac{\partial f_1}{\partial x_3}=0;$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial x_0}-\frac{\partial f_2}{\partial x_1}+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+\frac{\partial f_0}{\partial x_3}=0.$$

Цілком очевидно, що ці умови повністю відрізняються від «стандартних» лівих/правих аналітичних умов визначених в (9.17), (9.18).

Нам потрібно знайти множину аналітичних диференційовних кватерніоннозначних функцій, що узагальнює відомі поняття комплексного аналізу. Єдиний спосіб послабити умови (9.17), (9.18) полягає у використанні обох похідних (лівої і правої) разом, щоб визначити нову умову аналітичності. Найпростіший випадок

$$f'(q)=\frac{\partial f(q)}{\partial x_0}=-\frac{1}{2}\left(e_1\frac{\partial f(q)}{\partial x_1}+\frac{\partial f(q)}{\partial x_1}e_1\right)=$$
$$=-\frac{1}{2}\left(e_2\frac{\partial f(q)}{\partial x_2}+\frac{\partial f(q)}{\partial x_2}e_2\right)=-\frac{1}{2}\left(e_3\frac{\partial f(q)}{\partial x_3}+\frac{\partial f(q)}{\partial x_3}e_3\right). \tag{9.19}$$

Але, на жаль, це просте узагальнення також обмежене. Після підстановки $f(q)$, отримаємо:

$$f'(q)=\frac{\partial f_0}{\partial x_0}+\frac{\partial f_1}{\partial x_0}e_1+\frac{\partial f_2}{\partial x_0}e_2+\frac{\partial f_3}{\partial x_0}e_3=$$
$$=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}-\frac{\partial f_0}{\partial x_1}e_1=\frac{\partial f_2}{\partial x_2}-\frac{\partial f_0}{\partial x_2}e_2=\frac{\partial f_3}{\partial x_3}-\frac{\partial f_0}{\partial x_3}e_3,$$

призводить до

$$\begin{gathered}\frac{\partial f_0}{\partial x_0}=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}=\frac{\partial f_2}{\partial x_2}=\frac{\partial f_3}{\partial x_3};\\ \frac{\partial f_1}{\partial x_0}=-\frac{\partial f_0}{\partial x_1};\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_0}=-\frac{\partial f_0}{\partial x_2};\\ \frac{\partial f_3}{\partial x_0}=-\frac{\partial f_0}{\partial x_3}.\end{gathered} \tag{9.20}$$

Останні співвідношення дійсно є умовами аналітичності для деяких функцій. Разом з тим можна навести приклади кватерніоннозначних функцій для яких ці умови не будуть виконуватись всупереч аналітичності цих функцій в комплексному аналізі. Після певних досліджень можна все ж знайти визначення похідної, що імітує комплексний аналіз, а саме:

$$
\begin{aligned}
f'(q) &= \frac{\partial f_0}{\partial x_0} + \frac{\partial f_1}{\partial x_0} e_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_0} e_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_0} e_3 = \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_0}{\partial x_1} e_1 - \frac{\partial f_0}{\partial x_2} e_2 - \frac{\partial f_0}{\partial x_3} e_3 = \\
&= \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_0}{\partial x_1} e_1 - \frac{\partial f_0}{\partial x_2} e_2 - \frac{\partial f_0}{\partial x_3} e_3 = \\
&= \frac{\partial f_3}{\partial x_3} - \frac{\partial f_0}{\partial x_1} e_1 - \frac{\partial f_0}{\partial x_2} e_2 - \frac{\partial f_0}{\partial x_3} e_3,
\end{aligned}
\tag{9.21}
$$

та умови аналітичні:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f_0}{\partial x_0} = \frac{1}{x_i}\left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) f_i;\; i = 1, 2, 3 \\
&\frac{\partial f_1}{\partial x_0} = -\frac{\partial f_0}{\partial x_1}; \\
&\frac{\partial f_2}{\partial x_0} = -\frac{\partial f_0}{\partial x_2}; \\
&\frac{\partial f_3}{\partial x_0} = -\frac{\partial f_0}{\partial x_3}.
\end{aligned}
\tag{9.22}
$$

**Приклади розв’язування задач**

Наведемо приклади, які ілюструватимуть наведені теоретичні положення розглянутої вище статті.

**1.** Знайдемо похідну функції квадрат кватерніонної змінної $f(q) = q^2 = 2x_0(x_0 + e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3) - (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$, де $q = x_0 + e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3$, $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ за вказаним вище алгоритмом.

□Перевіримо умови аналітичності (9.20):

$$
\frac{\partial f_0}{\partial x_0} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 2x_0;
$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_0} = -\frac{\partial f_0}{\partial x_1} = 2x_1\,; \ \frac{\partial f_2}{\partial x_0} = -\frac{\partial f_0}{\partial x_2} = 2x_2\,; \ \frac{\partial f_3}{\partial x_0} = -\frac{\partial f_0}{\partial x_3} = 2x_3\,.$$

Перевіримо, наприклад, першу умову рівності (9.22) ($i$=1):

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_0} = \frac{1}{x_1}\left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) f_1 \ ;$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 2x_0; \ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0; \ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 0;$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_0} = \frac{1}{x_1}\left( x_1 \cdot 2x_0 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0 \right) = 2x_0\,.$$

Очевидно, що $f'(q) = 2q$. ■

**2.** Аналогічно перевіримо чи $\left(q^3\right)' = 3q^2$, $q \in \mathbb{H}$.

□Спочатку обчислимо

$$f(q) = q^3 = \left( x_0^3 - 3x_0x_1^2 - 3x_0x_2^2 - 3x_0x_3^2 \right) + \left( 3x_0^2x_1 - x_1^3 - x_1x_2^2 - x_1x_3^2 \right) e_1 +$$

$$+\left( 3x_0^2x_2 - x_2^3 - x_2x_1^2 - x_2x_3^2 \right) e_2 + \left( 3x_0^2x_3 - x_3^3 - x_3x_2^2 - x_3x_1^2 \right) e_3,$$

де $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ .

Легко переконатись,що умови аналітичності (9.20) для цієї функції не виконуються, а (9.22) виконуються. Окрім цього:

$$f'(q) = \frac{\partial f_0}{\partial x_0} + \frac{\partial f_1}{\partial x_0} e_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_0} e_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_0} e_3 = 3x_0^2 - 3x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 + 6x_0x_1e_1 + 6x_0x_2e_2 + 6x_0x_3e_3 =$$

$$= 6x_0\left( x_0 + e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3 \right) - 3x_0^2 - 3x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 = 6x_0q - 3\cdot|q|^2 = 3\cdot\left( 2x_0q - |q|^2 \right) = 3q^2.$$

Розглянемо далі функцій синус і косинус кватерніонної змінної, які мають наступний вигляд:

$$\sin q = \sin x_0 \cdot ch\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + \frac{x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \cdot \cos x_0 \cdot sh\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

,

$$\cos q = \cos x_0 \cdot ch\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} - \frac{x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \cdot \sin x_0 \cdot sh\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

,

де $q = x_0 + e_1 x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3$, $x_0, x_1, x_2, x_3 \in$ □ .■

**3.** Знайдемо похідну функції синус кватерніонної змінної.

□Спочатку перевіримо умови аналітичності (9.20). Обчислимо:

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_0} = \cos x_0 \cdot ch\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \; ;$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{x_2^2 + x_3^2}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cos x_0 \cdot sh\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cos x_0 \cdot ch\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

;

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{x_1^2 + x_3^2}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cos x_0 \cdot sh\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cos x_0 \cdot ch\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

;

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_3} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cos x_0 \cdot sh\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + \frac{x_3^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cos x_0 \cdot ch\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

;

Таким чином,

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_0} \neq \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \neq \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \neq \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \; .$$

Далі покажемо, наприклад, виконання першої умови рівності (9.22) (при $i$=1):

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_0} = \frac{1}{x_1}\left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) f_1 \; .$$

Обчислимо:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{-x_1 x_2}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cos x_0 \cdot sh\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cos x_0 \cdot ch\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{-x_1 x_3}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cos x_0 \cdot sh\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + \frac{x_1 x_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cos x_0 \cdot ch\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Виконавши, необхідні обчислення, отримуємо, що дійсно $\frac{\partial f_0}{\partial x_0} = \frac{1}{x_1}\left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) f_1$ .

Окрім цього:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_0} = -\frac{\partial f_0}{\partial x_1} = -\sin x_0 \cdot sh\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}};$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_0} = -\frac{\partial f_0}{\partial x_2} = -\sin x_0 \cdot sh\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}};$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_0} = -\frac{\partial f_0}{\partial x_3} = -\sin x_0 \cdot sh\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}.$$

Нами перевірено, що умови аналітичності (9.20) для цієї функції не виконуються, а (9.22) виконуються і $(\sin q)' = \cos q$ .■

**4.** Знайдемо похідну функції косинус кватерніонної змінної

$$f(q) = \cos q = \cos x_0 \cdot ch\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} -$$

$$-\left( \frac{x_1 e_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} + \frac{x_2 e_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} + \frac{x_3 e_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \right) \cdot \sin x_0 \cdot sh\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

де $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ .

□ Провівши міркування аналогічні до міркувань прикладу 3, маємо: $(\cos q)' = -\sin q$ . Нами перевірено, що умови аналітичності (6) для цієї функції не виконуються, а (8) виконуються. ■

Висновок:

У даному пункті наведено переклад найбільш важливих положень статті [22]. Попередньо намагаючись ввести поняття аналітичної кватерніоннозначної функції автор стикається із проблемою пов’язаною з некомутативністю множення кватерніонів.

У своїй статті він записує умови аналітичності (9.20), (9.22) та формули для обчислення похідної (9.19), (9.21), які на його думку дозволяють розв’язати цю проблему. При цьому

Khaled Abdel-Khalek аналізує відмінність цих формул від формул запропонованих ще в минулому столітті Фютером.

Цікаво що, умови аналітичності у формі (9.20) і (9.22), наприклад для функції $f(q)=q^2$ виконуються, а для функції $f(q)=q^3$ виконується тільки (9.22). Нами перевірено, що умови (9.20) для функції $f(q)=\sin q$ і $f(q)=q^3$ не виконуються (дивись приклади 2 і 3 цього параграфа).

## 9.4. Алгебраїчний підхід до теорії кватерніонного аналізу

Гордеєв Вадим Миколайович доктор технічних наук, професор, ВАТ "УкрНДІпроектстальконструкція", перший заступник голови правління. Він інженер-будівельник. Все життя займається розрахунками і дослідженнями будівельних металевих конструкцій. У 2006 році він побував на будівництві Олімпійського стадіону в м Пекіні. Несучі конструкції цього стадіону є хитросплетіння криволінійних металевих стрижнів коробчастого поперечного перерізу. Ці стрижні були виготовлені по шматках на заводі, а потім були привезені на будівництво і зістиковані. Усе зійшлося з міліметровою точністю. Лише в одному місці він помітив коротку вставку, компенсуючу, мабуть, заводський брак при виготовленні одного з елементів.

Гордеєв задумався над тим, який математичний апарат треба застосовувати, щоб описувати геометрію подібних споруд, розраховувати їх, створювати креслення, виготовляти і монтувати. І він прийшов до висновку, що найкраще для цієї мети підходить математичний апарат кватерніонів.

Оскільки інженерам більш близькі об'єкти лінійної алгебри, і тому йому здалося, що буде зрозумілішим для нього і його колег всюди представляти кватерніон як чотиривимірний вектор з дійсними компонентами. Гордеєв вирішив скласти для себе довідковий посібник з математики кватерніонів, де кватерніони - це виключно чотиривимірні вектори і в якому немає навіть згадки про гіперкомплексні числа.

Розглянемо основні поняття за його трактуванням.

Кватерніон – це впорядкована четвірка дійсних чисел: $q = [q_0, q_1, q_2, q_3]$, яка містить в собі інформацію про скаляр і тривимірний вектор. [2]

У будь – якому кватерніоні виділяють скалярну частину: $scal\,q = q_0$, яка є скаляром, і векторну частину: $vect\,q = [q_1, q_2, q_3]$, яка є тривимірним вектором.

Для кватерніона визначено декілька скалярних характеристик:

1. Норма: $\|q\| = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$.
2. Модуль: $|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$.
3. Модуль векторної частини: $\langle q \rangle = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$.

Спряженим до кватерніона $q$ називається кватерніон $\bar{q} = [q_0, -q_1, -q_2, -q_3]$.

У кватерніонному аналізі поширеними є операції з так званими колінеарними кватерніонами. При роботі з безліччю колінеарних кватерніонів зручно зафіксувати напрям векторної частини цієї множини, яка буде константою при всіх перетвореннях, а змінними залишити два числа – скалярну частину $q_0$ і величину векторної частини кватерніона $q_\bullet$. Для задання напряму векторної частини домовимося використовувати напрямні косинуси $e_1, e_2, e_3$, що задовольняють співвідношення: $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$.

З огляду на це, кватерніон $q = [q_0, q_1, q_2, q_3]$ можна записати за допомогою п'яти чисел: $e_1, e_2, e_3, q_0, q_\bullet$, при цьому двома різними способами [2]:

$$e_1 = \frac{q_1}{q_\bullet};\ e_2 = \frac{q_2}{q_\bullet};\ e_3 = \frac{q_3}{q_\bullet};\ \text{де } q_\bullet = \pm\langle \mathrm{q} \rangle.$$

Знаки у вище наведеній формулі можна вибрати довільно: або всі верхні, або всі нижні. Важливо, щоб компоненти векторної частини кватерніона виражалися формулами: $q_1 = e_1 \cdot q_\bullet;\ q_2 = e_2 \cdot q_\bullet;\ q_3 = e_3 \cdot q_\bullet$.

Аналітичні функції кватерніона можна будувати за допомогою комплекснозначних аналітичних функцій: за допомогою відомої аналітичної функції $F$ комплексної змінної можемо побудувати однойменну аналітичну функцію кватерніонної змінної (алгоритм Фютера). Якщо припустити, що

$$q = [q_0,\ e_1 \cdot q_\bullet,\ e_2 \cdot q_\bullet,\ e_3 \cdot q_\bullet];\ f = [f_0,\ e_1 \cdot f_\bullet,\ e_2 \cdot f_\bullet,\ e_3 \cdot f_\bullet]$$

то для побудови потрібної нам функції можна скористатись залежностями [2]:

$$f_0 + i \cdot f_\bullet = f\left(q_0 + i \cdot q_\bullet\right),\ f_0 - i \cdot f_\bullet = f\left(q_0 - i \cdot q_\bullet\right),$$

$$f_0 = \mathrm{Re}\, f\left(q_0 + i \cdot q_\bullet\right),\ f_\bullet = \mathrm{Im}\, f\left(q_0 + i \cdot q_\bullet\right)$$

Розглянемо аналітичну функцію кватерніона, яка, як відомо, колінеарна своєму аргументу. Якщо кватерніон-аргумент записати у вигляді:

$$q = [q_0,\ e_1 \cdot q_\bullet,\ e_2 \cdot q_\bullet,\ e_3 \cdot q_\bullet],$$

то кватерніон-функцію можна буде записати так: $f = [f_0,\ e_1 \cdot f_\bullet,\ e_2 \cdot f_\bullet,\ e_3 \cdot f_\bullet]$,

а кватерніон-похідну від цієї функції - у вигляді: $d = [d_0,\ e_1 \cdot d_\bullet,\ e_2 \cdot d_\bullet,\ e_3 \cdot d_\bullet]$,

де

$$f_0 = \frac{f(\lambda) + f(\bar{\lambda})}{2};\ f_\bullet = \frac{f(\lambda) - f(\bar{\lambda})}{2 \cdot i};\ d_0 = \frac{f'(\lambda) + f'(\bar{\lambda})}{2};\ d_\bullet = \frac{f'(\lambda) - f'(\bar{\lambda})}{2 \cdot i}$$

$$\lambda = q_0 + i \cdot q_\bullet;\ \bar{\lambda} = q_0 - i \cdot q_\bullet;$$

$i$ – уявна одиниця.

В [2] наведено формули для визначення скалярної частини кватерніона – функції $f_0$ і величини її векторної частини $f_\bullet$ для основних аналітичних функцій, та побудовано ці функції.

Функція *d(q)* є аналітичною функцією-похідною від досліджуваної функції $f(q)$. Наприклад, якщо $f(q) = q^2$, то $d\left(q^2\right) = 2q$, якщо $f(q) = \sin q$, то $d(\sin q) = \cos q$ [2].

**Приклади розв'язування задач**

Наведемо приклади обчислення похідних деяких елементарних функцій кватерніонної змінної, використовуючи при цьому наведений у цьому параграфі алгоритм.

**1.** Обчислити похідну функції $f\left(q\right)=q^2$.

□

$$d_0=\frac{f'(\lambda)+f'(\bar{\lambda})}{2}=\frac{\left(\left(q_0+i\cdot q_\bullet\right)^2\right)'+\left(\left(q_0-i\cdot q_\bullet\right)^2\right)'}{2}=\frac{2\cdot\left(q_0+i\cdot q_\bullet\right)+2\cdot\left(q_0-i\cdot q_\bullet\right)}{2}=2q_0$$

$$d_\bullet=\frac{f'(\lambda)-f'(\bar{\lambda})}{2\cdot i}=\frac{\left(\left(q_0+i\cdot q_\bullet\right)^2\right)'-\left(\left(q_0-i\cdot q_\bullet\right)^2\right)'}{2\cdot i}=\frac{2\cdot\left(q_0+i\cdot q_\bullet\right)-2\cdot\left(q_0-i\cdot q_\bullet\right)}{2\cdot i}=2\cdot q_\bullet$$

$$d\left(q^2\right)=\begin{bmatrix} d_0 \\ e_1\cdot d_\bullet \\ e_2\cdot d_\bullet \\ e_3\cdot d_\bullet \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\cdot q_0 \\ e_1\cdot 2\cdot q_\bullet \\ e_2\cdot 2\cdot q_\bullet \\ e_3\cdot 2\cdot q_\bullet \end{bmatrix}=2\cdot\begin{bmatrix} q_0 \\ \frac{q_1}{q_\bullet}\cdot q_\bullet \\ \frac{q_2}{q_\bullet}\cdot q_\bullet \\ \frac{q_3}{q_\bullet}\cdot q_\bullet \end{bmatrix}=2\cdot\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}=2q.$$

Отже, $\left(q^2\right)'=2q$.■

**2.** Обчислити похідну функції $f\left(q\right)=q^3$.

□ Провівши міркування аналогічні до міркувань попереднього прикладу, маємо:

$$d\left(q^3\right)=\begin{bmatrix} d_0 \\ e_1\cdot d_\bullet \\ e_2\cdot d_\bullet \\ e_3\cdot d_\bullet \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3\cdot q_0^2-3\cdot q_\bullet^2 \\ e_1\cdot 6\cdot q_0\cdot q_\bullet \\ e_2\cdot 6\cdot q_0\cdot q_\bullet \\ e_3\cdot 6\cdot q_0\cdot q_\bullet \end{bmatrix}=3\cdot\begin{bmatrix} q_0^2-\cdot q_\bullet^2 \\ 2\cdot\frac{q_1}{q_\bullet}\cdot q_\bullet \\ 2\cdot\frac{q_2}{q_\bullet}\cdot q_\bullet \\ 2\cdot\frac{q_3}{q_\bullet}\cdot q_\bullet \end{bmatrix}=3\cdot q^2$$

Отже, $\left(q^3\right)' = 3q^2$.■

**3.** Обчислити похідну функції $f\left(q\right) = Ln\,q$.

□Провівши міркування аналогічні до міркувань попереднього прикладу, маємо:

$$d\left(\ln q\right) = \begin{bmatrix} d_0 \\ e_1 \cdot d_\bullet \\ e_2 \cdot d_\bullet \\ e_3 \cdot d_\bullet \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{q_0}{\|q\|} \\ -e_1 \cdot \dfrac{q_\bullet}{\|q\|} \\ -e_2 \cdot \dfrac{q_\bullet}{\|q\|} \\ -e_3 \cdot \dfrac{q_\bullet}{\|q\|} \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{q_0}{\|q\|} \\ -\dfrac{q_1}{q_\bullet} \cdot \dfrac{q_\bullet}{\|q\|} \\ -\dfrac{q_2}{q_\bullet} \cdot \dfrac{q_\bullet}{\|q\|} \\ -\dfrac{q_3}{q_\bullet} \cdot \dfrac{q_\bullet}{\|q\|} \end{bmatrix} = \frac{1}{\|q\|} \cdot \begin{bmatrix} q_0 \\ -q_1 \\ -q_2 \\ -q_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\|q\|} \cdot \overline{q} = q^{-1}.$$

Отже, $\left(Ln\,q\right)' = q^{-1}$.■

**4.** Обчислити похідну функції $f\left(q\right) = \sin q$.

□

$$d_0 = \frac{f'(\lambda) + f'\left(\overline{\lambda}\right)}{2} = \frac{\left(\sin\left(q_0 + i \cdot q_\bullet\right)\right)' + \left(\sin\left(q_0 - i \cdot q_\bullet\right)\right)'}{2} =$$

$$= \frac{\cos\left(q_0 + i \cdot q_\bullet\right) + \cos\left(q_0 - i \cdot q_\bullet\right)}{2} = \cos q_0 \cdot chq_\bullet$$

$$d_\bullet = \frac{f'(\lambda) - f'\left(\overline{\lambda}\right)}{2 \cdot i} = \frac{\left(\sin\left(q_0 + i \cdot q_\bullet\right)\right)' - \left(\sin\left(q_0 - i \cdot q_\bullet\right)\right)'}{2 \cdot i} =$$

$$= \frac{\cos\left(q_0 + i \cdot q_\bullet\right) - \cos\left(q_0 - i \cdot q_\bullet\right)}{2 \cdot i} = -\sin q_0 \cdot shq_\bullet$$

$$d\left(\sin q\right) = \begin{bmatrix} d_0 \\ e_1 \cdot d_\bullet \\ e_2 \cdot d_\bullet \\ e_3 \cdot d_\bullet \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos q_0 \cdot \mathrm{ch}\, q_\bullet \\ -e_1 \cdot \sin q_0 \cdot shq_\bullet \\ -e_2 \cdot \sin q_0 \cdot shq_\bullet \\ -e_3 \cdot \sin q_0 \cdot shq_\bullet \end{bmatrix} = \cos q.$$

Отже, $(\sin q)' = \cos q$.■

**5.** Обчислити похідну функції $f(q) = \cos q$.

□Провівши міркування аналогічні до міркувань попереднього прикладу, маємо:

$$d(\cos q) = \begin{bmatrix} d_0 \\ e_1 \cdot d_\bullet \\ e_2 \cdot d_\bullet \\ e_3 \cdot d_\bullet \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin q_0 \cdot \operatorname{ch} q_\bullet \\ -e_1 \cdot \cos q_0 \cdot shq_\bullet \\ -e_2 \cdot \cos q_0 \cdot shq_\bullet \\ -e_3 \cdot \cos q_0 \cdot shq_\bullet \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \sin q_0 \cdot \operatorname{ch} q_\bullet \\ e_1 \cdot \cos q_0 \cdot shq_\bullet \\ e_2 \cdot \cos q_0 \cdot shq_\bullet \\ e_3 \cdot \cos q_0 \cdot shq_\bullet \end{bmatrix} = -\sin q.$$

Отже, $(\cos q)' = -\sin q$.■

Висновок:

У роботах Гордеєва В. М. знаходження похідної алгоритмізовано за допомогою ряду додаткових і досить громіздких означень.

Зазначимо, що автор в роботі [2] наводить лише кінцевий вигляд функцій $f_0$ і $f_\bullet$ для побудови зображень деяких елементарних функцій кватерніонної змінної. Нами детально розписано хід отримання цих зображень для наступних функцій: $f(q) = q^2$, $f(q) = q^3$, $f(q) = Ln\, q$, $f(q) = \sin q$, $f(q) = \cos q$.

## 9.5. Кватерніонні ряди і $\mathbb{H}$ похідна

У цьому параграфі наведемо здійснений нами переклад деяких найбільш цікавих положень статті On the Differentiability of Quaternion Functions. Omar Dzagnidze. A. Razmadze Mathematical Institute of I. Javakhishvili Tbilisi State University, 2, University St., Tbilisi 0186, Georgia – 2012 [19].

Автор статті вказує на важливість теорії голоморфних (аналітичних) функцій однієї комплексної змінної, що спонукає до пошуків аналогічної теорії для функцій трьох і більше дійсних змінних.

Існують три добре відомі методи побудови теорії голоморфних функцій однієї комплексної змінної: метод похідної, поліноміальний метод і метод градієнта. У випадку функцій кватерніонів, жоден з них не призводить до задовільного кватерніонного аналогу поняття голоморфної функції [19].

Хоча підхід Фютера досить потужний і призводить до повністю сформованої теорії регулярних функцій, він має ряд істотних недоліків. Одним з таких є той факт, що навіть функції $\psi_n(z) = z^n$ можуть виявитися нерегулярними. Ще один недолік полягає в тому, що клас регулярних функцій кватерніонної змінної не утворює алгебри в тому ж сенсі, що аналітичні функції: наприклад, добуток регулярних функцій не є регулярною функцією.

Автор зазаначає, що мета статті [19] – запропонувати нове визначення похідної для кватерніонної функції однієї кватерніонної змінної і показати, що всі елементарні функції, а також функції логарифм від кватерніона мають також похідні. В статті, окрім того, наведено правила для обчислення таких похідних.

**Поняття $\mathbb{H}$ похідної**

**Означення 1.** [21] Кватерніонна функція $f(z)$, $z = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3$ визначена в деякому околі $G \subset \mathbb{H}$ точки $z^0 = x_0^0 + x_1^0 i_1 + x_2^0 i_2 + x_3^0 i_3$ називається $\mathbb{H}$ диференційовною в точці $z^0$, якщо існують дві послідовності кватерніонів $A_k(z^0)$ і $B_k(z^0)$, такі що $\sum_k A_k(z^0) B_k(z^0)$ є скінченною і приріст $f(z^0 + h) - f(z^0)$ функції $f(z)$ може бути представлений у вигляді

$$f(z^0 + h) - f(z^0) = \sum_k A_k(z^0) \cdot h \cdot B_k(z^0) + \omega(z^0, h), \qquad (9.23)$$

де $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\left|\omega(z^0, h)\right|}{|h|} = 0 \qquad (9.24)$

і $z^0+h\in G$. В цьому випадку, кватерніон $\sum_k A_k\left(z^0\right)B_k\left(z^0\right)$ називається $\mathbb{H}$ похідною функції $f$ в точці $z^0$ і позначається $f'\left(z^0\right)$.

Отже, $f'\left(z^0\right)=\sum_k A_k\left(z^0\right)B_k\left(z^0\right)$ (9.25)

Однозначність $\mathbb{H}$ похідної випливає з правої частини рівності (9.25), якщо вона існує і є частинною похідною $f'_{x_0}\left(z^0\right)$ функції $f\left(z\right)$ в точці $z^0$ відносно її дійсних змінних.

Надалі, символ $o\left(h\right)$ позначає будь-яку функцію $\omega\left(z^0,h\right)$ яка задовольняє рівність (9.24).

Наступні функції введені Гамільтоном

$$z^n,\ n=0,1,2,\dots\ ,$$

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots\ ,$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\dots,\ \sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots$$

і є основними елементарними кватерніонними функціями однієї кватерніонної змінної $z$. В статті [19] доведено, що основні елементарні функції є $\mathbb{H}$ диференційовними.

**Приклади розв'язування задач**

Застосуємо методи, запропоновані в [19], для доведення наступних тверджень:

**1.** Доведемо, що $\left(\cos z\right)'=-\sin z$, $z\in\mathbb{H}$.

□Доведення.

$$\cos(z+h)-\cos z=1-\frac{(z+h)^2}{2!}+\frac{(z+h)^4}{4!}-\frac{(z+h)^6}{6!}+\frac{(z+h)^8}{8!}-\ldots-1-\left(-\frac{z^2}{2!}\right)-\frac{z^4}{4!}-\left(-\frac{z^6}{6!}\right)-\frac{z^8}{8!}-\ldots=$$

$$=-\left(\frac{(z+h)^2-z^2}{2!}\right)+\frac{(z+h)^4-z^4}{4!}-\left(\frac{(z+h)^6-z^6}{6!}\right)+\frac{(z+h)^8-z^8}{8!}-\ldots=-\frac{1}{2!}(zh+hz)+$$

$$+\frac{1}{4!}\left(z^3h+z^2hz+zhz^2+hz^3\right)-\frac{1}{6!}\left(z^5h+z^4hz+z^3hz^2+z^2hz^3+zhz^4+hz^5\right)+$$

$$+\frac{1}{8!}\left(z^7h+z^6hz+z^5hz^2+z^4hz^3+z^3hz^4+z^2hz^5+zhz^6+hz^7\right)\ldots+o(h).$$

Тому,

$$\cos(z+h)-\cos z=\left(-\frac{z}{2!}+\frac{z^3}{4!}-\frac{z^5}{6!}+\frac{z^7}{8!}\right)h+\left(-\frac{1}{2!}+\frac{z^2}{4!}-\frac{z^4}{6!}+\frac{z^6}{8!}\right)hz+\left(\frac{z}{4!}-\frac{z^3}{6!}+\frac{z^5}{8!}\right)hz^2+$$

$$+\left(\frac{1}{4!}-\frac{z^2}{6!}+\frac{z^4}{8!}\right)hz^3+\left(-\frac{z}{6!}+\frac{z^3}{8!}\right)hz^4+\left(-\frac{1}{6!}+\frac{z^2}{8!}\right)hz^5+\ldots+o(h).$$

Звідси

$$(\cos z)'=-\frac{z}{2!}+\frac{z^3}{4!}-\frac{z^5}{6!}+\frac{z^7}{8!}+\left(-\frac{1}{2!}+\frac{z^2}{4!}-\frac{z^4}{6!}+\frac{z^6}{8!}\right)z+\left(\frac{z}{4!}-\frac{z^3}{6!}+\frac{z^5}{8!}\right)z^2+$$

$$+\left(\frac{1}{4!}-\frac{z^2}{6!}+\frac{z^4}{8!}\right)z^3+\left(-\frac{z}{6!}+\frac{z^3}{8!}\right)z^4+\left(-\frac{1}{6!}+\frac{z^2}{8!}\right)z^5+\ldots=$$

$$=-\frac{z}{2!}+\frac{z^3}{4!}-\frac{z^5}{6!}+\frac{z^7}{8!}-\frac{z}{2!}+\frac{z^3}{4!}-\frac{z^5}{6!}+\frac{z^7}{8!}+\frac{z^3}{4!}-\frac{z^5}{6!}+\frac{z^7}{8!}-\frac{z^5}{6!}+\frac{z^7}{8!}+\ldots=$$

$$=-z+\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}-\ldots=-\sin z.$$

Що і треба було довести. ■

**2.** Доведемо, що $(\operatorname{sh} z)'=\operatorname{ch} z$ , $z\in\mathbb{H}$.

□Доведення. Розклад функцій $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ в ряд Маклорена має наступний вигляд: $\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \ldots$ та $\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \ldots$.

$$\operatorname{sh}(z+h) - \operatorname{sh} z = z + h + \frac{(z+h)^3}{3!} + \frac{(z+h)^5}{5!} + \frac{(z+h)^7}{7!} - \ldots - z - \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} - \ldots =$$

$$= h + \frac{(z+h)^3 - z^3}{3!} + \frac{(z+h)^5 - z^5}{5!} + \frac{(z+h)^7 - z^7}{7!} + \ldots = h + \frac{1}{3!}\left(z^2 h + zhz + hz^2\right) +$$

$$+ \frac{1}{5!}\left(z^4 h + z^3 hz + z^2 hz^2 + zhz^3 + hz^4\right) + \frac{1}{7!}\left(z^6 h + z^5 hz + z^4 hz^2 + z^3 hz^3 + z^2 hz^4 + zhz^5 + hz^6\right) + \ldots + o(h).$$

Отже,

$$\operatorname{sh}(z+h) - \operatorname{sh} z = h + \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \frac{z^6}{7!}\right)h + \left(\frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} + \frac{z^5}{7!}\right)hz + \left(\frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!}\right)hz^2 +$$

$$+ \left(\frac{z}{5!} + \frac{z^3}{7!}\right)hz^3 + \left(\frac{1}{5!} + \frac{z^2}{7!}\right)hz^4 + \ldots + o(h).$$

Звідси

$$(\operatorname{sh} z)' = 1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \frac{z^6}{7!} + \left(\frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} + \frac{z^5}{7!}\right)z + \left(\frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!}\right)z^2 + \left(\frac{z}{5!} + \frac{z^3}{7!}\right)z^3 + \left(\frac{1}{5!} + \frac{z^2}{7!}\right)z^4 + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \frac{z^6}{7!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \frac{z^6}{7!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \frac{z^6}{7!} + \frac{z^4}{5!} + \frac{z^6}{7!} + \frac{z^4}{5!} + \frac{z^6}{7!} + \ldots = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots = \operatorname{ch} z.$$

Що і треба було довести. ■

**Приклад 3.** Доведемо, що $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$, $z \in \mathbb{H}$.

□Доведення. Міркуючи аналогічно як і в попередньому прикладі, маємо:

$$(\operatorname{ch} z)' = \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} + \frac{z^5}{6!} + \left(\frac{1}{2!} + \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!}\right) z + \left(\frac{z}{4!} + \frac{z^3}{6!}\right) z^2 + \left(\frac{1}{4!} + \frac{z^2}{6!}\right) z^3 + \ldots =$$

$$= \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} + \frac{z^5}{6!} + \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} + \frac{z^3}{4!} + \frac{z^5}{6!} + \frac{z^3}{4!} + \frac{z^5}{6!} + \ldots = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots = \operatorname{sh} z.$$

Що і треба було довести. ■

Правила для обчислення $\mathbb{H}$ похідної ідентичні до тих, які отримані в курсі математичного аналізу (див. [19] і [21]).

Висновки. У розглянутій статті автор:

1. нагадує відомі методи побудови теорії аналітичних функцій комплексної змінної та обґрунтовує доцільність застосування цих методів до побудови теорії аналітичних функцій кватерніонної змінної. У випадку функцій кватерніонів, жоден з них не призводить до задовільного кватерніонного аналогу поняття аналітичної функції.

2. аналізує підхід до визначення регулярної функції запропонований у [15] і наголошує, що варто було б функцію $f$ називати регулярною, якщо вона є одночасно ліво і право регулярною.

3. зазначає, що мета його статті полягає в спробі знайти нове визначення похідної для кватерніонної функції однієї кватерніонної змінної і показати, що всі елементарні функції, а також функція логарифм від кватерніона мають також похідні.

На нашу думку дуже важливо, що у статті [19] подано з доведенням аналоги, відомих ще з теорії функції дійсної змінної, правил обчислення похідних суми, добутку і т. д. для функцій кватерніонної змінної.

У цьому пункті проілюстровано знаходження похідних деяких функцій кватерніонної змінної за запропонованим в [19] алгоритмом (див. приклади 1-3 цього пункту).

**Програма вибіркового курсу „Гіперкомплексні системи чисел”**

1. Історія розвитку поняття комплексного числа, гіперкомплексного числа, функцій гіперкомплексної числової змінної.
2. Комплексні числа: означення, дії над комплексними числами. Модуль комплексного числа. Тотожність для двох квадратів. Операція спряження в множині комплексних чисел. Форми запису комплексних чисел.
3. Комплексні числа, подвійні числа, дуальні числа.
4. Кватерніони: означення, дії над кватерніонами. Тотожність для чотирьох квадратів. Загальна постановка задачі про суму квадратів. Спряження в системі кватерніонів.
5. Кватерніони і векторна алгебра. Числова і векторна частини кватерніона. Геометричний зміст множення довільного кватерніона на чисто уявний кватерніон.
6. Повороти в просторі і кватерніони. Задача про „додавання” поворотів.
7. Гіперкомплексні числа: означення гіперкомплексної системи чисел. Комутативні, асоціативні системи, системи з діленням.
8. Подвоєння гіперкомплексної системи. Кватерніони як результат подвоєння комплексних чисел.
9. Означення октав. Таблиця множення в системі октав. Спряження в системі октав. Модуль октави. Модуль добутку октав. Тотожність для восьми квадратів. Неасоціативність октав. Властивість альтернативності.
10. Алгебри: гіперкомплексна система – частковий випадок алгебри. Комутативні, асоціативні алгебри, алгебри з діленням. Приклади. Операція спряження в гіперкомплексних алгебрах.
11. Ізоморфні алгебри. Нормовані алгебри з одиницею. Теорема Гурвіца.
12. Теорема Фробеніуса.
13. Основні теоретичні відомості про n – вимірний афінний простір та гіперквадрики.
14. Застосування кватерніонів в задачах елементарної математики.
15. Елементи теорії диференціального числення функцій кватерніонної змінної.

**Література**


1. Березин А. В. Кватернионы в релятивистской физике / А. В. Березин, Ю. А. Курочкин, Е. А. Толкачев. – Москва: Едиториал УРСС, 2003. – 200 с.
2. Гордеев В. Н. Кватернионы и бикватернионы с приложениями в геометрии и механике, К.: Сталь, 2016. – 316 с.
3. Городецький В. В., Боднарук С. Б. Гіперкомплексні системи чисел: Навчальний посібник. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2012. – 104 с.
4. Городецький В. В., Похила М. М. Аналітична геометрія многовимірних афінних та евклідових просторів: Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 1999. – 219с.
5. Кантор И. Л. Гиперкомплексные числа / И. Л. Кантор, А. С. Солодовников. – Москва: Наука, 1973. – 144 с.
6. Каратаев Е.А. Гиперкомплексные числа. – М.: Наука, 2000. – 44 с.
7. Каратаев Е.А. Сопряжения в гиперкомплексных алгебрах. – М.: Наука, 2002.– 11 с.
8. Кассандров В. В. Кватернионный анализ и алгебродинамика // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2006. Т. 3, №2(6), С. 58-84.
9. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. В двох томах. Т.I Арифметика. Алгебра. Анализ. – М.: Наука, 1987. – 432 с.
10. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. –М.: Наука, 1971. –431 с.
11. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. – М.: Наука, 1984. – 520 с.
12. Маковійчук М. М. Елементи диференціального числення функцій катерніонної змінної: дипломна робота освітнього рівня «Спеціаліст»: спец. 7.04020101_«Математика» / Маковійчук Марія Миколаївна ; М-во освіти і науки України, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича. – Чернівці, 2015. – 39 с.
13. Працьовитий М. В., Томусяк А. А. Версія теорії аналітичних функцій кватерніонної змінної з елементами диференціального числення // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2008, №9. – С. 66-80.

14. Пукальський І. Д., Лусте І. П., Вища математика. Теорія функцій комплексної змінної: Навчально-методичний посібник – Чернівці: Чернівецький національний університет, 2011. – 106 с.
15. Садбери Э. Кватернионный анализ // Пер. с англ. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, №2, 2004. – С. 130-157.
16. Садівник Н.М. Сучасні підходи до введення поняття похідної функцій кватерніонної змінної: магістерська робота: спеціальності 014.04 «Середня освіта (математика)» / Садівник Надія Миколаївна; М-во освіти і науки України, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича. – Чернівці, 2017. – 65 с.
17. Тимофійчук Б. В. Елементи кватерніонного аналізу: магістерська робота: спец. 7.04020101 «Математика» / Тимофійчук Богдан Васильович ; М-во освіти і науки України, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича. – Чернівці, 2012. – 63 с.
18. http://e-science.ru/forum/index.php?showtopic=21283
19. O. Dzagnidze, On the differentiability of quaternion functions, Tbil. Math. J., 5 (2012), P. 1-15. ArXiv: 1203.5619V1[mat.CV] 26 Mar, 2012.
20. O. Dzagnidze, On the differentiability of real, complex and quaternion functions. Bull. TICMI 18 (2014), No. 1, P. 93-109.
21. O. Dzagnidze, Necessary and sufficient conditions for H-differentiability of quaternion functions, Georgian Math. J. 2015; 22 (2): P. 215 – 218.
22. Khaled Abdel-Khalek, Quaternion Analysis, Cornell University Library eprints, http://arxiv.org/pdf/hep-th/9607152.pdf , 1996, 8 p.
23. A. Sudbery, Quaternionic analysis, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 85 (1979), P. 199-225.
24. A. Sudbery, Quaternionic Analysis, Departament of Mathematics, University of York, 1977, 54 p.
25. https://uk.wikipedia.org/wiki/

**Зміст**

# Для нотаток

# Для нотаток

Навчальне видання

**Городецький** Василь Васильович,
**Боднарук** Світлана Богданівна

# Вступ до теорії гіперкомплексних чисел та їх функцій

Навчальний посібник