Присвячується пам'яті Маслюченка Володимира Кириловича – мого вчителя і наукового керівника

Зміст

ВСТУП

Для функцій на абстрактних просторах, як і для функцій числового аргументу, природний інтерес викликають властивості, дещо слабші неперервності, але тісно пов'язані з нею. Однією з таких властивостей є нарізна неперервність функцій багатьох змінних, тобто неперервність цих функцій відносно кожної змінної зокрема. Відомо, що нарізно неперервне відображення не обов'язково є неперервним за сукупністю змінних. Хрестоматійним прикладом такого відображення є функція Шварца $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, для якої $f(0,0) = 0$ і $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ в решті точок. У зв'язку з цим виникло природне питання, яке називають також задачею Діні: *якою може бути множина точок розриву нарізно неперервного відображення?*

Під розв'язанням задачі Діні для нарізно неперервних відображень на добутку деяких просторів ми розуміємо встановлення повного опису множин точок розриву таких відображень. Зрозуміло, що це розбиває задачу Діні на дві частини: *пряму задачу теорії нарізно неперервних відображень*, розв'язання якої полягає у встановленні необхідних умов на множину точок розриву, і *обернену задачу теорії нарізно неперервних відображень*, розв'язання якої дає достатні умови на множину точок розриву нарізно неперервного відображення.

Початком розв'язання цих задач для функцій дійсних змінних слід вважати дослідження Р. Бера, які разом з іншими, близькими за тематикою результатами увійшли до його відомої дисертаційної роботи 1899 року. Дисертація Бера є потужною і багатогранною працею, яка наповнена глибокими і нетривіальними результатами, що стали відправною точкою для подальших досліджень різних напрямків загальної теорії функцій, і містить нові важливі поняття, які у майбутньому стали звичним інструментом для вивчення властивостей функцій.

Дослідження прямої і оберненої задач теорії нарізно неперервних функцій виявилося досить цікавою і популярною тематикою. Починаючи з Бера, вона привернула і продовжує привертати увагу багатьох математиків від початку XX століття і до наших днів. Г. Ган, Р. Кешнер, І. Наміока, М. Талаґран, Ж. Кальбрі, Ж.-П. Труалік, Р. Христенсен, Ж. Сан-Ремо, Ґ. Дебс, Дж. Брекенрідж, Т. Нішіура, З. Піотровський, А. Бузіад, Д.Бурк, Р. Поль, Т. Банах, П. Кендеров, В. Мурс та інші – це далеко не повний список тих, хто займався дослідженням множини точок розриву нарізно неперервних відображень в тому чи іншому напрямку.

Починаючи з 80-х років XX століття за ініціативи і під керівництвом В. Маслюченка дослідження нарізно неперервних відображень та їх аналогів стали активно проводитись у Чернівецькому університеті. На сьогоднішній день там сформувалася потужна математична група, яка зробила вагомий внесок, як у розвиток всієї теорій нарізно неперервних відображень, так і у розв'язання прямої і оберненої задач.

Більш, ніж столітня історія розв'язування задачі Діні, з одного боку, наповнена глибокими нетривіальними результатами, як-от, наприклад, теорема Наміоки, різноманітні узагальнення і застосування якої давно уже сформувались в окремий напрямок досліджень, а з іншого – містить ціле розмаїття різних методів та оригінальних ідей, які часом виникали при незалежних доведеннях одного і того ж результату. Незважаючи на це, теорем, які повністю характеризують множину точок розриву нарізно неперервних відображень на добутку просторів з певного класу, не так уже й багато і вони дають лише не дуже далекий вихід за межі випадку добутку метризовних просторів. Це, зокрема, вказує на те, що подальший розвиток даних досліджень, крім досконалого володіння сучасними методами, які уже дістали свою реалізацію і стали традиційними для даної тематики, вимагає також нових підходів та свіжих ідей.

Метою цієї праці є впорядкований виклад всіх одержаних на сьогоднішній день характеристичних теорем про множину точок розриву нарізно неперервних функцій двох змінних, даючи при цьому історичну картину розвитку даного напрямку теорії нарізно неперервних відображень і його сучасний стан. За своїм стилем поданий матеріал є цілком доступним для студентів-математиків старших курсів, позаяк його якісне усвідомлення не вимагає від читача надто глибоких знань, які виходять за межі стандартних курсів топології, математичного і функціонального аналізу. Дана праця орієнтована на широке коло науковців: починаючи з математиків-початківців, для яких її опрацювання може послужити добрим стартовим майданчиком для подальших наукових звершень, і завершуючи фахівцями даної тематики, котрі тут, сподіваємось, також зможуть знайти для себе корисну та цікаву інформацію.

При викладі матеріалу ми будемо дотримуватись нижченаведених підходів.

1) Ми аналізуватимемо лише результати, які дають можливість одержати характеризацію тих чи інших явищ, пов'язаних з задачею Діні. А саме, це, в першу чергу, теореми, які на добутку певного класу просторів приводять до повного опису множин точок розриву нарізно неперервних функцій або дають необхідні і достатні умови на існування нарізно неперервних функцій з множиною точок розриву спеціального вигляду.

2) Ми розглядатимемо нарізно неперервні відображення тільки двох змінних. Слід зауважити, що відповідні результати, які стосуються оберненої задачі, нескладно переносяться на випадок відображень

багатьох змінних (що почасти і зроблено у відповідних роботах), в той час як "прямі" теореми для узагальнення на випадок n змінних потребують більш тонких міркувань і загальніших результатів про функції двох змінних, що, безсумнівно, заслуговує на окрему розмову.

3) Всі основні результати ми будемо доводити лише для дійснозначних функцій. Тут причини є діаметрально протилежними до викладених у попередньому пункті, адже розв'язання прямої задачі, зазвичай, без особливих ускладнень переписуються для відображень зі значеннями у метризовних просторах (це знову ж таки, зроблено у деяких відповідних роботах), а "обернені" результати для свого узагальнення на випадок абстрактного простору значень вимагають накладання на нього додаткових умов типу лінійної зв'язності.

4) Порядок викладу матеріалу, як за розділами, так і за підрозділами в межах розділу, носить хронологічно-пріоритетний характер. Він полягає в тому, що ми подаємо основні результати у хронологічному порядку, прив'язуючи їх до відповідних авторів. Такий підхід дає можливість чітко спостерегти як всі етапи розв'язування задачі Діні, так і першовідкривачів того чи іншого явища в межах даної задачі.

5) Подібний хронологічно-пріоритетний підхід ми застосовуємо також до вибору способів доведень основних результатів. Не маючи на меті аналіз всіх методів міркувань, що уже дістали свою реалізацію за більш, ніж столітню історію розвитку даного напрямку досліджень, ми беремо за основу хронологічно перший спосіб доведення відповідного результату і подаємо його в методично опрацьованому вигляді. При цьому, рухаючись, звичайно, від простіших випадків до складніших, ми акцентуємо увагу на тій частині доведення, яка приводить до нового розв'язання задачі Діні.

6) Для збереження повноти історичної картини щодо різних доведень тих чи інших основних результатів, в кінці кожного розділу ми поміщаємо заключні зауваження, які, зокрема, містять посилання на альтернативні доведення, що були одержані незалежно від викладених в основному тексті.

Розділ 1

ФУНКЦІЇ ДВОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ

Даний розділ присвячений викладу розв'язання задачі Діні для нарізно неперервних функцій, визначених на добутку двох числових проміжків. Центральне місце у цьому розв'язанні займає випадок функцій, визначених на добутку відрізків, для якого пряму задачу розв'язав Р. Бер [2] у 1899 році, а обернену – Р. Кешнер [23] у 1943 році.

1.1 Приклади розривних нарізно неперервних функцій

Розпочнемо ми з двох класичних прикладів нарізно неперервних функцій, які не є неперервними за сукупністю змінних.

1.1.1. Функція Шварца. Одним із перших і добре відомим прикладом нарізно неперервної функції з непорожньою множиною точок розриву є функція Шварца, яку ми розглянемо у даному пункті.

Для відображення $f : X \times Y \to Z$ і довільних $x \in X$ і $y \in Y$ покладемо

$$f^x(y) = f_y(x) = f(x, y).$$

Відображення $f^x : Y \to Z$ і $f_y : X \to Z$ називаються *вертикальним x-розрізом відображення f* і *горизонтальним y-розрізом відображення f* відповідно.

Відображення $f : X \times Y \to Z$, визначене на добутку топологічних просторів X і Y, і зі значеннями у топологічному просторі Z називається *нарізно неперервним*, якщо f неперервне відносно кожної змінної зокрема, тобто для довільних $x \in X$ і $y \in Y$ відображення f^x і f_y є неперервними.

Для відображення f між топологічними просторами X і Y через $C(f)$ ми позначаємо множину точок неперервності відображення f, а через $D(f)$ – множину точок розриву відображення f.

Наступну функцію називають *функцією Шварца* (дивись роботу [39, с.220] 1872 року).

Приклад 1.1.1. *Функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, означена формулою*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

є нарізно неперервною і $D(f) = \{(0,0)\}$.

Доведення. Зрозуміло, що функція f неперервна на відкритій множині $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ як частка двох неперервних функцій. Отже, $D(f) \subseteq \{(0,0)\}$. Звідси випливає, зокрема, що для довільних, відмінних від нуля точок $x, y \in \mathbb{R}$ функції f^x і f_y є неперервними. Крім того,

$$f(x,0) = f(0,y) = 0$$

для довільних $x, y \in \mathbb{R}$. Тому функція f має неперервні вертикальний 0-розріз і горизонтальний 0-розріз. Отже, функція f є нарізно неперервною.

Залишилось довести, що f розривна в точці $\{(0,0)\}$. Зауважимо, що $f(x,x) = 1$ для кожного $x \neq 0$. Тепер маємо

$$f(0,0) = 0 \neq 1 = \lim_{x \to +0} f(x,x),$$

що і доводить розривність функції f в точці $(0,0)$. □

Зауваження 1.1.2. Зауважимо, що для довільних точок $a, b \in \mathbb{R}$ функція $f_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, означена формулою

$$f_{a,b}(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{(x-a)^2+(y-b)^2}, & (x,y) \neq (a,b); \\ 0, & (x,y) = (a,b), \end{cases}$$

є нарізно неперервною і $D(f_{a,b}) = \{(a,b)\}$.

1.1.2. Функція Юнґів з однією точкою розриву. У цьому і двох наступних пунктах ми подамо конструкцію нарізно неперервної функції двох дійсних змінних, яка має досить масивну множину точок розриву і, крім того, є неперервною в кожній точці в кожному напрямку. Дана побудова була здійснена В.Г.Юнґом і Ґ.Ч.Юнґ у 1909 році в роботі [45] і складається з кількох кроків. На першому кроці автори будують функцію з одноточковим розривом. Цю побудову ми розглянемо в даному пункті.

Функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ називається *лінійно неперервною*, якщо звуження функції f на довільну пряму

$$p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c = 0\}$$

є неперервним. Зрозуміло, що кожна лінійно неперервна функція є нарізно неперервною.

Для множини A в топологічному просторі X через $\mathrm{int}(A)$ ми позначаємо внутрішність множини A, тобто множину всіх внутрішніх точок множини A, а через $\overline{A}$ – замикання множини A, тобто множину всіх точок дотику множини A.

Приклад 1.1.3. *Функція* $f : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$, *означена формулою*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|y|}{x^2}, & 0 < |y| \le x^2; \\ \frac{x^2}{|y|}, & 0 < x^2 \le |y|; \\ 0, & xy = 0, \end{cases}$$

є лінійно неперервною і D(f)={(0,0)}.

Доведення. Розглянемо функції $g(x, y) = \frac{|y|}{x^2}$, $h(x, y) = \frac{x^2}{|y|}$ і множини

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < x^2\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| > x^2\}$$

і

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| = x^2,\ x \ne 0\}.$$

Зауважимо, що

$$\mathbb{R}^2 = A \sqcup B \sqcup C \sqcup \{(0, 0)\}.$$

Спочатку доведемо, що функція f неперервна за сукупністю змінних в кожній точці відкритої множини

$$G = A \sqcup B \sqcup C = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Оскільки функція f збігається з неперервною функцією g на відкритій множині A, то f є неперервною в кожній точці множини A. Аналогічно, функція f збігається з неперервною функцією h на відкритій множині B і тому f є неперервною в кожній точці множини B. Крім того, для кожної точки $(x, y) \in C$ маємо

$$f(x, y) = g(x, y) = h(x, y) = 1$$

і

$$\lim_{(u,v)\to(x,y)} g(u, v) = g(x, y) = f(x, y) = h(x, y) = \lim_{(u,v)\to(x,y)} h(u, v).$$

Отже, оскільки $f(u, v) = g(u, v)$ або $f(u, v) = h(u, v)$ для довільної точки $(u, v) \in G$, то

$$\lim_{(u,v)\to(x,y)} f(u, v) = f(x, y)$$

і функція f неперервна в точці (x, y). Таким чином, f неперервна в кожній точці множини G.

Розривність функції f в точці $(0, 0)$ випливає з того, що $(0, 0) \in \overline{C}$, $f(0, 0) = 0$ і $f(x, y) = 1$ для кожної точки $(x, y) \in C$. Отже, $D(f) = \{(0, 0)\}$.

Тепер покажемо, що звуження функції f на кожну пряму $p \subseteq \mathbb{R}^2$ є неперервним. Цей факт є очевидним у випадку, коли $(0, 0) \notin p$, адже в цьому випадку p складається з точок неперервності функції f. Крім того,

$$f(x, 0) = f(0, y) = 0$$

для довільних $x, y \in \mathbb{R}$. Тому звуження функції f на горизонтальну і вертикальну прямі, що проходять через точку $(0, 0)$, є неперервними. Отже, залишилось розглянути випадок, коли

$$p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = kx\},$$

де $k \neq 0$, причому, як і раніше, достатньо перевірити неперервність звуження в точці $(0, 0)$. Зафіксуємо $\varepsilon \in (0, 1)$. Множина

$$U = \{(x, y) \in p : |x| < |k| \cdot \varepsilon\}$$

є відкритим околом точки $(0, 0)$ на прямій p, причому

$$x^2 = |x| \cdot \tfrac{|y|}{|k|} \leq |k| \cdot \varepsilon \cdot \tfrac{|y|}{|k|} = \varepsilon \cdot |y| \leq |y|$$

для кожної точки $(x, y) \in U$, тобто $U \subseteq B \sqcup \{(0, 0)\}$. Тепер для кожної точки $(x, y) \in U \setminus \{(0, 0)\}$ маємо

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = h(x, y) = \tfrac{x^2}{|y|} = \tfrac{x^2}{|kx|} = \tfrac{|x|}{|k|} < \tfrac{|k| \cdot \varepsilon}{|k|} = \varepsilon.$$

Отже, звуження функції f на пряму p неперервне в точці $(0, 0)$. $\square$

1.1.3. Функція Юнґів з замкненою ніде не щільною множиною точок розриву на прямій.

У даному пункті ми розглянемо наступний крок конструкції Юнґів, який полягає у побудові лінійно неперервної функції з даною досконалою ніде не щільною множиною точок розриву, яка лежить на осі OX. Зауважимо, що умова досконалості відповідної множини у самій конструкції не використовується, тому ми подамо результат Юнґів у загальнішій редакції, тобто без умови досконалості множини точок розриву.

Для непорожньої підмножини A метричного простору (X, d) і точки $x \in X$ через $d(x, A)$ ми позначаємо відстань від точки x до множини A, тобто

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Ми будемо використовувати наступні добре відомі властивості відстані від точки до множини (дивись [48, с. 218]).

Твердження 1.1.4. *Нехай (X, d) – метричний простір, $A \subseteq X$ – непорожня множина і $b \in X$. Тоді*

1) функція $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = d(x, A)$, неперервна;

2) $d(b, A) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $b \in \overline{A}$.

Доведення. 1). Візьмемо довільні точки $x, y \in X$ і $a \in A$. З нерівності трикутника для метрики d і означення $d(x, A)$ випливає наступна оцінка

$$d(x, A) - d(y, a) \le d(x, a) - d(y, a) \le d(x, y).$$

Тепер, перейшовши в нерівності $d(x, A) - d(y, a) \le d(x, y)$ до інфнімума при $a \in A$, одержимо

$$d(x, A) - d(y, A) \le d(x, y).$$

Аналогічно,

$$d(y, A) - d(x, A) \le d(x, y).$$

Отже,

$$|d(x, A) - d(y, A)| \le d(x, y)$$

для довільних $x, y \in A$. Звідси легко випливає неперервність функції f.

2). Достатньо зауважити, що кожна з умов $d(b, A) = 0$ і $b \in \overline{A}$ рівносильна існуванню послідовності $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ точок $a_n \in A$ такої, що $\lim\limits_{n \to \infty} d(b, a_n) = 0$.

□

Нагадаємо, що множина A в топологічному просторі X називається *ніде не щільною*, якщо для довільної відкритої в X непорожньої множини G існує відкрита в X непорожня множина U така, що $U \subseteq G \setminus A$.

Наступний приклад є другим кроком у конструкції Юнґів.

Приклад 1.1.5. *Нехай $A \subseteq \mathbb{R}$ – замкнена ніде не щільна множина. Тоді функція $f : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$, означена формулою*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|y|}{d(x,A)^2}, & 0 < |y| \le d(x,A)^2; \\ \frac{d(x,A)^2}{|y|}, & 0 < d(x,A)^2 \le |y|; \\ 0, & d(x,A)^2 \cdot y = 0. \end{cases}$$

є лінійно неперервною і $D(f) = A \times \{0\}$.

Доведення. Нехай $g : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ – функція з прикладу 1.1.3. Тоді функцію f можна подати у вигляді

$$f(x,y) = g(d(x,A), y).$$

Розглянемо точку $(x_0, y_0) \notin A \times \{0\}$. Оскільки $(d(x_0,A), y_0) \neq (0,0)$, то згідно з прикладом 1.1.3 функція g неперервна в точці $(d(x_0,A), y_0)$. Крім того, функція d неперервна в точці x_0. Тому функція f неперервна в точці (x_0, y_0) як композиція неперервних функцій. Отже, $D(f) \subseteq A \times \{0\}$.

Візьмемо довільну точку $a \in A$ і покажемо, що f розривна в точці $(a,0)$. Зауважимо, що $f(a,0) = 0$. Достатньо довести, що в довільному околі точки $(a,0)$ можна вибрати точку (x,y) таку, що $f(x,y) = 1$. Розглянемо довільний базисний окіл $W = U \times V$, де

$$U = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \qquad \text{і} \qquad V = (-\varepsilon, \varepsilon),$$

точки $(a,0)$. Оскільки множина A ніде не щільна, то можна вибрати точку $b \in (a, a+\varepsilon) \setminus A$. Зауважимо, що при цьому $s = d(b,A) > 0$. Виберемо довільну точку $y \in V$ таку, що $0 < y < s^2$, тобто $0 < \sqrt{y} < s$. До неперервної функції $h(x) = d(x,A)$ на відрізку $[a,b]$ застосуємо теорему про проміжне значення і одержимо, що існує точка $c \in (a,b)$ така, що $h(c) = \sqrt{y}$, тобто $d(c,A)^2 = y$. Тепер маємо $(c,y) \in W$ і $f(c,y) = 1$. Отже, функція f розривна в точці $(a,0)$ і $D(f) = A \times \{0\}$.

Тепер покажемо, що звуження функції f на кожну пряму $p \subseteq \mathbb{R}^2$ є неперервним. Міркуватимемо аналогічно, як у попередньому прикладі. Зрозуміло, що звуження функції f на пряму p, яка складається з точок сукупної неперервності функції f, є неперервним. Крім того,

$$f(x,0) = f(a,y) = 0$$

для довільних $a \in A$ і $x, y \in \mathbb{R}$. Тому звуження функції f горизонтальну і всі вертикальні прямі, що проходять через точки $(a, 0) \in A \times \{0\}$, є неперервними. Отже, залишилось розглянути випадок, коли

$$p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = k(x - a)\},$$

де $k \neq 0$ і $a \in A$, причому, як і раніше, достатньо перевірити неперервність звуження в точці $(a, 0)$. Зафіксуємо $\varepsilon \in (0, 1)$. Множина

$$U = \{(x, y) \in p : |x - a| < |k| \cdot \varepsilon\}$$

є відкритим околом точки $(a, 0)$ на прямій p. Візьмемо довільну точку $(x, y) \in U$. Якщо $d(x, A) = 0$, то $f(x, y) = 0 < \varepsilon$. Якщо ж $d(x, A) > 0$, то

$$0 < d(x, A)^2 \leq |x - a|^2 = |x - a| \cdot \tfrac{|y|}{|k|} \leq |k| \cdot \varepsilon \cdot \tfrac{|y|}{|k|} = \varepsilon \cdot |y| \leq |y|$$

і згідно з означенням функції f одержуємо

$$f(x, y) = \tfrac{d(x,A)^2}{|y|} \leq \tfrac{(x-a)^2}{|k(x-a)|} = \tfrac{|x-a|}{|k|} < \tfrac{|k| \cdot \varepsilon}{|k|} = \varepsilon.$$

Отже, так чи інакше, для кожної точки $(x, y) \in U$ маємо

$$|f(x, y) - f(a, 0)| = f(x, y) < \varepsilon.$$

Таким чином, звуження функції f на пряму p неперервне в точці $(a, 0)$. $\square$

1.1.4. Функція Юнґів зі скрізь континуальною множиною точкою розриву. В даному пункті ми викладемо завершальний крок побудови Юнґів у дещо загальнішій редакції, який дає лінійно неперервну функцію зі скрізь континуальною множиною точкою розриву.

Точка x в топологічному просторі X називається *ізольованою точкою*, якщо множина $\{x\}$ є околом точки x в просторі X.

Замкнена підмножина A топологічного простору X, яка не має ізольованих точок, називається *досконалою*. Добре відомо (дивись, наприклад, [71, с. 51] або [22, Corollary 6.3]), що кожна непорожня досконала підмножина числової прямої $\mathbb{R}$ має потужність континуум, де котинуум – це потужність $\mathfrak{c}$ множини $\mathbb{R}$ всіх дійсних чисел.

Теорема 1.1.6. *Існує лінійно неперервна функція $f : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ така, що для довільної непорожньої відкритої множини $G \subseteq \mathbb{R}^2$ множина $D(f) \cap G$ має потужність континуум.*

Доведення. Нехай
$$\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\},$$
причому $q_n \neq q_m$ для різних $n, m \in \mathbb{N}$. Для кожної замкненої ніде не щільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$ позначимо через f_A функцію $f_A : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ з прикладу 1.1.5. Крім того, для кожної замкненої ніде не щільної множини $A \subseteq \mathbb{R}$ позначимо
$$r(A) = \sup\{b - a : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \setminus A\}.$$
Зауважимо, що для кожного дійсного числа $r > 0$ легко побудувати досконалу ніде не щільну множину A таку, що $r(A) = r$. Таку побудову можна здійснити, наприклад, так: послідовно вибираємо послідовність неперетинних відрізків I_n довжини $\frac{r}{2^n}$ так, щоб множина $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ була всюди щільною, і означаємо $A = \mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{int}(I_n)$.

Візьмемо довільну послідовність $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ досконалих ніде не щільних множин A_n таких, що $\lim\limits_{n\to\infty} r(A_n) = 0$ і покажемо, що функція $f : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$, означена формулою
$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{2^n} f_{A_n}(x, y - q_n),$$
є шуканою.

Зрозуміло, що функція f є лінійно неперервною, як сума рівномірно збіжного ряду, складеного з лінійно неперервних функцій.

Доведемо рівність
$$D(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \times \{q_n\}.$$
Зауважимо, що згідно з прикладом 1.1.5,
$$D(f_{A_n}) = A_n \times \{q_n\}$$
для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тому для кожної точки $(x,y) \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \times \{q_n\}$ функція f є неперервною в точці (x,y), як сума рівномірно збіжного ряду, складеного з неперервних в цій точці функцій. Отже,
$$D(f) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \times \{q_n\}.$$
Тепер зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$ і розіб'ємо функцію f на два доданки
$$f(x,y) = \sum_{k\neq n}^{\infty} \tfrac{1}{2^k} f_{A_k}(x, y - q_k) + \tfrac{1}{2^n} f_{A_n}(x, y - q_n).$$

Оскільки всі числа q_k – різні, то перший доданок є неперервним у всіх точках множини $A_n \times \{q_n\}$, адже він є сумою рівномірно збіжного ряду, складеного з неперервних в цих точках функцій. А другий доданок – розривний у всіх точках множини $A_n \times \{q_n\}$. Тому і функція f є розривною у всіх точках множини $A_n \times \{q_n\}$. Таким чином, $A_n \times \{q_n\} \subseteq D(f)$.

Отже,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \times \{q_n\} \subseteq D(f)$$

і рівність доведена.

Залишилось переконатись, що для довільної непорожньої відкритої множини $G \subseteq \mathbb{R}^2$ перетин $D(f) \cap G$ має потужність континуум. Спочатку виберемо відкриті інтервали $U, V \subseteq \mathbb{R}$ такі, що $U \times V \subseteq G$. Далі знайдемо такий номер n, що $q_n \in V$ і число $r(A_n)$ є меншим, ніж довжина інтервала U. У щільній в U множині $U \setminus A_n$ виберемо точки $a, b \in U \setminus A_n$ так, що $b - a > r(A_n)$. Тоді множина $A = [a, b] \cap A_n$ є непорожньою і досконалою. Тому її потужність дорівнює континууму. Залишилось зазначити,що

$$A \times \{q_n\} \subseteq D(f) \cap G.$$

$\square$

Зауваження 1.1.7. Зазначимо, що в первісній роботі [45] автори здійснили дещо слабшу конструкцію, ніж у теоремі 1.1.6. В ролі множини $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ вони розглядали множину всіх двійково-раціональних чисел $q_n = \frac{m}{2^k} \in [0, 1]$, де m – непарне число і $k \in \mathbb{N}$. А в ролі відповідної множин A_n вони вибирали ніде не щільну досконалу підмножину відрізка $[0, 1]$, яка будується аналогічно до класичної канторової множини C шляхом послідовного викидання все менших і менших серединних інтервалів, починаючи з інтервала $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^m}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3^m})$. В результаті автори побудували лінійно неперервну функцію, множина точок розриву якої має континуальний перетин з довільною непорожньою відкритою підмножиною одиничного квадрата $[0, 1]^2$.

1.2

Теорема Бера про необхідні умови на множину точок розриву

У даному підрозділі ми доведемо результат Бера [2, с. 94], який дає необхідні умови на множину точок розриву нарізно неперервної функції, визначеної на добутку двох відрізків, звідки, зокрема, випливає аналогічний результат і для функцій, визначених на добутку довільних проміжків. Цінність підходу Бера до розв'язання прямої задачі полягає ще й в тому, що він базується на уведених ним поняттях напівнеперервної функції та верхньої і нижньої граничних функцій, які в подальшому дістали широке застосування у загальній теорії функцій і стали фундаментальними. З огляду на це, зберігаючи, в цілому, незмінним метод доведення Бера, ми подамо деякі допоміжні твердження у загальнішій редакції і будемо їх використовувати також і у наступних розділах.

1.2.1. Властивості замкнених підмножин прямокутника зі щільною проекцією. Викладені у цьому пункті властивості замкнених підмножин прямокутника відіграють важливу роль у міркуваннях Бера.

Для множини E, що міститься в добутку $X \times Y$, через $\mathrm{pr}_X(E)$ і $\mathrm{pr}_Y(E)$ позначимо проекції множини E на X і на Y відповідно.

Підмножина A топологічного простору X називається *щільною у відкритій множині* $G \subseteq X$, якщо $G \subseteq \overline{G \cap A}$. Множина A, щільна у всьому топологічному просторі X, називається *всюди щільною.*

Наступне допоміжне твердження ми будемо неодноразово використовувати у подальшому викладі.

Лема 1.2.1. *Нехай $X = [a,b]$, $Y = [c,d]$ і $E \subseteq X \times Y$ – замкнена множина. Тоді множина $A = \mathrm{pr}_X(E)$ замкнена в X.*

Доведення. Зафіксуємо точку $x_0 \in \overline{A}$ і покажемо, що $x_0 \in A$, тобто існує $y_0 \in Y$ таке, що $(x_0, y_0) \in E$. Виберемо послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ точок $x_n \in A$ таку, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ виберемо точку $y_n \in Y$ таку, що $(x_n, y_n) \in E$. З обмеженої послідовності $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ виділимо збіжну підпослідовність $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$. Зрозуміло, що

$$y_0 = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} \in Y.$$

Крім того, $x_0 = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. Тому

$$(x_0, y_0) = \lim_{k\to\infty} (x_{n_k}, y_{n_k}) \in E,$$

адже множина E замкнена. Отже, $x_0 \in A$ і A замкнена в X. $\square$

Наслідок 1.2.2. *Нехай $X = [a,b]$, $Y = [c,d]$ і $E \subseteq X \times Y$ – замкнена множина така, що проекція $A = \mathrm{pr}_X(E)$ щільна в X. Тоді $A = X$.*

Наступне твердження є основним результатом даного пункту.

Твердження 1.2.3. *Нехай $X = [a,b]$, $Y = [c,d]$ і $E \subseteq X \times Y$ – замкнена множина така, що $\mathrm{pr}_X(E) = X$. Розглянемо множину P всіх точок $p = (x,y) \in E$, які володіють наступною властивістю: для кожного $\varepsilon > 0$ існує замкнений прямокутний окіл $W = U \times V$ точки p в $X \times Y$ такий, що точка x є внутрішньою точкою відрізка U, довжина відрізка V не перевищує ε і $\mathrm{pr}_X(E \cap W) = U$. Тоді*

(a) множина P непорожня;

(b) проекція $\mathrm{pr}_X(P)$ щільна в X;

(c) для кожної точки $p \in P$ і довільного околу G точки p існує замкнений прямокутний окіл $W = U \times V$ точки p в $X \times Y$ такий, що проекція $\mathrm{pr}_X(P \cap W)$ є щільною в U.

Доведення. (a). Покладемо

$$I_0 = [a_0, b_0] = [a,b] \qquad \text{i} \qquad J_0 = [c_0, d_0] = [c,d].$$

Індукцією відносно $n \in \mathbb{N}$ побудуємо послідовності $(I_n)_{n=0}^{\infty}$ та $(J_n)_{n=0}^{\infty}$ вкладених відрізків

$$I_n = [a_n, b_n] \qquad \text{i} \qquad J_n = [c_n, d_n],$$

які для кожного $n \in \mathbb{N}$ задовольняють наступні умови:

1) $I_n \subseteq (a_{n-1}, b_{n-1})$ і $J_n \subseteq J_{n-1}$;

2) $b_n - a_n \le \frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2}$ і $d_n - c_n = \frac{d_{n-1}-c_{n-1}}{2}$;

3) $\mathrm{pr}_X(E \cap (I_n \times J_n)) = I_n$.

Спочатку зауважимо, що згідно з умовою леми відрізки I_0 та J_0 задовольняють умову 3).

Тепер припустимо, що для деякого $n \in \mathbb{N}$ набори відрізків $(I_k)_{k=0}^{n-1}$ та $(J_k)_{k=0}^{n-1}$ вже побудовані. Побудуємо відрізки I_n та J_n. Розглянемо відрізки

$$V_1 = [c_{n-1}, \tfrac{d_{n-1}+c_{n-1}}{2}] \qquad \text{i} \qquad V_2 = [\tfrac{d_{n-1}+c_{n-1}}{2}, d_{n-1}]$$

та відповідні прямокутники

$$W_1 = I_{n-1} \times V_1 \qquad \text{i} \qquad W_2 = I_{n-1} \times V_2.$$

Припустимо, що множини

$$A_1 = \mathrm{pr}_X(E \cap W_1 \qquad \text{і} \qquad A_2 = \mathrm{pr}_X(E \cap W_2$$

ніде не щільні. Тоді, з одного боку, множина $A_1 \cup A_2$ ніде не щільна. А з іншого боку, згідно з умовою 3) маємо

$$A_1 \cup A_2 = \mathrm{pr}_X(E \cap (W_1 \cup W_2) = \mathrm{pr}_X(E \cap (I_{n-1} \times J_{n-1})) = I_{n-1},$$

що дає суперечність.

Отже, існує $i \in \{1,2\}$ таке, що множина V_i не є ніде не щільною. Виберемо $i \in \{1,2\}$ та відрізок

$$I_n = [a_n, b_n] \subseteq I_{n-1}$$

такі, що

$$b_n - a_n \le \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} \qquad \text{і} \qquad I_n \subseteq \overline{A_i}.$$

Залишилось покласти $J_n = V_i$.

З умов 1) і 2) та леми про вкладені відрізки випливає, що існують єдині точки $x_0 \in X$ та $y_0 \in Y$ такі, що

$$p_0 = (x_0, y_0) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (I_n \times J_n),$$

причому $x_0 \in (a, b)$.

Покажемо, що $p_0 \in E$. Використовуючи умову 3) для кожного $n \in \mathbb{N}$ виберемо точку

$$p_n \in E \cap (I_n \times J_n).$$

Згідно з 2), маємо $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p_0$. Тому $p_0 \in E$, адже множина E замкнена.

Тепер доведемо, що кожного $\varepsilon > 0$ існує замкнений прямокутний окіл $W = U \times V$ точки p_0 в $X \times Y$ такий, що точка x_0 є внутрішньою точкою відрізка U, довжина відрізка V не перевищує ε і

$$\mathrm{pr}_X(E \cap W) = U.$$

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і виберемо $m \in \mathbb{N}$ так, що $d_m - c_m < \varepsilon$. Покладемо $U = I_m$ і візьмемо окіл $V = [c', d'] \subseteq [c, d]$ точки y_0 в Y такий, що

$$J_m \subseteq V \qquad \text{і} \qquad d' - c' \le \varepsilon.$$

З умови 1) випливає, що точка x_0 є внутрішньою точкою відрізка U. Крім того, використовуючи умову 3), одержимо

$$U \supseteq \mathrm{pr}_X(E \cap W) \supseteq \mathrm{pr}_X(E \cap (I_m \times J_m)) = I_m = U.$$

Отже, $\mathrm{pr}_X(E \cap W) = U$ і $p_0 \in P$.

(b). Візьмемо довільний невироджений відрізок

$$X' = [a', b'] \subseteq [a, b]$$

і зауважимо, що

$$\mathrm{pr}_X(P) \cap [a', b'] \neq \emptyset.$$

Для доведення цього достатньо застосувати уже доведене твердження (a) до множини $E' = E \cap (X' \times Y)$ в добутку $X' \times Y$.

(c). Нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in P$ і G – окіл точки p_0. Тоді існує замкнений прямокутний окіл $W_0 = U_0 \times V_0 \subseteq G$ точки p_0 в $X \times Y$ такий, що точка x_0 є внутрішньою точкою відрізка U_0, $\mathrm{pr}_X(E \cap W_0) = U_0$. Застосувавши доведене твердження (b) до множини $E_0 = E \cap W_0$ в добутку $U_0 \times V_0$, одержимо, що для відповідної множини P_0 проекція $\mathrm{pr}_X(P_0)$ щільна в U_0. Оскільки $P_0 \subseteq P \cap W_0$, то проекція $\mathrm{pr}_X(W_0 \cap P)$ щільна в U_0. $\square$

1.2.2. Напівнеперервні функції.

У цьому пункті ми розглянемо деякі властивості напівнеперервних функцій, які в [2] ввів до розгляду Бер і використовував у своїй праці.

Функція $f : X \to \mathbb{R}$, визначена на топологічному просторі X, називається *напівнеперервною зверху в точці* $x_0 \in X$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує окіл U точки x_0 в X такий, що

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

для кожного $x \in U$. Аналогічно, функція $f : X \to \mathbb{R}$ називається *напівнеперервною знизу в точці* $x_0 \in X$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує окіл U точки x_0 в X такий, що

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon$$

для кожного $x \in U$. Функція $f : X \to \mathbb{R}$, напівнеперервна зверху (знизу) в кожній точці $x \in X$, називається *напівнеперервною зверху (знизу)*.

Нам будуть потрібні наступні властивості напівнеперервних функцій.

Твердження 1.2.4. *Нехай X – топологічний простір, $f : X \to \mathbb{R}$ і $g : X \to \mathbb{R}$. Тоді*

1) *функція f напівнеперервна зверху тоді і тільки тоді, коли функція $-f$ напівнеперервна знизу;*

2) *якщо функції f і g напівнеперервні зверху (знизу), то функція $f + g$ також напівнеперервна зверху (знизу).*

Доведення. Твердження 1) випливає з того, що нерівності

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon \qquad \text{і} \qquad -f(x) > -f(x_0) - \varepsilon$$

є рівносильними.

2). Згідно з 1) достатньо розглянути випадок напівнеперервних функцій f і g. Для доведення напівнеперервності зверху суми $f+g$ досить для довільних $x_0 \in X$ і $\varepsilon > 0$ згідно з означенням напівнеперервної зверху функції вибрати окіл U точки x_0 в X такий, що

$$f(x) < f(x_0) + \tfrac{\varepsilon}{2} \qquad \text{і} \qquad g(x) < g(x_0) + \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

□

Твердження 1.2.5. *Нехай X – топологічний простір і $f : X \to \mathbb{R}$. Тоді наступні умови рівносильні:*

1) функція f напівнеперервна зверху;

2) для кожного $c \in \mathbb{R}$ множина $G_c = f^{-1}((-\infty, c))$ відкрита;

3) для кожного $c \in \mathbb{R}$ множина $F_c = f^{-1}([c, +\infty))$ замкнена.

Доведення. 1) ⇒ 2). Нехай $c \in \mathbb{R}$ і $x_0 \in G_c$. Тоді

$$\varepsilon = c - f(x_0) > 0$$

і згідно з означенням напівнеперервної зверху функції існує окіл U точки x_0 в X такий, що $U \subseteq G_c$. Отже, G_c є околом точки x_0 і множина G_c відкрита.

Імплікація 2) ⇔ 3) негайно випливає з рівності $F_c = X \setminus G_c$.

2) ⇒ 1). Нехай $x_0 \in X$ і $\varepsilon > 0$. Покладемо

$$c = f(x_0) + \varepsilon \qquad \text{і} \qquad U = G_c.$$

Оскільки точка x_0 належить відкритій множині G_c, то U є околом точки x_0, причому

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

для кожного $x \in U$. Отже, f напівнеперервна зверху в точці x_0. □

Твердження 1.2.6. *Нехай X, Y – топологічні простори, $f : X \to Y$ – неперервне відображення і $g : Y \to \mathbb{R}$ – напівнеперервна зверху (знизу) функція. Тоді композиція $h : X \to \mathbb{R}$, $h = g \circ f$, також є напівнеперервною зверху (знизу) функцією.*

Доведення. Згідно з твердженням 2.2.3 достатньо розглянути випадок напівнеперервної зверху функції g.

Зафіксуємо $c \in \mathbb{R}$. З твердження 1.2.5 випливає, що множина

$$V = g^{-1}((-\infty, c))$$

відкрита в просторі Y. Тепер з неперервності відображення f випливає, що множина

$$h^{-1}((-\infty, c)) = f^{-1}(V)$$

відкрита в просторі X. Отже, згідно з твердженням 1.2.5 функція h є напівнеперервною зверху. $\square$

Твердження 1.2.7. *Нехай X – топологічний простір, $f : X \to \mathbb{R}$ – напівнеперервна зверху (знизу) функція і $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – строго зростаюча неперервна функція. Тоді композиція $h : X \to \mathbb{R}$, $h = g \circ f$, також є напівнеперервною зверху (знизу) функцією.*

Доведення. Згідно з твердженням 2.2.3 достатньо розглянути випадок напівнеперервної зверху функції f.

Зафіксуємо $c \in \mathbb{R}$. Якщо $c \notin g(\mathbb{R})$, то з теореми про проміжне значення випливає, що

$$g^{-1}((-\infty, c)) = \emptyset \qquad\qquad g^{-1}((-\infty, c)) = \mathbb{R}.$$

Тоді

$$h^{-1}((-\infty, c)) = \emptyset \qquad\qquad h^{-1}((-\infty, c)) = X.$$

Якщо існує $\gamma \in \mathbb{R}$ таке, що $g(\gamma) = c$, то з строгої зростаючості функції g і твердження 1.2.5 випливає, що множина

$$h^{-1}((-\infty, c)) = f^{-1}((-\infty, \gamma))$$

є відкритою в X. Отже, згідно з твердженням 1.2.5 функція h є напівнеперервною зверху. $\square$

Множина A в топологічному просторі X називається *множиною першої категорії*, якщо існує послідовність $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ ніде не щільних в просторі X множин A_n така, що $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Множина A в топологічному просторі X, яка не є множиною першої категорії, називається *множиною другої категорії*.

Топологічний простір X називається *берівським*, якщо довільна відкрита в X непорожня відкрита множина є множиною другої категорії.

З класичної леми про вкладені відрізки нескладно випливає, що числова пряма $\mathbb{R}$ є берівським простором. Нам потрібне наступне підсилення цього факту.

Твердження 1.2.8. *Кожна непорожня замкнена підмножина Z простору $\mathbb{R}^2$ є берівським простором.*

Доведення. Нехай G – довільна непорожня відкрита підмножина простору Z і A – довільна множина першої категорії в Z. Виберемо послідовність $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ ніде не щільних в Z множин A_n. Використовуючи ніде не щільність множин множин A_n легко побудувати послідовність прямокутників $P_n = [a_n, b_n] \times [c_n, d_n]$ таких, що

$$P_1 \cap Z \subseteq G, \qquad P_n \cap Z \neq \emptyset, \qquad P_n \cap A_n = \emptyset \qquad \text{і} \qquad P_{n+1} \subseteq P_n$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$ і

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}(d_n - c_n) = 0.$$

З леми про вкладені відрізки випливає, що існують точки

$$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \qquad \text{і} \qquad y_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[c_n, d_n].$$

Тепер, з одного боку,

$$p_0 = (x_0, y_0) \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A.$$

А з іншого боку, вибравши для кожного $n \in \mathbb{N}$ точку $p_n \in P_n \cap Z$, одержимо

$$p_0 = \lim_{n\to\infty} p_n \in Z \cap P_1 \subseteq G,$$

адже множини Z і P_1 замкнені. Таким чином, $G \neq A$. Отже, G – множина другої категорії в Z.

□

Наступне твердження відіграє важливу роль у розв'язанні Бера прямої задачі.

Твердження 1.2.9. *Нехай $X \subseteq \mathbb{R}^2$ – замкнена множина і $f : X \to (0, +\infty)$ – напівнеперервна зверху функція. Тоді існують відкрита в X непорожня множина G і число $\delta > 0$ такі, що $f(x) \geq \delta$ для кожного $x \in G$.*

Доведення. Припустимо, що це не так, тобто для кожного $n \in \mathbb{N}$ множина

$$G_n = \{x \in X : f(x) < \tfrac{1}{n}\}$$

є всюди щільною. Крім того, згідно з твердженням 1.2.5 кожна множина G_n є відкритою. Разом з тим, оскільки $f(x) > 0$ для кожного $x \in X$, то

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \{x \in X : f(x) \leq 0\} = \emptyset.$$

Але це неможливо, адже простір X берівський. □

1.2.3. Верхня і нижня граничні функції Бера та коливання. В цьому пункті ми розглянемо класичні поняття, які увів Р. Бер. Це граничні функції, які пізніше дістали назву верхньої і нижньої функції Бера, і тісно пов'язані з коливанням функції, що давно уже стало звичним мірилом величини розривів функції.

Нехай X – топологічний простір, $\mathcal{U}_x$ – система всіх околів точки x в просторі X і $f : X \to \mathbb{R}$ – обмежена функція. Для кожного $x \in X$ покладемо

$$f^*(x) = \inf_{U \in \mathcal{U}_x} \sup_{u \in U} f(u)$$

і

$$f_*(x) = \sup_{U \in \mathcal{U}_x} \inf_{u \in U} f(u).$$

Функції f^* і f_* називаються *верхньою* і *нижньою граничними функціями Бера* відповідно.

Наступне твердження нескладно випливає з означень.

Твердження 1.2.10. *Для довільної обмеженої функції f, означеної на топологічному просторі X, виконуються умови:*

1) $f^*(x) \leq f(x) \leq f_*(x)$ для кожного $x \in X$;

2) функція f^* напівнеперервна зверху;

3) функція f_* напівнеперервна знизу;

4) $f = f^*$, якщо f напівнеперервна зверху;

5) $f = f_*$, якщо f напівнеперервна знизу.

Доведення. Твердження 1) випливає з того, що

$$\inf_{u \in U} f(u) \leq f(x) \leq \sup_{u \in U} f(u)$$

для довільних $x \in X$ і $U \in \mathcal{U}_x$.

2). Зафіксуємо $x_0 \in X$ і $\varepsilon > 0$. Виберемо окіл U точки x_0 такий, що

$$\sup_{u \in U} f(u) < f^*(x_0) + \varepsilon.$$

Тоді

$$f^*(x) < f^*(x_0) + \varepsilon$$

для кожного $x \in \mathrm{int}(U)$. Отже, f^* напівнеперервна зверху в точці x_0.

4). Якщо f напівнеперервна зверху, то для довільної точки $x \in X$ і кожного $\varepsilon > 0$ маємо

$$f^*(x) = \inf_{U \in \mathcal{U}_x} \sup_{u \in U} f(u) \le f(x) + \varepsilon.$$

Тому $f^*(x) \le f(x)$. Залишилось використати 1).

Твердження 3) і 5) доводяться аналогічно до 2) і 4) відповідно. $\square$

Нехай, як і раніше, X – топологічний простір, $\mathcal{U}_x$ – система всіх околів точки x в просторі X, $f : X \to \mathbb{R}$ – обмежена функція і $A \subseteq X$.

Число

$$\omega_f(A) = \sup_{a,b \in A} |f(a) - f(b)| = \sup_{a \in A} f(a) - \inf_{a \in A} f(a)$$

називається *коливанням функції f на множині A*, а число

$$\omega_f(x) = \inf_{U \in \mathcal{U}_x} \omega_f(U)$$

називається *коливанням функції f в точці x_0*.

Наступне твердження дає зв'язок між коливанням і граничними функціями Бера.

Твердження 1.2.11. *Для довільної обмеженої функції f, означеної на топологічному просторі X, виконуються умови:*

1) $\omega_f(x) = f^*(x) - f_*(x)$ для кожного $x \in X$;

2) функція $\omega_f : X \to [0, +\infty)$ напівнеперервна зверху, зокрема, для кожного $\varepsilon > 0$ множина $\{x \in X : \omega_f(x) \ge \varepsilon\}$ замкнена в X;

3) функція f неперервна в точці $x \in X$ тоді і тільки тоді, коли $\omega_f(x) = 0$.

Доведення. 1). Для кожного $x \in X$ маємо

$$\omega_f(x) = \inf_{U \in \mathcal{U}_x} \omega_f(U) = \inf_{U \in \mathcal{U}_x} (\sup_{u \in U} f(u) - \inf_{u \in U} f(u)) =$$

$$= \inf_{U \in \mathcal{U}_x} \sup_{u \in U} f(u) - \sup_{U \in \mathcal{U}_x} \inf_{u \in U} f(u) = f^*(x) - f_*(x).$$

Твердження 2) випливає безпосередньо з 1) і тверджень 2.2.3, 1.2.5 і 1.2.10.

3). З нерівності трикутника для модуля випливає, що функція f неперервна в точці $x \in X$ тоді і тільки тоді, коли для кожного $\varepsilon > 0$ існує окіл U точки x такий, що $\omega_f(U) \leq \varepsilon$, тобто $\omega_f(x) \leq \varepsilon$ для кожного $\varepsilon > 0$. Остання умова означає, що $\omega_f(x) = 0$. □

Використовуючи наступне допоміжне твердження, вивчення множини точок розриву ми будемо зводити до випадку обмежених функцій.

Лема 1.2.12. *Нехай X – топологічний простір, $f : X \to \mathbb{R}$ і $g : X \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ такі, що $g(x) = \operatorname{arctg} f(x)$ для кожного $x \in X$. Тоді $D(f) = D(g)$.*

Доведення. З неперервності функції $z = \operatorname{arctg} y$ випливає включення $D(f) \subseteq D(g)$. З іншого боку, $f(x) = \operatorname{tg} g(x)$ і функція $y = \operatorname{tg} z$ неперервна. Тому $D(g) \subseteq D(f)$. Отже, $D(f) = D(g)$. □

Підмножина A топологічного простору X називається *множиною типу F_σ* або *F_σ-множиною*, якщо існує послідовність $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ замкнених в X множин F_n така, що $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. А підмножина B топологічного простору X називається *множиною типу G_δ* або *G_δ-множиною*, якщо існує послідовність $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ відкритих в X множин G_n така, що $B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$. Зрозуміло, що множина A є множиною типу F_σ тоді і тільки тоді, коли її доповнення $B = X \setminus A$ є множиною типу G_δ.

З твердження 1.2.11 випливає наступний факт.

Наслідок 1.2.13. *Для довільної функції f, означеної на топологічному просторі X, множина $D(f)$ точок розриву функції f є множиною типу F_σ в просторі X, а множина $C(f)$ точок неперервності функції f є множиною типу G_δ.*

Доведення. Спочатку розглянемо випадок обмеженої функції f. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$F_n = \{x \in X : \omega_f(x) \geq \tfrac{1}{n}\}.$$

Згідно з твердженням 1.2.11 кожна множина F_n замкнена і

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \{x \in X : (\exists n \in \mathbb{N})\,(\omega_f(x) \geq \tfrac{1}{n})\} = \{x \in X : \omega_f(x) > 0\} = D(f).$$

Отже, $D(f)$ є множиною типу F_σ.

Для необмеженої функції f твердження випливає з леми 1.2.12 і щойно розглянутого випадку обмеженої функції.

Оскільки $C(f) = X \setminus D(f)$, то $C(f)$ є множиною типу G_δ. □

1.2.4. Функція α_σ та її напівнеперервність зверху.

У даному пункті ми розглянемо допоміжну функцію Бера α_σ, яка є основним технічним інструментом в доведенні необхідних умов на множину точок розриву нарізно неперервних функцій двох дійсних змінних.

Нехай $X = [a, b]$, $Y = [c, d]$, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – обмежена функція і $\sigma > 0$. Для кожної точки $p = (x, y) \in X \times Y$ покладемо

$$A(f, \sigma, p) = \{t \in [0, d - c] : \omega_f(\{x\} \times (Y \cap [y - t, y + t])) \le \sigma\}$$

і

$$\alpha_\sigma(x, y) = \sup A(f, \sigma, p).$$

Зауважимо, що $0 \in A(f, \sigma, p)$ для довільних $p \in X \times Y$ і $\sigma > 0$, адже

$$[y, y] = \{y\} \qquad \text{і} \qquad \omega_f(\{x\} \times \{y\}) = 0.$$

Отже,

$$0 \in A(f, \sigma, p) \subseteq [0, d - c] \quad \text{і} \quad 0 \le \alpha_\sigma(p) \le d - c$$

для кожної точки $p \in X \times Y$.

Твердження 1.2.14. *Нехай $X = [a, b]$, $Y = [c, d]$, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – обмежена функція, яка неперервна відносно першої змінної, і $\sigma > 0$. Тоді функція $\alpha_\sigma : X \times Y \to \mathbb{R}$ напівнеперервна зверху за сукупністю змінних.*

Доведення. Зафіксуємо точку $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$ і число $\varepsilon > 0$. Якщо

$$\alpha_\sigma(p_0) + \varepsilon > d - c,$$

то для кожної точки $p \in W = X \times Y$ маємо

$$\alpha_\sigma(p) \le d - c < \alpha_\sigma(p_0) + \varepsilon.$$

Тепер нехай

$$\alpha_\sigma(p_0) + \varepsilon \le d - c.$$

Розглянемо число $t_0 = \alpha_\sigma(p_0) + \frac{\varepsilon}{2}$. Оскільки

$$t_0 = \alpha_\sigma(p_0) + \tfrac{\varepsilon}{2} > \alpha_\sigma(p_0) = \sup A(f, \sigma, p_0),$$

то $t_0 \notin A(f, \sigma, p_0)$, тобто

$$\omega_f(\{x_0\} \times (Y \cap [y_0 - t_0, y_0 + t_0])) > \sigma.$$

Тому існують точки $y_1, y_2 \in Y \cap [y_0 - t_0, y_0 + t_0]$ такі, що

$$|f(x_0, y_1) - f(x_0, y_2)| > \sigma.$$

Використовуючи неперервність функції f відносно першої змінної, знайдемо окіл U точки x_0 в X такий, що

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|>\sigma$$

для кожного $x\in U$. Крім того, розглянемо окіл

$$V=(y_0-\tfrac{\varepsilon}{3},y_0+\tfrac{\varepsilon}{3})\cap Y$$

точки y_0 в Y. Оскільки

$$|y_1-y_0|\le t_0 \qquad \text{і} \qquad |y_2-y_0|\le t_0,$$

то для кожного $y\in V$ та $i\in\{1,2\}$ маємо

$$|y_i-y|\le|y_i-y_0|+|y_0-y|\le t_0+\tfrac{\varepsilon}{3}=\alpha_\sigma(p_0)+\tfrac{5\varepsilon}{6},$$

тобто

$$y_1,y_2\in[y-t_1,y+t_1],$$

де

$$t_1=\alpha_\sigma(p_0)+\tfrac{5\varepsilon}{6}.$$

Отже, для довільної точки $p=(x,y)\in W=U\times V$ маємо

$$y_1,y_2\in Y\cap[y-t_1,y+t_1] \quad \text{і} \quad |f(x,y_1)-f(x,y_2)|>\sigma.$$

Тому

$$\omega_f(\{x\}\times(Y\cap[y-t_1,y+t_1]))>\sigma$$

і $t_1\notin A(f,\sigma,p)$ для кожної точки $p=(x,y)\in W$. Тоді $t\notin A(f,\sigma,p)$ для кожного $t\ge t_1$, тобто $A(f,\sigma,p)\subseteq[0,t_1)$ і

$$\alpha_\sigma(p)\le t_1=\alpha_\sigma(p_0)+\tfrac{5\varepsilon}{6}<\alpha_\sigma(p_0)+\varepsilon$$

для довільної точки $p\in W$.

Отже, так чи інакше, існує окіл W точки p_0 такий, що

$$\alpha_\sigma(p)<\alpha_\sigma(p_0)+\varepsilon$$

для довільної точки $p\in W$ і функція α_σ напівнеперервна зверху в точці p_0. $\square$

1.2.5. Необхідні умови на множину точок розриву.

У цьому пункті ми доведемо основні результати даного підрозділу.

Розпочнемо з допоміжного твердження, яке дає можливість отримувати оцінки на сукупне коливання функції двох змінних.

Лема 1.2.15. *Нехай X, Y – топологічні простори, $\varepsilon > 0$ і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ неперервна відносно першої змінної функція такі, що $\omega_f(\{x\} \times Y) < \varepsilon$ для кожного $x \in X$. Тоді $\omega_f(p) \le 2\varepsilon$ для кожної точки $p \in X \times Y$.*

Доведення. Зафіксуємо точки $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ і число $\sigma > 2\varepsilon$. Тоді

$$\delta = \sigma - 2\varepsilon > 0.$$

Використавши неперервність функції f відносно змінної x в точці $p_0 = (x_0, y_0)$, знайдемо окіл U точки x_0 в X такий, що

$$\omega_f(U \times \{y_0\}) \le \delta.$$

Тепер для довільних точок $p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2) \in U \times Y$ маємо

$$|f(p_2) - f(p_1)| \le |f(x_2, y_2) - f(x_2, y_0)| + |f(x_2, y_0) - f(x_1, y_0)| +$$

$$+|f(x_1, y_0) - f(x_1, y_1)| \le \omega_f(\{x_2\} \times Y) + \omega_f(U \times \{y_0\}) + \omega_f(\{x_1\} \times Y) \le$$
$$\le \varepsilon + \delta + \varepsilon = \sigma.$$

Тому $\omega_f(U \times Y) \le \sigma$. Отже, для кожного числа $\sigma > 2\varepsilon$ існує окіл W точки p_0 такий, що $\omega_f(W) \le \sigma$. Тоді $\omega_f(p_0) \le \sigma$ для кожного $\sigma > 2\varepsilon$. Тому $\omega_f(p_0) \le 2\varepsilon$. □

Наступний результат Бера дає основну необхідну умову на множину точок розриву нарізно неперервних функцій двох дійсних змінних.

Теорема 1.2.16. *Нехай $X = [a, b]$, $Y = [c, d]$, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – обмежена нарізно неперервна функція, $\varepsilon > 0$ і $E = \{p \in X \times Y : \omega_f(p) \ge \varepsilon\}$. Тоді множина $A = \mathrm{pr}_X(E)$ ніде не щільна в X.*

Доведення. Припустимо, що множина A не є ніде не щільною, тобто існує інтервал $(a_1, b_1) \subseteq [a, b]$ такий, що $[a_1, b_1] \subseteq \overline{A}$. Покладемо $X_1 = [a_1, b_1]$ і розглянемо звуження f_1 функції f на прямокутник $X_1 \times Y$, множину

$$E_1 = \{p \in X_1 \times Y : \omega_{f_1}(p) \ge \varepsilon\}$$

і проекцію $A_1 = \mathrm{pr}_X(E_1)$. Зауважимо, що кожна точка $p \in E \cap ((a_1, b_1) \times Y)$ є точкою розриву функції f_1, причому $\omega_{f_1}(p) = \omega_f(p)$. Отже,

$$E \cap ((a_1, b_1) \times Y) \subseteq E_1 \qquad \text{і} \qquad A \cap (a_1, b_1) \subseteq A_1.$$

Тому
$$\overline{A_1} \supseteq \overline{A} \cap (a_1, b_1) = (a_1, b_1).$$
З тверджень 1.2.5 і 1.2.11 випливає, що множина E_1 замкнена. Згідно з лемою 1.2.1 множина A_1 також замкнена і
$$A_1 = \overline{A_1} = [a_1, b_1] = X.$$

Розглянемо множину P всіх точок $p = (x, y) \in E_1$, які володіють наступною властивістю: *для кожного* $\delta > 0$ *існує замкнений прямокутний окіл* $W = U \times V$ *точки* p *в* $X_1 \times Y$ *такий, що точка* x *є внутрішньою точкою відрізка* U, *довжина відрізка* V *не перевищує* δ *і* $\mathrm{pr}_X(E_1 \cap W) = U$. Згідно з твердженням 2.2.1 множина P непорожня. Крім того, оскільки множина E_1 замкнена і $P \subseteq E_1$, то $F = \overline{P} \subseteq E_1$.

Покладемо $\sigma = \frac{\varepsilon}{3}$ і розглянемо функцію $\alpha_\sigma : X_1 \times Y \to \mathbb{R}$, що відповідає функції f_1. Згідно з твердженням 1.2.14 функція α_σ напівнеперервна зверху, зокрема, напівнеперервним зверху є звуження g функції α_σ на замкнену множину F. З твердження 1.2.9 випливає, що існують відкрита в F непорожня множина G і число $\delta > 0$ такі, що
$$g(p) \geq 2\delta$$
для кожного $p \in G$. Виберемо точку $p_0 \in P \cap G$ і окіл G_1 точки p_0 в $X_1 \times Y$ такий, що $G = G_1 \cap F$. З твердження 1.2.3 (c) випливає, що існує замкнений прямокутний окіл $W_0 = U_0 \times V_0 \subseteq G_1$ точки p_0 в $X_1 \times Y$ такий, що довжина відрізка V_0 не перевищує δ проекція $\mathrm{pr}_X(P \cap W_0)$ є щільною в U_0. З леми 1.2.1 випливає, що $\mathrm{pr}_X(F \cap W_0) = U_0$.

Зафіксуємо $x \in U_0$ і виберемо відповідну точку
$$p_x = (x, y_x) \in F \subseteq W_0 \subseteq G.$$
Оскільки $y_x \in V_0$ і довжина відрізка V_0 не перевищує δ, то
$$V_0 \subseteq [y_x - \tfrac{3\delta}{2}, y_x + \tfrac{3\delta}{2}].$$
Оскільки
$$g(p_x) = \alpha_\sigma(p_x) = \sup A(f_1, \sigma, p_x) \geq 2\delta,$$
то існує $t_x > \frac{3\delta}{2}$ таке, що $t \in A(f_1, \sigma, p_x)$. Таким чином, виконується включення
$$V_0 \subseteq [y_x - t_x, y_x + t_x] \cap Y$$
і згідно з означенням функції α_σ маємо
$$\omega_{f_1}(\{x\} \times V_0) \leq \sigma.$$

Отже,

$$\omega_{f_1}(\{x\} \times \mathrm{int}(V_0)) \leq \sigma$$

для кожного $x \in \mathrm{int}(U_0)$. Тепер з леми 1.2.15 випливає, що

$$\omega_{f_1}(p_0) \leq 2\sigma = \tfrac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon,$$

що неможливо, адже $p_0 \in E$. $\square$

Підмножина E добутку $X \times Y$ топологічних просторів X і Y називається *проективно ніде не щільною* (*проективно першої категорії*), якщо проекції $\mathrm{pr}_X(E)$ і $\mathrm{pr}_Y(E)$ є ніде не щільними множинами (множинами першої категорії) в X і Y відповідно.

Тепер легко доводиться наступний результат.

Теорема 1.2.17. *Нехай $X = [a,b]$, $Y = [c,d]$ і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція. Тоді множина $E = D(f)$ є проективно першої категорії F_σ-множиною в $X \times Y$.*

Доведення. Згідно з наслідком 1.2.13 множина E є F_σ-множиною в добутку $X \times Y$. Крім того, з леми 1.2.12 випливає, що достатньо розглянути випадок обмеженої функції f. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ розглянемо множину

$$E_n = \{p \in X \times Y : \omega_f(p) \geq \tfrac{1}{n}\}.$$

Згідно з теоремою 1.2.16 всі множини E_n проективно ніде не щільні, а з твердження 1.2.11 випливає рівність $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Отже, множина E проективно першої категорії в $X \times Y$. $\square$

З даного результату, який фактично був доведений Бером, випливають також необхідні умови на множину точок розриву нарізно неперервних функцій на добутку двох проміжків, зокрема, на $\mathbb{R}^2$.

Розпочнемо з простого допоміжного факту.

Лема 1.2.18. *Нехай X – топологічний простір $f : X \to \mathbb{R}$ і $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність множин $X_n \subseteq X$ така, що $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{int}(X_n)$. Тоді*

$$D(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} D(f_n),$$

де для кожного $n \in \mathbb{N}$ функція f_n є звуженням функції f на множину X_n.

Доведення. Зрозуміло, що

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} D(f_n) \subseteq D(f).$$

З іншого боку, для кожної точки $x \in D(f)$ існує $m \in \mathbb{N}$ таке, що

$$x \in \operatorname{int}(X_m).$$

Тоді $x \in D(f_m)$ і

$$D(f) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} D(f_n).$$

□

Тепер нескладно одержується наступний результат.

Теорема 1.2.19. *Нехай X і Y – проміжки (скінченні чи нескінченні) на числовій прямій $\mathbb{R}$ і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція. Тоді множина $D(f)$ є проективно першої категорії F_σ-множиною в $X \times Y$.*

Доведення. Як і раніше, згідно з наслідком 1.2.13 множина $D(f)$ є F_σ-множиною в $X \times Y$. Для доведення того, що множина $D(f)$ проективно першої категорії в $X \times Y$, виберемо послідовності $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ і $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$ відрізків $X_n \subseteq X$ і $Y_n \subseteq Y$ такі, що

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{int}(X_n) \qquad \text{і} \qquad Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{int}(Y_n).$$

Залишилось використати теорему 1.2.17 і лему 1.2.18. □

1.3

Теорема Кешнера про достатні умови на множину точок розриву

У даному підрозділі ми викладемо підхід до розв'язання оберненої задачі, який був застосований Р. Кешнером в [23, теорема 9] для побудови нарізно неперервних функцій n змінних на n-вимірному кубі. На перший погляд, міркування Кешнера досить сильно використовують геометрію простору $\mathbb{R}^n$ і не можуть бути використані в абстрактному випадку. Насправді це не так і даний метод нескладно застосувати у добутку сепарабельних метризовних просторів. Незважаючи на це, ми викладемо конструкцію Кешнера (для $n = 2$) у її авторському вигляді, зберігаючи при цьому дух праці [23].

Результат Кешнера разом з результатом Бера приводять до повного розв'язання задачі Діні на добутку прямокутників і він дає можливість також одержати повний опис множин точок розриву нарізно неперервних функцій на добутку двох проміжків.

1.3.1. Спадкова сепарабельність простору $\mathbb{R}^2$.

Топологічний простір X називається *сепарабельним*, якщо в просторі X існує не більш, ніж зліченна всюди щільна підмножина, і *спадково сепарабельним*, якщо кожна підмножина A топологічного простору X є сепарабельною в індукованій з простору X топології.

Наступне твердження має цілком стандартне доведення, яке нескладно переноситься на випадок метризовного сепарабельного простору.

Твердження 1.3.1. *Довільна множина в $\mathbb{R}^2$ є сепарабельною, тобто простір $\mathbb{R}^2$ спадково сепарабельний.*

Доведення. Нехай $X \subseteq \mathbb{R}^2$ – довільна непорожня множина і

$$\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$$

– деяка перенумерація множини всіх раціональних чисел. Для кожної трійки $(m, n, k) \in \mathbb{N}^3$ позначимо через $B_{m,n,k}$ круг на площині $\mathbb{R}^2$ з центром в точці (q_m, q_n) і радіусом $\frac{1}{k}$. Розглянемо не більш, ніж зліченну множину

$$S = \{(m, n, k) \in \mathbb{N}^3 : X \cap B_{m,n,k} \neq \emptyset\}.$$

Для кожного $s = (m, n, k) \in S$ виберемо точку $x_s \in X \cap B_{m,n,k}$. Зрозуміло, що підмножина $A = \{x_s : s \in S\}$ простору X є не більш, ніж зліченною і всюди щільною в X. Отже, простір X сепарабельний. □

1.3.2. Майже неперетинні квадрати і відкриті множини на площині. У даному пункті ми розглянемо деякі топологічно-геометричні властивості площини $\mathbb{R}^2$, які Кешнер використовує у своїх побудовах.

Розпочнемо з добревідомої властивості відкритих множин на числовій прямій.

Твердження 1.3.2. *Нехай $G \subseteq \mathbb{R}$ – відкрита непорожня множина. Тоді існує не більш, ніж зліченна сім'я $(G_i : i \in I)$ попарно неперетинних відкритих інтервалів $G_i \subseteq \mathbb{R}$ така, що $G = \bigcup\limits_{i\in I} G_i$.*

Доведення. Для кожної точки $x \in G$ покладемо

$$A_x = (-\infty, x] \setminus G, \qquad B_x = [x, +\infty) \setminus G,$$

$$a_x = \begin{cases} -\infty, & A_x = \emptyset; \\ d(x, A_x), & A_x \neq \emptyset \end{cases},$$

$$b_x = \begin{cases} +\infty, & B_x = \emptyset; \\ d(x, B_x), & B_x \neq \emptyset \end{cases}$$

і $U_x = (a_x, b_x)$. Зауважимо, що якщо $U_x \cap U_y \neq \emptyset$ для різних точок $x, y \in G$, то $U_x = U_y$. Тому система

$$\mathcal{U} = \{U_x : x \in G\}$$

складається з попарно неперетинних інтервалів. Для кожного $U \in \mathcal{U}$ виберемо раціональне число

$$q_U \in U \cap \mathbb{Q}$$

і розглянемо не більш, ніж зліченну множину

$$I = \{q_U : U \in \mathcal{U}\}.$$

Оскільки система $\mathcal{U}$ складається з попарно неперетинних інтервалів, то відображення $f : \mathcal{U} \to I$, означене формулою

$$f(U) = q_U,$$

є бієкцією. Для кожного $i \in I$ покладемо

$$G_i = f^{-1}(i)$$

і одержимо не більш, ніж зліченну сім'ю $(G_i : i \in I)$ попарно неперетинних відкритих інтервалів таку, що

$$\bigcup_{i\in I} G_i = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U = \bigcup_{x\in G} U_x = G.$$

□

Аналогами інтервалів на площині є відкриті прямокутники. Зрозуміло, що відкрита множина на площині не обов'язково розбивається на попарно неперетинні відкриті прямокутники. Але на площині має місце дещо слабша властивість, яку ми обговоримо нижче.

Замкнені прямокутники P і Q на площині $\mathbb{R}^2$ назвемо *майже неперетинними*, якщо перетин $P \cap Q$ є підмножиною перетину меж цих прямокутників.

Спочатку розглянемо випадок прямокутника співвимірних розмірів.

Лема 1.3.3. *Нехай $P = [a, b] \times [c, d]$, причому $\frac{b-a}{d-c} \in \mathbb{Q}$. Тоді прямокутник P можна покрити скінченною кількістю попарно майже неперетинних квадратів.*

Доведення. Нехай $\frac{b-a}{d-c} = \frac{m}{n}$, де $m, n \in \mathbb{N}$. Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на m відрізків

$$U_1, U_2, \ldots, U_m$$

однакової довжини, а відрізок $[c, d]$ на n відрізків

$$V_1, V_2, \ldots, V_n$$

однакової довжини. З вибору чисел m і n випливає, що всі відрізки U_i та V_j мають однакову довжину. Отже, майже попарно неперетинні квадрати

$$K_{i,j} = U_i \times V_j,$$

де $1 \leq i \leq m$ та $1 \leq j \leq n$, є шуканими. □

Наступна властивість відкритих прямокутників на площині має місце і для довільних відкритих множин, але для здійснення конструкції Кешнера нам достатньо цієї слабшої версії.

Лема 1.3.4. *Нехай G і H – відкриті непорожні підмножини числової прямої $\mathbb{R}$. Тоді відкриту в $\mathbb{R}^2$ множину $G \times H$ можна покрити зліченною сім'єю попарно майже неперетинних квадратів.*

Доведення. Згідно з твердженням 1.3.2 існують не більш, ніж зліченні сім'ї

$$(G_i : i \in I) \qquad \text{і} \qquad (H_j : j \in J)$$

попарно неперетинних відкритих інтервалів G_i і H_j такі, що

$$G = \bigcup_{i \in I} G_i \qquad \text{і} \qquad H = \bigcup_{j \in J} G_j.$$

Оскільки

$$G \times H = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} G_i \times H_j,$$

то достатньо показати, що кожний відкритий прямокутник $G_i \times H_j$ можна покрити зліченною кількістю попарно майже неперетинних квадратів.

Зафіксуємо $i \in I$ і $j \in J$. Нехай $G_i = (a, b)$ і $H_j = (c, d)$. Виберемо строго зростаючі послідовності $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ і $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ такі, що

$$\lim_{n \to -\infty} x_n = a, \qquad \lim_{n \to +\infty} x_n = b,$$

$$\lim_{n \to -\infty} y_n = c \qquad \text{і} \qquad \lim_{n \to +\infty} y_n = d.$$

Для довільних $m, n \in \mathbb{Z}$ покладемо

$$P_{m,n} = [x_m, x_{m+1}] \times [y_n, y_{n+1}].$$

Згідно з лемою 1.3.3, кожний прямокутник $P_{m,n}$ можна покрити скінченною кількістю попарно майже неперетинних квадратів. Крім того, всі прямокутники $P_{m,n}$ попарно майже неперетинні і

$$(a, b) \times (c, d) = \bigcup_{m,n \in \mathbb{Z}} P_{m,n}.$$

Отже, прямокутник $G_i \times H_j$ можна покрити зліченною кількістю попарно майже неперетинних квадратів. $\square$

Наступне допоміжне твердження показує, як ми будемо використовувати покриття відкритих множин майже неперетинними квадратами.

Лема 1.3.5. *Нехай $P = [a, b] \times [c, d]$, $G \subseteq P$ – відкрита в $\mathbb{R}^2$ всюди щільна в P множина, $(K_i : i \in I)$ – зліченна сім'я попарно майже неперетинних квадратів $K_i \subseteq G$, яка покриває множину G. Тоді для кожної точки $p \in P \setminus G$ існує послідовність $(i_n)_{n=1}^{\infty}$ різних індексів $i_n \in I$ така, що*

$$p = \lim_{n \to \infty} s_n,$$

де $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність центрів квадратів K_{i_n}.

Доведення. Позначимо через d евклідову відстань на площині і візьмемо довільну точку $p \in P \setminus G$. Оскільки множина $G = \bigcup\limits_{i \in I} K_i$ щільна в P і евклідова відстань $d(p, K_i) > 0$ для кожного $i \in I$, то індукцією відносно $n \in \mathbb{N}$ легко побудувати послідовність $(i_n)_{n=1}^{\infty}$ різних індексів $i_n \in I$ таку, що $d(p, K_{i_n}) < \frac{1}{n}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Крім того, оскільки квадрати K_{i_n} попарно майже неперетинні і містяться у скінченному прямокутнику P, то площі S_n квадратів K_{i_n} прямують до нуля при $n \to \infty$, тобто

$$\lim_{n \to \infty} \delta_n = 0,$$

де δ_n – довжина сторони квадрата K_{i_n}. Залишилось зауважити, що

$$d(p, s_n) \leq d(p, K_{i_n}) + \delta_n < \frac{1}{n} + \delta_n$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

1.3.3. Випадок замкненої проективно ніде не щільної множини. Як і для прямої задачі, центральне місце у розв'язанні оберненої задачі займає випадок замкненої проективно ніде не щільної множини, який ми викладемо у даному пункті.

Для довільної точки $p = (x, y)$ в добутку $X \times Y$ множину

$$\operatorname{cross}(p) = (\{x\} \times Y) \cup (X \times \{y\})$$

називатимемо *хрестом точки p в добутку $X \times Y$*, а для непорожньої множини $C \subseteq X \times Y$ множину

$$\operatorname{cross}(C) = \bigcup_{p \in C} \operatorname{cross}(p)$$

називатимемо *хрестом множини C в добутку $X \times Y$*.

Наступне твердження показує, як хрест множини природним чином записується через її проекції.

Твердження 1.3.6. *Нехай $C \subseteq X \times Y$, $A = \operatorname{pr}_X(C)$ і $B = \operatorname{pr}_Y(C)$. Тоді*

$$\operatorname{cross}(C) = (A \times Y) \cup (X \times B).$$

Доведення. Оскільки $\operatorname{cross}(p) \subseteq (A \times Y) \cup (X \times B)$ для кожної очки $p \in C$, то

$$\operatorname{cross}(C) \subseteq (A \times Y) \cup (X \times B).$$

З іншого боку, нехай $a \in A$. Виберемо $y \in Y$ так, що $p = (a, y) \in C$. Тепер маємо

$$\{a\} \times Y \subseteq \operatorname{cross}(p) \subseteq \operatorname{cross}(C).$$

Отже,

$$A \times Y = \bigcup_{a \in A} (\{a\} \times Y) \subseteq \operatorname{cross}(C).$$

Аналогічно доводиться включення $X \times B \subseteq \operatorname{cross}(C)$. $\square$

Для здійснення побудови ми будемо використовувати наступні допоміжні функції.

Лема 1.3.7. *Нехай $K = [a, b] \times [c, d]$ – довільний квадрат. Тоді існує функція $g_K : K \to \mathbb{R}$, яка задовільняє наступні умови*

(1) g_K *є неперервною;*

(2) функція $g_K(p) = 0$ *для кожної точки з межі* C *квадрата* K*;*

(3) $0 \le g_K(p) \le 1$ *для кожного* $p \in K$*;*

(4) $g_K(p_0) = 1$*, де* $p_0 = (\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2})$ *– центр квадрата* K*.*

Доведення. На просторі $\mathbb{R}^2$ розглянемо евклідову відстань

$$d(p_1, p_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

де $p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Тоді функція $g_K : K \to \mathbb{R}$,

$$g_K(p) = \tfrac{1}{\delta}\, d(p, C),$$

де

$$\delta = d(p_0, C) = \tfrac{b-a}{2} = \tfrac{d-c}{2},$$

є шуканою. Справді, умови (1) і (2) випливають з твердження 1.1.4, а умови (3) і (4) легко перевіряються безпосередньо. □

Наступна теорема є основним результатом даного пункту.

Теорема 1.3.8. *Нехай* $X = [a, b]$*,* $Y = [c, d]$ *і* $E \subseteq X \times Y$ *– замкнена проективно ніде не щільна множина. Тоді існує функція* $f : X \times Y \to \mathbb{R}$*, яка задовільняє наступні умови*

(a) $0 \le f(p) \le 1$ *для кожного* $p \in X \times Y$*;*

(b) f *є нарізно неперервною;*

(c) функція f *сукупно неперервна в кожній точці* $p \in (X \times Y) \setminus E$*;*

(d) $\omega_f(p) = 1$ *для кожного* $p \in E$*;*

(e) $f(p) = 0$ *для кожної точки* p*, яка лежить на межі прямокутника* $X \times Y$*.*

Доведення. Покладемо

$$A = \mathrm{pr}_X(E) \cup \{a, b\} \qquad \text{і} \qquad B = \mathrm{pr}_Y(E) \cup \{c, d\}.$$

Оскільки множина E проективно ніде не щільна, то множини A і B ніде не щільні в X і Y відповідно. Крім того, з леми 1.2.1 випливає, що множини A і B замкнені в X і Y відповідно.

Множини $G = X \setminus A$ і $H = Y \setminus B$ є відкритими підмножинами числової прямої $\mathbb{R}$. Тому згідно з лемою 1.3.4 існує зліченна сім'я $(K_i : i \in I)$ попарно майже неперетинних квадратів K_i така, що

$$W = G \times H = \bigcup_{i \in I} K_i.$$

З твердження 1.3.1 випливає, що множина E є сепарабельною. Тому існує щільна в E не більш, ніж зліченна множина $D \subseteq E$. Нехай

$$D = \{p_n : n \in N\},$$

де $N \subseteq \mathbb{N}$ і всі точки p_n – різні. Оскільки множини A і B ніде не щільні в X і Y відповідно, то множини G і H є щільними в X і Y відповідно. Тому множина W є щільною в прямокутнику $P = X \times Y$ і згідно з лемою 1.3.5 для кожного $n \in N$ існує послідовність $(i_{n,m})_{m=n}^{\infty}$ різних індексів $i_{n,m} \in I$ така, що

$$d(p_n, s_{n,m}) \leq \tfrac{1}{m},$$

де d – евклідова відстань на площині і $(s_{n,m})_{m=n}^{\infty}$ – послідовність центрів квадратів $K_{i_{n,m}}$. Позначимо

$$\mathcal{K} = \bigcup_{n \in N} \{K_{i_{n,m}} : m \geq n\}.$$

Для кожного $K \in \mathcal{K}$ згідно з лемою 1.3.7 виберемо функцію $g_K : K \to \mathbb{R}$ і розглянемо функцію $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, означену формулою

$$f(p) = \begin{cases} g_K(p), & p \in K \in \mathcal{K}; \\ 0, & p \in (X \times Y) \setminus \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K. \end{cases}$$

Покажемо спочатку, що функція f означена коректно. Нехай

$$p \in K_1 \cap K_2$$

для різних квадратів $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$. Оскільки квадрати K_1 і K_2 майже неперетинні, то точка p лежить на межі кожного квадрата K_1 і K_2. Тоді згідно з умовою (2) з леми 1.3.7 маємо

$$g_{K_1}(p) = 0 = g_{K_2}(p).$$

Отже, функція f означена коректно.

Тепер доведемо, що f задовольняє умови (a)–(e). Зауважимо, що умова (a) випливає безпосередньо з означення функції f і умови (3) леми 1.3.7. Крім того, оскільки

$$\{a, b\} \cap G = \{c, d\} \cap H = \emptyset,$$

то множина W не перетинається з межею прямокутника $X \times Y$. Тому всі квадрати $K \in \mathcal{K}$ також не перетинається з межею прямокутника $X \times Y$, звідки випливає умова (e).

Перевіримо умову (c). Зафіксуємо точку $p_0 \in P \setminus E$. Оскільки множина E замкнена, то згідно з твердженням 1.1.4 маємо $d(p_0, E) > 0$. Позначимо

$$\delta = \tfrac{d(p_0,E)}{4} \qquad \text{і} \qquad U = \{p \in P : d(p_0, p) < \delta\}.$$

Візьмемо номер $m_0 \in \mathbb{N}$ так, що $\frac{1}{m_0} < \delta$, і доведемо, що

$$U \cap K_{n,m} = \emptyset$$

для довільних $n \in N$ і $m \geq \max\{n, m_0\}$. Справді, припустимо, що

$$p \in U \cap K_{n,m}$$

для деяких $n \in N$ і $m \geq \max\{n, m_0\}$. Оскільки

$$d(p_n, s_{n,m}) < \tfrac{1}{m} \qquad \text{і} \qquad p_n \notin K_{n,m},$$

то для довжини $\delta_{n,m}$ сторони квадрата $K_{n,m}$ маємо

$$\frac{\delta_{n,m}}{2} < d(p_n, s_{n,m}) < \tfrac{1}{m}.$$

Тоді $d(p, s_{n,m}) < \delta_{n,m} < \frac{2}{m}$ і

$$d(p_0, p_n) \leq d(p_0, p) + d(p, s_{n,m}) + d(s_{n,m}, p_n) < \delta + \tfrac{2}{m} + \tfrac{1}{m} < 4\delta = d(p_0, E),$$

що дає суперечність, адже $p_n \in E$. Отже, $U \cap K_{n,m} = \emptyset$ для довільних $n \in N$ і $m \geq \max\{n, m_0\}$, тобто

$$\mathcal{M} = \{K \in \mathcal{K} : K \cap U \neq \emptyset\} \subseteq \{K_{n,m} : n \in N, n \leq m \leq m_0\}.$$

Зокрема, система $\mathcal{M}$ скінченна.

Для кожного $K \in \mathcal{M}$ розглянемо функцію $h_K : P \to [0,1]$, означену формулою

$$h_K(p) = \begin{cases} g_K(p), & p \in K; \\ 0, & p \in P \setminus K. \end{cases}$$

З умов (1) і (2) леми 1.3.7 випливає, що функція h_K неперервна. Тому функція $h : P \to \mathbb{R}$, означена формулою

$$h(p) = \sum_{K \in \mathcal{M}} h_K(p),$$

також є неперервною, як сума скінченної кількості неперервних функцій. Оскільки всі квадрати системи $\mathcal{M}$ попарно майже неперетинні, то з умови

(2) леми 1.3.7 випливає, що на кожному квадраті $K \in \mathcal{M}$ функція h збігається з функцією g_K. Крім того, $h(p) = 0$ для кожного $p \in P \setminus \bigcup\limits_{K \in \mathcal{M}} K$. Отже, з означення системи $\mathcal{M}$ випливає, що функції f і h збігаються на множині U, яка є околом точки p_0. Тому функція f є неперервною в точці p_0.

Тепер покажемо, що виконується умова (d), тобто $\omega_f(p) = 1$ для кожного $p \in E$. Згідно з умовою (a) маємо $\omega_f(p) \le 1$. Отже, досить довести, що $\omega_f(p) \ge 1$ для кожного $p \in E$. Спочатку розглянемо випадок точки $p \in D$. Зафіксуємо номер $n \in N$ і окіл V точки $p_n \in D$. Оскільки

$$d(p_n, s_{n,m}) < \tfrac{1}{m}$$

для кожного $m \ge n$, то існує $m \ge n$ таке, що $s_{n,m} \in V$. Беручи до уваги умову (4) леми 1.3.7 маємо

$$\omega_f(V) \ge f(s_{n,m}) - f(p) = 1 - 0 = 1.$$

Таким чином, $\omega_f(V) \ge 1$ для кожного околу V точки p_n, і тому $\omega_f(p_n) \ge 1$. Отже, $\omega_f(p) \ge 1$ для кожної точки $p \in D$. Оскільки множина D щільна в E, то згідно з твердженням 1.2.11 маємо

$$E = \overline{D} \subseteq \overline{\{p \in P : \omega_f(p) \ge 1\}} = \{p \in P : \omega_f(p) \ge 1\}.$$

Залишилось перевірити умову (b), тобто нарізну неперервність функції f. Зауважимо, спочатку, що $D(f) = E$ згідно з (c) і (d). Тому звуження функції f на кожний горизонтальний чи вертикальний відрізок, який не проходить через точки множини E, є неперервним, адже такі відрізки складаються з точок сукупної неперервності функції f. З іншого боку, згідно з твердженням 1.3.6 для кожної точки $p \in E$ маємо

$$\mathrm{cross}(p) \subseteq \mathrm{cross}(E) \subseteq (A \times Y) \cup (X \times B) = (X \times Y) \setminus W \subseteq (X \times Y) \setminus \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K.$$

Тому функція f дорівнює нулеві на хресті $\mathrm{cross}(p)$ кожної точки $p \in E$. Отже, звуження функції f на кожний горизонтальний чи вертикальний відрізок, який проходить через точки множини E, також є неперервним. Тобто функція f є нарізно неперервною. □

1.3.4. Опис множини точок розриву нарізно неперервних функцій двох дійсних змінних. У даному пункті ми викладемо завершальний етап побудови Кешнера, який дає загальне розв'язання оберненої задачі і приводить до повного опису множин точок розриву нарізно неперервних функцій двох дійсних змінних.

Розпочнемо з допоміжних тверджень.

Лема 1.3.9. *Нехай X, Y – топологічні простори і $E \subseteq X \times Y$ – проективно першої категорії F_σ-множина в $X \times Y$. Тоді існує послідовність $(E_n)_{n=1}^\infty$ замкнених проективно ніде не щільних множин $E_n \subseteq X \times Y$ така, що $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$.*

Доведення. Позначимо $A = \mathrm{pr}_X(E)$, $B = \mathrm{pr}_Y(E)$ і виберемо зростаючі послідовності $(A_n)_{n=1}^\infty$ замкнених ніде не щільних множин $A_n \subseteq X$, $(B_n)_{n=1}^\infty$ замкнених ніде не щільних множин $B_n \subseteq Y$ і $(D_n)_{n=1}^\infty$ замкнених множин $D_n \subseteq X \times Y$ такі, що

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \qquad B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \qquad \text{і} \qquad E = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n.$$

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$E_n = (A_n \times Y) \cap (X \times B_n) \cap D_n.$$

Зрозуміло, що всі множини E_n замкнені і проективно ніде не щільні. Крім того, оскільки послідовності $(A_n)_{n=1}^\infty$, $(B_n)_{n=1}^\infty$ і $(D_n)_{n=1}^\infty$ зростаючі, то

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

□

Лема 1.3.10. *Нехай X – топологічний простір, $g : X \to \mathbb{R}$, $h : X \to [0, \delta]$ і $x_0 \in X$. Тоді*

$$\omega_{g+h}(x_0) \geq \omega_g(x_0) - \delta.$$

Доведення. Візьмемо довільний окіл U точки x_0 в просторі X. Зрозуміло, що $\omega_{-h}(U) \leq \delta$. Тепер з нерівності трикутника випливає наступна нерівність

$$\omega_g(U) \leq \omega_{g+h}(U) + \omega_{-h}(U) \leq \omega_{g+h}(U) + \delta.$$

Отже,

$$\omega_{g+h}(U) \geq \omega_g(U) - \delta$$

для довільного околу U точки x_0. Залишилось в цій нерівності перейти до інфімума по всім околам точки x_0. □

Наступне твердження описує завершальний крок відповідних побудов.

Твердження 1.3.11. *Нехай X – топологічний простір і $(f_n)_{n=1}^\infty$ – послідовність функцій $f_n : X \to [0, 1]$ таких, що*

$$D(f_n) = \{x \in X : \omega_{f_n}(x) = 1\}$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тоді для функції $f : X \to \mathbb{R}$, означеної формулою

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} f_n(x),$$

маємо

$$D(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} D(f_n).$$

Доведення. Покладемо $E_n = D(f_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ і $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$.

Зауважимо, що функціональний ряд, який означає функцію f, є рівномірно збіжним на X. Тому функція f є неперервною в кожній точці $x \in X \setminus E$, як сума рівномірно збіжного ряду, складеного з функцій, неперервних в точці x. Залишилось показати, що f розривна в кожній точці множини E.

Зафіксуємо точку $x_0 \in E$ і доведемо, що f розривна в точці x_0. Виберемо найменший номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такий, що $x_0 \in E_{n_0}$, і розіб'ємо функцію f на три (або два, якщо $n_0 = 1$) доданки:

$$f(x) = \sum_{n<n_0} \frac{1}{3^n} f_n(x) + \frac{1}{3^{n_0}} f_{n_0}(x) + \sum_{n>n_0} \frac{1}{3^n} f_n(x).$$

Якщо $n_0 > 1$, то функція $\sum\limits_{n<n_0} \frac{1}{3^n} f_n(x)$ неперервна в точці x_0, як сума неперервних в точці x_0 функцій. Тому достатньо переконатись, що функція $g + h$, де

$$g(x) = \frac{1}{3^{n_0}} f_{n_0}(x) \qquad \text{і} \qquad h(x) = \sum_{n>n_0} \frac{1}{3^n} f_n(x),$$

є розривною в точці x_0. З одного боку, згідно з умовою твердження маємо

$$\omega_g(x_0) = \frac{1}{3^{n_0}} \cdot \omega_{f_{n_0}}(x_0) = \frac{1}{3^{n_0}}.$$

З іншого боку, маємо

$$0 \le h(p) \le \sum_{n>n_0} \frac{1}{3^n} = \frac{2}{3^{n_0+1}}.$$

Тепер з леми 1.3.10 випливає нерівність

$$\omega_{g+h}(x_0) \ge \omega_g(x_0) - \frac{2}{3^{n_0+1}} = \frac{1}{3^{n_0+1}} > 0.$$

Отже, функція $g + h$ розривна в точці x_0. □

Тепер переходимо до доведення основних результатів.

Теорема 1.3.12. *Нехай $X = [a,b]$, $Y = [c,d]$ і $E \subseteq X \times Y$ – проективно першої категорії F_σ-множина в $X \times Y$. Тоді існує нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ така, що множина E є множиною точок розриву функції f.*

Доведення. Згідно з лемою 1.3.9 виберемо послідовність $(E_n)_{n=1}^\infty$ замкнених проективно ніде не щільних множин $E_n \subseteq X \times Y$ таку, що $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ з допомогою теореми 1.3.8 виберемо функцію $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$, яка задовольняє відповідні умови $(a) - (d)$, і для якої, зокрема, $D(f_n) = E_n$. Розглянемо функцію $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, означену формулою

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} f_n(x,y).$$

Зауважимо, що згідно з умовою (a) функціональний ряд, який означає функцію f, є рівномірно збіжним на $X \times Y$. Тому функція f є нарізно неперервною, як сума рівномірно збіжного ряду, складеного з нарізно неперервних функцій. Крім того, згідно з твердженням 1.3.11 маємо

$$D(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} D(f_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E.$$

□

З щойно доведеної теореми і теореми 1.2.17 негайно випливає наступний результат, який дає повний опис множин точок розриву нарізно неперервних функцій на прямокутнику.

Теорема 1.3.13. *Нехай $X = [a,b]$, $Y = [c,d]$ і $E \subseteq X \times Y$. Тоді множина E є множиною точок розриву деякої нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ тоді і тільки тоді, коли множина E є проективно першої категорії F_σ-множиною в $X \times Y$.*

Аналогічно одержується повний опис множин точок розриву нарізно неперервних функцій на добутку двох проміжків, зокрема на $\mathbb{R}^2$.

Теорема 1.3.14. *Нехай X і Y – проміжки (скінченні чи нескінченні) на числовій прямій $\mathbb{R}$ і $E \subseteq X \times Y$. Тоді множина E є множиною точок розриву деякої нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ тоді і тільки тоді, коли множина E є проективно першої категорії F_σ-множиною в $X \times Y$.*

Доведення. Необхідні умови на множину точок розриву нарізно неперервної функції на добутку $X \times Y$ були доведені в теоремі 1.2.19. Тому залишається довести достатність.

Нехай E – проективно першої категорії F_σ-множина в $X \times Y$. Спочатку виберемо зростаючі послідовності $(X_n)_{n=1}^\infty$ і $(Y_n)_{n=1}^\infty$ відрізків $X_n \subseteq X$ і $Y_n \subseteq Y$ такі, що

$$X = \bigcup_{n=1}^\infty X_n \qquad \text{і} \qquad Y = \bigcup_{n=1}^\infty Y_n.$$

спочатку міркуємо подібно, як при доведенні теореми 1.3.12. Позначимо $A = \mathrm{pr}_X(E)$, $B = \mathrm{pr}_Y(E)$ і виберемо зростаючі послідовності $(A_n)_{n=1}^\infty$ замкнених ніде не щільних множин $A_n \subseteq X$, $(B_n)_{n=1}^\infty$ замкнених ніде не щільних множин $B_n \subseteq Y$ і $(D_n)_{n=1}^\infty$ замкнених множин $D_n \subseteq X \times Y$ такі, що

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty A_n, \qquad B \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty B_n \qquad \text{і} \qquad E = \bigcup_{n=1}^\infty D_n.$$

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$E_n = ((X_n \cap A_n) \times Y) \cap (X \times (Y \cap B_n)) \cap D_n.$$

Зрозуміло, що всі множини E_n замкнені і проективно ніде не щільні множини в $X_n \times Y_n$. Крім того, оскільки послідовності $(X_n)_{n=1}^\infty$, $(Y_n)_{n=1}^\infty$ $(A_n)_{n=1}^\infty$, $(B_n)_{n=1}^\infty$ і $(D_n)_{n=1}^\infty$ зростаючі, то

$$E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n.$$

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ з допомогою теореми 1.3.8 виберемо функцію $f_n : X_n \times Y_n \to \mathbb{R}$, яка задовольняє умови $(a) - (e)$, і розглянемо функцію $\tilde{f}_n : X \times Y \to \mathbb{R}$, означену формулою

$$\tilde{f}_n(p) = \begin{cases} f_n(p), & p \in X_n \times Y_n; \\ 0, & p \in (X \times Y) \setminus (X_n \times Y_n). \end{cases}$$

Оскільки функція f_n задовольняє умови $(a) - (e)$, то функція $\tilde{f}_n$ задовольняє умови $(a) - (d)$. Тепер, міркуючи в точності, як при доведенні теореми 1.3.12, показуємо, що функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$,

$$f(p) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{3^n} \tilde{f}_n(x, y)$$

є шуканою. □

1.4 Заключні зауваження до розділу 1

Історія виникнення задачі Діні та її розв'язання для функцій дійсних змінних є досить обширною і цікавою. Її детальний огляд разом з аналізом різних методів доведення прямих і обернених теорем, що виникли під час розвою даної тематики, безперечно заслуговує на окремий виклад, який можна знайти у фундаментальній праці [52]. Тут ми лише згадаємо роботи, в яких були запропоновані альтернативні доведення основних результатів першого розділу.

Інші доведення теореми Бера про розв'язання прямої задачі для функцій дійсних змінних були одержані Е. ван Влеком [44] (для двох змінних) і Р. Кешнером [23] (для n змінних).

Обернена теорема Кешнера для функцій двох дійсних змінних схожим методом була також доведена З. Ґранде [17].

З огляду на приклад Юнґів природно виникає питання про опис множини точок розриву лінійно неперервних функцій. Структура множин точок розриву таких відображень виявилася значно тоншою, а ця задача – на порядок складнішою і вона лише зовсім недавно отримала своє розв'язання. Спочатку роботи [40] і [9] дали необхідні і достатні умови на множину точок розриву таких функцій у термінах графіків ліпшицових відображень, а потім у роботах [10] і [3] незалежно було одержано різні топологічні характеризації множин точок розриву лінійно неперервних відображень.

Розділ 2

ФУНКЦІЇ НА ДОБУТКУ ДВОХ СЕПАРАБЕЛЬНИХ МЕТРИЗОВНИХ ПРОСТОРІВ

З появою абстрактних просторів природно постали питання про можливість перенесення тих чи інших результатів про функції дійсних змінних на загальніші ситуації. В повній мірі ці питання стосуються прямих і обернених теорем, які дають розв'язання задачі Діні для функцій дійсних змінних. У даному розділі ми розглянемо перший "абстрактний" етап розвитку досліджень даної тематики, який привів до повного опису множин точок розриву нарізно неперервних функцій на добутку сепарабельних метризовних просторів.

2.1 Теорема Гана про необхідні умови на множину точок розриву

У даному підрозділі ми викладемо перший результат про нарізно неперервні функції на добутку абстрактних просторів, а саме, теорему Г. Гана [18, с. 390] 1921 року про необхідні умови на множину точок розриву нарізно неперервної функції на добутку метризовного простору, який є G_δ-підпростором повного метричного простору, і метризовного компакту. Зауважимо, що метод доведення цього результату базується на рівномірній неперервності функції відносно другої змінної і є розвитком підходу ван Влека, застосованого у 1907 році в [44] до функцій дійсних змінних.

2.1.1. Рівномірна неперервність функцій на метричних компактах. Для доведення теореми Гана нам буде потрібна добре відома узагальнена версія класичної теореми Кантора про рівномірну неперервність неперервних функцій на метричному компакті, яку ми викладемо у цьому пункті.

Топологічний простір X називається *метризовним*, якщо існує метрика на X, яка породжує топологію простору X.

Топологічний простір X називається *компактним*, якщо з довільного відкритого покриття цього простору можна виділити скінченне підпокриття.

Ми будемо використовувати наступний варіант теореми Больцано-Вейєрштрасса.

Твердження 2.1.1. *З довільної послідовності в компактному метризовному просторі можна виділити збіжну підпослідовність.*

Доведення. Нехай X – метризовний компакт, d – метрика на просторі X, яка породжує його топологію, і $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність точок $x_n \in X$. Покажемо, спочатку, що послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ має хоча б одну *граничну точку* x_0, тобто таку точку x_0, що довільний окіл цієї точки містить нескінченну кількість елементів даної послідовності.

Припустимо, що це не так. Це означає, що для кожної точки $x \in X$ існує відкритий окіл U_x цієї точки такий, що множина

$$N_x = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in U_x\}$$

скінченна. Використовуючи компактність простору X, з відкритого покриття $(U_x : x \in X)$ простору X виберемо скінченне підпокриття, тобто виберемо скінченну множину $A \subseteq X$ таку, що

$$X = \bigcup_{x \in A} U_x.$$

Тепер, з одного боку, множина $\bigcup\limits_{x \in A} N_x$ скінченна. А з іншого боку, маємо

$$\bigcup_{x \in A} N_x = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in \bigcup_{x \in A} U_x\} = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in X\} = \mathbb{N},$$

що дає нам суперечність.

Отже, ми можемо вибрати деяку граничну точку x_0 послідовності $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Тепер, використовуючи індукцію відносно $k \in \mathbb{N}$ легко побудувати строго зростаючу послідовність номерів $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ таку, що

$$d(x_0, x_{n_k}) < \tfrac{1}{k}$$

для кожного $k \in \mathbb{N}$. Тоді, зокрема,

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0.$$

□

Нагадаємо, що функція $f : X \to \mathbb{R}$, визначена на метричному просторі (X, d), називається *рівномірно неперервною*, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ як тільки $d(x, y) < \delta$.

Ми будемо використовувати наступний варіант теореми Кантора.

Твердження 2.1.2. *Кожна неперервна на метричному компактному просторі функція є рівномірно неперервною.*

Доведення. Нехай (X, d) – метричний компакт і $f : X \to \mathbb{R}$ – неперервна функція. Припустимо, що f не є рівномірно неперервною. Це означає, що існує $\varepsilon > 0$ таке, що для довільного $\delta > 0$ існують $x, y \in X$ такі, що

$$d(x, y) < \delta \quad \text{і} \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Використовуючи цю властивість, для кожного $n \in \mathbb{N}$ виберемо точки $x_n, y_n \in X$ такі, що

$$d(x_n, y_n) < \tfrac{1}{n} \qquad \text{і} \qquad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Згідно з твердженням 2.1.1 з послідовності $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ можна виділити підпослідовність $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, яка збігається до деякої точки $x_0 \in X$. Тепер з послідовності $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ можна виділити підпослідовність $(y_{n_{k_i}})_{i=1}^{\infty}$, яка збігається до деякої точки $y_0 \in X$. Зауважимо, що послідовність $(x_{n_{k_i}})_{i=1}^{\infty}$ також збігається до точки x_0. Згідно з нерівністю трикутника, для кожного $i \in \mathbb{N}$ маємо

$$d(x_0, y_0) \leq d(x_0, x_{n_{k_i}}) + d(x_{n_{k_i}}, y_{n_{k_i}}) + d(y_{n_{k_i}}, y_0) \leq$$

$$\leq d(x_0, x_{n_{k_i}}) + \tfrac{1}{n_{k_i}} + d(y_{n_{k_i}}, y_0).$$

Перейшовши в цій нерівності до границі при $i \to \infty$, одержимо

$$d(x_0, y_0) \leq 0,$$

тобто $x_0 = y_0$.

З іншого боку, для кожного $i \in \mathbb{N}$ маємо

$$|f(x_{n_{k_i}}) - f(y_{n_{k_i}})| \geq \varepsilon.$$

Тепер перейшовши в цій нерівності до границі при $i \to \infty$, і використавши неперервність функції f в точці x_0, одержимо

$$|f(x_0) - f(x_0)| \geq \varepsilon,$$

що дає суперечність. $\square$

2.1.2. Беровість і повнометризовні простори.

У даному пункті ми викладемо допоміжні факти, який використовує Ган у своєму доведенні.

Нагадаємо, що метричний простір (X, d) називається *повним*, якщо кожна фундаментальна послідовність елементів простору X є збіжною в цьому просторі. При цьому кажуть, що метрика d є повною.

Топологічний простір X називається *повнометризовним*, якщо на просторі X існує повна метрика, яка породжує його топологію.

З твердження 2.1.1 стандартним чином випливає наступний факт.

Твердження 2.1.3. *Довільний компактний метричний простір (X, d) є повним.*

Доведення. Нехай $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальна послідовність точок $x_n \in X$. Згідно з твердженням 2.1.1 існують точка $x_0 \in X$ і строго зростаюча послідовність $(n_k)_{n=1}^{\infty}$ номерів n_k такі, що

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0.$$

Тепер з фундаментальності послідовності $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ випливає, що

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0.$$

$\square$

Для метричного простору (X, d), точки $x_0 \in X$ і $r > 0$ покладемо

$$B[x_0, r] = \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}$$

і

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}.$$

У своїх міркуваннях Г. Ган використовує наступний результат, який доводиться аналогічно, як теорема Бера про категорії для повних метричних просторів.

Твердження 2.1.4. *Кожний непорожній G_δ-підпростір Y повнометризовного простору X є берівським.*

Доведення. Нехай d – деяка повна метрика на X, яка породжує топологію простору X, і $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність замкнених в просторі X множин така, що

$$Y = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Візьмемо довільну непорожню відкриту в Y множину G і покажемо, що G є множиною другої категорії в Y. Зафіксуємо довільну послідовність $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ замкнених ніде не щільних в просторі Y множин $A_n \subseteq Y$. Достатньо довести, що

$$G \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset.$$

Індукцією відносно $n \in \mathbb{N}$ побудуємо послідовність $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ точок $y_n \in G$ і строго спадну послідовність $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ чисел $r_n > 0$, які задовольняють наступні умови:

1) $B(y_1, r_1) \cap Y \subseteq G$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$;

3) $B[y_{n+1}, r_{n+1}] \subseteq B(y_n, r_n) \setminus (F_n \cup A_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Візьмемо довільну точку $y_1 \in G$ і число $r_1 > 0$ такі, що

$$B(y_1, r_1) \cap Y \subseteq G.$$

Множина

$$G_1 = (B(y_1, r_1) \setminus F_1) \cap Y$$

є відкритою і непорожньою в просторі Y. Тому множина

$$U_1 = (B(y_1, r_1) \cap Y) \setminus (F_1 \cup A_1) = G_1 \setminus A_1$$

також є відкритою і непорожньою. Візьмемо довільну точку $y_2 \in U_1$ і строго додатне число $r_2 \leq \frac{r_1}{2}$ такі, що

$$B[y_2, r_2] \subseteq B(y_1, r_1).$$

Аналогічно множина

$$G_2 = (B(y_2, r_2) \setminus F_2) \cap Y$$

є відкритою і непорожньою в просторі Y. Тому множина

$$U_2(B(y_2,r_2)\cap Y)\setminus(F_2\cup A_2)=G_2\setminus A_2$$

також є відкритою і непорожньою. Отже, існують точка $y_3\in U_2$ і строго додатне число $r_3\le\frac{r_2}{2}$ такі, що

$$B[y_3,r_3]\subseteq B(y_2,r_2).$$

І так далі.

Розглянемо послідовність $(y_n)_{n=1}^{\infty}$. З умови (3) випливає, що

$$y_m\in B[y_n,r_n]$$

для кожного $m\ge n$. Тому згідно з (2), послідовність $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною, а отже, є збіжною в просторі X. Крім того,

$$y_0=\lim_{n\to\infty}y_n\in\bigcap_{n=1}^{\infty}B[y_n,r_n].$$

Тому згідно з (3) маємо

$$y_0\in B(y_1,r_1)\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}(F_n\cap A_n)=(B(y_1,r_1)\cap Y)\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\subseteq G\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n.$$

□

Зауваження 2.1.5. Зауважимо, що у 1924-му році у роботі [19] Ф.Гаусдорф довів, що G_δ-підпростір повнометризовного простору також є повнометризовним. Це означає, що твердження 2.1.4 еквівалентне теоремі Бера про категорії для повних метричних просторів. Але на час написання праці Г.Гана, яка вийшла у 1921-му році, цей факт був ще невідомим і автор природно розглядав клас G_δ-підпросторів повнометризовних просторів, як розширення класу повнометризовних просторів.

2.1.3. Необхідні умови для функцій на добутку метризовних компактів. У цьому пункті ми викладемо основні результати даного підрозділу, які, зокрема, дають розв'язання прямої задачі на добутку метризовних компактів.

Слідуючи Гану топологічний простір X називатимемо *відносно повним*, якщо він є G_δ-підпростором деякого повнометризовного простору.

Наступна теорема була доведена в [18].

Теорема 2.1.6. *Нехай X – відносно повний простір, Y – метризовний компакт, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція, $\varepsilon > 0$ і*

$$E = \{p \in X \times Y : \omega_f(p) \geq \varepsilon\}.$$

Тоді множина $A = \mathrm{pr}_X(E)$ ніде не щільна в X.

Доведення. Зафіксуємо довільну метрику d на Y, яка породжує його топологію. Нехай U – довільна відкрита в просторі X непорожня множина. Покажемо, що існує відкрита в X непорожня множина $U_0 \subseteq U$ така, що $U_0 \cap A = \emptyset$.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$F_n = \{x \in U : (\forall y', y'' \in Y)\ (d(y', y'') \leq \tfrac{1}{n} \Rightarrow |f(x, y') - f(x, y'')| \leq \tfrac{\varepsilon}{4})\}.$$

Оскільки функція f неперервна відносно другої змінної, то згідно з твердженням 2.1.2 функція f рівномірно неперервна відносно другої змінної, звідки випливає рівність

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Разом з тим, згідно з твердженням 2.1.4, простір X є берівським. Тому множина U є множиною другої категорії. Отже, існують відкрита в X непорожня множина $U_0 \subseteq U$ і номер $m \in \mathbb{N}$ такі, що $U_0 \subseteq \overline{F}_m$.

Доведемо, що $U_0 \subseteq F_m$. Припустимо, що це не так і візьмемо точку $x_1 \in U_0 \setminus F_m$. З означення множини F_m випливає, що існують точки $y_1, y_2 \in Y$ такі, що

$$d(y_1, y_2) \leq \tfrac{1}{m} \qquad \text{і} \qquad |f(x_1, y_1) - f(x_1, y_2)| > \tfrac{\varepsilon}{4}.$$

Використовуючи неперервність функцій f_{y_1} і f_{y_2} в точці x_1 знайдемо окіл $U_1 \subseteq U_0$ точки x_1 такий, що

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| > \tfrac{\varepsilon}{4}$$

для кожного $x \in U_1$. Оскільки $x_1 \in \overline{F}_m$, то існує точка $x_2 \in U_1 \cap F_m$. Тоді

$$d(y_1, y_2) \leq \tfrac{1}{m} \qquad \text{і} \qquad |f(x_2, y_1) - f(x_2, y_2)| > \tfrac{\varepsilon}{4},$$

що суперечить умові $x_2 \in F_m$. Отже, $U_0 \subseteq F_m$.

Тепер покажемо, що $U_0 \cap A = \emptyset$, тобто $\omega_f(x, y) < \varepsilon$ для кожної точки $(x, y) \in U_0 \times Y$. Зафіксуємо довільну точку

$$(x_0, y_0) \in U_0 \times Y.$$

Використовуючи неперервність функції f_{y_0} в точці x_0, виберемо окіл $U_2 \subseteq U_0$ точки x_0 такий, що

$$|f(x', y_0) - f(x'', y_0)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

для довільних точок $x', x'' \in U_2$. Покладемо $V = B[y_0, \frac{1}{m}]$ і розглянемо окіл $W = U_2 \times V$ точки (x_0, y_0) в $X \times Y$. Використовуючи включення $U_2 \subseteq F_m$ і вибір множини U_2, для довільних точок $(x', y'), (x'', y'') \in W$ отримуємо

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| \leq |f(x', y') - f(x', y_0)| + |f(x', y_0) - f(x'', y_0)| +$$

$$+|f(x'', y_0) - f(x'', y'')| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4}.$$

Отже, $\omega_f(W) \leq \frac{3\varepsilon}{4}$ і

$$\omega_f(x_0, y_0) \leq \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

□

Зауваження 2.1.7. Зауважимо, що у доведенні теореми 2.1.6 використовується лише беровість простору X. Отже, і у формулюванні цієї теореми умову відносної повноти простору X можна замінити на беровість.

Тепер аналогічно, як теорема 1.2.17 доводиться наступний результат.

Теорема 2.1.8. *Нехай X, Y – метризовні компакти і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція. Тоді множина $E = D(f)$ є проективно першої категорії F_σ-множиною в $X \times Y$.*

Доведення. Згідно з наслідком 1.2.13 множина E є F_σ-множиною в $X \times Y$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ розглянемо множину

$$E_n = \{p \in X \times Y : \omega_f(p) \geq \frac{1}{n}\}.$$

Оскільки кожний метризовний компакт є повнометризовним, то згідно з теоремою 2.1.6 всі множини E_n проективно ніде не щільні. А з твердження 1.2.11 випливає рівність $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. □

2.2

Теорема Фейока про необхідні умови на множину точок розриву

Наступним кроком у напрямку одержання нових теорем про повний опис множини точок розриву є одержаний у 1973 році результат Р. Фейока [15], який дає необхідні умови для нарізно неперервних функцій на добутку топологічного простору і сепарабельного метризовного простору і приводить до розв'язання прямої задачі на добутку сепарабельних метризовних просторів.

2.2.1. Граничні множини і точки неперервності.

У даному пункті ми розглянемо поняття граничних множин функції, які є важливим технічним інструментом у міркуваннях Фейока.

Спочатку розглянемо одну властивість компактних множин, яка насправді є характеристичною.

Твердження 2.2.1. *Нехай X – топологічний простір, $K \subseteq X$ – компактна підмножина простору X, $(F_i : i \in I)$ – сім'я замкнених множин F_i в просторі X такі, що $K \cap F = \emptyset$, де $F = \bigcap\limits_{i \in I} F_i$. Тоді існує скінченна множина $J \subseteq I$ така, що*

$$K \cap \bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset.$$

Доведення. Для кожного $i \in I$ покладемо $G_i = X \setminus F_i$. З відкритого покриття $(G_i : i \in I)$ компактної множини K виберемо скінченне підпокриття $(G_i : i \in J)$, де множина $J \subseteq I$ скінченна. Тепер маємо

$$K \cap \bigcap_{i \in J} F_i = K \cap \bigcap_{i \in J} (X \setminus G_i) = K \cap \left(X \setminus \bigcup_{i \in J} G_i \right) \subseteq K \cap (X \setminus K) = \emptyset.$$

□

Нехай X, Y – топологічні простори і $f : X \to Y$. Для кожної точки $x \in X$ через $\mathcal{U}_x$ ми позначимо систему всіх околів точки x в просторі X і розглянемо множину

$$C_f(x) = \bigcap_{U \in \mathcal{U}_x} \overline{f(U)},$$

яка називається *граничною множиною функції f в точці x*.

При отриманні свого результату Фейок використовує наступні два твердження, які були доведені в [43], де також вивчались властивості множини точок сукупної неперервності нарізно неперервних відображень. Перше з цих тверджень є простим наслідком з твердження 2.2.1.

Твердження 2.2.2. *Нехай X, Y – топологічні простори, $x \in X$, $K \subseteq X$ – компактна множина і $f : X \to Y$ такі, що $K \cap C_f(x) = \emptyset$. Тоді існує окіл U точки x в просторі X такий, що $K \cap f(U) = \emptyset$.*

Доведення. З означення множини $C_f(x)$, умови $K \cap C_f(x) = \emptyset$ і твердження 2.2.1 випливає, що існує скінченна система $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}_x$ така, що

$$K \cap \bigcap_{V \in \mathcal{V}} \overline{f(V)} = \emptyset.$$

Зрозуміло, що окіл

$$U = \bigcap_{V \in \mathcal{V}} V$$

точки x є шуканим. □

Нагадаємо, що топологічний простір X називається *гаусдорфовим простором* (або *T_2-простором*), якщо для довільних різних точок $x, y \in X$ існують околи U і V точок x і y відповідно, такі, що $U \cap V = \emptyset$. Зрозуміло, що для довільних різних точок x, y у гаусдорфовому просторі X існує замкнений окіл U точки x такий, що $y \notin U$.

Наступне твердження показує зв'язок граничних множин з неперервністю функції.

Твердження 2.2.3. *Нехай X – топологічний простір, $x \in X$, Y – компактний гаусдорфовий простір і $f : X \to Y$. Тоді відображення f неперервне в точці x тоді і лише тоді, коли $C_f(x) = \{f(x)\}$.*

Доведення. Необхідність. Нехай f неперервне в точці x. Покажемо, що $C_f(x) = \{f(x)\}$. Візьмемо довільну точку $y \neq f(x)$ в регулярному просторі Y і виберемо замкнений окіл V точки $f(x)$ такий, що $y \notin V$. Використовуючи неперервність відображення f в точці x знайдемо окіл U точки x такий, що $f(U) \subseteq V$. Тепер маємо

$$C_f(x) \subseteq \overline{f(U)} \subseteq \overline{V} = V \not\ni y.$$

Отже, $y \notin C_f(x)$ і $C_f(x) = \{f(x)\}$.

Достатність. Нехай $C_f(x) = \{f(x)\}$ і V – довільний відкритий окіл точки $f(x)$ в просторі Y. Тоді для компактної множини $K = Y \setminus V$ в просторі Y маємо $K \cap C_f(x) = \emptyset$. Тому з твердження 2.2.2 випливає, що існує окіл U точки x в просторі X такий, що $K \cap f(U) = \emptyset$, тобто

$$f(U) \subseteq Y \setminus K = V.$$

Отже, f неперервне в точці x. □

2.2.2. Необхідні умови для функцій на добутку сепарабельних метризовних просторів. В даному пункті ми викладемо основні результати даного підрозділу.

На завершальному етапі міркувань ми будемо використовувати наступний допоміжний факт.

Лема 2.2.4. *Нехай X, Y, Z – топологічні простори, $f : X \times Y \to Z$ – неперервне відносно першої змінної відображення, $A \subseteq X$ – щільна в просторі X множина і $F \subseteq Z$ – замкнена в просторі Z множина такі, що $f(A \times Y) \subseteq F$. Тоді $f(X \times Y) \subseteq F$.*

Доведення. Припустимо, що $f(X \times Y) \nsubseteq F$, тобто існують $x_0 \in X$ і $y_0 \in Y$ такі, що

$$f(x_0, y_0) \in G = Z \setminus F.$$

Оскільки множина G відкрита і відображення f неперервне відносно першої змінної в точці (x_0, y_0), то існує окіл U точки x_0 в просторі X такий, що

$$f(U \times \{y_0\}) \subseteq G.$$

Але множина A щільна в просторі X. Тому існує точка $a \in A \cap U$. Тепер, з одного боку, $f(a, y_0) \in G$ згідно з вибором U, а з іншого –

$$f(a, y_0) \in f(A \times Y) \subseteq F,$$

що дає нам суперечність. □

Топологічний простір X називається *простором з другою аксіомою зліченності*, якщо в просторі X існує не більш, ніж зліченна база. Зауважимо, що для метризовних просторів сепарабельність рівносильна другій аксіомі зліченності (дивись, наприклад [13, наслідок 4.1.16]).

Теорема 2.2.5. *Нехай X – топологічний простір, Y – простір з другою аксіомою зліченності і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція. Тоді проекція A множини $D(f)$ на простір X є множиною першої категорії в просторі X.*

Доведення. З леми 1.2.12 випливає, що достатньо розглянути випадок обмеженої функції f. Тому ми вважатимемо, що $f(X \times Y) \subseteq [0, 1]$.

Міркуватимемо від супротивного. Припустимо, що множина A є множиною другої категорії. Для кожної точки $x \in A$ виберемо точку $y_x \in Y$ таку, що $(x, y_x) \in D(f)$, і покладемо $z_x = f(x, y_x)$. Тоді

$$C_f(x, y_x) \neq \{z_x\}$$

згідно з твердженням 2.2.3. Для довільних $x \in A$ і $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$W(x, n) = [z_x - \tfrac{1}{n}, z_x + \tfrac{1}{n}].$$

Розглянемо послідовність $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ множин

$$A_n = \{x \in A : C_f(x, y_x) \setminus W(x, n) \neq \emptyset\}.$$

Оскільки

$$C_f(x, y_x) \neq \{z_x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} W(x, n)$$

для кожного $x \in A$, то

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Зрозуміло, що множина другої категорії A не може бути об'єднанням послідовності множин першої категорії, Тому існує номер $m \in \mathbb{N}$ такий, що множина A_m є множиною другої категорії.

Нехай $(I_s : s \in S)$ – скінченне покриття відрізка $[0, 1]$ відкритими інтервалами I_s довжини меншої, ніж $\frac{1}{m}$. Для кожного $s \in S$ покладемо

$$A_m(s) = \{x \in A_m : I_s \cap (C_f(x, y_x) \setminus W(x, m)) \neq \emptyset\}.$$

Оскільки $(I_s : s \in S)$ є покриттям відрізка $[0, 1]$, то

$$A_m = \bigcup_{s \in S} A_m(s).$$

Тому існує $t \in S$ таке, що множина $A_m(t)$ є множиною другої категорії, адже множина A_m є множиною другої категорії і множина S скінченна. Зауважимо, що для кожного $x \in A_m(t)$ виконується умова

$$I_t \setminus W(x, m) \neq \emptyset,$$

причому довжина інтервала I_t є меншою, ніж $\frac{1}{m}$, а відрізок $W(x, m)$ з серединою в точці z_x має довжину $\frac{2}{m}$. Тому

$$f(x, y_x) = z_x \notin \overline{I_t},$$

тобто

$$f(x, y_x) \in G = \mathbb{R} \setminus \overline{I_t}$$

для кожного $x \in A_m(t)$.

Візьмемо довільну базу $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ топології простору Y. Для кожного $x \in A_m(t)$, використовуючи неперервність відносно другої змінної функції f в точці (x, y_x), знайдемо номер $n_x \in \mathbb{N}$ такий, що множина B_{n_x} є околом точки y_x в просторі Y і

$$f(\{x\} \times B_{n_x}) \subseteq G$$

і розглянемо послідовність множин

$$C_n = \{x \in A_m(t) : n_x = n\}.$$

Зрозуміло, що

$$A_m(t) = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Тому, як і раніше, існує $k \in \mathbb{N}$ таке, що множина C_k є множиною другої категорії, зокрема, множина C_k не є ніде не щільною. Тоді існує відкрита в просторі X непорожня множина X_0 така, що

$$X_0 \subseteq \overline{A_0},$$

де $A_0 = C_k \cap X_0$. Покладемо $Y_0 = B_k$ і розглянемо звуження f_0 функції f на добуток $X_0 \times Y_0$, яке є нарізно неперервною функцією. Зауважимо, що

$$f_0(A_0 \times Y_0) \subseteq G \subseteq F = \mathbb{R} \setminus I_t.$$

Тому

$$f_0(X_0 \times Y_0) \subseteq F$$

згідно з лемою 2.2.4.

Візьмемо довільну точку $x_0 \in A_0 \subseteq C_k$. Оскільки $n_{x_0} = k$, то множина $Y_0 = B_k$ є околом точки $y_0 = y_{x_0}$. Тому множина $X_0 \times Y_0$ є околом точки (x_0, y_0) і

$$C_f(x_0, y_0) \subseteq \overline{f(X_0 \times Y_0)} = \overline{f_0(X_0 \times Y_0)} \subseteq \overline{F} = F = \mathbb{R} \setminus I_t.$$

Отже,

$$C_f(x_0, y_0) \cap I_t = \emptyset,$$

що суперечить умові $x_0 \in A_m(t)$. Таким чином, теорема доведена. □

З щойно доведеної теореми ми негайно отримуємо наступне розв'язання прямої задачі.

Теорема 2.2.6. *Нехай X, Y – топологічні простори з другою аксіомою зліченності (наприклад, метризовні сепарабельні простори) і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція. Тоді множина $E = D(f)$ є проективно першої категорії F_σ-множиною в $X \times Y$.*

Зауваження 2.2.7. Зазначимо, що підхід Фейока, який ми виклали у даному підрозділі, на відміну від більшості методів розв'язування прямої задачі, є застосовним лише для відображень зі значеннями у метризовних сепарабельних просторах, адже такі простори можна гомеоморфно вкласти в метризовний компакт.

2.3

Метод Брекенріджа і Нішіури розв'язання оберненої задачі

З огляду на основні результати попередніх підроздів природно було б очікувати, що зараз ми перейдемо до розв'язування оберненої задачі на добутку двох метризовних сепарабельних просторів. Це виглядало б ще більш логічним, якщо взяти до уваги той факт, що метод Кешнера [23] чи, застосований пізніше у 1975 році і подібний до нього, метод Ґранде [17] без особливих надзусиль можна адаптувати до такого випадку. Але і Кешнер і Ґранде розглядали лише функції дійсних змінних (слід, правда, зазначити, що разом з задачею Діні вони досліджували також інші, споріднені з нею задачі) і наступним розв'язанням оберненої задачі став отриманий у 1976 році результат Дж. Брекенріджа і Т. Нішіури [7] про побудову нарізно неперервних функцій з даною множиною точок розриву на добутку двох метризовних просторів, який ми викладемо у даному підрозділі.

Як і раніше, при розв'язанні оберненої задачі для функції двох дійсних змінних, у метризовному випадку центральне місце займає побудова для замкненої проективно ніде не щільної множини E точок розриву. На відміну від Кешнера, який наближається до множини E послідовністю майже неперетинних квадратів і узгоджено будує шукану функцію на кожному з цих квадратів окремо, Брекенрідж і Нішіура використовують дещо інший підхід. Вони наближаються до множини E іншою множиною, яка міститься в доповненні до хреста множини E, і будують шукану функцію відразу на всьому добутку.

2.3.1. Мінімальні ε-сітки в метричних просторах. У даному пункті ми викладемо допоміжний результат про існування мінімальних ε-сіток, які виступають технічним інструментом для наближення деякої множини елементами іншої множини.

Нагадаємо, що множина A з заданим на ній відношенням $\leq$ називається *частково впорядкованою множиною*, якщо виконуються наступні умови:

1) $a \leq a$ для кожного $a \in A$;

2) якщо $a \leq b$ і $b \leq a$, то $a = b$;

3) якщо $a \leq b$ і $b \leq c$, то $a \leq c$.

Частково впорядкована множина $(A, \leq)$ називається *лінійно впорядкованою множиною*, якщо $a \leq b$ або $b \leq a$ для довільних елементів $a, b \in A$.

Підмножина B частково впорядкованої множини $(A, \leq)$ є *обмеженою зверху в множині* A, якщо існує елемент $a \in A$ такий, що $b \leq a$ для кожного $b \in B$.

Елемент a_0 частково впорядкованої множини $(A, \leq)$ називається *максимальним елементом множини* A, якщо для довільного $a \in A$ з умови $a_0 \leq a$ випливає рівність $a = a_0$.

Ми будемо використовувати, лему Куратовського-Цорна, яка є добревідомим переформулюванням аксіоми вибору (дивись, наприклад, [13, розділ I.4]).

Теорема 2.3.1 (Лема Куратовського-Цорна)**.** *Нехай $(A, \leq)$ – частково впорядкована множина така, що кожна лінійно впорядкована підмножина B множини A є обмеженою в множині A. Тоді в множині існує максимальний елемент.*

Нехай (X, d) – метричний простір і $\varepsilon > 0$. Підмножина A простору X називається *ε-сіткою*, якщо для кожного $x \in X$ існує елемент $a \in A$ такий, що $d(a, x) < \varepsilon$. Іншими словами, множина A є ε-сіткою, якщо $d(x, A) < \varepsilon$ для кожного $x \in X$.

Наступне твердження показує, що в довільному метричному просторі для кожного $\varepsilon > 0$ існує мінімальна ε-сітка, тобто така ε-сітка, що кожна її власна підмножина уже не є ε-сіткою.

Твердження 2.3.2. *Нехай (X, d) – метричний простір і $\varepsilon > 0$. Тоді існує ε-сітка A_0 в просторі X така, що $d(a, b) \geq \varepsilon$ для довільних різних $a, b \in A_0$.*

Доведення. Розглянемо систему $\mathcal{A}$ всіх непорожніх підмножин A простору X таких, що $d(a, b) \geq \varepsilon$ для довільних різних $a, b \in A$. Уведемо на системі $\mathcal{A}$ природний порядок щодо включення, тобто

$$A \leq B \qquad \Leftrightarrow \qquad A \subseteq B$$

для довільних $A, B \in \mathcal{A}$.

Покажемо, що кожна лінійно впорядкована підсистема $\mathcal{B}$ системи $\mathcal{A}$ обмежена зверху в $\mathcal{A}$. Візьмемо довільну непорожню лінійно впорядковану систему $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ і доведемо, що множина

$$A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$$

входить в систему $\mathcal{A}$. Нехай $a_1, a_2 \in A$ – довільні різні точки. Тоді існують множини $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ такі, що $a_1 \in B_1$ і $a_2 \in B_2$. Оскільки система $\mathcal{B}$ лінійно впорядкована, то $B_1 \leq B_2$ або $B_2 \leq B_1$. Вважатимемо, для певності, що $B_1 \leq B_2$, тобто $B_1 \subseteq B_2$. Тоді

$$a_1, a_2 \in B_2 \qquad \text{і} \qquad d(a_1, a_2) \geq \varepsilon,$$

адже $B_2 \in \mathcal{A}$. Отже, $A \in \mathcal{A}$. З означення множини A випливає, що $B \leq A$ для кожного $B \in \mathcal{B}$ і тому $\mathcal{B}$ обмежена зверху в $\mathcal{A}$ елементом A.

Таким чином, частково впорядкована множина $(\mathcal{A}, \leq)$ задовольняє умови леми Куратовського-Цорна, згідно з якою в $\mathcal{A}$ існує деякий максимальний елемент A_0. Зрозуміло, що

$$d(a, b) \geq \varepsilon$$

для довільних різних $a, b \in A_0$.

Залишилось показати, що A_0 є ε-сіткою в X. Візьмемо довільну точку $x \in X$. Зауважимо, що

$$d(x, a) = 0 < \varepsilon,$$

якщо $x = a \in A_0$. Нехай $x \notin A_0$. З максимальності A_0 випливає, що

$$A_0 \cup \{x\} \notin \mathcal{A}.$$

Тому існують $u, v \in A_0 \cup \{x\}$ такі, що $d(u, v) < \varepsilon$. Оскільки $A_0 \in \mathcal{A}$, то обов'язково $x \in \{u, v\}$. Нехай, наприклад, $x = u$. Тоді $v = a \in A_0$ і

$$d(x, a) < \varepsilon.$$

□

2.3.2. Наближення множин в метричних просторах.

Основою методу Брекенріджа і Нішіури є наступне твердження про наближення замкнених ніде не щільних множин.

Твердження 2.3.3. *Нехай (X, d) – метриизовний простір, $A \subseteq X$ – замкнена ніде нещільна множина в X і $B \subseteq X$ такі, що $A \cap B = \emptyset$ і $A \subseteq \overline{B}$. Тоді існує множина $C \subseteq B$ така, що $\overline{C} = C \cup A$.*

Доведення. Нехай d – метрика на X, яка породжує його топологію. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$B_n = \{x \in B : \tfrac{1}{n+1} < d(x, A) \leq \tfrac{1}{n}\}.$$

В кожній непорожній множині B_n згідно з твердженням 2.3.2 виберемо мінімальну $\frac{1}{n}$-сітку C_n, тобто таку $\frac{1}{n}$-сітку C_n, що $d(c_1, c_2) \geq \frac{1}{n}$ для довільних різних $c_1, c_2 \in C_n$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ такого, що $B_n = \emptyset$ покладемо $C_n = \emptyset$.

Покажемо, що множина
$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$$
є шуканою. Нехай $x_0 \in X \setminus A$ – довільна точка. Оскільки множина A замкнена, то $d(x_0, A) > 0$ згідно з твердженням 1.1.4. Тому існує номер $m \in \mathbb{N}$ такий, що
$$d(x_0, A) > \tfrac{1}{m}.$$
Оскільки функція $f(x) = d(x, A)$ неперервна, то існує $\delta \in (0, \frac{1}{2m}]$ таке, що
$$d(x, A) > \tfrac{1}{m}$$
для кожного x з δ-околу $U_0 = B(x_0, \delta)$ точки x_0. Оскільки
$$d(x, A) \leq \tfrac{1}{n}$$
для кожного $x \in B_n$, то
$$U_0 \cap C_n \subseteq U_0 \cap B_n = \emptyset$$
для всіх $n \geq m$. Крім того, для кожного $n < m$ множина $U_0 \cap C_n$ містить щонайбільше один елемент. Справді, припустимо, що різні $c_1, c_2 \in U_0 \cap C_k$ для деякого $k < m$. Тоді
$$\tfrac{1}{k} \leq d(c_1, c_2) \leq d(x_0, c_1) + d(x_0, c_2) < \delta + \delta \leq \tfrac{1}{m},$$
що дає суперечність. Таким чином, ми знайшли окіл U_0 точки x_0 такий, що множина
$$U_0 \cap C = \bigcup_{n=1}^{\infty} (U_0 \cap C_n)$$
містить щонайбільше $m - 1$ елемент, зокрема, є скінченною. Тому
$$x_0 \in \overline{C} \qquad \Leftrightarrow \qquad x_0 \in C.$$
Отже, $\overline{C} \subseteq C \cup A$.

Залишилось довести, що $A \subseteq \overline{C}$. Нехай $a \in A$ – довільна точка і $\varepsilon > 0$. Достатньо показати, що існує точка $c \in C$ така,що
$$d(a, c) < \varepsilon.$$
Оскільки $a \in \overline{B}$, то існує $b \in B$ таке, що
$$d(a, b) \leq \min\{1, \tfrac{\varepsilon}{4}\}.$$

Зауважимо, що $d(b,A)>0$, адже множина A замкнена і $b\notin A$. Отже,

$$0<d(b,A)\le d(b,a)\le 1.$$

Виберемо номер $k\in\mathbb{N}$ такий, що

$$\tfrac{1}{k+1}<d(b,A)\le\tfrac{1}{k},$$

тобто $b\in B_k$. Оскільки

$$\tfrac{1}{2k}\le\tfrac{1}{k+1}<d(b,A)\le d(b,a)\le\tfrac{\varepsilon}{4},$$

то

$$\tfrac{1}{k}\le\tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Множина C_k є $\frac{1}{k}$-сіткою в B_k. Тому існує точка $c\in C_k\subseteq C$ така, що

$$d(b,c)<\tfrac{1}{k}.$$

тепер маємо

$$d(a,c)\le d(a,b)+d(b,c)\le\tfrac{\varepsilon}{4}+\tfrac{1}{k}\le\tfrac{\varepsilon}{4}+\tfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

□

2.3.3. Теорема Брекенріджа-Нішіури та її наслідки.

У даному пункті ми викладемо основні результати даного підрозділу.

Спочатку одержуємо розв'язання оберненої задачі для замкнених проективно ніде не щільних множин в добутку метризовних просторів.

Теорема 2.3.4. *Нехай X, Y – метризовні простори і $E\subseteq X\times Y$ – замкнена проективно ніде не щільна множина. Тоді існує функція $f:X\times Y\to\mathbb{R}$, яка задовольняє наступні умови*

(a) $0\le f(z)\le 1$ для кожного $z\in X\times Y$;

(b) функція f сукупно неперервна в кожній точці $z\in(X\times Y)\setminus E$;

(c) f є нарізно неперервною;

(d) $\omega_f(z)=1$ для кожного $z\in E$.

Доведення. Покладемо $A=\mathrm{pr}_X(E)$ і $B=\mathrm{pr}_Y(E)$. Оскільки множина E проективно ніде не щільна, то множини A і B ніде не щільні в X і Y відповідно. Тому множини $\overline{A}$ і $\overline{B}$ також ніде не щільні в X і Y відповідно, як замикання ніде не щільних множин. Тому множина

$$F=(\overline{A}\times Y)\cup(X\times\overline{B})$$

замкнена і ніде не щільна в добутку $Z = X \times Y$, а множина $G = Z \setminus F$ всюди щільна в Z, зокрема, $E \subseteq \overline{G}$. Крім того, зрозуміло, що $G \cap E = \emptyset$ і простір Z метризовний, як добуток двох метризовних просторів. Отже, згідно з твердженням 2.3.3 існує множина $C \subseteq G$ така, що

$$\overline{C} = C \cup E.$$

Зауважимо, що оскільки

$$C \subseteq G = Z \setminus F \qquad \text{і} \qquad E \subseteq F,$$

то

$$\overline{C} \cap F = E.$$

Зафіксуємо довільну метрику d на просторі Z, яка породжує його топологію і розглянемо функцію $f : Z \to \mathbb{R}$, означену формулою

$$f(z) = \begin{cases} \frac{d(z,C)}{d(z,C)+d(z,F)}, & z \in Z \setminus E; \\ 1, & z \in E. \end{cases}$$

Оскільки згідно з твердженням 1.1.4 функції

$$g(z) = d(z, C) \qquad \text{і} \qquad h(z) = d(z, F)$$

неперервні на Z і

$$\{z \in Z : d(z, C) + d(z, F) = 0\} = \overline{C} \cap F = E,$$

то функція f означена коректно і є неперервною на відкритій множині $Z \setminus E$, як частка неперервних функцій, тобто виконується умова (b).

Умова (a) є очевидною. Отже, залишилось перевірити умови (c) і (d). Зауважимо, що

$$\mathrm{cross}(E) = (A \times Y) \cup (X \times B) \subseteq F$$

і $f|_F \equiv 1$. Тому всі вертикальні x-розрізи f^x і горизонтальні y-розрізи f_y, які проходять через точки $(x, y) \in E$, є сталими, а отже, неперервними. З іншого боку, всі вертикальні x-розрізи f^x і горизонтальні y-розрізи f_y, які не проходять через жодну точку множини E є неперервними, бо згідно з (b) вони є звуженнями неперервної функції. Отже, f є нарізно неперервною і виконується умова (c).

Тепер доведемо (d). Зафіксуємо $z \in E$ і довільний окіл W точки z. Оскільки $E \subseteq \overline{C}$, то існує точка $c \in C \cap W$. Зауважимо, що

$$c \notin E \qquad \text{і} \qquad d(c, C) = 0.$$

Тому $f(c) = 0$ і

$$1 \le \omega_f(W) \le f(z) - f(c) = 1.$$

Отже, $\omega_f(W) = 1$ і $\omega_f(z) = 1$. $\square$

Тепер аналогічно, як теорема 1.3.12 доводиться наступний результат.

Теорема 2.3.5. *Нехай X, Y – метризовні простори і $E \subseteq X \times Y$ – проективно першої категорії F_σ-множина в $X \times Y$. Тоді існує нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ така, що множина E є множиною точок розриву функції f.*

Доведення. Згідно з лемою 1.3.9 виберемо послідовність $(E_n)_{n=1}^\infty$ замкнених проективно ніде не щільних множин $E_n \subseteq X \times Y$ таку, що $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ з допомогою теореми 2.3.4 виберемо функцію $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$, яка задовольняє умови $(a) - (d)$. Розглянемо функцію $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, означену формулою

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} f_n(x, y),$$

яка зрозуміло є нарізно неперервною. Крім того, згідно з твердженням 1.3.11 маємо

$$D(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} D(f_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E.$$

□

З щойно доведеної теореми і теореми 2.1.8 випливає наступна характеризація множини точок розриву.

Теорема 2.3.6. *Нехай X, Y – метризовні компакти і $E \subseteq X \times Y$. Тоді множина E є множиною точок розриву деякої нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ тоді і тільки тоді, коли множина E є проективно першої категорії F_σ-множиною в $X \times Y$.*

А з допомогою теореми 2.2.6 одержується характеризація у загальнішому випадку, яка є основним результатом даного розділу.

Теорема 2.3.7. *Нехай X, Y – метризовні сепарабельні простори і $E \subseteq X \times Y$. Тоді множина E є множиною точок розриву деякої нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ тоді і тільки тоді, коли множина E є проективно першої категорії F_σ-множиною в $X \times Y$.*

2.4

Метод Кальбрі-Труаліка розв'язання прямої задачі

В останньому підрозділі даного розділу ми викладемо підхід Ж. Кальбрі і Ж. П. Труаліка з [8], який вони у 1979 році застосували до розв'язання прямої задачі. Незважаючи на те, що робота [8], з'явившись на кілька років пізніше, не дає у порівнянні з уже розглянутим результатом Фейока з [15] нових можливостей для одержання характеризації множини точок розриву нарізно неперервних дійснозначних функцій, метод Кальбрі-Труаліка має істотні переваги. Він, на відміну від застосованого в [15], нескладно переноситься на випадок відображень зі значеннями у метризовному просторі і, разом з тим, висвітлює і інші аспекти прямої задачі, бо розв'язує її у ширшому контексті. Підхід Кальбрі-Труаліка базується на залишковості множини точок неперервності напівнеперервної функції і використовує перехід до асоційованих відображень, який починаючи з праці [1] став звичним прийомом при дослідженні нарізно неперервних відображень.

2.4.1. Множина точок неперервності напівнеперерної функції. В цьому пункті ми встановимо вищезгадану властивість множини точок неперервності напівнеперервних функцій.

Нагадаємо, що множина A в топологічному просторі X називається *залишковою*, якщо її доповнення $X \setminus A$ є множиною першої категорії в просторі X.

Ми будемо використовувати наступний простий факт.

Лема 2.4.1. *Нехай X – топологічний простір і U – відкрита в X множина. Тоді відкрита в X множина*

$$V = U \cup \operatorname{int}(X \setminus U)$$

є щільною в X.

Доведення. Нехай G – довільна відкрита в X непорожня множина. Розглянемо відкриті множини

$$G_1 = G \cap U \qquad \text{і} \qquad G_2 = G \setminus \overline{U}.$$

Зрозуміло, що

$$G_1 \subseteq U \subseteq V \qquad \text{і} \qquad G_2 \subseteq \operatorname{int}(X \setminus U) \subseteq V.$$

Крім того, якщо $G_1 = \emptyset$, то $G_2 = G \neq \emptyset$. Отже, відкрита множина $G_1 \cup G_2$ є непорожньою і міститься в множині $G \cap V$.

$\square$

Важливе місце в доведенні основного результату цього підрозділу займає наступна властивість напівнеперервних функцій.

Твердження 2.4.2. *Нехай X – топологічний простір і $f : X \to \mathbb{R}$ – напівнеперервна знизу (зверху) функція. Тоді множина $A = C(f)$ точок неперервності функції f є залишковою в просторі X.*

Доведення. Зауважимо спочатку, що достатньо довести твердження для напівнеперервної знизу функції f.

Для кожного раціонального числа $r \in \mathbb{Q}$ покладемо

$$U_r = \{x \in X : f(x) > r\}.$$

Оскільки f напівнеперервна знизу, то всі множини U_r відкриті в X. Згідно з лемою 2.4.1, кожна множина

$$V_r = U_r \cup \mathrm{int}\,(X \setminus U_r)$$

є відкритою і всюди щільною в просторі X. Тому всі множини $F_r = X \setminus V_r$ ніде не щільні в X, а множина

$$B = \bigcap_{r \in \mathbb{Q}} V_r = X \setminus \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} F_r$$

залишкова в X.

Доведемо, що $B \subseteq A$, тобто f неперервна в кожній точці множини B. Зафіксуємо точку $x_0 \in B$ і число $\varepsilon > 0$. Виберемо раціональні числа $s, t \in \mathbb{Q}$ такі, що

$$f(x_0) - \varepsilon < s < f(x_0) \le t < f(x_0) + \varepsilon.$$

Тоді

$$x_0 \in U_s \qquad \text{і} \qquad x_0 \notin U_t.$$

Оскільки $x_0 \in B$, то $x_0 \in V_t$, а отже, $x_0 \in \mathrm{int}\,(X \setminus U_t)$. Таким чином, відкрита множина

$$W = U_s \cap \mathrm{int}\,(X \setminus U_t)$$

є околом точки x_0. Крім того, оскільки

$$\mathrm{int}\,(X \setminus U_t) = X \setminus U_t = \{x \in X : f(x) \le t\},$$

то

$$f(W) \subseteq (s, t] \subseteq (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon).$$

Отже,
$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$
для кожного $x \in W$, функція f неперервна в точці x_0 і $B \subseteq A$.

Таким чином, множина B залишкова і $B \subseteq A$. Тому множина A також залишкова. □

2.4.2. Асоційовані відображення та їх властивості.

Для довільної множини X через $\mathbb{R}^X$ ми позначаємо простір усіх функцій
$$z : X \to \mathbb{R}$$
з топологією поточкової збіжності. В цій топології базу околів точки $z_0 \in \mathbb{R}^X$ утворюють всі множини вигляду
$$\{z \in \mathbb{R}^X : (\forall x \in A) (|z(x) - z_0(x)| < \varepsilon)\},$$
де A – довільна скінченна підмножина множини X і $\varepsilon > 0$.

Для топологічного простору X через $C_p(X)$ ми позначаємо простір усіх неперервних функцій
$$z : X \to \mathbb{R}$$
з топологією поточкової збіжності, тобто $C_p(X)$ є підпростором простору $\mathbb{R}^X$.

Нехай X, Y – довільні множини і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$. Відображення $\varphi : X \to \mathbb{R}^Y$ і $\psi : Y \to \mathbb{R}^Y$, які для довільних $x \in X$ і $y \in Y$ означаються формулою
$$\varphi(x)(y) = \psi(y)(x) = f(x, y),$$
називаються *відображеннями, асоційованими з* f.

Ми будемо використовувати наступні властивості асоційованих відображень.

Твердження 2.4.3. *Нехай X – топологічний простір, Y – множина і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$. Тоді наступні умови рівносильні:*

1) функція f неперервна відносно змінної x;

2) $\psi(Y) \subseteq C_p(X)$;

3) відображення φ неперервне.

Доведення. Неперервність функції f відносно змінної x означає, що для кожного $y \in Y$ функція $f_y = \psi(y)$ неперервна. Отже, 1) $\Leftrightarrow$ 2).

1) $\Rightarrow$ 3). Зафіксуємо $x_0 \in X$. Покладемо $z_0 = \varphi(x_0)$ і в просторі $\mathbb{R}^Y$ розглянемо базисний окіл точки z_0
$$W = \{z \in \mathbb{R}^Y : (\forall y \in B) (|z(y) - z_0(y)| < \varepsilon)\},$$

породжений скінченною множиною $B \subseteq Y$ і числом $\varepsilon > 0$. Для кожного $y \in Y$ функція f_y неперервна в точці x_0. Тому кожна множина

$$U_y = \{x \in X : |f_y(x) - f_y(x_0)| < \varepsilon\}$$

є околом точки x_0. Отже, множина

$$\varphi^{-1}(W) = \bigcap_{y \in B} U_y$$

також є околом точки x_0 і відображення φ є неперервним в точці x_0.

Імплікацію 3) $\Rightarrow$ 1) доводимо подібним чином. Зафіксуємо $x_0 \in X$ і $y \in Y$. Покладемо $z_0 = \varphi(x_0)$ і в просторі $\mathbb{R}^Y$ розглянемо базисний окіл точки z_0

$$W = \{z \in \mathbb{R}^Y : |z(y) - z_0(y)| < \varepsilon)\},$$

породжений скінченною множиною $B = \{y\}$ і числом $\varepsilon > 0$. З неперервності відображення φ в точці x_0 випливає, що множина

$$\varphi^{-1}(W) = \{x \in X : |f_y(x) - f_y(x_0)| < \varepsilon\}$$

є околом точки x_0. Отже, функція f_y є неперервною в точці x_0. □

Зрозуміло, що має місце аналогічне твердження про неперервність відносно змінної y. Таким чином, одержується наступний факт.

Твердження 2.4.4. *Нехай X, Y – топологічні простори і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$. Тоді наступні умови рівносильні:*

1) функція f нарізно неперервна;

2) асоційоване відображення $\varphi : X \to C_p(Y)$ неперервне;

3) асоційоване відображення $\psi : Y \to C_p(X)$ неперервне.

2.4.3. Теорема Кальбрі-Труаліка. В даному пункті ми викладемо основний результат даного підрозділу.

Наступне допоміжне твердження дає можливість використовувати властивості напівнеперервних функцій.

Лема 2.4.5. *Нехай $B \subseteq Y$ – довільна непорожня підмножина множини Y і Z – простір усіх обмежених функцій $z : Y \to \mathbb{R}$ з топологією поточкової збіжності. Тоді відображення $\delta : Z \to \mathbb{R}$, яке означається формулою*

$$\delta(z) = \operatorname{diam} z(B) = \sup_{y', y'' \in B} |z(y') - z(y'')|,$$

є напівнеперервним знизу.

Доведення. Згідно з твердженнями 2.2.3 і 1.2.5 достатньо показати, що для кожного $c \in \mathbb{R}$ множина

$$W_c = \{z \in Z : \delta(z) > c\}$$

є відкритою в Z.

Справді, нехай $c \in \mathbb{R}$ і $z_0 \in W_c$. Тоді існують точки $y', y'' \in B$ такі, що

$$|z_0(y') - z_0(y'')| > c.$$

Покладемо

$$\varepsilon = \frac{|z_0(y') - z_0(y'')| - c}{2}$$

і розглянемо базисний окіл

$$W = \{z \in Z : |z(y') - z_0(y')| < \varepsilon \ \text{ і } \ |z(y'') - z_0(y'')| < \varepsilon\}$$

точки z_0 в Z. Для кожного $z \in W$ маємо

$$|z(y') - z(y'')| \geq |z_0(y') - z_0(y'')| - |z(y') - z_0(y')| - |z(y'') - z_0(y'')| >$$

$$> |z_0(y') - z_0(y'')| - \varepsilon - \varepsilon = c.$$

Отже, $W \subseteq W_c$ і множина W_c є околом точки z_0. Значить, множина W_c відкрита. □

Підмножина A топологічного простору X називається *множиною зліченного типу*, якщо існує послідовність $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ відкритих в X множин G_n така, що для кожної точки $a \in A$ система $\{G_n : a \in G_n\}$ утворює базу околів точки a в просторі X. При цьому послідовність $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ називається *базою* для множини зліченного типу A.

Наступна теорема з [8] дає розв'язання прямої задачі.

Теорема 2.4.6. *Нехай X, Y – топологічні простори, B – множина зліченного типу в просторі Y і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція. Тоді існує залишкова множина A в просторі X така, що*

$$A \times B \subseteq C(f).$$

Доведення. Згідно з лемою 1.2.12 достатньо розглянути випадок обмеженої функції f. Позначимо через Z простір усіх обмежених неперервних функцій $z : Y \to \mathbb{R}$ з топологією поточкової збіжності, тобто Z є підпростором простору $C_p(Y)$. Розглянемо асоційоване відображення $\varphi : X \to \mathbb{R}^Y$, $\varphi(x) = f^x$. З обмеженості функції f і твердження 2.4.4 випливає, що відображення $\varphi : X \to Z$ неперервне.

Нехай $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ – база для множини зліченного типу B в просторі Y. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ розглянемо відображення $\delta_n : Z \to \mathbb{R}$, яке означається формулою

$$\delta_n(z) = \operatorname{diam} z(G_n) = \sup_{y', y'' \in G_n} |z(y') - z(y'')|.$$

З леми 2.4.5 випливає, що кожна функція δ_n напівнеперервна знизу. Тому згідно з твердженням 1.2.6 для кожного $n \in \mathbb{N}$ композиція $\Phi_n : X \to \mathbb{R}$, $\Phi_n = \delta_n \circ \varphi$, також напівнеперервна знизу. Тепер застосувавши твердження 2.4.2, одержимо, що всі множини $A_n = C(\Phi_n)$ є залишковими в X. Отже, і множина

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

також є залишковою в X, як перетин зліченної кількості залишкових множин.

Залишилось показати, що функція f неперервна в кожній точці множини $A \times B$. Зафіксуємо точки $a \in A$, $b \in B$ і число $\varepsilon > 0$. Оскільки функція f^a неперервна в точці b і послідовність$(G_n)_{n=1}^{\infty}$ є базою для множини зліченного типу $B \ni b$, то існує номер $m \in \mathbb{N}$ такий, що множина G_m є околом точки b в просторі Y і

$$|f(a, y') - f(a, y'')| < \tfrac{\varepsilon}{4}$$

для кожного $y \in G_m$. Тоді

$$\Phi_m(a) = \sup_{y', y'' \in G_m} |f(a, y') - f(a, y'')| \le \tfrac{\varepsilon}{4}.$$

Використовуючи неперервність функції f_b в точці a і неперервність функції Φ_m в точці a, знайдемо окіл U точки a в просторі X такий, що для кожного $x \in U$ виконуються нерівності

$$|f(x, b) - f(a, b)| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

і

$$|\Phi_m(x) - \Phi_m(a)| < \tfrac{\varepsilon}{4}.$$

Тоді, зокрема,

$$\Phi_m(x) < \Phi_m(a) + \frac{\varepsilon}{4} \le \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

для кожного $x \in U$. Тепер для кожної точки (x, y) з околу $U \times G_m$ точки (a, b) маємо

$$|f(x, y) - f(a, b)| \le |f(x, y) - f(x, b)| + |f(x, b) - f(a, b)| \le$$
$$\le \Phi_m(x) + |f(x, b) - f(a, b)| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отже, функція f неперервна в точці (a, b). $\square$

Зауваження 2.4.7. Зауважимо, що у випадку $Y = B$ висновок теореми 2.4.6 означає, що проекція на множник X множини точок розриву функції f є множиною першої категорії в просторі X. Таким чином, з теореми 2.4.6 випливає теорема 2.2.5. З іншого боку, теорема 2.2.5 незастосовна до доведення теореми теореми 2.4.6 у випадку $Y \neq B$.

2.5

Заключні зауваження до розділу 2

Як і для функцій дійсних змінних, абстрактні прямі і обернені теореми, викладені у другому розділі, також неодноразово передоводились або отримували незначні узагальнення.

Пряма теорема Гана була узагальнена: А. Алексєвічем і В. Орлічем в [1, теорема 10] на дещо ширший клас, ніж нарізно неперервні функції, М. Фортом в [16] на випадок, коли другий множник є локально компактним сепарабельним метризовним простором, і Дж. Брекенріджом та Т. Нішіурою в [7] на випадок відображень неперервних відносно першої змінної і рівномірно непрервних відносно другої змінної.

Пряма теорема для функцій на добутку двох сепарабельних повнометризовних просторів була доведена Ж. Сан-Ремо в [38].

Теорему Фейока для нарізно неперервних відображень зі значеннями у довільному метризовному просторі довів також П. Кендеров в [47].

Різні узагальнення теорем Гана та Кальбрі-Труаліка були одержані В. Маслюченком в роботах [49] і [51].

Обернена теорема Брекенріджа і Нішіури методом, близьким до Кешнерового, у слабшій редакції для сепарабельних проективно першої категорії підмножин в добутку метризовних просторів була доведена в [54], а з допомогою теореми Стоуна про паракомпактність метризовного простору була в точності передоведена в [55].

Розділ 3

ФУНКЦІЇ НА ДОБУТКУ ДВОХ МЕТРИЗОВНИХ ПРОСТОРІВ

У даному розділі ми розв'яжемо задачу Діні на добутку двох довільних метризовних просторів, тобто дамо повний опис множини точок розриву нарізно неперервних функцій на таких добутках. З огляду на характеризацію у сепарабельному випадку, одержану у попередньому розділі, природною виглядає гіпотеза про аналогічний опис і у загальному випадку, на що, зокрема, вказує і обернена теорема Брекенріджа і Нішіури. Отже, здавалось би, залишається довести, що множина точок розриву нарізно неперервної функції на добутку двох довільних метризовних просторів також є проективно ніде не щільною.

Але, як виявляється, у несепарабельному випадку структура множин точок розриву є багатшою і такі множини можуть мати масивні проекції. Відповідні приклади ми наведемо у першому підрозділі, позаяк вони послужили першою відправною точкою у одержанні характеристичних умов і вказують на необхідність отримання якісно нових як прямих так і обернених теорем.

Другим важливим кроком, який допомогає розвивати дані дослідження, є класична теорема Стоуна про паракомпактність метризовного простору. Цей результат, що відкриває можливість заміни глобальних властивостей їх локальними відповідниками і уже став звичним інструментом при розв'язуванні різних задач в теорії метризовних просторів, ми викладемо у другому підрозділі.

І нарешті, у третьому і четвертому підрозділах ми подаємо розв'язання прямої і оберненої задач на добутку метризовних просторів, що приводять до одного із найзагальніших результатів даної тематики – теореми про повний опис множин точок розриву нарізно неперервних функцій, яка була одержана автором у 1994 році (анонсовано в [65] і викладено з доведенням в [66] і [59]).

3.1

Приклади нарізно неперервних функцій з масивною проекцією множини точок розриву

У даному підрозділі ми дамо два приклади нарізно неперервних функцій на добутку числової прямої і відповідно підібраного несепарабельного метризовного простору, у яких проекція множини точок розриву на перший множник збігається з усією числовою прямою.

3.1.1. Приклад Д.Брауна. Розпочнемо з прикладу Д.Брауна [35, приклад 6.14].

Прямою сумою $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$ сім'ї $(X_s)_{s\in S}$ попарно неперетинних топологічних просторів X_s називається топологічний простір $X = \bigcup\limits_{s\in S} X_s$, в якому кожний топологічний простір X_s є відкрито-замкненим підпростором. Іншими словами, для довільного $s \in S$ і $x \in X_s$ множина $U \subseteq X$ є околом точки x в просторі X тоді і тільки тоді, коли множина $U \cap X_s$ є околом точки x в просторі X_s.

Відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами X і Y називається *гомеоморфізмом*, якщо f є неперервною бієкцією і обернене відображення $f^{-1} : Y \to X$ є неперервним. При цьому топологічні простори X і Y називаються *гомеоморфними.* Фактично два гомеоморфні топологічні простори є топологічними копіями один одного.

Твердження 3.1.1. *Нехай $X = \mathbb{R}$, $(Y_s)_{s\in\mathbb{R}}$ – сім'я попарно неперетинних топологічних копій Y_s числової прямої $\mathbb{R}$ і $Y = \bigoplus\limits_{s\in S} Y_s$. Тоді існує нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ така, що $\mathrm{pr}_X(D(f)) = X$.*

Доведення. Ми можемо вважати, що $Y_s = \{(y, s) : y \in \mathbb{R}\}$ і відображення $\varphi_s : Y_s \to \mathbb{R}$, $\varphi_s(y, s) = y$, є гомеоморфізмом для кожного $s \in \mathbb{R}$. Крім того, зауважимо, що простір Y є метризовним, як пряма сума метризовних просторів (дивись, [13, теорема 4.2.1]).

Розглянемо функцію $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, яка для довільних $x \in X$, $s \in S$ і $y \in Y_s$ означається формулою

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2(x-s)\varphi_s(y)}{(x-s)^2+\varphi_s(y)^2}, & (x-s)^2 + \varphi_s(y)^2 \neq 0; \\ 0, & (x-s)^2 + \varphi_s(y)^2 = 0. \end{cases}$$

Покладемо $f_s = f|_{X \times Y_s}$ і $y_s = (0, s) \in Y_s$ для кожного $s \in S$. З зауваження 1.1.2 випливає, що кожна функція f_s є нарізно неперервною і $D(f_s) = \{(s, y_s)\}$. Оскільки всі множини є відкритими в просторі Y, то функція f також є нарізно неперервною і

$$D(f) = \{(s, y_s) : s \in \mathbb{R}\},$$

зокрема, $\mathrm{pr}_X(D(f)) = \mathbb{R} = X$. □

3.1.2. Приклад В.Маслюченка.

В даному пункті ми викладемо приклад В.Маслюченка [49] нарізно неперервної функції з подібною властивістю. В ролі другого множника тут використовуватиметься простір l_∞ – класичний приклад несепарабельного банахового простору.

Властивості наступної допоміжної функції доводяться повністю аналогічно, як в прикладі 1.1.1.

Приклад 3.1.2. *Нехай X, Y – ненульові нормовані простори, $x_0 \in X$ і $y_0 \in Y$. Тоді функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, означена формулою*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2\|x-x_0\|\cdot\|y-y_0\|}{\|x-x_0\|^2+\|y-y_0\|^2}, & (x, y) \neq (x_0, y_0); \\ 0, & (x, y) \neq (x_0, y_0). \end{cases},$$

є нарізно неперервною і $D(f) = \{(x_0, y_0)\}$.

Топологічний простір X називається *цілком регулярним*, якщо кожна одноточкова підмножина простору X є замкненою і для довільної точки $x_0 \in X$ і довільного околу U точки x_0 в X існує неперервна функція $f : X \to [0, 1]$ така, що $f(x_0) = 1$ і $f(x) = 0$ для кожного $x \in X \setminus U$. Зрозуміло, що кожний метризовний простір є цілком регулярним. Зокрема, в ролі відповідної функції $f : X \to [0, 1]$ можна взяти функцію

$$f(x) = \min\left\{\frac{d(x, X \setminus U)}{d(x_0, X \setminus U)}, 1\right\},$$

де d – деяка метрика на X, яка породжує його топологію.

Ми будемо використовувати наступний допоміжний факт.

Лема 3.1.3. *Нехай X – топологічний простір, $x_0 \in X$, функція $f : X \to \mathbb{R}$ – неперервна в точці x_0, причому $f(x_0) \neq 0$, і функція $g : X \to \mathbb{R}$ – розривна в точці x_0. Тоді функція $h : X \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x)g(x)$, також розривна в точці x_0.*

Доведення. Справді, припустимо, що функція h неперервна в точці x_0. Використовуючи неперервність f в точці x_0 і умову $f(x_0) \neq 0$, виберемо окіл U точки x_0 такий, що $f(x) \neq 0$ для кожного $x \in U$. Тоді

$$g(x) = \frac{h(x)}{f(x)}$$

для кожного $x \in U$ і функція g неперервна в точці x_0, як частка неперервних в цій точці функцій. А це дає суперечність. $\square$

Загальнішу редакцію наступного прикладу можна знайти в [59, теорема 2.4.4]

Твердження 3.1.4. *Існує нарізно неперервна функція f на добутку $X \times Y$ просторів $X = \mathbb{R}$ і $Y = l_\infty$ така, що $\mathrm{pr}_X(D(f)) = X$.*

Доведення. Розглянемо систему $\mathcal{A}$ всіх нескінченних підмножин A множини натуральних чисел $\mathbb{N}$, які не збігаються з $\mathbb{N}$. Зауважимо, що відображення $\psi : \mathcal{A} \to (0, 1)$,

$$\psi(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{2^n},$$

є бієктивним. Тому існує бієкція $\phi : X \to \mathcal{A}$. Наприклад, можна покласти

$$\phi(x) = \psi^{-1}(\tfrac{\mathrm{arcctg}\, x}{\pi}).$$

Для кожного $x \in X$ позначимо через y_x послідовність $(\xi_n(x))_{n=1}^{\infty} \in Y$, де

$$\xi_n(x) = \begin{cases} 1, & n \in \phi(x); \\ 0, & n \notin \phi(x). \end{cases}$$

Крім того, для кожного $x \in X$ покладемо

$$V_x = \{y \in Y : \|y_x - y\| < \tfrac{1}{3}\}$$

і, використовуючи цілковиту регулярність простору Y, виберемо неперервну функцію $\varphi_x : Y \to [0, 1]$ таку, що $\varphi_x(y_x) = 1$ і $\varphi_x(y) = 0$ для кожного $y \in Y \setminus V_x$. Далі, згідно з прикладом 3.1.2 для кожного $x \in X$ візьмемо нарізно неперервну функцію $f_x : X \times Y \to \mathbb{R}$ таку, що $D(f_x) = \{(x, y_x)\}$. Розглянемо функцію $f : X \times Y \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \sum_{u \in X} \varphi_u(y) f_u(x, y).$$

Зауважимо, що
$$\|y_u - y_x\| = 1$$
для довільних різних $u, x \in X$. Звідси випливає, що
$$V_x \cap V_u = \emptyset$$
для довільних різних $u, x \in X$. Тому для кожного $u \in X$ звуження функції f на множину $X \times V_u$ збігається з функцією $\varphi_u(y) f_u(x, y)$ і згідно з лемою 3.1.3, є розривною в точці (u, y_u). Отже,
$$\{(u, y_u) : u \in X\} \subseteq D(f)$$
і
$$\mathrm{pr}_X(D(f)) = X.$$
Залишилось показати, що функція f нарізно неперервна. Зафіксуємо $y_0 \in Y$ і покладемо
$$V_0 = \{y \in Y : \|y - y_0\| < \tfrac{1}{3}\}.$$
Зауважимо, що множина
$$\{u \in X : V_0 \cap V_u \neq \emptyset\}$$
містить не більше одного елемента. Тому звуження функції f на множину $X \times V_0$ є нульовим або збігається зі звуженням деякої функції $\varphi_u(y) f_u(x, y)$. Зокрема, функція f є неперервною відносно кожної змінної у всіх точках множини $X \times \{y_0\}$. $\square$

3.2

Локально скінченні покриття і теорема Стоуна

Як уже зазначалось на початку цього розділу, теорема Стоуна [41], яку ми розглянемо у даному підрозділі, у великій мірі відіграє визначальну роль в одержанні розв'язання задачі Діні на добутку довільних метризовних просторів. В класичній книзі Р. Енгелькінга [13] вона названа "однією з найбільш важливих теорем загальної топології". За основу нашого викладу ми беремо доведення М. Рудіна [37], подане в [13, теорема 4.4.1].

3.2.1. Локально скінченні системи та сім'ї множин.

Сім'я $(A_i : i \in I)$ підмножин A_i топологічного простору X називається *локально скінченною в точці* $x \in X$, якщо існує окіл U цієї точки такий, що множина

$$\{i \in I : A_i \cap U \neq \emptyset\}$$

є скінченною.

Аналогічно, система $\mathcal{A}$ підмножин топологічного простору X називається *локально скінченною в точці* $x \in X$, якщо існує окіл U точки x такий, що множина

$$\{A \in \mathcal{A} : A \cap U \neq \emptyset\}$$

є скінченною.

Сім'я чи система підмножин топологічного простору X називається *локально скінченною*, якщо вона є локально скінченною в кожній точці $x \in X$.

Зрозуміло, що система $\mathcal{A}$ локально скінченна (в точці x) тоді і лише тоді, коли такою ж є сім'я

$$(B_A : A \in \mathcal{A}),$$

де $B_A = A$. Щоб позбутися термінологічних недоречностей, ми систему $\mathcal{A}$ будемо ототожнювати з відповідною сім'єю $(B_A : A \in \mathcal{A})$, де $B_A = A$.

Легко бачити, що об'єднання скінченної кількості локально скінченних систем також є локально скінченним. Ми будемо використовувати наступне підсилення цього факту.

Твердження 3.2.1. *Нехай $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність локально скінченних систем $\mathcal{A}_n$ підмножин топологічного простору X така, що для довільної* *точки $x \in X$ існують окіл U точки x і номер $m \in \mathbb{N}$ такі, що $U \cap A = \emptyset$ як тільки $n > m$ і $A \in \mathcal{A}_n$. Тоді система*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n = \{A : n \in \mathbb{N},\ A \in \mathcal{A}_n\}$$

також локально скінченна в просторі X.

Доведення. Нехай $x \in X$ – довільна точка. Виберемо окіл U точки x і номер m згідно з умовою твердження. Для кожного номера $k \leq m$, використовуючи локальну скінченність системи $\mathcal{A}_k$, знайдемо окіл U_k точки x в просторі X такий, що система

$$\mathcal{B}_k = \{A \in \mathcal{A}_k : U_k \cap A \neq \emptyset\}$$

скінченна. Розглянемо окіл

$$U_0 = U \cap \bigcap_{k=1}^{m} U_k.$$

точки x в просторі X. Зауважимо, що

$$\{A \in \mathcal{A} : U \cap A \neq \emptyset\} \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} \mathcal{B}_k.$$

Отже, система $\mathcal{A}$ є локально скінченною в точці x. $\square$

Для непорожніх підмножин A і B метричного простору (X, d) через $d(A, B)$ ми позначаємо відстань між множинами A і B, тобто

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A,\ b \in B\}.$$

Крім того, для непорожньої підмножини A метричного простору (X, d) і числа $r > 0$ позначаємо

$$B(A, r) = \{x \in X : d(x, A) < r\}.$$

Зрозуміло, що

$$B(A, r) = \bigcup_{a \in A} B(a, r),$$

де, як і раніше,

$$B(a, r) = \{x \in X : d(a, x) < r\}.$$

Ми будемо використовувати наступний допоміжний факт про локально скінченні системи у метричному просторі.

Лема 3.2.2. *Нехай $\mathcal{C}$ – система непорожніх підмножин метричного простору (X, d) і $\delta > 0$ такі, що*

$$d(C_1, C_2) \geq 3\delta$$

для довільних різних $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$. Тоді система

$$\mathcal{V} = \{B(C, \delta) : C \in \mathcal{C}\}$$

локально скінченна в просторі X.

Доведення. Зафіксуємо довільну точку $x \in X$. Достатньо показати, що множина

$$\{C \in \mathcal{C} : B(x, \tfrac{\delta}{2}) \cap B(C, \delta)\}$$

містить не більше одного елемента. Припустимо, що це не так. Тоді існують різні множини $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ і елементи $x_1 \in B(C_1, \delta)$ і $x_2 \in B(C_2, \delta)$ такі, що

$$d(x, x_1) < \tfrac{\delta}{2} \quad \text{і} \quad d(x, x_2) < \tfrac{\delta}{2}.$$

Виберемо $c_1 \in C_1$ і $c_2 \in C_2$ такі, що

$$d(c_1, x_1) < \delta \quad \text{і} \quad d(c_2, x_2) < \delta.$$

Тепер маємо

$$d(c_1, c_2) \leq d(c_1, x_1) + d(x_1, x) + d(x, x_2) + d(x_2, c_2) <$$

$$< \delta + \tfrac{\delta}{2} + \tfrac{\delta}{2} + \delta = 3\delta.$$

Отже, $d(C_1, C_2) < 3\delta$, що неможливо. □

3.2.2. Теорема Стоуна. При доведенні основного результату даного підрозділу ми будемо використовувати теорему Цермело, яка є ще одним добревідомим переформулюванням аксіоми вибору (дивись, наприклад, [13, розділ I.4]).

Нагадаємо, що лінійно впорядкована множина $(A, \leq)$ називається *цілком впорядкованою множиною*, якщо кожна непорожня підмножина множини A має найменший елемент.

Теорема 3.2.3 (Теорема Цермело)**.** *Довільну множину S можна цілковито впорядкувати.*

Сім'я $(V_i : i \in I)$ множин V_i називається *вписаною в сім'ю* $(U_s : s \in S)$ множин U_s, якщо для кожного $i \in I$ існує $s \in S$ таке, що $V_i \subseteq U_s$.

Теорема 3.2.4 (теорема Стоуна)**.** *В довільне відкрите покриття метризовного простору X можна вписати локально скінченне відкрите покриття.*

Доведення. Нехай d – метрика на X, яка породжує його топологію, і $(U_s : s \in S)$ – відкрите покриття простору X, тобто кожна множина U_s відкрита в X і $X = \bigcup\limits_{s \in S} U_s$. Згідно з теоремою 3.2.3 ми можемо на множині S увести порядок $\leq$ такий, що множина $(S, \leq)$ є цілком впорядкованою. Для кожного $x \in X$ множина

$$S(x) = \{s \in S : x \in U_s\}$$

непорожня, а тому існує

$$s(x) = \min S(x).$$

Тепер для кожного $s \in S$ покладемо

$$X_s = \{x \in X : s(x) = s\}.$$

Зрозуміло, що всі множини X_s попарно неперетинні і

$$X = \bigcup_{s \in S} X_s.$$

Для довільних $s \in S$ і $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$X(s, n) = \{x \in X_s : B(x, \tfrac{3}{n}) \subseteq U_s\}.$$

Оскільки всі множини U_s відкриті і $X_s \subseteq U_s$, то

$$X_s = \bigcup_{n=1}^{\infty} X(s, n).$$

для кожного $s \in S$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ розглянемо систему

$$\mathcal{A}_n = \{X(s, n) : s \in S\}.$$

Покажемо, що $d(A, B) \geq \frac{3}{n}$ для довільних різних непорожніх множин $A, B \in \mathcal{A}_n$. Припустимо, що це не так, тобто існують різні $s, t \in S$ такі, що множини $X(s, n)$ і $X(t, n)$ непорожні і

$$d(X(s, n), X(t, n)) < \tfrac{3}{n}.$$

Тоді існують точки $x \in X(s, n)$ і $y \in X(t, n)$ такі, що $d(x, y) < \frac{3}{n}$. Тепер маємо

$$y \in B\left(x, \tfrac{3}{n}\right) \subseteq U_s \qquad \text{і} \qquad t = s(y) \leq s.$$

Аналогічно
$$x \in B\left(y, \tfrac{3}{n}\right) \subseteq U_t \qquad \text{і} \qquad s = s(x) \leq t.$$
Отже, $s = t$, що неможливо.

Покладемо $\mathcal{C}_1 = \mathcal{A}_1$ і
$$\mathcal{C}_{n+1} = \{A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{C \in \mathcal{C}_k} B(C, \tfrac{1}{k}) : A \in \mathcal{A}_{n+1}\}$$
для кожного $n \in \mathbb{N}$. З вищедоведеної властивості систем $\mathcal{A}_n$ випливає, що
$$d(C_1, C_2) \geq \tfrac{3}{n}$$
для довільних різних непорожніх множин $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_n$. Тому згідно з лемою 3.2.2 для кожного $n \in \mathbb{N}$ система
$$\mathcal{V}_n = \{B(C, \tfrac{1}{n}) : \emptyset \neq C \in \mathcal{C}_n)\}$$
локально скінченна в просторі X.

Покажемо, що система
$$\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$$
є шуканою. Оскільки для кожного $n \in \mathbb{N}$ маємо
$$\bigcup \mathcal{C}_n = \bigcup_{C \in \mathcal{C}_n} C \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{V}_n} V = \bigcup \mathcal{V}_n$$
і
$$\mathcal{C}_n = \{A \setminus \bigcup_{k<n} \bigcup \mathcal{V}_k : A \in \mathcal{A}_n\},$$
то
$$\bigcup \mathcal{A}_n = \bigcup_{A \in \mathcal{A}_n} A \subseteq \bigcup_{C \in \mathcal{C}_n} \left(C \cup \bigcup_{k<n} \bigcup \mathcal{V}_k \right) \subseteq \bigcup_{k \leq n} \bigcup \mathcal{V}_k.$$
Тому
$$X = \bigcup_{s \in S} X_s = \bigcup_{s \in S} \bigcup_{n=1}^{\infty} X(s,n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{s \in S} X(s,n) =$$
$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup \mathcal{A}_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \leq n} \bigcup \mathcal{V}_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup \mathcal{V}_n = \bigcup \mathcal{V}.$$
Отже, $\mathcal{V}$ є відкритим покриттям простору X.

Покажемо, що покриття $\mathcal{V}$ вписане у покриття $(U_s : s \in S)$. Для кожного $V \in \mathcal{V}$ існують $n \in \mathbb{N}$ і $C \in \mathbb{C}_n$ такі, що

$$V = B(C, \tfrac{1}{n}).$$

Виберемо $s \in S$ таке, що $C \subseteq A = X(s,n)$. Тоді

$$V = B(C, \tfrac{1}{n}) = \bigcup_{x \in C} B(x, \tfrac{1}{n}) \subseteq \bigcup_{x \in X(s,n)} B(x, \tfrac{3}{n}) \subseteq U_s.$$

Залишилось довести, що система $\mathcal{V}$ локально скінченна. Для цього достатньо показати, що послідовність $(\mathcal{V}_n)_{n=1}^{\infty}$ задовольняє умову твердження 3.2.1. Зафіксуємо точку $x \in X$. Оскільки $\mathcal{V}$ є відкритим покриттям простору X, то існують $k \in \mathbb{N}$, $V_1 \in \mathcal{V}_k$ і $m \geq k$ такі, що

$$B(x, \tfrac{2}{m}) \subseteq V_1.$$

З означення систем $\mathcal{C}_n$ випливає, що

$$C \cap V_1 = \emptyset$$

для довільних $n > k$ і $C \in \mathcal{C}_n$. Тому

$$C \cap B(x, \tfrac{2}{m}) = \emptyset$$

для довільних $n > m$ і $C \in \mathcal{C}_n$. З нерівності трикутника випливає, що

$$B(C, \tfrac{1}{n}) \cap B(x, \tfrac{1}{m}) \subseteq B(C, \tfrac{1}{m}) \cap B(x, \tfrac{1}{m}) = \emptyset$$

для довільних $n > m$ і $C \in \mathcal{C}_n$, тобто

$$V \cap U = \emptyset$$

для довільних $n > m$ і $V \in \mathcal{V}_n$, де $U = B(x, \tfrac{1}{m})$ – окіл точки x.

$\square$

3.3

Необхідні умови на множину точок розриву

У даному підрозділі ми подамо в дещо опрацьованому вигляді підхід до розв'язання прямої задачі, викладений в [66] і [59].

3.3.1. Локальна проективна властивість множини точок розриву. Ми розпочнемо з допоміжного твердження, яке є певним локальним аналогом попередніх прямих теорем про ніде не щільну проекцію множини "великих" розривів і займає центральне місце у встановлені характеристичних властивостей множини точок розриву нарізно неперервних функцій на добутку метризовних просторів.

Лема 3.3.1. *Нехай X – топологічний простір, (Y,d) – метричний простір, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – неперервна відносно першої змінної функція функція, $\varepsilon > 0$, $r > 0$,*

$$D = \{(x,y) \in X \times Y : \omega_f(x,y) \geq \varepsilon,\ \omega_{f^x}(B(y,2r)) \leq \tfrac{\varepsilon}{8}\}$$

і $E = \overline{D}$. Тоді для довільної кулі $V = B(y,r)$ в просторі Y проекція

$$A = \mathrm{pr}_X(E \cap (V \times X))$$

є ніде не щільною в просторі X.

Доведення. Зафіксуємо довільну точку $y_0 \in Y$. Покладемо $V_0 = B(y_0,r)$ і покажемо, що множина $A_0 = \mathrm{pr}_X(E \cap (V_0 \times X))$ ніде не щільна в X.

Нехай це не так, тобто множина A_0 щільна в деякій відкритій непорожній множині U_0 в X. Візьмемо довільну точку $z_1 = (x_1,y_1) \in E \cap (U_0 \times V_0)$ і такий відкритий окіл $U_1 \subseteq U_0$ точки x_1, що коливання неперервної функції f_{y_1} на околі U_1 не перевищує $\frac{\varepsilon}{8}$, тобто

$$|f(x',y_1) - f(x'',y_1)| \leq \tfrac{\varepsilon}{8}$$

для довільних $x', x'' \in U_1$. Розглянемо відкритий окіл $W_1 = U_1 \times V_0$ точки z_1 і візьмемо довільну точку $z_2 = (x_2,y_2) \in W_1$. Тепер, використовуючи неперервність функції f_{y_2}, виберемо відкритий окіл $U_2 \subseteq U_1$ точки x_2 такий, що

$$|f(x',y_2) - f(x'',y_2)| \leq \tfrac{\varepsilon}{8}$$

для довільних $x', x'' \in U_2$. Оскільки множина A_0 щільна в U_0, то

$$\overline{D} \cap (U_2 \times V_0) = E \cap (U_2 \times V_0) \neq \emptyset.$$

Тоді
$$D \cap (U_2 \times V_0) \neq \emptyset,$$
тобто існують точки $x_3 \in U_2$ і $y_3 \in V_0$ такі, що $z_3 = (x_3, y_3) \in D$. Зауважимо, що $d(y_0, y_3) < r$. Тому
$$V_0 = B(y_0, r) \subseteq V(y_3, 2r),$$
зокрема, $y_1, y_2 \in V(y_3, 2r)$. Оскільки $z_3 \in D$, то
$$|f(x_3, y_1) - f(x_3, y_2)| \leq \tfrac{\varepsilon}{8}.$$
Тепер маємо
$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq |f(x_1, y_1) - f(x_3, y_1)| + |f(x_3, y_1) - f(x_3, y_2)| +$$
$$+ |f(x_3, y_2) - f(x_2, y_2)| \leq \tfrac{\varepsilon}{8} + \tfrac{\varepsilon}{8} + \tfrac{\varepsilon}{8} = \tfrac{3\varepsilon}{8}.$$
Отже,
$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq \tfrac{3\varepsilon}{8}$$
для довільної точки $z_2 \in W_1$. Тоді
$$|f(z') - f(z'')| \leq |f(z') - f(z_1)| + |f(z_1) - f(z'')| \leq \tfrac{3\varepsilon}{4}$$
для довільних точок $z', z'' \in W_1$ і
$$\omega_f(z_1) \leq \omega_f(W_1) \leq \tfrac{3\varepsilon}{4}.$$
З іншого боку, множина D міститься в замкненій множині
$$F = \{z \in X \times Y : \omega_f(z) \geq \varepsilon\}.$$
Тому
$$z_1 \in E = \overline{D} \subseteq \overline{F} = F.$$
А отже, $\omega_f(z_1) \geq \varepsilon$, що дає нам суперечність. □

3.3.2. Необхідні умови. Тепер перейдемо до безпосереднього розв'язання прямої задачі.

Спочатку розглянемо випадок з одним метризовним множником (дивись [66, теорема 2.3.3] і [59, теорема 3.2.3]).

Теорема 3.3.2. *Нехай X – топологічний простір, (Y, d) – метричний простір і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція. Тоді існує зростаюча послідовність $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ множин $E_n \subseteq X \times Y$ типу F_σ така, що*
$$D(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

і для кожного $n \in \mathbb{N}$ і довільної відкритої кулі V в просторі Y, радіус якої менший або рівний $\frac{1}{n}$, проекція $\mathrm{pr}_X(E_n \cap (V \times X))$ є множиною першої категорії в X.

Доведення. Для довільних натуральних n і m покладемо

$$D_{nm} = \{(x, y) \in X \times Y : \omega_f(x, y) \geq \tfrac{1}{m}, \omega_{f^x}(V(y, \tfrac{2}{n})) \leq \tfrac{1}{8m}\},$$

$$E_{nm} = \overline{D}_{nm}, \quad E_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{nm} \quad \text{і} \quad D_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{nm}.$$

Покажемо, що

$$E = D(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Зауважимо, що оскільки для кожного $x \in X$ функція f^x неперервна, то

$$D_m = \{(x, y) \in X \times Y : \omega_f(x, y) \geq \tfrac{1}{m}\}.$$

Звідси випливає, що всі множини D_m замкнені і $E = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} D_m$. Тепер, з одного боку,

$$E_{nm} = \overline{D}_{nm} \subseteq D_m$$

для довільних $n, m \in \mathbb{N}$ і

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{nm} \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m = E.$$

А з іншого боку,

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} D_{nm} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{nm} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Отже, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = E$.

Тепер покажемо, що послідовність $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ задовольняє другу умову теореми. Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$. Згідно з лемою 3.3.1, для кожного $m \in \mathbb{N}$ і довільної кулі $V = B(y, \frac{1}{n})$ в просторі Y множина

$$A_m = \mathrm{pr}_X(E_{nm} \cap (V \times X))$$

є ніде не щільною в X. Тому множина

$$\mathrm{pr}_X(E_n \cap (V \times X)) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathrm{pr}_X(E_{nm} \cap (V \times X)) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathrm{pr}_X A_m$$

є множиною першої категорії в X. $\square$

У зв'язку з щойно доведеною теоремою природно виникають наступні поняття.

Підмножину C добутку $X \times Y$ топологічних просторів X і Y називатимемо *множиною локально проективно першої категорії відносно* x, якщо для довільної точки $z \in X \times Y$ існує окіл W точки z такий, що проекція $\mathrm{pr}_X(C \cap W)$ є множиною першої категорії в просторі X. Аналогічно, множина $C \subseteq X \times Y$ називається *множиною локально проективно першої категорії відносно* y, якщо для довільної точки $z \in X \times Y$ існує окіл W точки z такий, що проекція $\mathrm{pr}_Y(C \cap W)$ є множиною першої категорії в Y. Множина $C \subseteq X \times Y$, яка є локально проективно першої категорії відносно x і відносно y, називається *множиною локально проективно першої категорії.*

Зауважимо, що всі множини E_n з теореми 3.3.2 є множинами локально проективно першої категорії відносно x. Тепер стандартними міркуваннями одержуються необхідні умови на множину точок розриву функцій на добутку двох метризовних просторів.

Теорема 3.3.3. *Нехай X і Y – метризовні простори і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція. Тоді існує зростаюча послідовність $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ локально проективно першої категорії F_σ-множин E_n в просторі $X \times Y$ така, що*

$$D(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Доведення. Застосувавши двічі теорему 3.3.2 (щодо проекція на X і щодо проекції на Y), одержимо зростаючі послідовності $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ і $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ локально проективно першої категорії відносно x множин C_n типу F_σ в $X \times Y$ і локально проективно першої категорії відносно y множин D_n типу F_σ в $X \times Y$ такі, що

$$D(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n.$$

Залишилось покласти

$$E_n = C_n \cap D_n$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. □

3.4

Повний опис множини точок розриву

Розв'язання оберненої задачі, як і основний результат даного розділу – характеристичну теорему, ми викладемо тут у дещо видозміненому вигляді у порівнянні з [66] і [59]. Це пов'язано з тим, що у згаданих роботах вивчалась побудова нарізно неперервних функцій з даною множиною точок розриву на добутку двох просторів з досить широкого класу, який містить метризовні простори, і, як один із етапів побудови, доводилось узагальнення теореми Брекенріджа і Нішіури. У нашому викладі, який стосується виключно метризовних просторів, ми будемо використовувати уже доведену у попередньому розділі теорему Брекенріджа і Нішіури, акцентуючи увагу на нових аспектах розв'язання оберненої задачі. При цьому, і характеристичну теорему ми подамо у дещо іншому вигляді, який близький до відповідної характеризації [57] для функцій n змінних.

3.4.1. Зв'язок між локальними проективними властивостями множин. Розпочнемо з простого спостереження.

Твердження 3.4.1. *Нехай $(A_i : i \in I)$ – довільна локально скінченна сім'я підмножин топологічного простору X. Тоді $(\overline{A}_i : i \in I)$ також локально скінченна.*

Доведення. Візьмемо довільну точку $x \in \overline{A}$ і знайдемо відкритий окіл U точки x в просторі X такий, що множина

$$J = \{i \in I : U \cap A_i \neq \emptyset\}$$

скінченна. Оскільки U відкритий і $U \cap A_i = \emptyset$, то $U \cap \overline{A}_i = \emptyset$ для кожного $i \in I \setminus J$. Тобто

$$J = \{i \in I : U \cap \overline{A}_i \neq \emptyset\}.$$

□

Тепер розглянемо локально скінченні об'єднання множин.

Твердження 3.4.2. *Нехай $(A_i : i \in I)$ – довільна локально скінченна сім'я підмножин топологічного простору X. Тоді*

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A}_i.$$

Доведення. Зрозуміло, що

$$\bigcup_{i\in I}\overline{A}_i \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}.$$

Доведемо обернене включення. Покладемо

$$A = \bigcup_{i\in I} A_i.$$

Візьмемо довільну точку $x \in \overline{A}$ і знайдемо окіл U точки x в просторі X такий, що множина

$$J = \{i \in I : U \cap A_i \neq \emptyset\}$$

скінченна. Покладемо

$$B = \bigcup_{i\in J} A_i \quad \text{і} \quad C = \bigcup_{i\in I\setminus J} A_i.$$

Зауважимо, що

$$\overline{A} = \overline{B \cup C} = \overline{B} \cup \overline{C}.$$

Крім того,

$$U \cap C = \emptyset$$

згідно з вибором околу U точки x. Тому $x \notin \overline{C}$. Отже,

$$x \in \overline{B} = \bigcup_{i\in J}\overline{A}_i \subseteq \bigcup_{i\in I}\overline{A}_i.$$

□

З цього твердження негайно випливає наступний факт.

Наслідок 3.4.3. *Об'єднання довільної локально скінченної сім'ї (системи) замкнених підмножин топологічного простору X є замкненою множиною в X.*

Підмножину C добутку $X \times Y$ топологічних просторів X і Y називатимемо *множиною локально проективно ніде не щільною*, якщо для довільної точки $z \in X \times Y$ існує окіл W точки z такий, що проекції $\mathrm{pr}_X(C \cap W)$ і $\mathrm{pr}_Y(C \cap W)$ є ніде не щільними множинами в просторах X і Y відповідно.

Твердження 3.4.4. *Нехай $\mathcal{C}$ – локально скінченна система проективно ніде не щільних множин в добутку $X \times Y$ топологічних просторів X і Y. Тоді множина $D = \bigcup \mathcal{C}$ є проективно ніде не щільною в $X \times Y$.*

Доведення. Зафіксуємо точку $z \in X \times Y$ і виберемо окіл W цієї точки такий, що множина

$$\mathcal{C}_W = \{C \in \mathcal{C} : C \cap W \neq \emptyset\}$$

скінченна. Залишилось зауважити, що множина

$$D \cap W = \bigcup_{C \in \mathcal{C}_w} (C \cap W)$$

є проективно ніде не щільною, як об'єднання скінченної кількості проективно ніде не щільних множин. □

Тепер з допомогою теореми Стоуна легко доводиться наступний зв'язок між локальними проективними властивостями.

Твердження 3.4.5. *Нехай C – локально проективно першої категорії F_σ-множина в добутку $X \times Y$ метризовних просторів X і Y. Тоді існує зростаюча послідовність $(C_n)_{n=1}^\infty$ проективно ніде не щільних замкнених множин C_n в $X \times Y$ така, що*

$$C = \bigcup_{n=1}^\infty C_n.$$

Доведення. Візьмемо зростаючу послідовність $(F_n)_{n=1}^\infty$ замкнених множин F_n в добутку $Z = X \times Y$ таку, що $C = \bigcup\limits_{n=1}^\infty F_n$. Для кожної точки $z \in Z$ виберемо окіл $W(z)$ точки z такий, що множини

$$A(z) = \mathrm{pr}_X(C \cap W(z)) \qquad \text{і} \qquad B(z) = \mathrm{pr}_Y(C \cap W(z))$$

є множинами першої категорії в X і Y відповідно. Оскільки простір Z є метризовним, то згідно з теоремою 3.2.4 у відкрите покриття

$$\mathcal{W} = \{W(z) : z \in Z\}$$

простору Z можна вписати відкрите локально скінченне покриття $\mathcal{G}$. Для кожної множини $G \in \mathcal{G}$ виберемо точку $z(G) \in Z$ таку, що

$$G \subseteq W(z(G)))$$

і знайдемо зростаючі послідовності $(A_n(G))_{n=1}^\infty$ і $(B_n(G))_{n=1}^\infty$ замкнених ніде не щільних множин $A_n(G)$ і $B_n(G)$ в просторах X і Y відповідно такі, що

$$A(z(G)) = \bigcup_{n=1}^\infty A_n(G) \qquad \text{і} \qquad B(z(G)) = \bigcup_{n=1}^\infty B_n(G).$$

Тепер для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $G \in \mathcal{G}$ покладемо

$$D_n(G) = (A_n(G) \times B_n(G)) \cap F_n \cap G \qquad \text{і} \qquad C_n(G) = \overline{D_n(G)}.$$

Оскільки послідовності множини $A_n(G)$, $B_n(G)$ і F_n зростають, то для кожного $G \in \mathcal{G}$ маємо

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n(G) = (A(z(G)) \times B(z(G))) \cap C \cap G = C \cap G,$$

адже

$$C \cap G \subseteq C \cap W(z(G)) \subseteq A(z(G)) \times B(z(G)).$$

Зрозуміло, що $D_n(G) \subseteq G$ для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $G \in \mathcal{G}$. Звідси випливає, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ система

$$\{D_n(G) : G \in \mathcal{G}\}$$

локально скінченна. Тому згідно з твердженням 3.4.1 кожна система

$$\{C_n(G) : G \in \mathcal{G}\}$$

локально скінченна. Тепер з наслідку 3.4.3 і твердження 3.4.5 випливає, що кожна множина

$$C_n = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} C_n(G)$$

є проективно ніде не щільною замкненою множиною в Z. Крім того, зрозуміло, що послідовність множини C_n зростає, адже такими вибирались послідовності множини $A_n(G)$, $B_n(G)$ і F_n.

Залишилось перевірити рівність

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Оскільки $C_n \subseteq F_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = C.$$

З іншого боку, враховуючи, що $\mathcal{G}$ є покриттям простору Z, одержимо

$$C = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} (C \cap G) = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n(G) \subseteq \bigcup_{G \in \mathcal{G}} \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n(G) =$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{G \in \mathcal{G}} C_n(G) = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

□

3.4.2. Рівномірні границі і локально скінченні суми нарізно неперервних і напівнеперервних функцій. У даному пункті ми викладемо допоміжні результати, які ми будемо використовувати при розв'язанні оберненої задачі. Розпочнемо з простого спостереження, яке уточнює твердження 2.2.3.

Лема 3.4.6. *Нехай X – топологічний простір, $f : X \to \mathbb{R}$ і $g : X \to \mathbb{R}$ – напівнеперервні знизу функції. Тоді*

$$D(f + g) = D(f) \cup D(g).$$

Доведення. Зрозуміло, що $D(f+g) \subseteq D(f) \cup D(g)$. Тому достатньо довести обернене включення.

Нехай $x_0 \in D(f)$ і $\omega_f(x_0) = \delta > 0$. Виберемо окіл U_0 точки x_0 такий, що

$$g(x) \geq g(x_0) - \tfrac{\delta}{2}$$

для кожного $x \in U_0$. Позначимо через $\mathcal{U}$ систему всіх околів точки x в просторі X. Тепер для функції $h = f + g$ маємо

$$h^*(x_0) = \inf_{U \in \mathcal{U}} \sup_{x \in U} h(x) = \inf_{U \in \mathcal{U}} \sup_{x \in U \cap U_0} h(x) = \inf_{U \in \mathcal{U}} \sup_{x \in U \cap U_0} (f(x) + g(x)) \geq$$

$$\geq \inf_{U \in \mathcal{U}} \sup_{x \in U \cap U_0} (f(x) + g(x_0) - \tfrac{\delta}{2}) = \inf_{U \in \mathcal{U}} \sup_{x \in U \cap U_0} f(x) + g(x_0) - \tfrac{\delta}{2} =$$

$$= f^*(x_0) + g(x_0) - \tfrac{\delta}{2}.$$

Згідно з твердженнями 1.2.10 і 1.2.11 для напівнеперервної знизу функції f маємо

$$\delta = \omega_f(x_0) = f^*(x_0) - f_*(x_0) = f^*(x_0) - f(x_0).$$

Зауважимо, що функція h також напівнеперервна знизу, як сума таких функцій. Тому знову застосувавши твердження 1.2.10 і 1.2.11, отримаємо

$$\omega_h(x_0) = h^*(x_0) - h_*(x_0) = h^*(x_0) - h(x_0) \geq f^*(x_0) + g(x_0) - \tfrac{\delta}{2} - f(x_0) - g(x_0) =$$

$$= f^*(x_0) - f(x_0) - \tfrac{\delta}{2} = \delta - \tfrac{\delta}{2} = \tfrac{\delta}{2} > 0.$$

Отже, $x_0 \in D(h)$ і $D(f) \subseteq D(h)$.

Аналогічно доводиться включення $D(g) \subseteq D(h)$. □

Наступні два допоміжні твердження ми будемо використовувати на завершальному етапі побудови нарізно неперервної функції з даною множиною точок розриву.

Лема 3.4.7. *Нехай X – топологічний простір і $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність напівнеперервних знизу функцій такі, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ збігається рівномірно на X. Тоді функція $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ є напівнеперервною знизу функцією і*

$$D(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} D(f_n).$$

Доведення. Оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ збігається рівномірно, то функція f є напівнеперервною знизу функцією, яка є неперервною поза множиною

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D(f_n),$$

як рівномірна границя неперервних поза D функцій. Отже,

$$D(f) \subseteq D.$$

З іншого боку, для кожного номера $n \in \mathbb{N}$ функція

$$g_n = \sum_{k \neq n} f_k$$

є напівнеперервною знизу, як сума рівномірно збіжного ряду напівнеперервних знизу функцій. Тому

$$D(f) = D(f_n) + D(g_n)$$

згідно з лемою 3.4.6. Отже, $D(f_n) \subseteq D(f)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, тобто

$$D \subseteq D(f).$$

□

Лема 3.4.8. *Нехай $Z = X \times Y$, де X і Y – довільні топологічні простори, $\mathcal{W}$ – локально скінченна система відкритих в Z множин, $(f_W : W \in \mathcal{W})$ – сім'я напівнеперервних знизу нарізно неперервних функцій $f_W : X \times Y \to \mathbb{R}$, таких, що $f_W(Z \setminus W) \subseteq \{0\}$ для кожного $W \in \mathcal{W}$. Тоді функція $f = \sum\limits_{W \in \mathcal{W}} f_W$ означена коректно на $X \times Y$, є напівнеперервною знизу нарізно неперервною функцією, для якої*

$$D(f) = \bigcup_{W \in \mathcal{W}} D(f_W).$$

Доведення. Візьмемо довільну точку $z_0 \in Z$ і такий окіл U цієї точки в Z, що система

$$\mathcal{U} = \{W \in \mathcal{W} : U \cap W \neq \emptyset\}$$

є скінченною. Тоді функція f на множині U збігається з функцією

$$g = \sum_{W \in \mathcal{U}} f_W,$$

яка є напівнеперервною знизу нарізно неперервною функцією, як скінченна сума таких функцій. Крім того, як випливає з леми 3.4.6,

$$D(g) = \bigcup_{W \in \mathcal{U}} D(f_W).$$

Тому функція g неперервна в точці z_0, якщо

$$z_0 \notin D = \bigcup_{W \in \mathcal{W}} D(f_W).$$

Якщо ж $z_0 \in D(f_V)$ для деякого $V \in \mathcal{W}$, то зрозуміло, що $V \in \mathcal{U}$, і функція g розривна в точці z_0. Отже, функція f також розривна в точці z_0.

Таким чином, для довільної точки $z_0 \in Z$ функція f в цій точці означена коректно, є напівнеперервною знизу і неперервною відносно кожної змінної в цій точці, і є розривною в точці z_0 тоді і тільки тоді, коли $z_0 \in D$. $\square$

Для безпосереднього використання цієї леми нам буде потрібне таке нескладне твердження.

Твердження 3.4.9. *Нехай X – топологічний простір, $f : X \to [0, 1]$ і $D(f) \subseteq f^{-1}(0)$. Тоді f напівнеперервна знизу функція.*

Доведення. Напівнеперервність знизу функції f поза множиною $D(f)$ випливає з неперервності f в цих точках, а напівнеперервність знизу в точках множини $f^{-1}(0)$ легко випливає з означення, оскільки $f(x) \geq 0$ для кожного $x \in X$. $\square$

3.4.3. Характеризація множини точок розриву.

У даному пункті ми викладемо основний результат даного розділу.

Спочатку розв'яжемо обернену задачу для замкнених локально проективно ніде не щільних множин.

Теорема 3.4.10. *Нехай X і Y – метризовні простори і $E \subseteq X \times Y$ – замкнена локально проективно ніде не щільна множина. Тоді існує напівнеперервна знизу нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, для якої $D(f) = E$.*

Доведення. Для кожної точки $z \in Z = X \times Y$ виберемо замкнений окіл $W(z)$ точки z такий, що множини

$$A(z) = \mathrm{pr}_X(E \cap W(z)) \qquad \text{і} \qquad B(z) = \mathrm{pr}_Y(E \cap W(z))$$

є ніде не щільними множинами в X і Y відповідно. Оскільки простір Z є метризовним, то згідно з теоремою 3.2.4 у відкрите покриття

$$\{\mathrm{int}(W(z)) : z \in Z\}$$

простору Z можна вписати відкрите локально скінченне покриття $\mathcal{W}$.

Зафіксуємо $W \in \mathcal{W}$. Покладемо

$$E_W = \overline{E \cap W}.$$

Зрозуміло, що множина E_W замкнена. Крім того, E_W проективно ніде не щільна. Справді, виберемо $z \in Z$ таке, що $W \subseteq W(z)$. Тоді $\overline{W} \subseteq W(z)$, адже $W(z)$ замкнена множина, і

$$E_W \subseteq E \cap \overline{W} \subseteq E \cap W(z) \subseteq A(z) \times B(z).$$

Згідно з теоремою Брекенріджа і Нішіури (теорема 2.3.4) існує нарізно неперервна функція $g_W : Z \to [0, 1]$ така, що $D(g_W) = E_W$ і $g_W(z) = 1$ для кожного $z \in E_W$. Виберемо неперервну функцію $\varphi_W : Z \to [0, +\infty)$ таку, що

$$W = \{z \in Z : \varphi(z) > 0\}.$$

В ролі такої функції, наприклад, можна взяти

$$\varphi(z) = d(z, Z \setminus W),$$

де d – деяка метрика на Z, яка породжує його топологію.

Розглянемо нарізно неперервну функцію $f_W : Z \to [0, +\infty)$, яка означається формулою

$$f_W(z) = \varphi(z) \cdot (1 - g_W(z)).$$

Зрозуміло, що

$$D(f_W) \subseteq D(g_W) = E_W.$$

З іншого боку, з означення множини E_W і леми 3.1.3 випливає включення

$$E \cap W \subseteq E_W \cap W = D(g_W) \cap W \subseteq D(f_W).$$

Крім того, оскільки $f(z) = 0$ для кожного $z \in E_W \supseteq D(f_W)$, то згідно з твердженням 3.4.9 функція f_W напівнеперервна знизу.

Таким чином, ми побудували сім'ю $(f_W : W \in \mathcal{W})$ напівнеперервних знизу нарізно неперервних функцій $f_W : X \times Y \to \mathbb{R}$, таких, що

$$f_W(Z \setminus W) \subseteq \{0\} \qquad \text{і} \qquad E \cap W \subseteq D(f_W) \subseteq E_W$$

для кожного $W \in \mathcal{W}$. Зауважимо, що

$$E = \bigcup_{W \in \mathcal{W}} (E \cap W) \subseteq \bigcup_{W \in \mathcal{W}} D(f_W) \subseteq \bigcup_{W \in \mathcal{W}} E_W \subseteq E.$$

Отже,

$$\bigcup_{W \in \mathcal{W}} D(f_W) = E.$$

Тепер з леми 3.4.8 випливає, що функція $f = \sum\limits_{W \in \mathcal{W}} f_W$ є шуканою. □

Наступна теорема дає повний опис множин точок розриву нарізно неперервних функцій на добутку двох метризовних просторів.

Теорема 3.4.11. *Нехай X і Y – метризовні простори і $E \subseteq X \times Y$. Тоді наступні умови рівносильні:*

1) *існує нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, для якої $D(f) = E$;*

2) *існує зростаюча послідовність $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ локально проективно першої категорії F_σ-множин E_n в просторі $X \times Y$ така, що*

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n;$$

3) *існує зростаюча послідовність $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ локально проективно ніде не щільних замкнених множин F_n в просторі $X \times Y$ така, що*

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Доведення. Імплікація 1) $\Rightarrow$ 2) доведена в теоремі 3.3.3.

2) $\Rightarrow$ 3). Для кожного $n \in \mathbb{N}$ до множини E_n застосуємо твердження 3.4.5 і одержимо зростаючу послідовність $(F_{nm})_{m=1}^{\infty}$ локально проективно ніде не щільних замкнених множин F_{nm} в просторі $X \times Y$ таку, що

$$E_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_{nm}.$$

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$F_n = \bigcup_{k \le n} F_{kn}.$$

Зрозуміло, що всі множини F_n замкнені і локально проективно ніде не щільні, як об'єднання скінченної кількості таких множин. Оскільки всі послідовності $(F_{nm})_{m=1}^{\infty}$ зростаючі, то послідовність $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ також зростає, причому

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} F_{nm} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E.$$

3) $\Rightarrow$ 1). Для кожного $n \in \mathbb{N}$ до множини F_n застосуємо теорему 3.4.10 і одержимо нарізно неперервну напівнеперервну функцію $g_n : X \times Y \to \mathbb{R}$ таку, що $D(g_n) = F_n$. Візьмемо довільний строго зростаючий гомеоморфізм $\varphi : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ (наприклад, $\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \mathrm{arctg}\, x$) і розглянемо функцію $f_n : X \times Y \to [-1, 1]$, $f_n(z) = \varphi(g_n(z))$. З лем 1.2.12 і 1.2.7 випливає, що нарізно неперервна функція f_n є напівнеперервною знизу і

$$D(f_n) = D(g_n).$$

Тепер з леми 3.4.7 випливає, що функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, означена формулою

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(z),$$

є шуканою. $\square$

3.5 Заключні зауваження до розділу 3

На сьогоднішній день доведений у цьому розділі результат про повний опис множин точок розриву нарізно неперервних функцій на добутку двох метризовних просторів поки-що не дістав свого розвитку для ширших класів просторів, і був узагальнений в [57] на випадок функцій багатьох змінних. Може скластися враження, що дослідження множини точок розриву для нарізно неперервних функцій на добутку неметризовних просторів проводились мляво і не привели до цікавих результатів. Це далеко не так, про що, зокрема, свідчить теорема Наміоки [33], яка дістала широке застосування та інтенсивно розвивалася і узагальнювалась багатьма математиками (дивись, наприклад, [31] і вказану там літературу).

З результату Наміоки, який є розв'язанням прямої задачі, випливає, що множина точок розриву нарізно неперервної функцій на добутку двох компактних просторів є проективно першої категорії. У зв'язку з цим З. Пьотровським в [35] було сформульоване питання про повний опис множин точок розриву нарізно неперервних функцій на добутку двох компактних просторів. Той факт, що для добутку компактних просторів уже немає характеризації, подібної до одержаної у другому розділі, було встановлено ще у роботі [63] (дивись також [54]). Крім того, в [30] показано, що навіть у випадку компактних множників, досить близьких до метризовних, структура множини точок розриву має тоншу природу і вже не може бути описана лише з допомогою проективних властивостей. Це все разом вказує на те, що подальший поступ у напрямку розв'язання задачі Діні і одержання відповіді на вищезгадане питання Пьотровського вимагає нових підходів і оригінальних ідей щодо властивостей множини точок розриву.

Стосовно оберненої задачі, безумовно, слід згадати також і її уточнений варіант, який полягає у побудові нарізно неперервної функції з наперед заданим коливанням. Дослідження уточненої оберненої задачі розвивалися В. Маслюченком і О. Маслюченком (дивись, наприклад, [53]) і в [61] О. Маслюченком було одержано повний опис коливань нарізно неперервних функцій багатьох змінних на добутку метризовних просторів.

Розділ 4

НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ НА ДОБУТКУ ПРОСТОРІВ-ДОБУТКІВ

У даному розділі ми подамо ще один характеричтичний результат, який дає повний опис множини точок розриву нарізно неперервних функцій на добутку двох просторів, кожен з яких є топологічним добутком сім'ї сепарабельних метризовних просторів. Цей результат у загальнішій редакції для функцій багатьох змінних був одержаний автором і В. Маслюченком в 2004 році [58]. На відміну від характеристичних теорем попередніх розділів, він постає не шляхом розв'язання прямої і оберненої задач, а з допомогою залежності функцій від зліченної кількості координат, яка дає можливість зведення досліджень до випадку функцій на добутку двох сепарабельних метризовних просторів, де задача Діні уже розв'язана. Основним технічним інструментом встановлення такої залежності є лема Шаніна [72] (дивись також [13, задача 2.7.10 (c)]), один із варіантів якої разом з потрібним нам застосуванням ми викладемо у першому підрозділі. Далі, у наступних двох підрозділах ми спочатку доведемо залежність нарізно неперервних функцій від зліченної кількості координат, а потім застосуємо її для встановлення характеристичної теореми.

4.1

Лема Шаніна та її застосування

У даному підрозділі ми викладемо один варіант леми Шаніна, який з допомогою розробленої в [54] техніки B-віял був одержаний в [64] і застосований до узагальнення того, що одноточкова множина у добутку двох тихоновських кубів незліченної ваги не може бути множиною точок розриву нарізно неперервної функції. Крім того, ми використаємо цей варіант леми Шаніна для дослідження калібру топологічних добутків.

4.1.1. Максимальні B-віяла.

Нехай $\mathcal{A}$ – деяка система множин і B – деяка множина. Систему $\mathcal{A}$ будемо називати *віялом з ядром* B, або, коротше, B*-віялом*, якщо $A_1 \cap A_2 \subseteq B$ для довільних різних множин $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$. Якщо B-віяло $\mathcal{A}_1$ є частиною системи $\mathcal{A}$, то будемо говорити, що $\mathcal{A}_1$ є B-віялом в $\mathcal{A}$. Ми говоримо, що B-віяло $\mathcal{A}_1$ можна продовжити в $\mathcal{A}$, якщо існує така множина $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_1$, що система $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 \cup \{A\}$ також є B-віялом. B-віяло $\mathcal{A}_1$ в $\mathcal{A}$ називатимемо *максимальним в* $\mathcal{A}$, якщо його не можна продовжити в $\mathcal{A}$.

Нам буде потрібне наступне допоміжне твердження, яке доводиться аналогічно, як твердження 2.3.2.

Лема 4.1.1. *Нехай $\mathcal{A}$ – деяка система множин, B – деяка множина і $\mathcal{A}_1$ – B-віяло в $\mathcal{A}$. Тоді існує максимальне B-віяло $\mathcal{A}_0$ в $\mathcal{A}$, яке є продовженням $\mathcal{A}_1$.*

Доведення. Позначимо через $\mathfrak{A}$ систему всіх B-віял в $\mathcal{A}$, які є продовженнями $\mathcal{A}_1$. Впорядкуємо систему $\mathfrak{A}$ відношенням включення, тобто

$$\mathcal{B}_1 \leq \mathcal{B}_2 \ \Leftrightarrow\ \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$$

для довільних $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathfrak{A}$. Покажемо, що кожна непорожня лінійно впорядкована підсистема $\mathfrak{B}$ системи $\mathfrak{A}$ обмежена зверху в $\mathfrak{A}$. Візьмемо довільну непорожню лінійно впорядковану систему $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ і доведемо, що об'єднання

$$\mathcal{B}_0 = \bigcup_{\mathcal{B} \in \mathfrak{B}} \mathcal{B}$$

входить в $\mathfrak{A}$. Достатньо показати, що система $\mathcal{B}_0$ є B-віялом. Нехай $A_1, A_2 \in \mathcal{B}_0$ – довільні множини. Тоді існують $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathfrak{B}$ такі, що $A_1 \in \mathcal{B}_1$ і $A_2 \in \mathcal{B}_2$. Оскільки система $\mathfrak{B}$ лінійно впорядкована, то $\mathcal{B}_1 \leq \mathcal{B}_2$ або $\mathcal{B}_2 \leq \mathcal{B}_1$. Вважатимемо, для певності, що $\mathcal{B}_1 \leq \mathcal{B}_2$, тобто $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$. Тоді

$A_1, A_2 \in \mathcal{B}_2$ і тому $A_1 \cap A_2 \subseteq B$. Отже, $\mathcal{B}_0 \in \mathfrak{A}$. Зрозуміло, що $\mathcal{B} \leq \mathcal{B}_0$ для кожного $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$, тобто, $\mathfrak{B}$ обмежена зверху в $\mathfrak{A}$ елементом $\mathcal{B}_0$.

Таким чином, частково впорядкована множина $(\mathfrak{A}, \leq)$ задовольняє умови леми Куратовського-Цорна, згідно з якою в $\mathfrak{A}$ існує деякий максимальний елемент $\mathcal{A}_0$. Зрозуміло, що $\mathcal{A}_0$ є максимальним B-віялом і продовженням $\mathcal{A}_1$ в $\mathcal{A}$. □

Тепер, використовуючи максимальні віяла, доведемо наступний допоміжний факт.

Лема 4.1.2. *Нехай B – скінченна множина і $\mathcal{A}$ – деяка незліченна система скінченних множин такі, що кожне B-віяло $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ є не більш, ніж зліченним. Тоді існує елемент $x_0 \in \bigcup\limits_{A \in \mathcal{A}} A \setminus B$ такий, що система*

$$\mathcal{A}_0 = \{A \in \mathcal{A} : x_0 \in A\}$$

незліченна.

Доведення. Згідно з лемою 4.1.1 в системі $\mathcal{A}$ існує максимальне B-віяло $\mathcal{B}$, яке за умовою є не більш, ніж зліченним. Оскільки $\mathcal{B}$ складається зі скінченних множин, то множина

$$M = \bigcup_{A \in \mathcal{B}} A$$

також є не більш, ніж зліченною. Крім того, з максимальності $\mathcal{B}$ випливає, що для кожної множини $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ система $\mathcal{B} \cup \{A\}$ не є B-віялом, тобто

$$A \cap (M \setminus B) \neq \emptyset.$$

Для кожного $x \in M \setminus B$ покладемо

$$\mathcal{A}(x) = \{A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B} : x \in A\}.$$

Із зазначеної вище властивості випливає, що

$$\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \bigcup_{x \in M \setminus B} \mathcal{A}(x).$$

Оскільки система $\mathcal{A}$ незліченна, а система $\mathcal{B}$ і множина M є зліченними, то існує точка $x_0 \in M \setminus B$ така, що система $\mathcal{A}(x_0)$ незліченна. Зауважимо, що $\mathcal{A}(x_0) \subseteq \mathcal{A}_0$. Тому система $\mathcal{A}_0$ також незліченна. □

4.1.2. Один варіант леми Шаніна. При дослідженні топологічних властивостей добутків ми будемо використовувати певну модифікацію відомої леми Шаніна [13, задача 2.7.10 (c)]. Спочатку ми розглянемо системи множин, які складаються не більше, ніж з n елементів.

Твердження 4.1.3. *Нехай $n \in \mathbb{N}$ і $\mathcal{A}$ – деяка незліченна система множин такі, що $|A| \leq n$ для кожного $A \in \mathcal{A}$. Тоді існує скінченна множина B і незліченна система $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$, яка є B-віялом.*

Доведення. Міркуватимемо від супротивного. Припустимо, що висновок твердження неправильний, тобто для довільної скінченної множини B кожне B-віяло $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ є не більш, ніж зліченним.

Застосуємо лему 4.1.2 до системи $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$ і скінченної множини $B_1 = \emptyset$. Одержимо деякий елемент

$$x_1 \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}_1} A \setminus B_1$$

такий, що система

$$\mathcal{A}_2 = \{A \in \mathcal{A}_1 : x_1 \in A\}$$

незліченна.

Тепер застосувавши лему 4.1.2 до системи $\mathcal{A}_2$ і скінченної множини $B_2 = \{x_1\}$. Одержимо деякий елемент

$$x_2 \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}_2} A \setminus B_2$$

такий, що система

$$\mathcal{A}_3 = \{A \in \mathcal{A}_2 : x_2 \in A\} = \{A \in \mathcal{A} : x_1 \in A,\, x_2 \in A\}$$

незліченна.

Проробивши подібні міркування $n+1$ раз, ми одержимо $(n+1)$-елементну множину

$$B_{n+2} = \{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$$

таку, що система

$$\mathcal{A}_{n+2} = \{A \in \mathcal{A} : B_{n+2} \subseteq A\}$$

незліченна, що дає нам суперечність, адже $|A| \leq n$ для кожного $A \in \mathcal{A}$. $\square$

Тепер розглянемо випадок сімей скінченних множин.

Сім'ю $(A_i : i \in I)$ називатимемо *незліченною*, якщо множина I незліченна.

Твердження 4.1.4. *Нехай $(A_i : i \in I)$ – незліченна сім'я скінченних множин A_i. Тоді існують скінченна множина B і незліченна множина $J \subseteq I$ такі, що $A_i \cap A_j \subseteq B$ для довільних різних $i, j \in J$.*

Доведення. Без обмеження загальності, вважатимемо, що $S \cap A_i = \emptyset$ для кожного $i \in I$.

Для кожного натурального $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$I_n = \{i \in I : |A_i| \le n\}.$$

Оскільки всі множини A_i скінченні, то

$$I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n.$$

Крім того, множина I незліченна. Тому існує номер m такий, що множина I_m незліченна. Для кожного $i \in I_m$ покладемо

$$B_i = A_i \cup \{i\}.$$

Зауважимо, що всі множини B_i різні, адже $A_i \cap I_m = \emptyset$ для кожного $i \in I_m$. Розглянемо незліченну систему

$$\mathcal{B} = \{B_i : i \in I_m\}$$

яка, зокрема, складається з множин, що містять не більше, ніж $m + 1$ елементів. Згідно з твердженням 4.1.3 існують скінченна множина B і незліченна множина $J \subseteq I_m$ такі, що

$$B_i \cap B_j \subseteq B$$

для довільних різних $i, j \in J$. Тоді

$$A_i \cap A_j \subseteq B_i \cap B_j \subseteq B$$

для довільних різних $i, j \in J$. □

4.1.3. Калібр добутку сепарабельних просторів.

У даному підрозділі ми застосуємо твердження 4.1.4 до вивчення калібру добутку сім'ї сепарабельних просторів.

Через $\aleph_1$ ми позначаємо найменше незліченне кардинальне число, тобто найменшу з потужностей незліченних множин.

Топологічний простір X *має калібр* $\aleph_1$, якщо для довільної незліченної сім'ї $(G_i : i \in I)$ непорожніх відкритих в просторі X множин G_i існує точка $x \in X$ така, що множина

$$\{i \in I : x \in G_i\}$$

є незліченною.

З означення легко вивливає наступний факт.

Твердження 4.1.5. *Довільний сепарабельний простір X має калібр $\aleph_1$.*

Доведення. Нехай $(G_i : i \in I)$ – незліченна сім'я непорожніх відкритих в просторі X множин G_i. В сепарабельному просторі X виберемо послідовність $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ точок $a_n \in X$ таку, що множина

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

щільна в просторі X. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$I_n = \{i \in I : a_n \in G_i\}.$$

Достатньо показати, що хоча б одна з множин I_n є незліченною. Оскільки кожна множина G_i відкрита і непорожня, а множина A щільна в X, то

$$G_i \cap A \neq \emptyset$$

для кожного $i \in I$. Отже, для кожного $i \in I$ існує номер n такий, що $i \in I_n$. Тому

$$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Оскільки множина I незліченна, то існує номер m такий, що множина I_m також незліченна. □

Тепер перейдемо до розгляду добутків топологічних просторів.

Під добутком $\prod\limits_{s \in S} X_s$ сім'ї $(X_s : s \in S)$ непорожніх множин X_s ми розуміємо множину всіх відображень

$$x : S \to \bigcup_{s \in S} X_s$$

таких, що $x(s) \in X_s$ для кожного $s \in S$. Разом з тим, елементи добутку $\prod\limits_{s \in S} X_s$ ми будемо також записувати у вигляді сім'ї $(x_s : s \in S)$ чи $(x_s)_{s \in S}$, де $x_s \in X_s$ для кожного $s \in S$.

В добутку $X = \prod\limits_{s \in S} X_s$ сім'ї $(X_s : s \in S)$ топологічних просторів X_s базу топології утворюють відкриті множини вигляду

$$U = \prod_{s \in S} U_s,$$

де $(U_s : s \in S)$ – сім'я відкритих множин U_s в просторі X_s така, що множина

$$R(U) = \{s \in S : U_s \neq X_s\}$$

скінченна. Такі відкриті множини називатимемо *базисними*.

З уведених позначень негайно випливає наступний факт.

Лема 4.1.6. *Нехай* $U = \prod_{s\in S} U_s$ *– базисна відкрита множина в добутку* $X = \prod_{s\in S} X_s$ *сім'ї топологічних просторів* X_s *і* $x = (x_s)_{s\in S} \in X$ *такі, що* $x_s \in U_s$ *для кожного* $s \in R(U)$*. Тоді* $x \in U$*.*

Доведення. Оскільки $x_s \in X_s = U_s$ для кожного $s \in S \setminus R(U)$, то $x_s \in U_s$ для кожного $s \in S$. Це означає, що $x \in U$. □

Наступний результат, який був доведений у [72, с.65], є основним у даному підрозділі.

Теорема 4.1.7. *Добуток* $X = \prod_{s\in S} X_s$ *сім'ї* $(X_s : s \in S)$ *сепарабельних просторів* X_s *має калібр* $\aleph_1$*.*

Доведення. Нехай $(G_i : i \in I)$ – незліченна сім'я непорожніх відкритих в просторі X множин G_i. Для кожного $i \in I$ виберемо базисну відкриту в добутку X непорожню множину

$$U_i = \prod_{s\in S} U_{s,i}$$

таку, що $U_i \subseteq G_i$. Розглянемо незліченну сім'ю $(A_i : i \in I)$ скінченних множин $A_i = R(U_i) \subseteq S$. Згідно з твердженням 4.1.4 існують скінченна множина T і незліченна множина $J \subseteq I$ такі, що $A_i \cap A_j \subseteq T$ для довільних різних $i, j \in J$. Оскільки $A_i \subseteq S$ для кожного $i \in I$, то ми можемо вважати, що $T \subseteq S$.

В добутку $Y = \prod_{s\in T} X_s$ розглянемо незліченну сім'ю $(V_i : i \in J)$ непорожніх відкритих множин

$$V_i = \prod_{s\in T} U_{s,i}.$$

Оскільки простір Y сепарабельний, як добуток скінченної кількості сепарабельних просторів, то згідно з твердженням 4.1.5, простір Y має калібр $\aleph_1$. Тому існують незліченна множина $J_0 \subseteq J$ і точка $y = (y_s)_{s\in T} \in Y$ такі, що

$$y \in V_i$$

для кожного $i \in J_0$, тобто

$$y_s \in U_{s,i}$$

для довільних $s \in T$ та $i \in J_0$. Покладемо

$$S_0 = S \setminus \left(T \cup \bigcup_{i\in J_0} A_i \right)$$

і, крім того,

$$B_i = A_i \setminus T$$

для кожного $i \in J_0$. Зауважимо, що

$$S = T \sqcup S_0 \sqcup \bigsqcup_{i \in J_0} B_i.$$

Для кожного $s \in T$ позначимо

$$x_s = y_s.$$

Крім того, для кожного $s \in S_0$ в просторі X_s виберемо довільну точку x_s. І, нарешті, для довільних $i \in J_0$ та $s \in B_i$ виберемо точку x_s в просторі X_s таку, що

$$x_s \in U_{s,i}.$$

Тепер розглянемо точку $x = (x_s)_{s \in S} \in X$. Зауважимо, що

$$x_s \in U_{s,i}$$

для довільного $i \in J_0$ та кожного

$$s \in B_i \cup T \supseteq A_i = R(U_i).$$

Тому згідно з лемою 4.1.6, $x \in U_i$ для кожного $i \in J_0$. Отже, множина

$$\{s \in S : x \in U_i\}$$

незліченна і простір X має калібр $\aleph_1$. □

4.2

Залежність функцій на добутках від зліченної кількості координат

У даному підрозділі ми доведемо теореми про залежність неперервних і нарізно неперервних функцій на добутках від зліченної кількості координат, які були одержані в [29] і [67] відповідно.

4.2.1. Найменша множина зосередженості неперервної функції на добутку. У даному пункті ми розглянемо певну конструкцію найменшої множини індексів, на якій зосереджена неперервна функція на добутку. Такі множини були уведені у роботі [67], хоча вперше фактично розглядалися Р. Енгелькінгом у [12].

Нехай $(X_s)_{s\in S}$ – сім'я множин, $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ і $f : X \to \mathbb{R}$ – довільна функція. Будемо казати, що функція f *зосереджена на множині* $T \subseteq S$, якщо $f(x') = f(x'')$, як тільки $x', x'' \in X$ і $x'|_T = x''|_T$. Якщо до того ж множина T не більш, ніж зліченна, то казатимемо, що f *залежить від зліченної кількості координат.*

Множина $S_0 \subseteq S$ називається *найменшою множиною, на якій зосереджене функція* $f : X \to \mathbb{R}$, де $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$, якщо f зосереджена на S_0 і для довільної множини $S_1 \subseteq S$, на якій зосереджена функція f, виконується включення $S_0 \subseteq S_1$.

Спочатку доведемо наступне допоміжне твердження, яке дає можливість розглядати не весь добуток, а лише деякі його підмножини спеціального вигляду.

Твердження 4.2.1. *Нехай $(X_s)_{s\in S}$ – сім'я множин, $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$, $a = (a(s))_{s\in S} \in X$,*

$$\Sigma(a) = \{x \in X : x(s) \neq a(s) \text{ лише для скінченної кількості } s\},$$

$f : X \to \mathbb{R}$ – неперервна функція і $T \subseteq S$ такі, що для довільних $x, y \in \Sigma(a)$ з умови $x|_T = y|_T$ випливає рівність $f(x) = f(y)$. Тоді функція f зосереджена на множині T.

Доведення. Припустимо, що це не так. Тоді існують $x_0, y_0 \in X$ такі, що $x_0|_T = y_0|_T$ і $f(x_0) \neq f(y_0)$. Використовуючи неперервність функції f, виберемо базисні відкриті околи U і V точок x_0 і y_0 відповідно, такі, що

$$f(u) \neq f(v)$$

для довільних $u \in U$ і $v \in V$. Покладемо $A = R(U)$ і $B = R(V)$. Розглянемо точки $x = (x(s))_{s\in S}, y = (y(s))_{s\in S} \in X$, означені формулами

$$x(s) = \begin{cases} x_0(s), & s \neq A \cup B; \\ a(s), & s \in S \setminus (A \cup B), \end{cases}$$

і

$$y(s) = \begin{cases} y_0(s), & s \neq A \cup B; \\ a(s), & s \in S \setminus (A \cup B). \end{cases}$$

Тепер, з одного боку, $x, y \in \Sigma(a)$, причому оскільки $x_0|_T = y_0|_T$, то $x|_T = y|_T$. Тому $f(x) = f(y)$. А з іншого боку, $x \in U$ і $y \in V$. Отже, $f(x) \neq f(y)$, що дає суперечність. □

Наступне твердження [67, теорема 1] описує найменшу множину, на якій зосереджена неперервна функція на добутку.

Твердження 4.2.2. *Нехай $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ – топологічний добуток сім'ї непорожніх топологічних просторів X_s і $f : X \to \mathbb{R}$ – неперервна функція. Тоді множина*

$$S_0 = \{s \in S : (\exists x_s, y_s \in X)(x_s|_{S\setminus\{s\}} = y_s|_{S\setminus\{s\}} \ \text{ і } f(x_s) \neq f(y_s))\}$$

є найменшою множиною, на якій зосереджена функція f.

Доведення. Зафіксуємо довільну точку $a \in X$ і розглянемо множини

$$Y = \Sigma(a) = \{x \in X : x(s) \neq a(s) \text{ лише для скінченної кількості } s\}$$

і

$$\tilde{S} = \{s \in S : (\exists x, y \in Y)(x|_{S\setminus\{s\}} = y|_{S\setminus\{s\}} \text{ і } f(x) \neq f(y))\}.$$

Покажемо, що звуження $g = f|_Y$ зосереджене на множині $\tilde{S}$, тобто для довільних $x, y \in Y$ з умови $x|_{\tilde{S}} = y|_{\tilde{S}}$ випливає рівність $g(x) = g(y)$.

Нехай $x_0, y_0 \in Y$ такі, що $x_0|_{\tilde{S}} = y_0|_{\tilde{S}}$. Зауважимо, що множина

$$T = \{s \in S : x_0(s) \neq y_0(s)\}$$

скінченна, адже вона міститься у об'єднанні

$$\{s \in S : x_0(s) \neq a(s)\} \cup \{s \in S : y_0(s) \neq a(s)\}$$

двох скінченних множин. Нехай множина T складається з n різних елементів $t_1, \dots, t_n$. Для $i = 1, \dots, n$ послідовно покладемо

$$x_i(s) = \begin{cases} x_{i-1}(s), & s \neq t_i; \\ y_0(s), & s = t_i. \end{cases}$$

Зафіксуємо $i \in \{1, \dots, n\}$ і покажемо, що $f(x_i) = f(x_{i-1})$. Оскільки

$$x_0|_{\tilde{S}} = y_0|_{\tilde{S}} \quad \text{і} \quad x_0(t_i) \neq y_0(t_i),$$

то $t_i \notin \tilde{S}$. Крім того, згідно з побудовою маємо

$$x_i|_{S \setminus \{t_i\}} = x_{i-1}|_{S \setminus \{t_i\}}$$

і з означення множини $\tilde{S}$ випливає, що $f(x_i) = f(x_{i-1})$.

Тепер маємо

$$f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n) = f(y_0)$$

і функція g зосереджена на множині $\tilde{S}$.

З твердження 4.2.1 випливає, що функція f також зосереджена на множині $\tilde{S}$. Очевидно, що $\tilde{S} \subseteq S_0$. Крім того, з означення множини S_0 легко випливає, що S_0 міститься в довільній множині, на якій зосереджене f. Тому $S_0 \subseteq \tilde{S}$, а значить $S_0 = \tilde{S}$. Таким чином, S_0 є найменшою множиною, на якій зосереджена функція f. □

4.2.2. Залежність неперервних функцій.

У даному пункті ми доведемо теорему про залежність неперервних функцій від зліченної кількості координат, яка у загальнішій редакції була одержана в [29, теорема 3].

Розпочнемо з простого спостереження.

Твердження 4.2.3. *Нехай $X = \prod_{s \in S} X_s$ – топологічний добуток сім'ї непорожніх топологічних просторів X_s, $x \in X$ і $f : X \to \mathbb{R}$ – функція, неперервна в точці x. Тоді існує не більш, ніж зліченна множина $T \subseteq S$ така, що для довільної точки $y \in X$ з умови $x|_T = y|_T$ випливає рівність $f(x) = f(y)$.*

Доведення. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ знайдемо базисний окіл U_n точки x в просторі X такий, що

$$|f(u) - f(x)| \leq \tfrac{1}{n}$$

для кожного $u \in U_n$. Покладемо

$$T = \bigcup_{n=1}^{\infty} R(U_n).$$

Зрозуміло, що множина T не більш, ніж зліченна. Крім того, для довільної точки $y \in X$, яка задовольняє рівність $x|_T = y|_T$, маємо

$$x|_{R(U_n)} = y|_{R(U_n)}$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тому згідно з лемою 3.1.3, $y \in U_n$, а отже,

$$|f(y) - f(x)| \leq \tfrac{1}{n}$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. Значить, $f(y) = f(x)$. $\square$

Наступне твердження дає можливість використовувати калібр простору при дослідженні найменшої множини.

Твердження 4.2.4. *Нехай $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ – топологічний добуток сім'ї непорожніх топологічних просторів X_s, $t \in S$ і $f : X \to \mathbb{R}$ – неперервна функція. Тоді множина*

$$G = \{x \in X : (\exists y \in X)(x|_{S\setminus\{t\}} = y|_{S\setminus\{t\}} \ \text{ і } \ f(x) \neq f(y))\}$$

є відкритою в X.

Доведення. Нехай $x \in G$ – довільна точка і $y \in X$ – така, що

$$x|_{S\setminus\{t\}} = y|_{S\setminus\{t\}} \ \text{ і } \ f(x) \neq f(y)).$$

Використовуючи неперервність функції f в точках x і y, виберемо базисні відкриті околи $U = \prod\limits_{s\in S} U_s$ і $V = \prod\limits_{s\in S} V_s$ точок x і y відповідно, такі, що

$$f(u) \neq f(v)$$

для довільних $u \in U$ і $v \in V$. Покладемо

$$W_s = \begin{cases} U_s \cap V_s, & s \in S \setminus \{t\}; \\ U_t, & s = t \end{cases}$$

і розглянемо окіл $W = \prod\limits_{s\in S} W_s$ точки x в просторі X. Покажемо, що

$$W \subseteq G.$$

Нехай $u = (u(s))_{s\in S} \in W$ – довільна точка. Тоді для точки $v = (v(s))_{s\in S}$, де

$$v(s) = \begin{cases} u(s), & s \in S \setminus \{t\}; \\ y(t), & s = t, \end{cases}$$

маємо

$$u|_{S\setminus\{t\}} = v|_{S\setminus\{t\}}.$$

Крім того, $u \in U$ і $v \in V$. Тому

$$f(u) \neq f(v).$$

Отже, $u \in G$ і $W \subseteq G$. Таким чином, множина G є околом довільної своєї точки x. Значить, множина G відкрита. $\square$

Наступна теореми є основним результатом даного пункту.

Теорема 4.2.5. *Нехай топологічний добуток* $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ *сім'ї непорожніх топологічних просторів* X_s *має калібр* $\aleph_1$. *Тоді кожна неперервна функція* $f : X \to \mathbb{R}$ *залежить від зліченної кількості координат.*

Доведення. Припустимо, що це не так. Тоді існує неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$, яка не залежить від зліченної кількості координат. З твердженням 4.2.2 випливає, що множина

$$S_0 = \{s \in S : (\exists x, y \in X)(x|_{S\setminus\{s\}} = y|_{S\setminus\{s\}} \text{ і } f(x) \neq f(y))\}$$

є незліченною.

Для кожного $s \in S_0$ розглянемо непорожню множину

$$G_s = \{x \in X : (\exists y \in X)(x|_{S\setminus\{s\}} = y|_{S\setminus\{s\}} \text{ і } f(x) \neq f(y))\},$$

яка є відкритою в X згідно з твердженням 4.2.4. Оскільки топологічний простір X має калібр $\aleph_1$, то існує незліченна множина $T_0 \subseteq S_0$ і точка $x_0 \in X$ такі, що

$$x_0 \in G_s$$

для кожного $s \in T_0$.

Використовуючи твердження 4.2.3, виберемо не більш, ніж зліченну множину $T \subseteq S$ таку, що

$$f(x) = f(x_0)$$

для довільної точки $x \in X$ з $x|_T = x_0|_T$. Зауважимо, що множина $T_0 \setminus T$ непорожня, як різниця незліченної множини T_0 і не більш, ніж зліченної множини T. Візьмемо довільний індекс $s \in T_0 \setminus T$. Оскільки $x_0 \in G_s$, то існує точка $y_0 \in X$ така, що

$$x_0|_{S\setminus\{s\}} = y_0|_{S\setminus\{s\}} \text{ і } f(x_0) \neq f(y_0).$$

Але, з іншого боку, $s \notin T$ і тому

$$x_0|_T = y_0|_T,$$

а отже,

$$f(x_0) = f(y_0),$$

що дає нам суперечність. □

4.2.3. Залежність нарізно неперервних функцій. Тепер перейдемо до результатів про залежність від зліченної кількості координат нарізно неперервних функцій, які були одержані в [67, теорема 3].

Нехай $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ і Y – довільна множина. Функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ *зосереджена на множині T відносно першої змінної*, якщо для кожного $y \in Y$ горизонтальний y-розріз $f_y : X \to \mathbb{R}$, $f_y(x) = f(x, y)$, зосереджений на множині T. А коли при цьому множина T не більш, ніж зліченна, то функція f *залежить від зліченної кількості координат відносно першої змінної.*

Множина $S_0 \subseteq S$ називається *найменшою множиною, на якій зосереджене функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ відносно першої змінної*, якщо f зосереджена на S_0 відносно першої змінної і для довільної множини $S_1 \subseteq S$, на якій зосереджена функція f відносно першої змінної, виконується включення $S_0 \subseteq S_1$.

Аналогічно вводяться поняття, пов'язані з залежністю функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ відносно другої змінної у випадку, коли множина Y є добутком.

Спочатку дамо опис найменшої множини для функцій неперервних відносно першої змінної.

Твердження 4.2.6. *Нехай $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ – топологічний добуток сім'ї непорожніх топологічних просторів X_s, Y – деяка множина і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – неперервна відносно першої змінної функція. Тоді множина*

$$S_0 = \{s \in S : (\exists y \in Y)(\exists u, v \in X)(u|_{S\setminus\{s\}} = v|_{S\setminus\{s\}} \text{ і } f(u, y) \neq f(v, y))\}$$

є найменшою множиною, на якій зосереджена функція f відносно першої змінної.

Доведення. Для кожного $y \in Y$ покладемо

$$T_y = \{s \in S : (\exists u, v \in X)(u|_{S\setminus\{s\}} = v|_{S\setminus\{s\}} \text{ і } f(u, y) \neq f(v, y))\}.$$

Згідно з твердженням 4.2.2 множина T_y є найменшою множиною, на якій зосереджений неперервний горизонтальний y-розріз $f_y : X \to \mathbb{R}$. Тому множина

$$S_0 = \bigcup_{y\in Y} T_y$$

є найменшою множиною, на якій зосереджена функція f відносно першої змінної. $\square$

Наступна теорема дає залежність від зліченної кількості координат відносно однієї змінної для нарізно неперервних функцій.

Теорема 4.2.7. *Нехай топологічний добуток* $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ *сім'ї непорожніх топологічних просторів* X_s *має калібр* $\aleph_1$ *і топологічний простір* Y *має калібр* $\aleph_1$. *Тоді кожна нарізно неперервна функція* $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ *залежить від зліченної кількості координат відносно першої змінної.*

Доведення. Припустимо, що це не так. Тоді існує нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, яка не залежить від зліченної кількості координат відносно першої змінної. З твердженням 4.2.6 випливає, що множина

$$S_0 = \{s \in S : (\exists y \in Y)(\exists u, v \in X)(u|_{S\setminus\{s\}} = v|_{S\setminus\{s\}} \text{ і } f(u, y) \neq f(v, y))\}$$

є незліченною.

Для кожного $s \in S_0$ розглянемо непорожню множину

$$G_s = \{y \in Y : (\exists u, v \in X)(u|_{S\setminus\{s\}} = v|_{S\setminus\{s\}} \text{ і } f(u, y) \neq f(v, y))\}.$$

З неперервності f відносно другої змінної випливає, що кожна множин G_s є відкритою в Y. Оскільки топологічний простір Y має калібр $\aleph_1$, то існує незліченна множина $T_0 \subseteq S_0$ і точка $y_0 \in Y$ такі, що

$$y_0 \in G_s$$

для кожного $s \in T_0$.

Розглянемо неперервну функцію $g : X \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x, y_0)$. З одного боку, маємо

$$T_0 \subseteq \{s \in S : (\exists u, v \in X)(u|_{S\setminus\{s\}} = v|_{S\setminus\{s\}} \text{ і } g(u) \neq g(v))\}.$$

Тому згідно з твердженням 4.2.2 найменша множина, на якій зосереджена функція g, є незліченною. Отже, g не залежить від зліченної кількості координат. Але, з іншого боку, з теореми 4.2.5 випливає, що g залежить від зліченної кількості координат, що дає нам суперечність. □

Тепер легко одержуємо основний результат даного підрозділу.

Теорема 4.2.8. *Нехай топологічні добутки* $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ *і* $Y = \prod\limits_{t\in T} Y_t$ *сімей непорожніх топологічних просторів* X_s *і* Y_t *відповідно, мають калібр* $\aleph_1$. *Тоді кожна нарізно неперервна функція* $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ *залежить від зліченної кількості координат, тобто існують не більш, ніж зліченні множини* $S_0 \subseteq S$ *і* $T_0 \subseteq T$ *такі, що*

$$f(x, y) = f(u, v)$$

для довільних $x, u \in X$ *і* $y, v \in Y$ *з* $x|_{S_0} = u|_{S_0}$ *і* $y|_{T_0} = v|_{T_0}$.

Доведення. Згідно з теоремою 4.2.7 функція f залежить від зліченної кількості координат як відносно першої змінної, так і відносно другої змінної. Тому існують не більш, ніж зліченні множини $S_0 \subseteq S$ і $T_0 \subseteq T$ такі, що

$$f(x, y) = f(u, y)$$

для довільних $x, u \in X$ з $x|_{S_0} = u|_{S_0}$ і довільного $y \in Y$, і

$$f(x, y) = f(x, v)$$

для довільного $x \in X$ і $y, v \in Y$ з $y|_{T_0} = v|_{T_0}$. Тоді

$$f(x, y) = f(u, y) = f(u, v)$$

для довільних $x, u \in X$ і $y, v \in Y$ з $x|_{S_0} = u|_{S_0}$ і $y|_{T_0} = v|_{T_0}$. □

4.3

Характеризація множини точок розриву

У даному підрозділі ми доведемо основний результат четвертого розділу, який описує множину точок розриву нарізно неперервних функцій на добутку двох просторів, що є добутками сімей метризовних сепарабельних просторів. При цьому ми будемо дотримуватись схеми міркувань роботи [58], де одержано відповідний результат для функцій багатьох змінних.

4.3.1. Відкриті відображення і відображення звуження. У даному пункті ми викладемо допоміжні результати, які разом із залежністю від зліченної кількості координат дають можливість звести розв'язання задачі Діні до метризовного випадку.

Відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами X і Y називається *відкритим*, якщо для довільної відкритої в просторі X множини G множина $f(G)$ відкрита в просторі Y. Зрозуміло, що відображення f є відкритим тоді і тільки тоді, коли для довільної точки $x \in X$ і довільного околу U точки x в просторі X множина $f(U)$ є околом точки $y = f(x)$ в просторі Y.

Твердження 4.3.1. *Нехай $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ – добуток сім'ї непорожніх топологічних просторів X_s, $T \subseteq S$ і $Y = \prod\limits_{s\in T} X_s$. Тоді відображення $\varphi : X \to Y$, $\varphi(x) = x|_T$, є відкритим і неперервним.*

Доведення. Для доведення відкритості відображення φ достатньо показати, що образ $\varphi(G)$ довільної базисної відкритої в просторі X множини G є відкритим в просторі Y. Справді, нехай

$$G = \prod_{s\in S} G_s$$

– відкрита базисна множина в просторі X, тобто $(G_s : s \in S)$ – сім'я відкритих множин G_s в X_s така, що множина $\{s \in S : G_s \neq X_s\}$ скінченна. Тоді

$$\varphi(G) = \prod_{s\in T} G_s$$

і множина $\varphi(G)$ є відкритою базисною множиною в просторі Y. Отже, φ є відкритим.

Аналогічно доводимо неперервність відображення φ. Тепер достатньо показати, що прообраз довільної базисної відкритої множини в просторі Y є відкритим в просторі X. Нехай

$$V = \prod_{s \in T} U_s$$

– відкрита базисна множина в просторі Y. Покладемо

$$U_s = X_s$$

для кожного $s \in S \setminus T$. Тоді множина

$$U = \varphi^{-1}(V) = \prod_{s \in S} U_s$$

є відкритою базисною множиною в просторі X. $\square$

Твердження 4.3.2. *Нехай X і Y – топологічні простори, $\varphi : X \to Y$ – відкрите неперервне відображення, $g : Y \to \mathbb{R}$ – довільна функція і $f = g \circ \varphi$. Тоді*

$$D(f) = \varphi^{-1}(D(g)).$$

Доведення. Позначимо $A = D(f)$ і $B = \varphi^{-1}(D(g))$. Зрозуміло, що функція f неперервна в кожній точці $x \in X \setminus B$, як композиція неперервних у відповідних точках відображень. Отже, $X \setminus B \subseteq X \setminus A$, тобто $A \subseteq B$.

Тепер нехай $x \in B$. Тоді $y = \varphi(x) \in D(g)$ і $\omega_g(y) > 0$. Візьмемо довільний окіл U точки x в просторі X. Оскільки відображення φ відкрите, то множина $V = \varphi(U)$ є околом точки y в просторі Y. Тому

$$\omega_f(U) = \omega_g(V) \geq \omega_g(y).$$

Значить,

$$\omega_f(x) \geq \omega_g(y) > 0$$

і $x \in A$. Таким чином, $B \subseteq A$. $\square$

З тверджень 4.3.1 і 4.3.2 негайно випливає наступний факт.

Наслідок 4.3.3. *Нехай $X = \prod_{s \in S} X_s$ – добуток сім'ї непорожніх топологічних просторів X_s, $T \subseteq S$, $Y = \prod_{s \in T} X_s$, $\varphi : X \to Y$ – відображення звуження, означене формулою $\varphi(x) = x|_T$, $g : Y \to \mathbb{R}$ – довільна функція і $f = g \circ \varphi$. Тоді*

$$D(f) = \varphi^{-1}(D(g)).$$

При доведенні основного результату ми будемо використовувати наступне твердження.

Твердження 4.3.4. *Нехай* $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ *– добуток сім'ї непорожніх топологічних просторів* X_s, $T \subseteq S$, $Y = \prod\limits_{s\in T} X_s$, $\varphi : X \to Y$ *– відображення звуження, означене формулою* $\varphi(x) = x|_T$, *і* $f : X \to \mathbb{R}$. *Тоді наступні умови рівносильні:*

1) *функція* f *зосереджена на множині* T*;*

2) *існує функція* $g : Y \to \mathbb{R}$ *така, що* $f = g \circ \varphi$, *причому* f *неперервна тоді і тільки тоді, коли* g *неперервна.*

Доведення. Імплікація 2) $\Rightarrow$ 1) є очевидною.

1) $\Rightarrow$ 2). Нехай функція f зосереджена на множині T. Для кожної точки $y \in Y$ виберемо деяку точку $x_y \in X$ таку, що $\varphi(x_y) = y$, і покладемо

$$g(y) = f(x_y).$$

Покажемо, що $f = g \circ \varphi$. Нехай $x \in X$ і $y = \varphi(x)$. Тоді

$$x|_T = x_y|_T = y$$

і $f(x) = f(x_y)$, адже f зосереджена на множині T. Тепер маємо

$$f(x) = f(x_y) = g(y) = g(\varphi(x)).$$

Крім того, з наслідку 4.3.3 випливає, що $D(f) = \varphi^{-1}(D(g))$. Тому функція f неперервна, тобто $D(f) = \emptyset$, тоді і тільки тоді, коли $D(g) = \emptyset$, тобто функція g неперервна.

□

4.3.2. Основний результат. Тепер ми доведемо основний результат цього розділу.

Теорема 4.3.5. *Нехай* $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ *і* $Y = \prod\limits_{t\in T} Y_t$ *– добутки сімей непорожніх сепарабельних метризовних просторів* X_s *і* Y_t *відповідно, і* $E \subseteq X \times Y$. *тоді наступні умови рівносильні:*

1) *існує нарізно неперервна функція* $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, *для якої* $D(f) = E$*;*

2) *існують не більш, ніж зліченні множини* $S_0 \subseteq S$ *і* $T_0 \subseteq T$ *і проективно першої категорії* F_σ*-множина* E_0 *в добутку* $X_0 \times Y_0$ *просторів* $X_0 = \prod\limits_{s\in S_0} X_s$ *і* $Y_0 = \prod\limits_{t\in T_0} Y_t$ *такі, що*

$$E = \varphi^{-1}(E_0),$$

де $\varphi : X \times Y \to X_0 \times Y_0$ *– відображення звуження, означене формулою* $\varphi(x, y) = (x|_{S_0}, y|_{T_0})$.

Доведення. 1) $\Rightarrow$ 2). Нехай $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція, для якої $D(f) = E$. Без обмеження загальності вважатимемо, що $S \cap T = \emptyset$. Зауважимо, що згідно з теоремою 4.1.7 простори X і Y мають калібр $\aleph_1$. Тому з теореми 4.2.8 випливає, що існують не більш, ніж зліченні множини $S_0 \subseteq S$ і $T_0 \subseteq T$ такі, що

$$f(x, y) = f(u, v)$$

для довільних $x, u \in X$ і $y, v \in Y$ з $x|_{S_0} = u|_{S_0}$ і $y|_{T_0} = v|_{T_0}$. Іншими словами, функція f, означена на добутку

$$X \times Y = \prod_{s \in S} X_s \times \prod_{t \in T} Y_t,$$

зосереджена на множині $S_0 \cup T_0$. Покладемо

$$X_0 = \prod_{s \in S_0} X_s, \qquad Y_0 = \prod_{t \in T_0} Y_t$$

і розглянемо відображення звуження $\varphi : X \times Y \to X_0 \times Y_0$, означене формулою

$$\varphi(x, y) = (x|_{S_0}, y|_{T_0}).$$

Згідно з твердженням 4.3.4 існує функція $f_0 : X_0 \times Y_0 \to \mathbb{R}$ така, що

$$f = f_0 \circ \varphi.$$

Нехай E_0 – множина точок розриву функції f_0. Тоді з наслідку 4.3.3 випливає, що

$$E = \varphi^{-1}(E_0).$$

Залишилось показати, що E_0 – проективно першої категорії F_σ-множина в добутку $X_0 \times Y_0$.

Спочатку покажемо, що функція f_0 нарізно неперервна на добутку $X_0 \times Y_0$. Зафіксуємо точку $u \in X_0$ і виберемо точку $x \in X$ таку, що $u = x|_{S_0}$. Крім того, нехай $\psi : Y \to Y_0$ – відображення звуження, яке означається формулою

$$\psi(y) = y|_{T_0}.$$

Згідно з вибором множин S_0 і T_0 маємо

$$f(x, y) = f_0(u, \psi(y))$$

для кожного $y \in Y$. Тобто для вертикальних x-розрізу $f^x : Y \to \mathbb{R}$ і u-розрізу $f_0^u : Y_0 \to \mathbb{R}$, означених формулами

$$f^x(y) = f(x, y) \qquad \text{і} \qquad f_0^u(v) = f_0(u, v),$$

виконується рівність

$$f^x = f_0^u \circ \psi.$$

Тому з неперервності функції f^x за твердженням 4.3.4 випливає неперервність функції f_0^u. Отже, f_0 неперервна відносно другої змінної. Неперервність f_0 відносно першої змінної перевіряється аналогічно. Таким чином, функція f_0 є нарізно неперервною.

Згідно з [13, 2.3.17] і [13, теорема 4.2.2] простори X_0 і Y_0 є сепарабельними і метризовними. Тепер з теореми 2.3.7 випливає, що E_0 – проективно першої категорії F_σ-множина в добутку $X_0 \times Y_0$.

1) $\Rightarrow$ 2). Нехай $S_0 \subseteq S$ і $T_0 \subseteq T$ – не більш, ніж зліченні множини, E_0 – проективно першої категорії F_σ-множина в добутку $X_0 \times Y_0$ просторів $X_0 = \prod\limits_{s \in S_0} X_s$ і $Y_0 = \prod\limits_{t \in T_0} Y_t$ такі, що

$$E = \varphi^{-1}(E_0),$$

де $\varphi(x, y) = (x|_{S_0}, y|_{T_0})$. Як і раніше, простори X_0 і Y_0 є сепарабельними метризовними просторами і згідно з теоремою 2.3.7 існує нарізно неперервна функція $f_0 : X_0 \times Y_0 \to \mathbb{R}$ така, що $D(f_0) = E_0$. Розглянемо функцію $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, означену формулою

$$f(x, y) = f_0(\varphi(x, y)).$$

Оскільки функція f_0 нарізно неперервна, а функція φ неперервна, то функція f також нарізно неперервна. Крім того, з наслідку 4.3.3 випливає, що

$$D(f) = \varphi^{-1}(D(f_0)) = \varphi^{-1}(E_0) = E.$$

$\square$

Зауваження 4.3.6. Зазначимо, що теореми 4.3.5 і 3.4.11 непорівнянні, тобто жодна з них не є безпосереднім наслідком іншої. Справді, з одного боку, теорема 4.3.5 незастосовна до випадку, коли простори X і Y метризовні і хоча б один з них не є сепарабельним. Отже, з допомогою цієї теореми ми, наприклад, не можемо отримати характеризацію множин точок розриву нарізно неперервних функцій на добутку $l_\infty \times \mathbb{R}$, в той час, коли теорема 3.4.11 дає нам таку можливість. З іншого боку, теорему 4.3.5 можна використовувати для неметризовних просторів X і Y, які є добутками сепарабельних метризовних просторів (наприклад, у випадку $X = Y = [0, 1]^{[0,1]}$).

4.4

Заключні зауваження до розділу 4

Лема Шаніна [72, с.24], ослаблений варіант якої сформульований у термінах незліченних сімей ми розглянули у цьому розділі, стала звичним технічним інструментом при дослідженні різних кардинальних властивостей топологічних добутків. Вона була перевідкрита С.Мазуром [26, лема VII] і у загальнішій формі незалежно доведена П. Ердьошем і Р. Радо [14, теорема I (ii)] та Е.Майклом [28, теорема 3.1].

Теорема про калібр добутку топологічних просторів була також доведена у роботах [24, с.139] і [36, теорема 2].

Залежність неперервних відображень на добутках від зліченної кількості координат, крім згаданої роботи [29], досліджувалась І. Мібу [27], С. Мазуром [26], К. Корсоном та І. Ізбеллом [11], К. Россом та А. Стоуном [36], А. Ґлісоном (дивись [21, с. 128]), Р. Енгелькінгом [12], а найбільш загальний результат у цьому напрямку одержали Н. Нобл та М. Ульмер в [34].

Дослідження залежності нарізно неперервних функцій від зліченної кількості координат фактично бере свій початок з роботи [63] і було продовжене в працях [54], [64], [56], [67], [58], а найзагальніші результати було одержано в [68]. Крім того, в [56] одержано повний опис множини точок розриву нарізно неперервних функцій на добутку двох просторів, які є добутками сімей метризовних компактів.

Розділ 5

НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ З МАЛИМИ РОЗРИВАМИ

У даному розділі ми викладемо характеристичні теореми, які стосуються нарізно неперервних функцій з не більш, ніж одноточковими розривами. У першому підрозділі ми доведемо результат М. Генріксена і Р. Вудса [20, наслідок 6.15], який встановлює сукупну неперервність довільної нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ на добутку певних класів просторів X і Y, що зокрема дає повний опис множин точок розриву таких функцій.

Результати другого і третього підрозділів стосуються дослідження такого питання: *якими є необхідні і достатні умови на точку z в добутку двох топологічних просторів X і Y для існування нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ з $D(f) = \{z\}$?* Спочатку ми подамо розв'язання цієї задачі з [69] у випадку, коли простори X і Y є компактними гаусдорфовими просторами. Потім викладемо результат роботи [4] про характеризацію того, що довільна проективно ніде не щільна одноточкова G_δ-множина у добутку двох цілком регулярних просторів є множиною точок розриву деякої нарізно неперервної функції.

5.1

Сукупно неперервні нарізно неперервні функції

Результати про автоматичну сукупну неперервність кожної нарізно неперервної функції на добутку деяких двох просторів дають повне, до деякої міри тривіальне і незвичне, розв'язання задачі Діні на добутку цих просторів. Слід зауважити, що такого сорту теореми очевидно мають місце у наступних двох випадках: а) *один із множників є дискретним простором*; б) *кожна неперервна функція на одному із множників є сталою.* Хоча доведення цих двох тверджень є цілком аналогічними, все ж перший випадок можна сформулювати у вигляді довершеного факту, типу *кожна нарізно неперервна функція на добутку дискретного і топологічного просторів є сукупно неперервною*, в той час, як другий випадок ніби залишає широкі можливості для пошуку нових прикладів не цілком регулярних просторів, які задовольняють умову б). Тим не менше, ми не будемо тут розглядати приклади таких конкретних просторів, а обговоримо один підхід Генріксена і Вудса з [20] до одержання неочевидних теорем про сукупну неперервність нарізно неперервних функцій.

5.1.1. Неперервні функції на P-просторах. Важливу роль у побудові Генріксена і Вудса відіграють P-простори, неперервні функції на яких ми розглянемо у цьому пункті.

Точка x в топологічному просторі X називається *P-точкою*, якщо перетин довільної послідовності околів цієї точки також є її околом.

Топологічний простір X називається *P-простором*, якщо кожна точка в цьому просторі є P-точкою. Зрозуміло, що топологічний простір X є P-простором тоді і тільки тоді, коли кожна G_δ-множина в X є відкритою.

Легко бачити, що кожна ізольована точка в довільному топологічному просторі точка є P-точкою, а довільний дискретний простір є P-простором. Наступний приклад дає існування нетривіальних P-просторів.

Нехай S – довільна непорожня множина і X – множина усіх функцій

$$x : S \to \{0, 1\}.$$

Розглянемо на множині X топологію рівномірної збіжності на не більш, ніж зліченних підмножинах множини S, тобто базисним околом довільної точки $x \in X$ в просторі X є множина

$$U(x, T) = \{y \in X : y|_T = x|_T\},$$

де $T \subseteq S$ – довільна не більш, ніж зліченна множина. Зрозуміло, що перетин довільної послідовності базисних околів точки x також є базисним околом точки x, адже об'єднання послідовності не більш, ніж зліченних множин також є не більш, ніж зліченною множиною. Тому довільна точка x є P-точкою в просторі X, а сам простір X є P-простором.

Наступна властивість P-точок є визначальною в даному підрозділі.

Твердження 5.1.1. *Нехай X – топологічний простір, $x_0 \in X$ – P-точка в просторі X і $f : X \to \mathbb{R}$ – неперервна в точці x_0 функція. Тоді функція f стала на деякому околі точки x_0.*

Доведення. Нехай $y_0 = f(x_0)$. Оскільки функція f неперервна в точці x_0, то для кожного $n \in \mathbb{N}$ множина

$$U_n = f^{-1}(y_0 - \tfrac{1}{n}, y_0 + \tfrac{1}{n}))$$

є околом P-точки x_0 в просторі X. Тому множина

$$f^{-1}(y_0) = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$$

також околом точки x_0, тобто функція f стала на деякому околі точки x_0. $\square$

Функція f на топологічному просторі X називається *локально сталою*, якщо для кожної точки $x \in X$ існує окіл U точки x в просторі X такий, що функція f є сталою на U.

Зрозуміло, що кожна локально стала функція є неперервною. З іншого боку, з твердження 5.1.2 негайно випливає наступний наслідок.

Наслідок 5.1.2. *Нехай X – P-простір. Тоді функція $f : X \to \mathbb{R}$ неперервна тоді і тільки тоді, коли f локально стала.*

5.1.2. Теорема Генріксена-Вудса.

У даному пункті ми викладемо основний результат даного підрозділу.

Розпочнемо з твердження, яке стосується сукупної неперервності в точці.

Твердження 5.1.3. *Нехай X, Y – топологічні простори, точка $x_0 \in X$ має сепарабельний окіл в просторі X і точка y_0 є P-точкою в просторі Y. Тоді довільна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ є сукупно неперервною в точці (x_0, y_0).*

Доведення. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і виберемо сепарбельний окіл U_0 точки x_0 в просторі X такий, що

$$|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

для кожного $x \in U_0$. Виберемо зліченну множину

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq U_0$$

таку, що $U_0 \subseteq \overline{A}$. Згідно з твердженням для кожного $n \in \mathbb{N}$ знайдемо окіл V_n точки y_0 в просторі Y такий, що вертикальний a_n-розріз f^{a_n} є сталим на V_n. Розглянемо окіл

$$V_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$$

P-точки y_0 в просторі Y. Тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$ вертикальний a_n-розріз f^{a_n} є сталим на V_0. Тепер з неперервності функції f відносно першої змінної випливає, що для кожного $x \in \overline{A} \supseteq U_0$ вертикальний x-розріз f^x також є сталим на V_0. Тому для довільних $x \in U_0$ і $y \in V_0$ маємо

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0| = |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Отже, функція f є сукупно неперервною в точці (x_0, y_0). $\square$

Топологічний простір X називається *локально сепарабельним*, якщо кожна точка $x \in X$ має сепарабельний окіл в просторі X.

Тепер безпосередньо з твердження 5.1.3 випливає наступна теорема про сукупну неперервність нарізно неперервної функції.

Теорема 5.1.4. *Нехай X – локально сепарабельний простір і Y – P-простір. Тоді довільна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ є сукупно неперервною.*

Наступне узагальнення теореми Генріксена-Вудса (яка відповідає випадку $\aleph = \aleph_0$) має повністю аналогічне доведення.

Теорема 5.1.5. *Нехай $\aleph$ – довільне кардинальне число і топологічні простори X і Y задовольняють умови:*

(*i*) *для кожної точки $x \in X$ існує множина A потужності $\leq \aleph$ така, що $x \in \mathrm{int}(\overline{A})$;*

(*ii*) *перетин $\bigcap\limits_{\xi < \aleph} G_\xi$ довільної сім'ї $(G_\xi : \xi < \aleph)$ відкритих в просторі Y множин G_ξ також є відкритою в просторі Y множиною.*

Тоді довільна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ є сукупно неперервною.

5.2 Функції на добутку двох компактів

У зв'язку з уже згаданими раніше питанням З. Пьотровського [35] про повний опис множин точок розриву нарізно неперервних функцій на добутку двох компактних просторів і результатом з [63] (дивись також [54, теорема 9]), який твердить, що на добутку двох тихоновських кубів незліченної ваги не існує нарізно неперервної функції з одноточковим розривом, природно виникає задача про встановлення необхідних і достатніх умов на точку в добутку двох компактних просторів для того, щоб ця точка була єдиною точкою розриву деякої нарізно неперервної функції. Розв'язання цієї задачі для добутку компактних гаусдорфових просторів, яке ми викладемо у даному підрозділі, було одержане в [69]. Слід зауважити, що основним технічним знаряддям тут виступають досконалі асоційовані відображення, а певним інспіратором вигляду характеристичних умов постала робота О. Маслюченка [60], де з допомогою властивості Прейса-Симона розв'язувалась обернена задача на добутку двох компактів Еберлейна.

5.2.1. Достатні умови. Розпочнемо з розгляду результатів, які дають достатні умови у досить загальному випадку і доводяться стандартним чином.

Казатимемо, що послідовність $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ непорожніх підмножин A_n топологічного простору X *збігається до точки* $x_0 \in X$ (позначатимемо $A_n \to x_0$), якщо для довільного околу U точки x_0 в X існує номер n_0 такий, що $A_n \subseteq U$ для всіх $n \geq n_0$.

Множина G в топологічному просторі X називається називається *функціонально відкритою*, якщо існує неперервна функція $f : X \to [0,1]$ така, що $G = f^{-1}((0,1])$. Множина F в топологічному просторі X називається називається *функціонально замкненою*, якщо існує неперервна функція $f : X \to [0,1]$ така, що $F = f^{-1}(0)$. Зрозуміло, що множина G функціонально відкрита тоді і тільки тоді, коли множина $F = X \setminus G$ функціонально замкнена.

Твердження 5.2.1. *Нехай X, Y – T_2-простори, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ і послідовності $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ і $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ непорожніх функціонально відкритих в X і Y відповідно множин $U_n \subseteq X$ і $V_n \subseteq Y$ такі, що $U_n \to x_0$ і $V_n \to y_0$, причому $x_0 \notin U_n$ і $y_0 \notin V_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тоді існує нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ така, що $D(f) = \{(x_0, y_0)\}$.*

Доведення. Нехай $\varphi_n : X \to [0,1]$ і $\psi_n : Y \to [0,1]$ – такі неперервні функції, що

$$U_n = \varphi_n^{-1}((0,1]), \qquad V_n = \psi_n^{-1}((0,1]) \qquad \text{і} \qquad \sup_{x\in X}\varphi_n(x) = \sup_{y\in Y}\psi_n(y) = 1$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. Покажемо, що функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, означена формулою

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)\cdot\psi_n(y),$$

є шуканою.

Доведемо спочатку, що функція f розривна в точці $z_0 = (x_0, y_0)$. Оскільки $x_0 \notin U_n$ і $y_0 \notin V_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то $f(z_0) = 0$. Нехай W – довільний окіл точки z_0. Оскільки $U_n \to x_0$ і $V_n \to y_0$, то

$$U_n \times V_n \to z_0.$$

Тому існує номер $m \in \mathbb{N}$ такий, що $U_m \times V_m \subseteq W$. Тоді

$$\omega_f(W) \geq \sup_{z\in W} f(z) - f(z_0) \geq \sup_{(x,y)\in U_m\times V_m} f(x,y) =$$

$$= \sup_{x\in U_m}\varphi_m(x)\cdot\sup_{y\in V_m}\psi_m(y) = 1.$$

Отже, функція f розривна в точці z_0.

Тепер нехай $z_1 = (x_1, y_1)$ – довільна точка з простору $Z = X \times Y$, відмінна від z_0. Зауважимо, що Z є T_2-простором, як добуток таких просторів. Тому існують околи W_0 і W_1 точок z_0 і z_1 відповідно, такі, що $W_0 \cap W_1 = \emptyset$. Як і раніше, використовуючи збіжність $U_n \times V_n \to z_0$, виберемо номер $k \in \mathbb{N}$ такий, що $U_n \times V_n \subseteq W_0$ для кожного $n \geq k$. Тоді звуження функції f на множину W_1 збігається зі звуженням неперервної функції

$$\sum_{n<k}\varphi_n(x)\cdot\psi_n(y).$$

Отже, f неперервна в точці z_1 і $D(f) = \{z_0\}$.

Залишилось довести, що f нарізно неперервна. Зауважимо, що f неперервна відносно кожної змінної у кожній точці z, відмінній від z_0, адже вона є в ній сукупно неперервною. Крім того, оскільки $x_0 \notin U_n$ і $y_0 \notin V_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то

$$f(x_0, y) = f(x, y_0) = 0$$

для довільних $x \in X$ і $y \in Y$. Тому f неперервна відносно кожної змінної в точці z_0. $\square$

5.2.2. Досконалі відображення. Перед доведенням необхідності ми одержимо допоміжний результат, який, зокрема, описує поведінку розривів при переході до асоційованих відображень.

Розпочнемо з наступного твердження.

Твердження 5.2.2. *Нехай X, Y – компактні простори, $x_0 \in X$, $K \subseteq Y$ – компактна множина і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ такі, що функція f неперервна в кожній точці множини $\{x_0\} \times K$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існує окіл U точки x_0 в просторі X і відкрита множина $G \supseteq K$ в просторі Y такі, що для довільних $x \in U$ і $y \in G$ виконується нерівність*

$$|f(x, y) - f(x_0, y)| < \varepsilon$$

і для кожного $y \in G$ існує $y' \in K$ таке, що для кожного $x \in U$ виконується нерівність

$$|f(x, y) - f(x_0, y')| < \varepsilon.$$

Доведення. Для кожного $y \in K$ виберемо відкритий окіл U_y точки x_0 і відкритий окіл G_y точки y такі, що

$$|f(x, v) - f_0(x_0, y)| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

для довільних $x \in U_y$ і $v \in G_y$. З відкритого покриття $(G_y : y \in K)$ компактної множини K виберемо скінченне підпокриття

$$(G_{y_k} : 1 \leq k \leq n)$$

і покладемо

$$U = \bigcap_{k=1}^{n} U_{y_k} \qquad \text{і} \qquad G = \bigcup_{k=1}^{n} G_{y_k}.$$

Нехай $y \in G$. Тоді існує $y' \in \{y_1, \ldots, y_n\}$ таке, що $y \in G_{y'}$. Тоді для довільного $x \in U$ маємо $x \in U_{y'}$ і тому

$$|f(x, y) - f(x_0, y')| < \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Крім того,

$$|f(x_0, y) - f(x_0, y')| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

і

$$|f(x, y) - f(x_0, y)| \leq |f(x, y) - f(x_0, y')| + |f(x_0, y') - f(x_0, y)| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Неперервне відображення $f : X \to Y$ топологічного простору X в топологічний простір Y називається *досконалим*, якщо f є замкненим, тобто для довільної замкненої в X множини A її образ

$$B = f(A) = \{f(a) : a \in A\}$$

є замкненим в Y, і множина

$$f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$$

є компактною в X для кожного $y \in Y$. Зауважимо, що оскільки замкнена підмножина компактного простору є компактною, то кожне неперервне відображення компактного простору в T_1-простір є досконалим.

Твердження 5.2.3. *Нехай X, Y, Y_0 – топологічні простори, $\varphi : Y \to Y_0$ – досконале сюр'єктивне відображення, $f_0 : X \times Y_0 \to \mathbb{R}$ і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – такі відображення, що*

$$f(x, y) = f_0(x, \varphi(y))$$

для довільних $x \in X$ і $y \in Y$. Тоді

$$D(f_0) = \{(x, \varphi(y)) : (x, y) \in D(f)\}.$$

Доведення. Покладемо

$$E = \{(x, \varphi(y)) : (x, y) \in D(f)\}.$$

Нехай $(x, v) \notin D(f_0)$ і $v = \varphi(y)$, де $y \in Y$. З теореми про неперервність складеної функції випливає, що $(x, y) \notin D(f)$. Отже, $(x, v) \notin E$ і

$$E \subseteq D(f_0).$$

Тепер нехай $(x_0, v_0) \notin E$. Доведемо, що функція f_0 неперервна в точці (x_0, v_0). Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і покладемо

$$K = \varphi^{-1}(v_0).$$

Оскільки відображення φ досконале, то множина K є компактною в Y. Зауважимо, що для кожного $y \in K$ маємо $f(x_0, y) = f_0(x_0, v_0)$ і функція f неперервна в кожній точці (x_0, y), адже $(x, v_0) = (x, \varphi(y)) \notin E$. Тому згідно з твердженням 5.2.2 існують відкритий окіл U точки x_0 в X і відкрита множина G в Y такі, що $K \subseteq G$ і

$$|f(x, y) - f_0(x_0, v_0)| < \varepsilon$$

для довільних $x \in U$ і $y \in G$.

Множина $Y \setminus G$ замкнена в Y, а φ досконале відображення, тому множина $F = \varphi(Y \setminus G)$ замкнена в Y_0, причому $v_0 \notin F$. Покладемо $V_0 = Y_0 \setminus F$. Зрозуміло, що V_0 окіл точки v_0 і $\varphi^{-1}(V_0) \subseteq G$. Нехай $x \in U$ і $v' \in V_0$. Виберемо $y' \in G$ так, що $\varphi(y') = v'$. Тоді

$$|f_0(x, v') - f_0(x_0, v_0)| = |f(x, y') - f_0(x_0, v_0)| < \varepsilon.$$

Отже, функція f_0 неперервна в точці (x_0, v_0), тобто $(x_0, v_0) \notin D(f_0)$. Значить, $D(f_0) \subseteq E$. □

5.2.3. Характеризація одноточкових розривів.

Тепер перейдемо до викладу основного результату.

Наступне твердження ми будемо використовувати на завершальному етапі міркувань.

Твердження 5.2.4. *Нехай X – компактний гаусдорфовий простір, Y – топологічний простір, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ з $D(f) = \{(x_0, y_0)\}$, $\delta > 0$ і U_0 – замкнений окіл точки x_0 в X такі, що*

$$|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \delta$$

для кожного $x \in U_0$, послідовності $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ і $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ відкритих непорожніх множин $U_n \subseteq U_0$ і V_n в X і Y відповідно такі, що

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| > \delta$$

для всіх $(x, y) \in U_n \times V_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Тоді якщо $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ збігається до y_0, то $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ збігається до x_0.

Доведення. Нехай U – довільний замкнений окіл точки x_0 в X. Припустимо, що множина

$$N = \{n \in \mathbb{N} : U_n \setminus U \neq \emptyset\}$$

нескінченна. Без обмежень загальності ми можемо вважати, що $N = \mathbb{N}$. Покладемо $\tilde{U}_n = U_n \setminus U$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Оскільки X компактний, то сім'я $(\tilde{U}_n : n \in \mathbb{N})$ відкритих непорожніх множин $\tilde{U}_n$ не є локально скінченною в X. Тому існує точка $\tilde{x} \in U_0$ така, що довільний окіл $\tilde{U}$ точки $\tilde{x}$ в X перетинається з нескінченною кількістю елементів сім'ї $(\tilde{U}_n : n \in \mathbb{N})$. Разом з тим, оскільки $V_n \to y_0$, то довільний окіл W точки $(\tilde{x}, y_0)$ в $X \times Y$ перетинається з нескінченною кількістю елементів сім'ї $(W_n : n \in \mathbb{N})$, де $W_n = \tilde{U}_n \times V_n$.

Зауважимо, що $\tilde{x} \neq x_0$, адже $\tilde{U}_n \cap U = \emptyset$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тому функція f неперервна в точці $(\tilde{x}, y_0)$. Врахувавши, що

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| > \delta$$

для довільної точки $(x, y) \in W_n$ при $n \in \mathbb{N}$, одержимо, що

$$|f(\tilde{x}, y_0) - f(x_0, y_0)| \geq \delta,$$

а це суперечить тому, що $\tilde{x} \in U_0$. Отже, N скінченна і $U_n \to x_0$. $\square$

Наступна теорема дає характеризацію одноточкових розривів нарізно неперервних функцій на добутку компактів.

Теорема 5.2.5. *Нехай X, Y – компактні гаусдорфові простори, $x_0 \in X$ і $y_0 \in Y$ – неізольовані точки у відповідних просторах. Тоді наступні твердження рівносильні:*

(i) існують послідовності $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ і $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ непорожніх функціонально відкритих множин $U_n \subseteq X$ і $V_n \subseteq Y$, які збігаються до x_0 і y_0 відповідно, причому $x_0 \notin U_n$ і $y_0 \notin V_n$ при $n \in \mathbb{N}$;

(ii) існує нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ з $D(f) = \{(x_0, y_0)\}$.

Доведення. Імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$ доведена у твердженні 5.2.1.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Нехай $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція з $D(f) = \{(x_0, y_0)\}$. Розглянемо неперервне асоційоване відображення $\varphi : X \to C_p(Y)$, означене формулою

$$\varphi(x)(y) = f(x, y).$$

Покладемо $\tilde{X} = \varphi(X)$ і розглянемо функцію $g : \tilde{X} \times Y \to \mathbb{R}$, означену формулою

$$g(\tilde{x}, y) = \tilde{x}(y) = f(x, y),$$

де $\tilde{x} = \varphi(x)$. Зрозуміло, що g нарізно неперервна функція. Оскільки X компактний простір, то φ досконале відображення і

$$D(g) = \{(\tilde{x}_0, y_0)\}$$

згідно з твердженням 5.2.3, де $\tilde{x}_0 = \varphi(x_0)$.

Нехай $\tilde{x} \in A = \tilde{X} \setminus \{\tilde{x}_0\}$. Оскільки Y компактний простір і функція g неперервна в кожній точці множини $\{\tilde{x}\} \times Y$, то згідно з твердженням 5.2.2 для довільного $\varepsilon > 0$ існує окіл $\tilde{U}$ точки $\tilde{x}$ в $\tilde{X}$ такий, що

$$|\tilde{x}(y) - \tilde{u}(y)| < \varepsilon$$

для довільних $y \in Y$ і $\tilde{u} \in \tilde{U}$. Отже, на множині A топологія поточкової збіжності і нормована топологія, породжена максимум-нормою з банахового простору $C(X)$, збігаються. Тому, зокрема, множина A є метризовним підпростором простору $\tilde{X}$.

Тепер розглянемо асоційоване відображення $\psi : Y \to C_p(\tilde{X})$, означене формулою

$$\psi(y)(\tilde{x}) = g(\tilde{x}, y).$$

Покладемо $\tilde{Y} = \psi(Y)$ і розглянемо відображення $h : \tilde{X} \times \tilde{Y} \to \mathbb{R}$, означене формулою

$$h(\tilde{x}, \tilde{y}) = g(\tilde{x}, y),$$

де $\tilde{y} = \psi(y)$. Як і раніше, згідно з твердженням 5.2.3

$$D(h) = \{(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)\},$$

де $\tilde{y}_0 = \psi(y_0)$, а з твердження 5.2.2 випливає, що множина $B = \tilde{Y} \setminus \{\tilde{y}_0\}$ є метризовним підпростором простору $\tilde{Y}$.

Візьмемо $\delta > 0$ таке, що

$$\omega_h(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) > 4\delta,$$

і виберемо замкнені околи $\tilde{U}_0$ і $\tilde{V}_0$ точок $\tilde{x}_0$ і $\tilde{y}_0$ в $\tilde{X}$ і $\tilde{Y}$ відповідно так, що

$$|h(\tilde{x}, \tilde{y}_0) - h(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)| < \delta \qquad \text{і} \qquad |h(\tilde{x}_0, \tilde{y}) - h(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)| < \delta$$

для довільних $\tilde{x} \in \tilde{U}_0$ і $\tilde{y} \in \tilde{V}_0$. Покладемо

$$Z = \tilde{X} \times \tilde{Y}, \qquad z_0 = (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \qquad \text{і} \qquad W_0 = \operatorname{int}(\tilde{U}_0) \times \operatorname{int}(\tilde{V}_0).$$

Для кожної точки $z \in A \times B$ виберемо відкритий окіл G_z точки z в Z такий, що

$$z_0 \notin \overline{G}_z \qquad \text{і} \qquad \omega_h(G_z) < \delta.$$

Оскільки $A \times B$ метризовний підпростір простору Z, то згідно з теоремою 3.2.4 у відкрите покриття $(G_z : z \in A \times B)$ простору $A \times B$ можна вписати деяке локально скінченне відкрите покриття $(W_i : i \in I)$. Покладемо

$$J = \{i \in I : W_i \cap W_0 \neq \emptyset \ \text{ і } \ |h(z) - h(z_0)| > 2\delta \ \text{ для деякого } \ z \in W_i\}.$$

Оскільки $\omega_h(z_0) > 4\delta$, то для будь-якого околу $W \subseteq W_0$ точки z_0 існує точка $z \in W$ така, що

$$|h(z) - h(z_0)| > 2\delta,$$

причому згідно з вибором $\tilde{U}_0$ і $\tilde{V}_0$ точка z обов'язково входить в множину $A \times B$. Тому

$$z_0 \in \overline{\bigcup_{i \in J} W_i}.$$

Врахувавши, що $z_0 \notin \overline{W}_i$ для кожного $i \in I$, одержимо, що множина J нескінченна. Крім того, зауважимо, що оскільки $\omega_h(W_i) < \delta$ при $i \in I$, то для довільних $j \in J$ і $z \in W_j$ виконується нерівність

$$|h(z) - h(z_0)| > \delta.$$

Оскільки
$$|h(z) - h(z_0)| < \delta$$
для кожного
$$z \in ((\{\tilde{x}_0\} \times \tilde{V}_0) \cup (\tilde{U}_0 \times \{\tilde{y}_0\})) \setminus \{z_0\} = C$$
і функція h неперервна в кожній точці множини C, то
$$\overline{\bigcup_{i \in J} W_i} \bigcap C = \emptyset.$$

Виберемо довільну зліченну множину
$$\{j_1, j_2, \dots\} \subseteq J$$
і для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо
$$\tilde{W}_n = W_{j_n} \cap W_0.$$
З означення множини J випливає, що всі множини $\tilde{W}_n$ непорожні. Зауважимо, що сім'я $(\tilde{W}_n : n \in \mathbb{N})$ локально скінченна в кожній точці множини
$$(A \times B) \cup (Z \setminus (\tilde{U}_0 \times \tilde{V}_0)) \cup C = Z \setminus \{z_0\}.$$
Нехай W довільний замкнений окіл точки z_0 в Z. Тоді сім'я
$$(\tilde{W}_n \setminus W : n \in \mathbb{N})$$
є локально скінченною сім'єю відкритих множин в компакті Z. Тому
$$\tilde{W}_n \setminus W \neq \emptyset$$
хіба-що для скінченної кількості номерів n, тобто існує $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $\tilde{W}_n \subseteq W$ для всіх $n \geq n_0$. Отже,
$$\tilde{W}_n \to z_0.$$

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ виберемо відкриті непорожні множини $\tilde{U}_n$ і $\tilde{V}_n$ в $\tilde{X}$ і $\tilde{Y}$ відповідно такі, що
$$\tilde{U}_n \times \tilde{V}_n \subseteq \tilde{W}_n.$$
Зрозуміло, що
$$\tilde{U}_n \to \tilde{x}_0 \qquad \text{і} \qquad \tilde{V}_n \to \tilde{y}_0.$$
Для $n = 0, 1, 2, \dots$ покладемо
$$U_n = \varphi^{-1}(\tilde{U}_n) \qquad \text{і} \qquad V_n = \psi^{-1}(\tilde{V}_n).$$
Множини U_0 і V_0 замкнені, а U_n і V_n при $n \in \mathbb{N}$ функціонально відкриті в X і Y відповідно, як прообрази таких же множин при неперервних відображеннях. Тепер застосувавши твердження 5.2.4 до функції g одержимо, що з збіжності $\tilde{U}_n \to \tilde{x}_0$ випливає збіжність $V_n \to y_0$. Потім аналогічно міркуючи для функції f отримаємо, що $U_n \to x_0$. $\square$

5.3

Одноточкові розриви типу G_δ

У зв'язку з результатами В. Маслюченка (дивись [59, теореми 2.3.3 і 2.3.8] або [25, теорема 2.6]), які при деяких додаткових припущеннях на один із множників (типу зв'язності чи першої аксіоми зліченності) твердять існування нарізно неперервної функції на добутку двох цілком регулярних просторів з даною проективно ніде не щільною одноточковою G_δ-множиною точок розриву природно виникає питання: *чи обов'язково довільна проективно ніде не щільна одноточкова G_δ-множина у добутку двох цілком регулярних просторів є множиною точок розриву деякої нарізно неперервної функції?*

У даному підрозділі ми викладемо результат роботи [4], де було виявлено, що позитивна відповідь на це питання не залежить від ZFC-аксіом. А саме, там було встановлено, що відповідне твердження про існування нарізно неперервної функції проективно ніде не щільною одноточковою G_δ-множиною точок розриву має еквівалентне переформулювання у термінах P-фільтрів, яке, в свою чергу, не залежить від ZFC-аксіом.

5.3.1. Достатні умови для просторів спеціального вигляду. Природно розпочати дослідження сформульованого вище питання з випадку, коли одноточкова G_δ-множина в добутку $X \times Y$ породжена єдиними неізольованими точками в просторах X і Y відповідно.

В цьому пункті ми введемо до розгляду простори спеціального вигляду, які містять лише одну неізольовану G_δ-точку, і встановимо достатні умови існування нарізно неперервної функції з одноточковою G_δ-множиною точок розриву у добутку таких просторів.

Непорожня система $\mathcal{A}$ непорожніх підмножин множини S називається *фільтром на* S, якщо виконуються наступні умови:

(a) $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$ для довільних $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$;

(b) якщо $A \in \mathcal{A}$ і $A \subseteq B \subseteq S$, то $B \in \mathcal{A}$.

Фільтр $\mathcal{A}$ на множині S називається *P-фільтром*, якщо для довільної послідовності $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ множин $A_n \in \mathcal{A}$ існує множина $A \in \mathcal{A}$, така, що множина $A \setminus A_n$ скінченна для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Фільтри $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ на множині S називаються *майже когерентними*, якщо існує відображення $\varphi : S \to S$ таке, що множина $\varphi^{-1}(s)$ – скінченна для кожного $s \in S$ і $\varphi(A) \cap \varphi(B) \neq \emptyset$ для довільних $A \in \mathcal{A}$ і $B \in \mathcal{B}$.

Позначимо через $\mathcal{F}$ сукупність усіх фільтрів x на множині $\mathbb{N}$ таких, що для довільних $A, B \subseteq \mathbb{N}$ зі скінченною різницею $A \triangle B$ якщо $A \in x$, то $B \in x$. Зрозуміло, що фільтр x на можині $\mathbb{N}$ входить в $\mathcal{F}$, тоді і тільки тоді, коли

$$\{k \in \mathbb{N} : k \geq n\} \in x$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Для кожного $x \in \mathcal{F}$ через $\mathbb{N}_x$ ми позначатимемо простір $\mathbb{N} \cup \{x\}$, в якому всі точки $n \in \mathbb{N}$ є ізольованими, а множина $A \cup \{x\}$, де $A \subseteq \mathbb{N}$, є околом точки x в $\mathbb{N}_x$ тоді і тільки тоді, коли $A \in x$.

Наступна теорема є основним результатом даного пункту.

Теорема 5.3.1. *Нехай $x, y \in \mathcal{F}$, $X = \mathbb{N}_x$ і $Y = \mathbb{N}_y$ – такі, що кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ є неперервною. Тоді*

(*a*) *x і y є P-фільтрами;*

(*b*) *x і y не є майже когерентними.*

Доведення. (a). Доведемо, спочатку, що x є P-фільтром.

Нехай $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ – довільна послідовність множин $A_n \in x$. Доведемо, що існує множина $A \in x$ така, що всі множини $A \setminus A_n$ – скінченні. Зауважимо, що без обмежень загальності ми можемо вважати, що $A_{n+1} \subseteq A_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Розглянемо функцію $f : X \times Y \to \{0, 1\}$, яка означається наступним чином:

$$f(u, v) = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad v \in \mathbb{N} \quad \text{і} \quad u \in (A_1 \setminus A_v) \cap [v, +\infty).$$

Покажемо, що f – нарізно неперервна функція. Зрозуміло, що вертикальний x-розріз f^x і горизонтальний y-розріз f_y є неперервними, адже вони скрізь дорівнюють нулеві. Зафіксуємо $v \in \mathbb{N} \subseteq Y$ і покладемо

$$B_v = (A_1 \setminus A_v) \cap [v, +\infty).$$

Оскільки

$$B_v \cap A_v \subseteq (0, v),$$

то множина $B_v \cap A_v$ скінченна. Крім того, $A_v \in x \in \mathcal{F}$. Тому

$$(\mathbb{N} \setminus B_v) \cap A_v = A_v \setminus (B_v \cap A_v) \in x.$$

Отже,

$$\mathbb{N} \setminus B_v \in x$$

і множина B_v є відкрито-замкненою в просторі X. Тому горизонтальний v-розріз f_v є неперервним, як характеристична функція відкрито-замкненої множини. Тепер зафіксуємо $u \in \mathbb{N} \subseteq X$. Оскільки

$$C_u = \{v \in \mathbb{N} : u \in (A_1 \setminus A_v) \cap [v, +\infty)\} \subseteq (0, u],$$

то множина C_u скінченна і, зокрема, є відкрито-замкненою в просторі Y. Тому вертикальний u-розріз f^u також є неперервним, як характеристична функція відкрито-замкненої множини.

Таким чином, f є нарізно неперервною функцією, яка згідно з умовою є неперервною в точці (x, y), причому $f(x, y) = 0$. Виберемо $A \in x$ і $B \in y$ так, що $A \subseteq A_1$ і $f(u, v) = 0$ для довільних $u \in A$ і $v \in B$. Покажемо, що A – шукана множина.

Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$. Оскільки

$$\{k \in \mathbb{N} : k \geq n\} \in y,$$

то існує $k \geq n$ таке, що $k \in B$. Тоді $f(u, k) = 0$ для кожного $u \in A$, тому

$$A \cap (A_1 \setminus A_k) \cap [k, +\infty) = (A \setminus A_k) \cap [k, +\infty) = \emptyset.$$

Отже, множина $A \setminus A_k$ – скінченна. Врахувавши, що $A_k \subseteq A_n$, одержимо, що множина $A \setminus A_n$ також є скінченною.

Аналогічно доводиться, що y є P-фільтром.

(b). Міркуватимемо від супротивного. Припустимо, що x і y є майже когерентними, тобто існує відображення $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таке, що множина $\varphi^{-1}(n)$ – скінченна для кожного $n \in \mathbb{N}$ і

$$\varphi(A) \cap \varphi(B) \neq \emptyset$$

для довільних $A \in x$ і $B \in y$.

Розглянемо функцію $g : X \times Y \to \mathbb{R}$, яка означається наступним чином:

$$g(u, v) = \begin{cases} \frac{2\varphi(u)\varphi(v)}{\varphi(u)^2 + \varphi(v)^2}, & (u, v) \in \mathbb{N}^2; \\ 0, & (u, v) \in (X \times Y) \setminus \mathbb{N}^2. \end{cases}$$

Покажемо, що функція g є нарізно неперервною. Як і для функції f, вертикальний x-розріз g^x і горизонтальний y-розріз g_y є неперервними, адже вони скрізь дорівнюють нулеві. Крім того, функція g неперервна на $\mathbb{N}^2$. Тому достатньо довести неперервність функції g відносно першої змінної у всіх точках множини $\{x\} \times \mathbb{N}$ і відносно другої змінної у всіх точках множини $\mathbb{N} \times \{y\}$. Зафіксуємо $k \in \mathbb{N}$. Оскільки множина $\varphi^{-1}(n)$ скінченна для кожного $n \in \mathbb{N}$, то

$$\lim_{n \to \infty} \varphi(n) = +\infty$$

і

$$\lim_{n \to \infty} g(k, n) = \lim_{n \to \infty} g(n, k) = 0.$$

Тому для довільного $\varepsilon > 0$ існує номер $m \in \mathbb{N}$ такий, що

$$g(k, n) = g(n, k) < \varepsilon$$

для кожного $n \geq m$. Множини

$$U = \{x\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\} \qquad \text{і} \qquad V = \{y\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\}$$

є околами точок x і y в просторах X і Y відповідно, причому

$$|g(u,k) - g(x,k)| < \varepsilon \qquad \text{і} \qquad |g(k,v) - g(k,y)| < \varepsilon$$

для довільних $u \in U$ і $v \in V$. Тому горизонтальний k-розріз g_k і вертикальний k-розріз g^k є неперервними в точках x і y відповідно.

Залишилось показати, що g розривна в точці (x,y). Нехай $A \in x$ і $B \in y$. Згідно з вибором φ існують $u \in A$ і $v \in B$ такі, що $\varphi(u) = \varphi(v)$. Тоді $g(u,v) = 1$. Отже, $\omega_g(x,y) = 1$. □

5.3.2. Необхідні умови.

У даному пункті ми доведемо обернену теорему до теореми 5.3.1.

Розпочнемо з допоміжних тверджень.

Твердження 5.3.2. *Нехай $x \in \mathcal{F}$ і $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – таке сюр'єктивне відображення, що $\varphi^{-1}(n)$ – скінченна множина для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тоді*

$$y = \varphi(x) = \{\varphi(A) : A \in x\} \in \mathcal{F},$$

причому, якщо x є P-фільтром, то y також є P-фільтром.

Доведення. Покажемо спочатку, що y є фільтром на $\mathbb{N}$. Нехай $A \in y$ і $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}$. Виберемо множину $A_1 \in x$ таку, що $\varphi(A_1) = A$ і покладемо $B_1 = \varphi^{-1}(B)$. Зауважимо, що $B_1 \in x$, адже $A_1 \subseteq B_1 \subseteq \mathbb{N}$, і оскільки відображення φ сюр'єктивне, то $\varphi(B_1) = B$, тобто $B \in y$. Крім того,

$$\varphi(A \cap B) \subseteq \varphi(A) \cap \varphi(B),$$

тому

$$\varphi(A) \cap \varphi(B) \in y$$

для довільних $A, B \in x$. Отже, y є фільтром на $\mathbb{N}$.

Врахувавши, що всі множини $\varphi^{-1}(n)$ скінченні, одержимо, що якщо $A, B \in \mathbb{N}$ такі, що множина $A \triangle B$ скінченна, то множина

$$\varphi^{-1}(A) \triangle \varphi^{-1}(B)$$

також скінченна. Тому $y \in \mathcal{F}$.

Залишилось показати, що y є P-фільтром, якщо x є P-фільтром. Нехай $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність множин $B_n \in y$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо $A_n = \varphi^{-1}(B_n)$ і одержимо послідовність $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ множин $A_n \in x$. Оскільки

x є P-фільтром, то існує множина $A \in x$ така, що множина $A \backslash A_n$ скінченна для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тоді

$$B = \varphi(A) \in y$$

і множина

$$B \setminus B_n = \varphi(A \setminus A_n)$$

скінченна для кожного $n \in \mathbb{N}$. Отже, y є P-фільтром. □

Твердження 5.3.3. *Нехай фільтри $x, y \in \mathcal{F}$ не є майже когерентними. Тоді існують $A \in x$ і $B \in y$ такі, що $|n - m| > 1$ для довільних $n \in A$ і $m \in B$.*

Доведення. Розглянемо відображення $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$\varphi(n) = \left[\frac{n+1}{2}\right],$$

і $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$\psi(n) = \left[\frac{n}{2}\right] + 1,$$

де через $[t]$ ми позначаємо цілу частину дійсного числа t. Оскільки x і y не є майже когерентними, то існують $A_1, A_2 \in x$ і $B_1, B_2 \in y$ такі, що

$$\varphi(A_1) \cap \varphi(B_1) = \emptyset \qquad \text{і} \qquad \psi(A_2) \cap \psi(B_2) = \emptyset.$$

Покладемо

$$A = A_1 \cap A_2 \qquad \text{і} \qquad B = B_1 \cap B_2.$$

Зрозуміло, що $A \in x$, $B \in y$ і

$$\varphi(A) \cap \varphi(B) = \psi(A) \cap \psi(B) = \emptyset,$$

тобто $|n - m| > 1$ для довільних $n \in A$ і $m \in B$. □

Підмножину E добутку $X \times Y$ називатимемо *проективно скінченною*, якщо для довільних $x_0 \in X$ і $y_0 \in Y$ множини

$$\{y \in Y : (x_0, y) \in E\} \qquad \text{і} \qquad \{x \in X : (x, y_0) \in E\}$$

є скінченними.

Твердження 5.3.4. *Нехай $E \subseteq \mathbb{N}^2$ – проективно скінченна множина. Тоді існує послідовність $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ попарно неперетинних скінченних множин $C_n \subseteq \mathbb{N}$ така, що*

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n \qquad \text{і} \qquad E \subseteq \bigcup_{|n-m| \le 1} (C_n \times C_m).$$

Доведення. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$A_n = \{m \in \mathbb{N} : (n,m) \in E\}, \qquad B_n = \{m \in \mathbb{N} : (m,n) \in E\},$$

$$D_0 = \emptyset, \qquad D_1 = A_1 \cup B_1, \qquad D_{n+1} = \bigcup_{k \in D_n} (A_k \cup B_k) \cup \{n\},$$

$$C_1 = D_1 \qquad \text{і} \qquad C_{n+1} = D_{n+1} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} D_k.$$

Оскільки $n \in D_{n+1}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то

$$\bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \mathbb{N}.$$

Покажемо тепер, що

$$E \subseteq \bigcup_{|n-m| \le 1} (C_n \times C_m).$$

Зафіксуємо довільну точку $(n,m) \in E$. Виберемо найменший номер $k \in \mathbb{N}$ такий, що $\{n,m\} \cap D_k \neq \emptyset$. Вважатимемо для певності, що $n \in D_k$. Тоді $n \in C_k$ і $m \in A_n$, тому

$$m \in D_{k+1} \setminus D_{k-1} = C_k \cup C_{k+1}.$$

Отже,

$$(n,m) \in \bigcup_{|i-j| \le 1} (C_i \times C_j).$$

□

Твердження 5.3.5. *Нехай $x, y \in \mathcal{F}$ – довільні P-фільтри, $X = \mathbb{N}_x$, $Y = \mathbb{N}_y$ і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція, яка розривна в точці (x,y). Тоді існує проективно скінченна множина $E \subseteq \mathbb{N}^2$ така, що характеристична функція χ_E множини E також розривна в точці (x,y).*

Доведення. Нехай $\omega_f(x,y) = \varepsilon$. Виберемо множини $A \in x$ і $B \in y$ такі, що

$$|f(x,y) - f(n,y)| < \tfrac{\varepsilon}{6} \qquad \text{і} \qquad |f(x,y) - f(x,m)| < \tfrac{\varepsilon}{6}$$

для довільних $n \in A$ і $m \in B$. Тепер для довільних $n \in A$ і $m \in B$ використовуючи нарізну неперервність функції f, знайдемо множини $B_n \in y$ і $A_m \in x$ такі, що

$$|f(n,y) - f(n,j)| < \tfrac{\varepsilon}{6} \qquad \text{і} \qquad |f(x,m) - f(i,m)| < \tfrac{\varepsilon}{6},$$

зокрема,

$$|f(x,y) - f(n,j)| < \tfrac{\varepsilon}{3} \qquad \text{і} \qquad |f(x,y) - f(i,m)| < \tfrac{\varepsilon}{3},$$

для довільних $j \in B_n$ та $i \in A_m$. Оскільки x і y є P-фільтрами, то існують множини $A_0 \in x$ і $B_0 \in y$ такі, що $A_0 \subseteq A$, $B_0 \subseteq B$ і множини $A_0 \setminus A_m$ і $B_0 \setminus B_n$ скінченні для довільних $n \in A$ і $m \in B$.

Розглянемо множину

$$E = \left\{(n,m) \in A_0 \times B_0 : |f(x,y) - f(n,m)| > \tfrac{\varepsilon}{3}\right\}.$$

Оскільки $\omega_f(x,y) = \varepsilon$, і множини $U = A_0 \cup \{x\}$ і $V = B_0 \cup \{y\}$ є околами точок x і y в просторах X і Y відповідно, то $(x,y) \in \overline{E}$, тобто функція χ_E розривна в точці (x,y). З іншого боку,

$$\{j \in \mathbb{N} : (n,j) \in E\} \subseteq B_0 \setminus B_n \qquad \text{і} \qquad \{i \in \mathbb{N} : (i,m) \in E\} \subseteq A_0 \setminus A_m$$

для довільних $n \in A_0$ і $m \in B_0$. Отже, множина E є проективно скінченною. □

Наступна теорема, яка є основним результатом даного пункту, є оберненою до теореми 5.3.1 і може слугувати певним доповненням до результатів першого підрозділу даного розділу.

Теорема 5.3.6. *Нехай $x, y \in \mathcal{F}$ – довільні P-фільтри, які не є майже когерентними, $X = \mathbb{N}_x$, $Y = \mathbb{N}_y$. Тоді кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ є неперервною.*

Доведення. Міркуватимемо від супротивного. Припустимо, що існує нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, яка не є неперервною. Оскільки в просторах X і Y всі точки, крім x і y, є ізольованими, то $D(f) = \{(x,y)\}$. Згідно з твердженням 5.3.5 існує проективно скінченна множина $E \subseteq \mathbb{N}^2$ така, що функція $g = \chi_E$ також розривна в точці (x,y). Використовуючи твердження 5.3.4 виберемо послідовність $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ попарно неперетинних скінченних множин $C_n \subseteq \mathbb{N}$ таку, що

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n \qquad \text{і} \qquad E \subseteq \bigcup_{|n-m| \le 1} (C_n \times C_m).$$

Розглянемо відображення $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, яке означається умовою

$$\varphi(n) = k$$

для кожного $n \in C_k$. Згідно з твердженням 5.3.2 образи $x_1 = \varphi(x)$ і $y_1 = \varphi(y)$ є P-фільтрами з $\mathcal{F}$. Оскільки x і y не є майже когерентними, то

x_1 і y_1 також не є майже когерентними. Тому з твердження 5.3.3 випливає, що існують $A_1 \in x_1$ і $B_1 \in y_1$ такі, що $|n-m| > 1$ для довільних $n \in A_1$ і $m \in B_1$. Покладемо

$$A = \varphi^{-1}(A_1) \qquad \text{і} \qquad B = \varphi^{-1}(B_1).$$

Тоді

$$A \times B \subseteq \bigcup_{|n-m|>1} (C_n \times C_m),$$

тому

$$(A \times B) \cap E = \emptyset,$$

а це суперечить тому, що функція g розривна в точці (x, y). □

5.3.3. Загальний випадок.

Тепер перейдемо до викладу основного результату даного підрозділу.

Нагадаємо, що топологічний простір X називається *цілком регулярним*, якщо для довільної точки $x \in X$ і довільного околу U точки x в просторі X існує неперервна функція $f : X \to [0,1]$ така, що $f(x_0) = 1$ і $f(x) = 0$ для кожного $x \in X \setminus U$.

Наступне твердження характеризує G_δ-точки в цілком регулярних просторах.

Твердження 5.3.7. *Нехай X – цілком регулярний простір і $x_0 \in X$. Тоді наступні умови рівносильні*

(i) множина $\{x_0\}$ є множиною типу G_δ в просторі X;

(ii) існує неперервна функція $f : X \to [0,1]$ така, що $\{x_0\} = f^{-1}(0)$.

Доведення. Імплікація $(ii) \Rightarrow (i)$ негайно випливає з наступної рівності

$$\{x_0\} = f^{-1}(0) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}([0, \tfrac{1}{n}).$$

$(i) \Rightarrow (ii)$. Нехай $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність відкритих в X множин G_n така, що

$$\{x_0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Оскільки X цілком регулярний, то для кожного$n \in \mathbb{N}$ існує неперервна функція $f_n : X \to [0,1]$ така, що $f_n(x_0) = 1$ і $f_n(x) = 0$ для кожного $x \in X \setminus G_n$. Розглянемо неперервну функцію $f : X \to [0,1]$, означену формулою

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - f_n(x)}{2^n}.$$

Зрозуміло, що $f(x_0) = 0$. Крім того,

$$f^{-1}(0) = \{x \in X : (f_n(x) = 1)\ (\forall\, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \{x_0\}.$$

Отже, $f^{-1}(0) = \{x_0\}$. $\square$

Наступні допоміжні твердження ми будемо використовувати при доведенні основного результату даного підрозділу.

Лема 5.3.8. *Нехай X, Y – топологічні простори, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ – неізольовані точки в просторах X і Y відповідно, $g : X \to [0,1]$ і $h : Y \to [0,1]$ – неперервні функції такі, що*

$$\{x_0\} = g^{-1}(0) \qquad \text{і} \qquad \{y_0\} = h^{-1}(0),$$

причому $g(U)$ є околом нуля в $[0,1]$ для довільного околу U точки x_0 в X або $h(V)$ є околом нуля в $[0,1]$ для довільного околу V точки y_0 в Y. Тоді функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, означена формулою

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2g(x)h(y)}{g(x)^2+h(y)^2}, & (x,y) \neq (x_0,y_0); \\ 0, & (x,y) = (x_0,y_0), \end{cases}$$

є нарізно неперервною і $D(f) = \{(x_0,y_0)\}$.

Доведення. Зрозуміло, що функція f є неперервною у всіх точках множини $(X \times Y) \setminus \{(x_0,y_0)\}$, як композиція неперервних функцій. Крім того, вертикальний x_0-розріз f^{x_0} і горизонтальний y_0-розріз f_{y_0} є нульовими. Тому, зокрема, функція f є нарізно неперервною.

Залишилось показати розривність функції f в точці (x_0,y_0). Міркуватимемо у випадку, коли $g(U)$ є околом нуля в $[0,1]$ для довільного околу U точки x_0 в X. Візьмемо довільні околи U і V точок x_0 і y_0 в просторах X і Y відповідно. Виберемо $\delta > 0$ так, що

$$[0,\delta) \subseteq g(U).$$

Оскільки функція h неперервна в точці y_0 і $h(y_0) = 0$, то існує окіл $V_1 \subseteq V$ точки y_0 в просторі Y такий, що

$$0 \leq h(y) \leq \delta$$

для кожного $y \in V_1$. Нагадаємо, що точка y_0 неізольована в Y. Тому існує точка

$$y_1 \in V_1 \setminus \{y_0\}.$$

Крім того, $\{y_0\} = h^{-1}(0)$. Отже,

$$0 < h(y_1) < \delta.$$

З вибору δ випливає існування точки $x_1 \in U$ такої, що $g(x_1) = h(y_1)$. Тоді

$$f(x_1, y_1) = 1.$$

Тепер маємо

$$\omega_f(U \times V) \geq f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = 1.$$

Отже, $\omega_f(x_0, y_0) \geq 1$ і функція f розривна в точці (x_0, y_0). $\square$

Лема 5.3.9. *Нехай X – цілком регулярний простір, $x_0 \in X$ і $g : X \to [0,1]$ – неперервна функція такі, що*

$$\{x_0\} = g^{-1}(0)$$

і $g(X)$ не є околом нуля в $[0,1]$. Тоді існує спадна послідовність $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ відкрито-замкнених множин G_n в просторі X така, що

$$\{x_0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Доведення. Виберемо строго спадну збіжну до нуля послідовність $(\delta_n)_{n=1}^{\infty}$ чисел $\delta_n \in (0,1]$ таку, що $\delta_n \notin g(X)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Залишилось покласти

$$G_n = g^{-1}([0, \delta_n)) = g^{-1}([0, \delta_n])$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Лема 5.3.10. *Нехай X – топологічний простір, U – відкрита в просторі X множина, $g : U \to [0,1]$, $\theta : X \to [0,1]$ – неперервна функція така, що $\theta(x) = 0$ для кожного $x \in X \setminus U$, і функція $f : X \to \mathbb{R}$ означаєтьcя формулою*

$$f(x) = \begin{cases} \theta(x)g(x), & x \in U; \\ 0, & x \in X \setminus U. \end{cases}$$

Тоді

$$D(f) = D(g) \cap \theta^{-1}((0,1]).$$

Доведення. Оскільки функція θ неперервна і

$$0 \leq f(x) \leq \theta(x)$$

для кожного $x \in X$, то функція f неперервна в кожній точці множини $\theta^{-1}(0)$. Разом з тим, звуження функції f на відкриту множину U

неперевне в кожній точці множини $C(g)$. Тому і функція f неперервна в кожній точці множини $C(g)$. Таким чином,

$$D(f) = X \setminus C(f) \subseteq X \setminus (\theta^{-1}(0) \cup C(g)) = D(g) \cap \theta^{-1}((0,1]).$$

З іншого боку,з леми 3.1.3 випливає включення

$$D(g) \cap \theta^{-1}((0,1]) \subseteq D(f),$$

що і завершує доведення леми. □

Наступна теорема є основним результатом даного підрозділу.

Теорема 5.3.11. *Наступні твердження рівносильні:*

(i) *для довільних цілком регулярних просторів X і Y з неізольованими G_δ-точками x_0 і y_0 в X і Y відповідно, існує нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ така, що $D(f) = \{(x_0, y_0)\}$;*

(ii) *довільні два P-фільтри з $\mathcal{F}$ є майже когерентними.*

Доведення. Імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$ випливає з теореми 5.3.6.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Нехай X, Y – топологічні простори і $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ – неізольовані G_δ-точки в просторах X і Y відповідно. Згідно з твердженням 5.3.7 існують неперервні функції $g : X \to [0,1]$ і $h : Y \to [0,1]$ такі, що

$$\{x_0\} = g^{-1}(0) \qquad \text{і} \qquad \{y_0\} = h^{-1}(0).$$

Якщо $g(U)$ є околом нуля в $[0,1]$ для довільного околу U точки x_0 в X або $h(V)$ є околом нуля в $[0,1]$ для довільного околу V точки y_0 в Y, то з леми 5.3.8 випливає існування нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ з $D(f) = \{(x_0, y_0)\}$.

Отже, залишилось розглянути випадок, коли існують відкриті околи U_0 і V_0 точок x_0 і y_0 в X і Y відповідно такі, що множини $g(U_0)$ і $h(V_0)$ не є околами нуля в $[0,1]$. Згідно з лемою 5.3.9 існують спадні послідовності $(G_n)_{n=1}^\infty$ і $(H_n)_{n=1}^\infty$ відкрито-замкнених множин G_n і H_n в просторах U_0 і V_0 відповідно такі, що $G_1 = U_0$, $H_1 = V_0$,

$$\{x_0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \qquad \text{і} \qquad \{y_0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n,$$

причому оскільки точки x_0 і y_0 не є ізольованими, то послідовності $(G_n)_{n=1}^\infty$ і $(H_n)_{n=1}^\infty$ можна вибрати строго спадними.

Розглянемо сюр'єктивні відображення $\varphi : U_0 \setminus \{x_0\} \to \mathbb{N}$ і $\psi : V_0 \setminus \{y_0\} \to \mathbb{N}$, означені формулами

$$\varphi(G_n \setminus G_{n+1}) = \{n\} \qquad \text{і} \qquad \psi(H_n \setminus H_{n+1}) = \{n\}.$$

Зауважимо, що системи

$$u = \{\varphi(U \setminus \{x_0\}) : U \in \mathcal{U}\} \qquad \text{і} \qquad v = \{\psi(V \setminus \{y_0\}) : V \in \mathcal{V}\},$$

де $\mathcal{U}$ і $\mathcal{V}$ – системи всіх околів точок x_0 і y_0 в U_0 і V_0 відповідно, утворюють фільтри з $\mathcal{F}$. Довизначимо відображення φ і ψ наступним чином:

$$\varphi(x_0) = u \qquad \text{і} \qquad \psi(y_0) = v,$$

і одержимо відображення

$$\varphi : U_0 \to \mathbb{N}_u \qquad \text{і} \qquad \psi : V_0 \to \mathbb{N}_v,$$

які за побудовою неперервні в точках x_0 і y_0 відповідно. Крім того, оскільки всі множини $G_n \setminus G_{n+1}$ і $H_n \setminus H_{n+1}$ відкрито-замкнені в просторах U_0 і V_0 відповідно, то відображення φ і ψ неперервні у всіх точках множин $U_0 \setminus \{x_0\}$ і $V_0 \setminus \{y_0\}$ відповідно.

Згідно з (ii) фільтри u і v не задовольняють умови (a) і (b) теореми 5.3.1. Тому існує нарізно неперервна функція $s : \mathbb{N}_u \times \mathbb{N}_v \to [0,1]$ така, що

$$D(s) = \{(u,v)\}.$$

Розглянемо функцію $f_0 : U_0 \times V_0 \to [0,1]$, означену формулою

$$f_0(x,y) = s(\varphi(x), \psi(y)).$$

Оскільки функція s нарізно неперервна, а відображення φ і ψ неперервні, то функція f_0 також є нарізно неперервною. Крім того, функція f_0 неперервна в кожній точці множини $(U_0 \times V_0) \setminus \{(x_0,y_0)\}$, як композиція неперервних у відповідних точках відображень. Разом з тим, для довільних $U \in \mathcal{U}$ і $V \in \mathcal{V}$ образи $\varphi(U)$ і $\psi(V)$ є околами точок u і v в просторах $\mathbb{N}_u$ і $\mathbb{N}_v$ відповідно. Звідки маємо

$$\omega_{f_0}(U \times V) = \omega_s(\varphi(U) \times \psi(V)) \geq \omega_s(u,v).$$

Тому f_0 розривна в точці (x_0, y_0) і

$$D(f_0) = \{(x_0,y_0)\}.$$

Використовуючи цілковиту регулярність простору $X \times Y$, виберемо неперервну функцію $\theta : X \times Y \to [0,1]$ таку, що $\theta(x_0,y_0) = 1$ і $\theta(x,y) = 0$, якщо $(x,y) \notin U_0 \times V_0$. Розглянемо функцію $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, яка означається формулою

$$f(x,y) = \begin{cases} \theta(x,y) f_0(x,y), & (x,y) \in U_0 \times V_0; \\ 0, & (x,y) \notin U_0 \times V_0. \end{cases}$$

Згідно з лемою 5.3.10 функція f нарізно неперервна і

$$D(f) = \{(x_0, y_0)\}.$$

$\square$

Зауваження 5.3.12. *Зазначимо, що твердження (ii) з теореми 5.3.11 не залежить від ZFC-аксіом. Так в [6] доведено незалежність від ZFC-аксіом умови NCF (майже когерентності фільтрів), яка полягає в тому, що довільні два фільтри з $\mathcal{F}$ є майже когерентними. Очевидно, що ця умова є сильнішою, ніж умова (ii) з теореми 5.3.11, яку природно назвати $NCPF$-аксіомою (аксіомою майже когерентності P-фільтрів). Крім того, в [4] показано, що в припущенні континуум гіпотези (CH) існують P-фільтри $x, y \in \mathcal{F}$, які не є майже когерентними. Таким чином, має місце наступна імплікація*

$$(NCF) \Rightarrow (NCPF) \Rightarrow (\neg CH).$$

Оскільки умови (NCF) і $(\neg CH)$ не залежать від ZFC-аксіом, то і умова $(NCPF)$ також не залежить від ZFC-аксіом.

5.4

Заключні зауваження до розділу 5

Задача про побудову нарізно неперервної функції з даною одноточковою множиною точок розриву є частинним випадком *спеціальних обернених задач* про побудову нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ з даною множиною точок розриву $E = A \times B$, де A і B – множини (можливо й одноточкові) в просторах X і Y відповідно. Ці задачі розв'язувались в роботах [54], [50], [59], [30].

Разом з тим, спеціальна обернена задача для одноточкової множини еквівалентна також і ослабленому варіанту спеціальної оберненої задачі, який полягає в побудові нарізно неперервної функції з даними проекціями множини точок розриву. Ці питання досліджувались в [30], де, зокрема, були наведені приклади функціонально замкнених множин в компактних просторах, для яких ослаблена спеціальна обернена задача має розв'язок, а спеціальна обернена задача – ні.

У зв'язку з аналізом незвичної ситуації, коли кожна нарізно неперервна функція на добутку двох топологічних просторів X і Y є сукупно неперервною, природно згадати і діаметрально протилежний "аномальний" випадок, коли існує сукупно скрізь розривна нарізно неперервна функція. Зрозуміло, що, як випливає з теореми Брекенріджа і Нішіури, така функція існує на добутку двох метризовних просторів першої категорії. Разом з тим, нескладно бачити, що скрізь розривною є також нарізно неперервна функція обчислення $f(x, y) = y(x)$, де X – довільний цілком регулярний простір і $Y = C_p(X)$, який, зазвичай, також є простором першої категорії (дивись [5]). Слід, правда, зауважити, що на відміну від теореми Брекенріджа і Нішіури такий приклад не дає негайного опису множин точок розриву нарізно неперервних функцій на добутку $X \times C_p(X)$. Значно складнішими є побудови прикладів скрізь розривних нарізно неперервних функцій на добутку двох "масивних" просторів (дивись [46, с.37], [62], [70]). Зокрема в [32] побудовано приклад скрізь розривної нарізно неперервної функції на добутку берівського і компактного просторів, що дає розв'язання однієї проблеми Талаґрана з [42].

ВІДКРИТІ ПИТАННЯ

Вкладений у даній праці матеріал сам по собі, фактично, уже формулює відкриті питання (у неявному вигляді), адже тут подані всі характеристичні теореми про множину точок розриву нарізно неперервних функцій двох змінних. Отже, у всіх решта випадках питання про повний опис множини точок розриву на сьогодні залишається відкритим. Тим не менше, ми сформулюємо деякі конкретні питання, які з точки зору одержаних результатів і застосованих методів виглядають цілком природними.

Питання 5.4.1 (З.Пьотровський)**.** *Нехай X і Y – компактні гаусдорфові простори. Якими є необхідні і достатні умови на множину точок розриву довільної нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$?*

Питання 5.4.2. *Нехай X і Y – компактни Еберлейна. Якими є необхідні і достатні умови на множину точок розриву довільної нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$?*

Питання 5.4.3. *Нехай $X = [0,1]$ і Y – компактний гаусдорфовий простір. Якими є необхідні і достатні умови на множину точок розриву довільної нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$?*

Питання 5.4.4. *Нехай X – метризовний компакт і Y – компактний гаусдорфовий простір. Якими є необхідні і достатні умови на множину точок розриву довільної нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$?*

Питання 5.4.5. *Нехай X – метризовний простір і Y – добуток сім'ї сепарабельних метризовних просторів. Якими є необхідні і достатні умови на множину точок розриву довільної нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$?*

Література

[1] Alexiewicz A., Orlicz W. *Sur la continuite et la classification de Baire de fonctions abstraites*, Fund. Math. **35** (1948) 105-126.

[2] Baire R. *Sur les fonctions de variables reélles*, Ann. Mat. Pura Appl. ser. 3. (3) (1899) 1-123.

[3] Banakh T.O., Maslyuchenko O.V. *Linearly continuous functions and F_σ-measurability*, Europ. J. Math. **6** (2020) 37-52.

[4] Banakh T.O., Maslyuchenko O.V., Mykhaylyuk V.V. *Discontinuous separately continuous functions and near coherence of P-filters*, Real Anal. Exch. **32** (2) (2007) 335-348.

[5] Banakh T., Mykhaylyuk V., Zdomsky L. *On meager function spaces, network character and meager convergence in topological spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin. **52** (2) (2011) 273-281.

[6] Blass A. *Near coherence of filters I: Cofinal equivalence of models of arithmetic*, Notre Dame J. Formal Logic. **27** (1986) 579-591.

[7] Breckenridge I.C., Nishiura T. *Partial continuity, quasicontinuity and Baire spaces*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica. **4** (2) (1976) 191-203.

[8] Calbrix J., Troalic J.- P. *Applications separement continues*, C.R.Acad. Paris. Serie A. **288** (1979) 647-648.

[9] Ciesielski K.C., Glatzer T.*Sets of discontinuities of linearly continuous functions*, Real Analysis Exchange **38** (2) (2013) 337–389.

[10] Ciesielski K.C., Glatzer T.*Sets of discontinuities for functions continuous on flats*, Real Analysis Exchange **39** (1) (2014) 117-138.

[11] Corson H., Isbell I. *Some properties of strong uniformities*, Quart. J. Math. Oxford. **11** (1960) 17-33.

[12] Engelking R. *On functions defined on Cartesian products*, Fund. Math. **59** (1966) 221-231.

[13] Engelking R. *General Topology*, Revised and completed edition, Heldermann Verlag, Berlin (1989).

[14] Erdös P., Rado R. *Intersection theorems for system of sets*, Journ. London Math. Soc. **35** (1960) 85-90.

[15] Feiock R.E. *Cluster sets and joint continuity*, J. London Math. Soc. **7** (1973) 397-406.

[16] Fort M.K.Jr. *Category theorems*, Fund. Math. **42** (1955) 276-288.

[17] Grande Z. *Une caractérisation des ensembles des point de discontinuité des fonctions linéarement-conntinues*, Proc. Amer. Math. Soc. **52** (1975) 257-262.

[18] Hahn H. *Theorie der reellen Funktionen*, 1. Band, Berlin: Verlag von Julius Springer, 1921. VIII, 600 s.

[19] Hausdorff F. *Die Mengen G_δ in vollständigen Räumen*, Fund. Math. **6** (1924) 146-148.

[20] Henriksen M., Woods R.G. *Separate versus joint continuity: A tale of four topologies*, Topology and its Applications **97** (1999) 175–205.

[21] Isbell I. *Uniform spaces* Providence, (1964) 190 p.

[22] Kechris A. *Classical descriptive set theory*, Sprinder-Verlag, New-York (1994).

[23] Kershner R. *The continuity of function of many variables*, Trans. Amer. Math. Soc. **53** (1943) 83-100.

[24] Marczewski E. *Séparabilité et multiplication cartésienne des espaces topologiques*, Fund. Math. **34** (1947) 127-143.

[25] Maslyuchenko O.V., Maslyuchenko V.K., Mykhaylyuk V.V., Sobchuk O.V. *Paracompactness and separately continuous mappings*, General Topology in Banach Spaces., Nova Sci. Publ., Nantintong-New-York. (2001) 147-169.

[26] Mazur S. *On continuous mappings on Cartesian products*, Fund. Math. **39** (1952) 229-238.

[27] Mibu Y. *On Baire functions on infinite product spaces*, Proc. Imp. Acad. Tokyo. **20** (1944) 661-663.

[28] Michael E. *A note on intersections*, Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1963) 281-283.

[29] Miščenko A. *Some theorems on the topological product of spaces* Fund. Math. **58** (1966) 259-284.

[30] Mykhaylyuk V.V. *The set of discontinuity points of separately continuous functions on the products of compact spaces*, Methods of Func. Anal. and Top. **13** (3) (2007) 284-295.

[31] Mykhaylyuk V. *Namioka spaces, GO-spaces and o-game*, Top. Appl. 235 (2018) 1-13.

[32] Mykhaylyuk V., Pol R. *On a problem of Talagrand concerning separately continuous functions*, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu (2020) DOI: https://doi.org/10.1017/S1474748019000677.

[33] Namioka I. *Separate contimuity and joint continuity*, Pacif. J. Math. **51** (2) (1974) 515-531.

[34] Noble N., Ulmer M. *Factoring functions on Cartesian products*, Trans. Amer. Math. Soc. **163** (1972) 329–339.

[35] Piotrowski Z. *Separate and joint continuity*, Real Anal. Exch. **11** (2) (1985-86) 293-322.

[36] Ross K., Stone A. *Product of separable spaces*, Amer. Math. Monthly **71** (1964) 398-403.

[37] Rudin M. E. *A new proof that metric spaces are paracompact*, Proc. Amer. Math. Soc. **20** (1969) 603.

[38] Saint-Raymond J. *Fonctions séparément continues sur le produit de deux espaces polonais*, Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, **15** (1975-1976) Communication n°C2, C1-C3.

[39] Schwarz H.A. *Zur Interation der partiellen Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, J.Reine Angew. Math. **74** (1872) 218-253.

[40] Slobodnik S.G. *An expanding system of linearly closed sets*, Math. Notes **19** (1976) 39–48.

[41] Stone A. H. *Paracompactness and product spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948) 977-982.

[42] Talagrand, M. *Espaces de Baire et espaces de Namioka*, Math. Ann. 270 (1985) 159–164.

[43] Weston J.D. *Some theorems on cluster sets*, London Math. Soc **33** (1958) 435-441.

[44] van Vleck E.B. *A proof of some theorems on pointwise discontinuous functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **8** (1907) 189-204.

[45] Young G., Young W. *Discontinuous functions continuous with respect to every straight line*, Quart. J. Pure Appl. Math. **41** (1909) 87-93.

[46] Архангельский А.В. *Топологические пространства функций*, Москва, Изд-во Моск. ун-та (1989) 222 с.

[47] Кендеров П.С. *Многозначные отображения и их свойства, подобные непрерывности*, Успехи мат. наук. **35** (3) (1980) 194-196.

[48] Куратовский К. *Топология* Т.1, Мир, Москва, (1966).

[49] Маслюченко В.К. *Сукупна неперервність нарізно неперервних відображень*, Крайові задачі зрізними виродженнями і особливостями. Зб. наукових праць за редакцією С.Д.Івасишена. Чернівці (1990) 143-159.

[50] Маслюченко В.К. *Зв'язки між різними характеристиками величини множини точок сукупної неперервності нарізно неперервних відображень*, Чернівецький ун-т, Чернівці, (1994) 17 с. Деп в ДНТБ України 10.I.94. №70-Ук94

[51] Маслюченко В.К. *Задача Діні та рівномірна неперервність* Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Вип. 46. Математика. Чернівці: ЧДУ (1999) 80-87.

[52] Маслюченко В.К.*Нарізно неперервні відображення і простори Кете*, дис. ... доктора фіз.-мат. наук: 01.01.01. Чернівці (1999) 345 с.

[53] Маслюченко В.К., Маслюченко О.В. *Побудова нарізно непрервної функції з даним коливанням*, Укр. мат. журн. **50** (7) (1998) 948-959.

[54] Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Собчук О.В. *Обернені задачі теорії нарізно неперервних відображень* Укр. мат. журн. **44** (9) (1992) 1209-1220.

[55] Маслюченко В.К., Михайлюк В.В. *Про нарізно неперервні функції на добутках метризовних просторів*, Доповіді АН України **4** (1993) 28-31.

[56] Маслюченко В.К., Михайлюк В.В. *Нарізно непрервні функції на добутках компактів та їх залежність від* **n** *змінних*, Укр. мат. журн. **47** (3) (1995) 344-350.

[57] Маслюченко В.К., Михайлюк В.В. *Характеризація множини точок розриву нарізно непрервних функції багатьох змінних на добутках метризрвних просторів*, Укр. мат. журн. **52** (6) (2000) 740-747.

[58] Маслюченко В.К., Михайлюк В.В. *Нарізно непрервних функції багатьох змінних на добутку просторів, які є добутками метризовних множників*, Мат. вісник НТШ **1** (2004) 77-84.

[59] Маслюченко В.К., Михайлюк О.В., Собчук О.В. *Дослідження про нарізно неперервні відображення*, Матеріали міжнародної математичної

конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана., Чернівці: Рута, (1995) 192-246.

[60] Маслюченко О.В. *Коливання нарізно неперервних функцій на добутку компактів Еберлейна* Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Вип.76. Математика. Чернівці: Рута, (2000) 67-70.

[61] Маслюченко О.В.*Коливання нарізно неперервних функцій і топологічні ігри*, дис. ... кандидата фіз.-мат. наук: 01.01.01. Чернівці (2002) 146 с.

[62] Маслюченко О.В., Михайлюк В.В. *До проблеми Талаґрана*, Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Вип. 46. Математика. Чернівці: ЧДУ (1999) 95-99.

[63] Михайлюк В.В. *Про нарізно непервні функції на добутках тихонівських кубів*, Чернів. ун-т. Чернівці (1991) 8с. - Деп. в УкрНДІНТІ, N1638-Ук91.

[64] Михайлюк В.В. *До питання про множину точок розриву нарізно неперервного твідображення*, Мат. студії **3** (1994) 91-94.

[65] Михайлюк В.В. *Характеризація точок розриву нарізно неперервних функцій на добутках метризовних просторів* Міжнародна математична конференція, присвячена пам'яті Ганса Гана (10-15 жовтня 1994). Тези доповідей. Чернівці: Рута, (1994) С.103.

[66] Михайлюк В.В. *Обернені задачі теорії нарізно неперервних відображень*, дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.01. Чернівці (1994) 82 с.

[67] Михайлюк В.В. *Залежність від* **n** *координат нарізно неперервних функцій на добутку компактів*, Укр. мат. журн. **50** (6) (1998) 822-829.

[68] Михайлюк В.В. *Нарізно неперервні функції на добутках і їх залежність від* $\aleph$ *координат*, Укр. мат. журн. **56** (10) (2004) 1357-1368.

[69] Михайлюк В.В. *Одноточкові розриви нарізно неперервних функцій на добутку двох компактних просторів*, Укр. мат. журн. **57** (1) (2005) 94-101.

[70] Михайлюк В.В. *Про питання, пов'язані з проблемою Талаґрана*, Мат. студії. **29** (1) (2008) 81-88.

[71] Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной*, Мир, Москва, (1974).

[72] Шанин Н.А. *О произведениях топологических пространств*, Тр. матем. ин-та АН СССР. **24** (1948) 1-112.