Олена Карлова

ВСТУП ДО ЗАГАЛЬНОЇ ТОПОЛОГІЇ

Частина I

УДК 515.1
К 475

К 475 **Вступ** до загальної топології. Частина І: навчальний посібник / укл. О.О.Карлова. –Технодрук. – с.108.

Видання містить матеріал з курсу „Топологія”, який викладається студентам факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Посібник складається з п’ятнадцяти розділів, які знайомлять читача з поняттями топологічної структури, відкритих та замкнених множин, неперервністю, аксіом відокремності, зв’язності та досконало нормальних просторів.

Для студентів та аспірантів математичних спеціальностей.

УДК 517.5

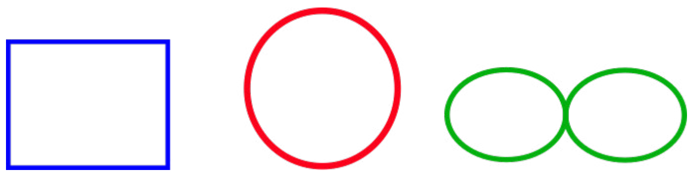
Лекція 1

Поняття топологічного простору

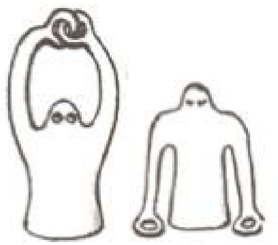
1.1 Що таке топологія?

Топологія – це відносно молода галузь математики, яка вивчає властивості об'єктів, що зберігаються неперервними (без розривів і склеювань) деформаціями.

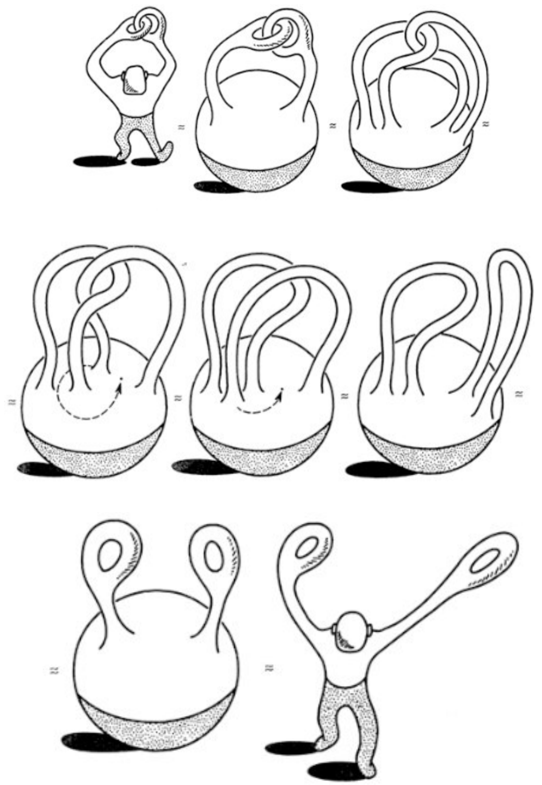
Якщо один об'єкт можна отримати з іншого з допомогою подібних перетворень, то вони називаються топологічно еквівалентними. Наприклад, квадрат і коло є топологічно еквівалентними, а коло і знак нескінченності – ні.



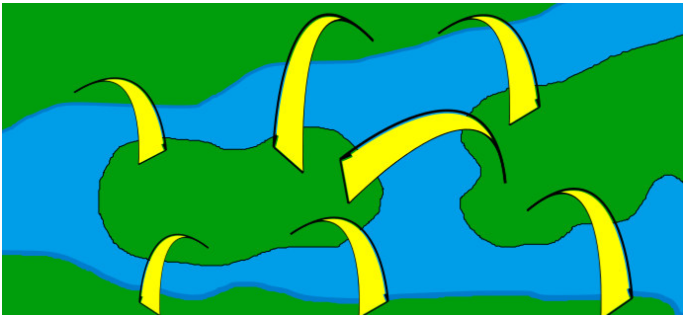
Іноді топологію називають "гумовою геометрією". Подивимося на людину із сплетеними пальцями (малюнок зліва) і уявім собі, що вона хоче їх розплутати (малюнок справа).



На перший погляд для того, щоб розплутати сплетені пальці, обов'язково потрібно їх розірвати. А це уже не буде неперервним перетворенням. Але якщо ця людина "топологічна", то їй легко вдасться розв'язати цю проблему.



Вважається, що топологія як наука зародилася в працях Лейбніца та Ейлера. Однією з найперших статей з топології була робота Леонарда Ейлера, опублікована у 1735 році року з ров'язанням історичної задачі про сім мостів Кеніґсберга.



Ейлер довів, що неможливо пройти через усі сім мостів, побувавши на кожному з них рівно один раз. Розвиток цієї роботи Ейлера призвів до виникнення теорії графів.

Термін "топологія" з'явився у 1847 році в роботі німецького математика Лістінга. У самостійну математичну дисципліну топологія оформилася вже на початку XX століття завдяки фундаментальним працям Гаусдорфа, Пуанкаре, Александрова, Урисона та Брауера.

Опишемо коротко розділи, на які можна умовно поділити топологію.

- *Загальна* або *теоретико-множинна топологія* є основою всіх інших галузей топології. Вивчає фундаментальні поняття такі як неперервність, компактність, зв'язність.
- *Алгебраїчна топологія.* Досліджує топологічні простори шляхом співставлення ним алгебраїчних об'єктів, а також поведінку цих об'єктів під дією різних топологічних операцій.
- *Диференціальна топологія.* Вивчає гладкі многовиди та їх розміщення в інших многовидах.
- *Обчислювальна топологія.* Займається створенням ефективних алгоритмів для вирішення топологічних задач, а також застосуванням топологічних методів для розв'язування алгоритмічних проблем.

Зауважимо, що топологія займає дуже важливе місце серед інших розділів математики. Топологічні методи досліджень стали дуже дійовим інструментом при розв'язуванні різних математичних і фізичних проблем. Наприклад, Нобелівську премію з фізики у 2016 році отримали Девід Таулесс (David Thouless) з Вашингтонського університету, Дункан Халдейн (Duncan Haldane) з Прінстонського університету і Майкл Костерліц (Michael Kosterlitz) з Брауновського університету – "за теоретичні відкриття топологічних фазових переходів та топологічні фази матерії".

Крім того, серед 56 лауреатів премії Філдса (найбільш престижної математичної нагороди, яка присуджується математикам до 40 років за визначні досягнення) більше десяти – це топологи. Разом з тим, одна із останніх топологічних проблем, які були розв'язані математиками, це проблема Кеплера пакування куль у вимірах $n = 8$ та $n = 24$, і ця проблема для $n = 8$ спочатку була розв'язана українським математиком Мариною В'язовською, а трохи згодом для $n = 24$ групою математиків, серед яких крім Марини В'язовської, був ще один українець – Данило Радченко.

Отже, топологія – це цікава і важлива математична наука, яка має дуже широка застосування і наповнена багатьма задачами, які чекають свого вирішення.

1.2 Означення топологічної структури

Означення 1.1. Нехай X – деяка множина і $\mathscr{O}$ – деяка сукупність підмножин даної множини, яка задовольняє властивості

(**Top1**) об'єднання довільної сім'ї множин з $\mathscr{O}$ також належить до $\mathscr{O}$;

(**Top2**) перетин довільної скінченної сім'ї множин з $\mathscr{O}$ також належить до $\mathscr{O}$;

(**Top3**) порожня множина $\emptyset$ і вся множина X належить до $\mathscr{O}$.

Тоді

- $\mathscr{O}$ називається *топологічною структурою* або просто *топологією* на множині X;
- множина X з так вибраною структурою $\mathscr{O}$ називається *топологічним простором* і позначається $(X, \mathscr{O})$;
- елементи множини X називаються *точками* цього топологічного простору;
- елементи множини $\mathscr{O}$ називаються *відкритими множинами* простору $(X, \mathscr{O})$.

Умови (Top1), (Top2), (Top3) називаються *аксіомами топологічної структури.*

1.3 Найпростіші приклади топологій

- ✘ **Дискретна топологія.** Нехай X – довільна множина. Позначимо через 2^X систему всіх його підмножин (при цьому нагадаємо, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини). Топологія

$$\mathscr{O} = 2^X$$

називається *дискретною*, а топологічний простір $(X, \mathscr{O})$, відповідно, *дискретним.*

- ✘ **Антидискретна топологія.** На противагу дискретному простору, в якому кожна його підмножина є відкритою, *антидискретну топологію* на множині X утворює система

$$\mathscr{O} = \{\emptyset, X\}.$$

Це – приклад "найскромнішої" топологічної структури.

- ✘ **Зв'язна двоточка.** Розглянемо двохелементну множину $X = \{0, 1\}$ і топологічну структуру

$$\mathscr{O} = \{\emptyset, X, \{0\}\}.$$

Ця топологія називається також *топологією Серпінського.*

✘ Нехай множина X складається з чотирьох елементів

$$X = \{a, b, c, d\}.$$

Топологічний простір $(X, \mathscr{O})$, топологію якого утворює система

$$\mathscr{O} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\},$$

ми називатимемо *вігвамом.*

Перевірку того, що вказані системи множин є топологічними структурами, залишаємо читачеві.

1.4 Найважливіший приклад: числова пряма

Нехай $X = \mathbb{R}$ – множина всіх дійсних чисел і $\mathscr{O}$ – сукупність об'єднань усіх можливих сімей інтервалів вигляду (a, b), де $a < b$ і $a, b \in \mathbb{R}$.

Нескладно перевіряється, що сукупність $\mathscr{O}$ задовольняє всі аксіоми (Top1) – (Top3) і є топологічною структурою на множині $\mathbb{R}$.

Саме цю топологічну структуру завжди мають на увазі, коли про множину $\mathbb{R}$ говорять як про топологічний простір. Вказана вище топологія $\mathscr{O}$ називається *стандартною* або *канонічною* топологією на числовій прямій.

- Множина $(0, 1) \cup (7, 10)$ є відкритою в канонічній топології числової прямої як об'єднання двох інтервалів.

- Множина $(0, +\infty)$ відкрита на числовій прямій, оскільки

$$(0, +\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (0, n).$$

1.5 Замкнені множини та околи

Означення 1.2. Підмножина F топологічного простору X називається *замкненою*, якщо доповнення до неї $X \setminus F$ є відкритою множиною.

- Довільна одноточкова множина $\{a\}$ замкнена в канонічній топології числової прямої, оскільки її доповнення

$$\mathbb{R} \setminus \{a\} = (-\infty, a) \cup (a, +\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big((a-n, a) \cup (a, a+n) \Big)$$

  є відкритою множиною як об'єднання відкритих інтервалів.

- Відрізок $[a, b]$, де $a < b$, є замкненою множиною на числовій прямій, бо доповнення

$$\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big((a-n, a) \cup (b, b+n) \Big)$$

  відкрите.

Означення 1.3. *Околом* точки в топологічному просторі називається довільна відкрита множина, що містить цю точку.

Наприклад, відкритий інтервал $(0, 1)$ є околом кожної своєї точки, а одноточкова множина $\{0\}$ не є околом своєї точки 0, адже не є відкритою множиною.

Лекція 2

Властивості відкритих і замкнених множин

2.1 Властивості замкнених множин

Твердження 2.1. *Нехай X – топологічний простір. Тоді*

1) *Перетин довільної сукупності замкнених множин в X є замкненою множиною.*

2) *Об'єднання скінченної кількості замкнених множин в X є замкненою множиною.*

3) *Порожня множина та весь простір X є замкненими множинами.*

Доведення. 1) Візьмемо довільну сім'ю $\mathscr{F} = \{F_s : s \in S\}$ замкнених підмножин простору X і доведемо, що множина

$$F = \bigcap_{s \in S} F_s$$

замкнена. Для цього розглянемо її доповнення і скористаємося формулами де Морґана:

$$G = X \setminus F = X \setminus \bigcap_{s \in S} F_s = \bigcup_{s \in S} (X \setminus F_s).$$

З означення замкненої множини випливає, що для кожного $s \in S$ множина $X \setminus F_s$ відкрита в X. За властивістю (Top1) об'єднання довільної кількості відкритих множин є відкритою множиною. Отже, множина G відкрита в просторі X. А значить, множина F замкнена.

2) Розглянемо скінченну сім'ю замкнених множин $\mathscr{F} = \{F_1, \ldots, F_n\}$. Як і попередньому пункті розглянемо доповнення і використаємо формули де Морґана:

$$G = X \setminus F = X \setminus \bigcap_{k=1}^{n} F_k = \bigcup_{k=1}^{n} (X \setminus F_k).$$

Оскільки кожна множина F_k замкнена, то доповнення $X \setminus F_k$ відкрите. З властивості (Top2) випливає, що перетин скінченної кількості відкритих множин є відкритою множиною. Отже, множина G відкрита, а її доповнення F – замкнене.

3) Згідно з властивістю (Top3), $\emptyset$ і X є відкритими множинами, а оскільки вони є доповненням одна до одної, то кожна з них є замкненою множиною в просторі X.

□

Зауваження 2.2. Множини, які одночасно є вікритими і замкненими, називаються *відкрито-замкненими.* З попереднього твердження випливає, що в довільному топологічному просторі X завжди є принаймні дві відкрито-замкнені множини – $\emptyset$ і X.

В топологічному просторі з дискретною топологією кожна множина є відкритою, а значить, кожна множина є і замкненою. Отже, довільна підмножина дискретного простору відкрито-замкнена в ньому.

Зауваження 2.3. Існують множини, які не є ані відкритими, ані замкненими. Наприклад, множина $[0, 1)$ числової прямої з канонічною топологією не є відкритою, оскільки точка 0 не міститься в жодному інтервалі $(a, b) \subseteq [0, 1)$. З тих самих міркувань доповнення $\mathbb{R} \setminus [0, 1) = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$ не є відкритою множиною, бо точка 1 не є елементом жодного інтервалу, який міститься в множині $[1, +\infty)$. А значить, множина $[0, 1)$ не є замкненою.

2.2 Опис відкритих підмножин числової прямої

Твердження 2.4. *Непорожня підмножина числової прямої є відкритою тоді і тільки тоді, коли вона подається у вигляді об'єднання послідовності попарно неперетинних інтервалів.*

Доведення. Необхідність. Нехай $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{R}$ – відкрита множина. Тоді G є об'єднанням деякої сукупності відкритих інтервалів

$$G = \bigcup_{s \in S} (a_s, b_s).$$

Для кожного $x \in G$ існує непорожня множина $S_x \subseteq S$, така, що $x \in (a_s, b_s) \subseteq G$ для всіх $s \in S_x$. Покладемо

$$m_x = \inf\{a_s : s \in S_x\}, \quad M_x = \sup\{b_s : s \in S_x\}$$

і позначимо

$$I_x = (m_x, M_x).$$

Зауважимо, що числа m_x та M_x можуть бути нескінченними. За побудовою,

$$x \in I_x \subseteq G.$$

Отже,

$$G = \bigcup_{x \in G} I_x.$$

Доведемо, що будь-які два інтервали I_x та I_y або збігаються, або не перетинаються. Очевидно, якщо $x = y$, то $I_x = I_y$. Нехай $x \neq y$ і $I_x \cap I_y \neq \emptyset$. Тоді множина $I = I_x \cup I_y$ є відкритим інтервалом, містить точку x і міститься в G. Але I_x – це найбільший інтервал з такою властивістю, тому

$$I_x \cup I_y \subseteq I_x.$$

Аналогічні міркування показують, що

$$I_x \cup I_y \subseteq I_y.$$

Останні два включення можливі лише тоді, коли $I_x = I_y$.

Отже, без обмеження загальності, вважатимемо, що в всі елементи попарно неперетинні.

Залишилося довести, що сім'я $\{I_x : x \in G\}$ містить не більше, ніж зліченну кількість попарно різних елементів. З леми про щільність множини раціональних чисел випливає, що в кожному інтервалі I_x існує раціональне число r_x. Оскільки всі інтервали попарно неперетинні, то вибрані раціональні числа всі різні. Отже,

$$|\{I_x : x \in G\}| \leq |\mathbb{Q}| = \aleph_0.$$

Достатність. Безпосередньо випливає з властивості (Top1). □

2.3 Множина Кантора

В цьому пункті ми наведемо один цікавий приклад замкненої підмножини числової прямої, запропонований німецьким математиком Георгом Кантором.

Розглянемо відрізок $[0, 1]$ і поділимо його на три рівні частини точками $\frac{1}{3}$ і $\frac{2}{3}$. Виділимо інтервал

$$I_1 = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3})$$

та зафарбуємо його червоним кольором:

Тепер поділимо кожний з незафарбованих відрізків $[0, \frac{1}{3}]$ і $[\frac{2}{3}, 1]$ на три рівні частини точками $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{7}{9}$ і $\frac{8}{9}$. Позначимо

$$I_2 = (\tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{9}) \cup (\tfrac{7}{9}, \tfrac{8}{9}) \cup I_1$$

та зафарбуємо цю множину червоним:

Знову поділимо кожну з незафарбованих множин на три рівні частини, позначимо

$$I_3 = (\tfrac{1}{27}, \tfrac{2}{27}) \cup (\tfrac{7}{27}, \tfrac{8}{27}) \cup (\tfrac{19}{27}, \tfrac{20}{27}) \cup (\tfrac{25,27}{26,27}) \cup I_2$$

і також зафарбуємо цю множину червоним.

Продовжуючи цей алгоритм до нескінченності, ми отримаємо послідовність "червоних" множин $(I_n)_{n=1}^{\infty}$, де кожна множина I_n є об'єднанням відкритих інтервалів, а значить, і сама є відкритою множиною.

Множина

$$C = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

називається *множиною Кантора* і складається з незафарбованих частинок відрізка $[0, 1]$.

Можна довести, що канторова множина

✗ замкнена;

✗ складається з чисел, трійковий розклад яких не містить цифри 1;

✗ має континуальну потужність;

✗ ніде не щільна (тобто, кожний інтервал $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ містить інтервал (c, d), який не перетинається з C).

Лекція 3

База топології

Як ми бачили в першій лекції, канонічна топологія на числовій прямій описувалася як сукупність всіх можливих об'єднань інтервалів вигляду (a, b), де $a, b \in \mathbb{R}$. Але часто топологічну структуру на множині легше задавати за допомогою деякої її частини, достатньої для відновлення всієї структури. Таку частину називають базою топології.

3.1 Означення бази

Означення 3.1. Нехай $(X, \mathscr{O})$ – топологічний простір. *База топології* або *база топологічного простору* – це деякий набір відкритих підмножин цього простору, такий, що кожна непорожня відкрита множина зображається у вигляді об'єднання множин з цього набору.

З означення канонічної топології на $\mathbb{R}$ випливає, що всі можливі інтервали $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ утворюють базу цієї топології.

Доведемо наступний простий факт, який ми надалі будемо часто використовувати.

Дуже корисна лема. *Нехай* $\mathscr{B}$ *– система множин і* A *– деяка множина. Тоді*

$$A \text{ подається як об'єднання елементів з } \mathscr{B}$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall x \in A \ \ \exists B_x \in \mathscr{B}\colon \ x \in B_x \subseteq A.$$

Доведення. $\Rightarrow$) За припущенням, існує набір $\mathscr{B}'$ деяких множин з $\mathscr{B}$, такий, що

$$A = \bigcup\{B : B \in \mathscr{B}'\}. \tag{3.1}$$

Зафіксуємо довільну точку $x \in A$. Тоді $x \in \bigcup\{B : B \in \mathscr{B}'\}$, а, отже, x належить до якоїсь множини $B_x \in \mathscr{B}'$. З рівності (3.1) випливає, що $B_x \subseteq A$.

$\Leftarrow$) Навпаки, нехай для кожного $x \in A$ існує множина $B_x \in \mathscr{B}$, така, що $x \in B_x \subseteq A$. Покажемо, що

$$A = \bigcup_{x \in A} B_x.$$

Для цього зауважимо, що включення $A \subseteq \bigcup_{x\in A} B_x$ випливає з включення $x \in B_x$ для кожного $x \in A$, а обернене включення випливає з умови $B_x \subseteq A$ для кожного $x \in A$. □

Твердження 3.2. *[Характеризації бази топології] Нехай* X *– деяка множина.*

① *Сукупність* $\mathscr{B}$ *відкритих множин є базою топології* $\mathscr{O}$ *на множині* X *тоді і тільки тоді, коли для довільного* $O \in \mathscr{O}$ *і довільного* $x \in O$ *існує* $B \in \mathscr{B}$*, таке, що* $x \in B \subseteq O$.

② *Сукупність* $\mathscr{B}$ *відкритих множин є базою деякої топології на* X *тоді і тільки тоді, коли*

(B1) X *є об'єднанням деяких множин з* $\mathscr{B}$,

(B2) *перетин довільних двох множин з* $\mathscr{B}$ *зображається у вигляді об'єднання деяких множин з* $\mathscr{B}$.

Доведення. ① Випливає з дуже корисної леми.

- ② $\Rightarrow$) Нехай $\mathscr{B}$ – це база деякої топології $\mathscr{O}$. Оскільки $X \in \mathscr{O}$, то перша умова твердження негайно випливає з означення бази. Візьмемо тепер дві довільні множини $U, V \in \mathscr{B}$. З другої аксіоми топологічної структури випливає, що $U \cap V \in \mathscr{O}$, а отже, знову застосувавши означення бази, ми отримаємо другу умову твердження.

- ② $\Leftarrow$) Легко бачити, що сім'я $\mathscr{O}$, що складається з усіх можливих об'єднань підмножин набору $\mathscr{B}$, задовольняє першу аксіому топологічної структури (оскільки об'єднання об'єднань є об'єднанням).

  Перевіримо другу аксіому. Нехай $U, V \in \mathscr{O}$. Тоді

$$U = \bigcup_{s \in S} U_s,\ V = \bigcup_{t \in T} V_t,$$

  де множини U_s і V_t є елементами бази $\mathscr{B}$ для всіх $s \in S$ і $t \in T$. Оскільки

$$U \cap V = \left(\bigcup_{s \in S} U_s \right) \cap \left(\bigcup_{t \in T} V_t \right) = \bigcup_{s \in S, t \in T} (U_s \cap V_t),$$

  а перетини $U_s \cap V_t$ за умовою зображаються у вигляді об'єднань множин з $\mathscr{B}$, то і $U \cap V$ також подається в такому вигляді. Отже, $U \cap V \in \mathscr{O}$.

  Третя аксіома топологічної структури негайно випливає з того, що X подається як об'єднання елементів з $\mathscr{B}$.

□

Розглянемо на числовій прямій базу $\mathscr{B}'$ канонічної топології $\mathscr{O}$:

$$\mathscr{B}' = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

і сім'ю

$$\mathscr{B}'' = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Покажемо, що $\mathscr{B}''$ також утворює базу канонічної топології на $\mathbb{R}$. Для цього перевіримо умову ① попереднього твердження. Нехай

$O \in \mathscr{O}$ і $x \in O$. Оскільки O є об'єднанням інтервалів з $\mathscr{B}'$, то існує деякий інтервал $(a, b) \in \mathscr{B}'$, такий, що

$$x \in (a, b) \subseteq O.$$

З леми про щільність раціональних чисел випливає, що існують раціональні числа r і q, такі, що $a < r < x$ і $x < q < b$. Таким чином, $x \in (r, q) \subseteq O$.

Зауважимо, що потужність бази $\mathscr{B}'$ дорівнює потужності множини всіх пар дійсних чисел, тобто

$$|\mathscr{B}'| = |\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c},$$

а потужність бази $\mathscr{B}''$ дорівнює потужності множини всіх пар раціональних чисел, тобто

$$|\mathscr{B}''| = |\mathbb{Q}^2| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0 < |\mathscr{B}'|.$$

Іншими словами, база $\mathscr{B}''$ "менше", ніж база $\mathscr{B}'$.

Оскільки множина всіх кардинальних чисел цілком впорядкована відношенням $<$, то множина кардинальних чисел виду $|\mathscr{B}|$, де $\mathscr{B}$ – база топологічного простору $(X, \mathscr{O})$, має найменший елемент.

Означення 3.3. Найменше з усіх кардинальних чисел виду $|\mathscr{B}|$, де $\mathscr{B}$ – база топологічного простору $(X, \mathscr{O})$, називається *вагою топологічного простору* $(X, \mathscr{O})$ і позначається через $w(X, \mathscr{O})$.

Припустимо, що існує база $\mathscr{B}$ канонічної топології $\mathscr{O}$ на $\mathbb{R}$, яка складається із скінченної кількості множин:

$$\mathscr{B} = \{B_1, \ldots, B_n\}.$$

Оскільки кожний обмежений інтервал і кожний необмежений інтервал є елементами $\mathscr{O}$, то вони подаються як об'єднання деяких множин з $\mathscr{B}$. Таким чином, деякі елементи з сім'ї $\mathscr{B}$ є обмеженими множинами, а деякі – необмеженими. Не порушуючи загальності, припустимо, що множини $B_1, \ldots, B_k$ для деякого натурального k обмежені, а множини $B_{k+1}, \ldots, B_n$ – ні. Покладемо $\alpha = \inf(B_1 \cup \cdots \cup B_k) \in \mathbb{R}$ і $\beta = \sup(B_1 \cup \cdots \cup B_k) \in \mathbb{R}$. Зрозуміло тоді, що жодний обмежений інтервал, який лежить зліва від числа

α, та жодний обмежений інтервал, який лежить справа від числа β вже не подається у вигляді об'єднання множин з сім'ї $\mathscr{B}$.

Таким чином, простір $\mathbb{R}$ зі стандартною топологією має зліченну вагу.

Вправа 3.4. *Доведіть, що вага дискретного простору X дорівнює його потужності.*

3.2

Бази евклідової топології площини

Розглянемо наступні три набори підмножин площини $\mathbb{R}^2$:

- ✘ набір Σ^1, що складається з усіх можливих квадратів (в які не входять сторони та вершини), сторони яких паралельні бісектрисам координатних кутів;
- ✘ набір Σ^2, що складається з усіх можливих кругів без межі;
- ✘ набір Σ^∞, що складається з усіх можливих квадратів (в які не входять сторони та вершини), сторони яких паралельні координатним осям.

Твердження 3.5. ① *Довільний елемент з Σ^1 є об'єднанням елементів з Σ^∞.*

② *Перетин двох елементів з Σ^1 є об'єднанням елементів з Σ^1.*

③ *Кожний з наборів Σ^1, Σ^2, Σ^∞ є базою однієї і тієї ж топологічної структури на площині $\mathbb{R}^2$.*

Доведення.

① Нехай $U \in \Sigma^1$ – внутрішність деякого квадрату, сторони якого паралельні бісектрисам координатних кутів. Зафіксуємо довільну точку $p = (x, y) \in U$ та знайдемо квадрат, внутрішність якого B містить дану точку і міститься в U. Позначимо через r найменшу з чотирьох відстаней від точки p до сторін квадрату U. Зрозуміло, що тоді круг K з центром в точці p радіусом r дотикається до однієї з сторін квадрата U і повністю в ньому міститься. Розглянемо внутрішність B квадрату з центром в точці p, який вписаний в круг K, сторони якого паралельні осям координат. Ясно, що $p \in B \subseteq U$. Залишилося застосувати дуже корисну лему.

② Доведення цього факту залишаємо читачеві в якості вправи.

③ Зрозуміло, що перша умова твердження про характеризацію бази виконується для набору Σ^1. Друга характеризаційна умова виконується згідно з властивістю ② цього твердження. Отже, набір Σ^1 є топологічною структурою.

Аналогічно встановлюється, що набір Σ^2 також є топологічною структурою.

Покажемо, що топологічні структури, породжені наборами Σ^1 і Σ^2 збігаються.

Збіг топологічних структур, що породжуються наборами Σ^1 і Σ^2, означає, що кожна множина на площині, яка є об'єднанням квадратиків з Σ^1, є також об'єднанням кругів з Σ^2, і навпаки.

$\square$

Топологічна структура, що породжується кожною з баз Σ^1, Σ^2 чи Σ^∞ називається *евклідовою топологією на площині.*

Означення 3.6. Бази, які задають одну і ту ж топологічну структуру, називаються *еквівалентними.*

3.3 Передбаза простору і база в точці

Означення 3.7. Сім'я множин $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{O}$ називається *передбазою топологічного простору* $(X, \mathscr{O})$, якщо сім'я

$$\mathscr{B} = \{P_1 \cap \cdots \cap P_n : P_k \in \mathscr{P}, 1 \leq k \leq n, n \in \mathbb{N}\}$$

всіх можливих скінченних перетинів елементів з $\mathscr{P}$ утворює базу в $(X, \mathscr{O})$.

Наприклад, сім'я нескінченних інтервалів

$$\mathscr{P} = \{(a, +\infty), (-\infty, a) : a \in \mathbb{Q}\}$$

утворює передбазу канонічної топології на числовій прямій.

Означення 3.8. Нехай $(X, \mathscr{O})$ – топологічний простір і $x \in X$. Сім'я $\mathscr{B}_x$ околів точки x називається *базою топологічного простору X в точці x*, якщо

$$\begin{gathered}\text{для довільного околу } V \text{ точки } x \\ \text{існує елемент } U \in \mathscr{B}_x, \text{ такий, що } x \in U \subseteq V.\end{gathered} \tag{3.2}$$

Твердження 3.9. *Якщо $\mathscr{B}$ – це база топологічного простору $(X, \mathscr{O})$, то сім'я B_x, що складається з усіх елементів бази $\mathscr{B}$, які містять точку x, утворює базу в точці x.*

Доведення. Перевіримо, що виконується умова (3.2) з означення бази в точці. Нехай V – довільний окіл точки x. Згідно з характеризацією бази топологічного простору, існує елемент $U \in \mathscr{B}$, такий, що $x \in U \subseteq V$. За припущенням твердження, $V \in B_x$. □

Твердження 3.10. *Якщо для кожної точки $x \in (X, \mathscr{O})$ визначена база $\mathscr{B}_x$ в цій точці, то об'єднання*

$$\mathscr{B} = \bigcup_{x \in X} \mathscr{B}_x$$

утворює базу топологічного простору $(X, \mathscr{O})$.

Доведення. Розглянемо відкриту множину $O \in \mathscr{O}$. Для довільного $x \in O$ виберемо базисну множину $U_x \in \mathscr{B}_x$, таку, що $x \in U_x \subseteq O$. Легко перевірити, що $O = \bigcup_{x \in O} U_x$. Отже, множина O зображається у вигляді об'єднання множин з сім'ї $\mathscr{B}$, а значить $\mathscr{B}$ є базою в $(X, \mathscr{O})$. □

Лекція 4

Порівняння топологій

4.1 Різні топології на числовій прямій

Розглянемо різні топологічні структури на множині всіх дійсних чисел.

- ✘ **Дискретна топологія.** Топологічну структуру утворює набір $\mathscr{O} = 2^{\mathbb{R}}$. Оскільки кожна одноточкова множина є відкритою в цій топології, то кожна база $\mathscr{B}$ дискретної топології повинна містити всі одноточкові множини. Найменша така база складається з усіх точок числової прямої, тобто, $\mathscr{B} = \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$. Отже, $w(\mathbb{R}, \mathscr{O}) = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$.

- ✘ **Антидискретна топологія.** Топологічну структуру утворює набір $\mathscr{O} = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Очевидно, що база цієї топології $\mathscr{B}$ теж складається з двох множин $\emptyset$ і $\mathbb{R}$, отже, $w(\mathbb{R}, \mathscr{O}) = 2$.

- ✘ **Ко-скінченна топологія.** Нехай

$$\mathscr{O} = \{A \subseteq \mathbb{R} : 0 \notin A\} \cup \{A : |X \setminus A| < \aleph_0\},$$

тобто, сім'я $\mathscr{O}$ складається з усіх підмножин числової прямої, які не містять нуль, а також з усіх підмножин, які мають скінченне доповнення. Легко встановити, що сім'я $\mathscr{O}$ утворює топологію на $\mathbb{R}$. Всі одноточкові множини в $(\mathbb{R}, \mathscr{O})$ за виключенням множини $\{0\}$ відкрито-замкнені, а множина $\{0\}$ замкнена, але не відкрита. Сім'я,

$$\mathscr{B} = \{\{x\} : x \neq 0\} \cup \{A : |X \setminus A| < \aleph_0\}$$

утворює базу в просторі $(\mathbb{R}, \mathscr{O})$ найменшої потужності. Тому $w(\mathbb{R}, \mathscr{O}) = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$.

4.2 Слабша та сильніша топології

Як ми бачили з попередніх прикладів, на одній і тій самій множині можна розглядати різні топологічні структури.

Означення 4.1. Нехай $\mathscr{O}_1$ і $\mathscr{O}_2$ – дві топологічні структури на множині X, причому $\mathscr{O}_1 \subseteq \mathscr{O}_2$. Тоді кажуть, що топологія $\mathscr{O}_2$ *сильніша (або тонша)*, ніж $\mathscr{O}_1$, а, відповідно, топологія $\mathscr{O}_1$ *слабша (або груб-ша)*, ніж $\mathscr{O}_2$.

Найсильніша топологія на множині X – дискретна, адже вона містить всі підмножини множини X. А найслабша топологія на множині X – антидискретна, оскільки складається тільки з двох множин.

Зрозуміло, що не завжди виконується одне з включень $\mathscr{O}_1 \subseteq \mathscr{O}_2$ чи $\mathscr{O}_2 \subseteq \mathscr{O}_1$. В такому випадку топології $\mathscr{O}_1$ і $\mathscr{O}_2$ називаються *непорівнянними.*

4.3

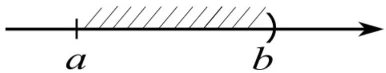
Пряма Зорґенфрея

Розглянемо сім'ю підмножин дійсних чисел

$$\mathscr{B} = \{[a,b) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Покажемо, що $\mathscr{B}$ задовольняє аксіоми бази (тобто, умови (B1) і (B2) твердження 3.2 з попередньої лекції). Справді, нехай $x \in \mathbb{R}$. Позначимо $r = [x] + 1$. Тоді $r > x$ і $r \in \mathbb{Q}$. Крім того, $x \in [x, r) \subseteq \mathbb{R}$. Отже, умова (B1) виконується. Візьмемо тепер два довільні проміжки $[a, b)$ і $[c, d)$, де $b, d \in \mathbb{Q}$, та точку $x \in [a, b) \cap [c, d)$. Тоді $x \in [c, b) \in \mathscr{B}$. Таким чином, умова (B2) теж виконується. Отже, сім'я $\mathscr{B}$ утворює базу деякої топології $\mathscr{O}$ на $\mathbb{R}$.

Числова пряма, наділена такою топологією називається *пряма Зорґенфрея* і позначається символом $\mathbb{S}$.



Розглянемо доповнення до довільної множини з сім'ї $\mathscr{B}$:

$$\mathbb{S} \setminus [a,b) = (-\infty, a) \cup [b, +\infty)$$

і виберемо дві послідовності раціональних чисел $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ та $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, такі, що $a_n < a$, $b_n > b$ і $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Тоді

$$(-\infty, a) \cup [b, +\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a-n, a_n) \cup [b, b_n).$$

Оскільки $[a-n, a_n), [b, b_n) \in \mathbb{B}$, то множина $\mathbb{S} \setminus [a,b)$ є відкритою в $\mathbb{S}$. А, отже, множина $[a, b)$ є відкрито-замкненою в $\mathbb{S}$.

Нехай $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ – довільна послідовність дійсних чисел, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ – довільна послідовність раціональних чисел, такі, що що $a < a_n < b_n < b$ і $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Тоді з рівності

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n)$$

випливає, що інтервал (a, b) є відкритою множиною на прямій Зорґенфрея. Отже, топологія прямої Зорґенфрея сильніша, ніж канонічна топологія числової прямої.

Зрозуміло, що $|\mathscr{B}| = \mathfrak{c}$. Отже, $w(\mathbb{S}) \leq \mathfrak{c}$. Доведемо, що вага прямої Зорґенфрея незліченна. Припустимо, міркуючи від супротивного, що існує зліченна база $\mathscr{B}' = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ топології прямої Зорґенфрея. Без обмеження загальності можемо вважати, що кожна множина B_n обмежена знизу (справді, якщо якась множина B_0 є необмеженою знизу, то сім'я $\mathscr{B}' \setminus \{B_0\}$ також залишається базою, оскільки для кожного $x \in B_0$ існує $B_x \in \mathscr{B}'$, таке, що $x \in B_x \subseteq [x, r))$. Покладемо $p_n = \inf B_n$. Оскільки множина $P = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ зліченна, то існує $p \in \mathbb{S} \setminus P$. Якщо $p_n < p$, то жодна множина вигляду $[p, r)$ не може містити множину з $\mathscr{B}$; якщо $p_n > p$, то множина $[p, p_n)$ не перетинається з множинами з $\mathbb{B}$. Таким чином, $w(\mathbb{S}) = \mathfrak{c}$.

Пряма Зорґенфрея вперше з'явилася в статті Александрова і Урисона [9], але тільки після появи роботи американського математика Роберта Зорґенфрея [11] вона стала "універсальним контрприкладом" в топології.

4.4

Площина Немицького

Розглянемо верхню півплощину

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}.$$

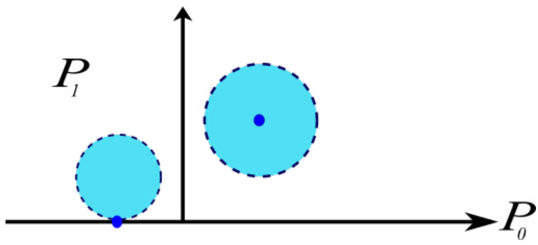
Через P_0 позначимо пряму $y = 0$, а через P_1 – півплощину $P \setminus P_0$.

Для кожної точки $p = (x, y) \in P_1$ виберемо число $N_p \in \mathbb{N}$, таке, що внутрішність круга з центром в точці p і радіусом $\frac{1}{N_p}$ міститься в P_1, та позначимо через $B_{p,n}$ внутрішності кругів з центром в точці p і радіусами $N_p + n$.

Для всіх точок $p = (x, 0) \in P_0$ через $B_{p,n}$ позначимо внутрішність круга, який *дотикається* до прямої P_0 в точці x і має радіус $\frac{1}{n}$ разом з точкою $\{(x, 0)\}$.

Площиною Немицького називається множина $\mathbb{P} = P_0 \cup P_1$ з топологією, породженою сім'єю базисних множин

$$\mathscr{B} = \{B_{p,n} : p \in P, n \in \mathbb{N}\}.$$



Площина Немицького була введена Александровим і Хопфом в [10] з посиланням на Немицького. Площина Немицького є іншим "універсальним контрприкладом" в топології.

Лекція 5

Метричні простори

5.1

Означення і перші приклади

Означення 5.1. *Метрикою* на множині X називається відображення $d : X \times X \to [0, +\infty)$ з властивостями

(M1) $d(x, y) \geq 0$ (невід'ємність);

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ (симетричність);

(M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (нерівність трикутника);

(M4) $d(x, y) = 0 \iff x = y$

для довільних $x, y, z \in X$.

✘ **Дискретна метрика.** Якщо X – довільна множина, то функція

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y \end{cases}$$

є метрикою на X, яка називається *дискретною метрикою.*

Перевірку тих фактів, що наведені нижче функції задовольняють всі аксіоми метрики, залишаємо читачеві в якості вправи.

✘ **Метрики на числовій прямій.**

- $d(x,y) = |x-y|$;
- $d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$;
- $d(x,y) = \sin(x-y)$;
- $d(x,y) = |\sin(x-y)|$.

✘ **Метрики на площині.**

- $d_2(x,y) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$;
- $d_1(x,y) = |x_1-x_2|+|y_1-y_2|$;
- $d_\infty(x,y) = \max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}$.

Означення 5.2. *Метричний простір* (X,d) – це множина X разом із введеною на ній метрикою d.

5.2 Кулі та сфери

Означення 5.3. Нехай $x_0 \in X$ і $\varepsilon > 0$. Множини

$$B(x_0,\varepsilon) = \{x \in X : d(x,x_0) < \varepsilon\},$$

$$B[x_0,\varepsilon] = \{x \in X : d(x,x_0) \leq \varepsilon\}$$

називаються *відкритою* чи *замкненою кулею* з центром x_0 і радіусом ε в метричному просторі (X,d), відповідно.

Множину

$$S[x_0,\varepsilon] = \{x \in X : d(x,x_0) = \varepsilon\}$$

ми називаємо *сферою*.

Для множини A і точки x з метричного простору (X, d) покладемо

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y),$$

$$\operatorname{diam} A = \sup_{x,y \in A} d(x, y).$$

5.3 Метрична топологія

Вправа 5.4. *Множина всіх відкритих куль в метричному просторі (X, d) утворює базу деякої топології.*

Вправа 5.5. *Множина U є відкритою в метричному просторі (X, d), якщо кожна її точка міститься в цій множині разом з деякою кулею.*

Вправа 5.6. *Замкнена куля в метричному просторі є замкненою множиною відносно метричної топології.*

Вправа 5.7. *Сфера в метричному просторі є замкненою множиною відносно метричної топології.*

Означення 5.8. Топологічний простір X називається *метризовним*, якщо його топологічна структура породжується деякою метрикою d на X.

Вправа 5.9. *Скінченний топологічний простір метризовний тоді і тільки тоді, коли він дискретний.*

Лекція 6

Розташування точок відносно множини

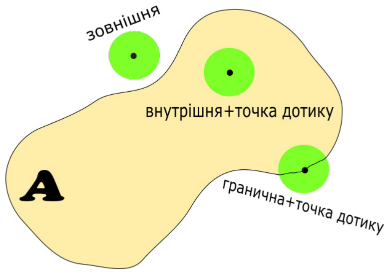
6.1 Внутрішні та зовнішні точки; точки дотику

Нехай X – топологічний простір і $A \subseteq X$.

Означення 6.1. Точка $a \in X$ називається

- *внутрішньою точкою* множини A, якщо вона міститься в A разом з деяким своїм околом;
- *зовнішньою точкою* множини A, якщо вона має окіл, що не перетинається з множиною A;
- *граничною точкою* множини A, якщо будь який її окіл перетинається з A та з доповненням до A;
- *точкою дотику* множини A, якщо будь який її окіл перетинається з A.

З означень випливає, що кожна зовнішня, а також кожна гранична точка, є також точкою дотику множини.



Твердження 6.2. *Множина G відкрита в топологічному просторі X тоді і тільки тоді, коли кожна її точка є внутрішньою.*

Доведення. *Необхідність* очевидна, бо множина G є околом кожної своєї точки.

Достатність. Для кожної точки $x \in G$ виберемо окіл її U_x, такий, що $U_x \subseteq G$. Тоді $G = \bigcup_{x \in G} U_x$ є відкритою множиною як об'єднання відкритих множин. □

6.2 Внутрішність множини

Означення 6.3. *Внутрішністю множини* A називається найбільша (по відношенню включення) відкрита множина, що міститься в A.

Позначається внутрішність множини A в топологічному просторі X одним з наступних символів (від французького *intérieur* і англійського *interior*):

$$\operatorname{int} A, \quad \operatorname{int}_X A, \quad \overset{\circ}{A}$$

З означення внутрішності безпосередньо випливають наступні факти.

Твердження 6.4. *Нехай X – топологічний простір.*

(А) *Кожна підмножина в X має внутрішність. Нею є об'єднання всіх відкритих множин, що містяться в даній множині.*

(Б) $\operatorname{int} A \subseteq A$ *для довільної множини* $A \subseteq X$.

(В) $\operatorname{int} \emptyset = \emptyset$, $\operatorname{int} X = X$.

Твердження 6.5. *Внутрішність множини A – це множина всіх її внутрішніх точок.*

Доведення. Позначимо $G = \{x \in A : x -$ внутрішня точка$\}$ і покажемо, що $G = \operatorname{int} A$.

Нехай $x \in G$. Тоді $x \in A$ та існує окіл U точки x, такий, що $x \in U \subseteq A$. Оскільки, згідно із властивістю 6.4 (А), $\operatorname{int} A$ – це об'єднання всіх відкритих множин, які містяться в A, а множина U відкрита, то $U \subseteq \operatorname{int} A$. Звідси випливає, що $x \in \operatorname{int} A$.

Навпаки, візьмемо довільну точку $x \in \operatorname{int} A$. Зауважимо, що множина $\operatorname{int} A$ є відкритим околом точки x. Отже, $x \in \operatorname{int} A \subseteq A$ за властивістю (Б). За означенням, точка x є внутрішньою точкою множини A. □

Твердження 6.6. *Множина G відкрита в топологічному просторі X тоді і тільки тоді, коли $G = \operatorname{int} G$.*

Доведення. Потрібно довести тільки включення $G \subseteq \operatorname{int} G$. Нехай $x \in G$. Оскільки множина G відкрита, то вона є околом точки x. З включення $G \subseteq G$ і твердження (А) випливає, що $G \subseteq \operatorname{int} G$. □

Приклад 6.7. *Нехай $X = \mathbb{R}$ зі стандартною топологією.*

1) $\operatorname{int} [0, 1) = (0, 1)$.

Доведення. Покажемо, що $\operatorname{int} [0, 1) \subseteq (0, 1)$. Нехай $x \in \operatorname{int} [0, 1)$. Тоді за твердженням 6.4 точка x є внутрішньою точкою множини $[0, 1)$. Тобто, існує такий інтервал $U = (a, b)$, що

$$x \in (a, b) \subseteq [0, 1).$$

Зрозуміло, що $a \geq 0$ і $b \leq 1$. Тоді $0 < x < 1$.

Навпаки, нехай $x \in (0,1)$. Тоді відкрита множина $(0,1)$ є околом точки x, який міститься в $[0,1)$. Отже, x є внутрішньою точкою множини $[0,1)$, а значить, $x \in \operatorname{int}[0,1)$ за твердженням 6.5. $\square$

2) $\operatorname{int}\mathbb{Q} = \emptyset$.

Доведення. Припустимо, що існує точка x, така, що $x \in \operatorname{int}\mathbb{Q}$. Тоді існує інтервал $U = (a,b)$, такий, що $x \in (a,b) \subseteq \mathbb{Q}$. Але між двома дійсними числами завжди можна знайти ірраціональне число, звідки отримується суперечність. $\square$

Приклад 6.8. *Нехай* $X = \{a,b,c,d\}$ *з топологією*

$$\mathscr{O} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}, \{a,b,c,d\}\}.$$

Знайдіть $\operatorname{int}\{a,b,d\}$ *в* $(X, \mathscr{O})$.

Розв'язання. Зрозуміло, що $a, b \in \operatorname{int}\{a,b,d\}$, оскільки множина $\{a,b\}$ є елементом $\mathscr{O}$, а значить, відкритою множиною. Залишається перевірити, чи $d \in \int \{a,b,d\}$. Для цього потрібно переконатися, чи міститься точка d в множині $\{a,b,d\}$ разом з деяким своїм околом. Але з означення топології $\mathscr{O}$ випливає, що єдина відкрита множина, яка містить точку d – це весь простір $X = \{a,b,c,d\}$. Оскільки $X \nsubseteq \{a,b,d\}$, то точка d не є внутрішньою точкою множини $\{a,b,d\}$. Отже, $\operatorname{int}\{a,b,d\} = \{a,b\}$. $\square$

6.3 Замикання множини

Означення 6.9. *Замиканням множини* A називається найменша замкнена множина, що містить A.

Позначається замикання множини A в топологічному просторі X одним з наступних символів (від французького *clôture* і англійського *closure*):

$$\mathrm{cl}\, A, \quad \mathrm{cl}_X\, A, \quad \overline{A}$$

З означення негайно випливає включення

$$A \subseteq \overline{A}$$

для довільної множини $A \subseteq X$.

Твердження 6.10. *Нехай X – топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді*

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \supseteq A \\ F - \text{замкнена в } X}} F \tag{6.1}$$

Доведення. Нехай $x \in \overline{A}$. Припустимо, міркуючи від супротивного, що існує замкнена множина $F \subseteq X$, яка містить A, але не містить точку x. Зауважимо, що множина $\overline{A} \cap F$ замкнена, як перетин двох замкнених множин. Крім того, $\overline{A} \cap F \supseteq A \cap A = A$. Але ж $\overline{A}$ – це найменша з усіх замкнених множин, які містять A, тому $\overline{A} \subseteq \overline{A} \cap F$. З іншого боку, $\overline{A} \cap F \subseteq \overline{A}$. Отже, $\overline{A} = \overline{A} \cap F$. Звідки випливає, що $x \in F$, а ми припустили протилежне. Таким чином, ми отримали суперечність.

Навпаки, нехай x належить до правої частини рівності 6.1. Тоді x належить до всіх можливих замкнених множин в X, які містять A. А значить, належить і до найменшої з таких множин, тобто, до $\overline{A}$. □

Твердження 6.11. *Для довільної підмножини A топологічного простору X має місце рівність*

$$\overline{A} = \{x \in X : x - \text{ точка дотику множини } A\}. \tag{6.2}$$

Доведення. Нехай $x \in \overline{A}$ і U – довільний відкритий окіл точки x. Якщо $x \in A$, то ясно, що $U \cap A \neq \emptyset$. Якщо ж $x \notin A$, то у випадку, коли раптом $U \cap A = \emptyset$, то $A \subseteq X \setminus U$. А оскільки множина $X \setminus U$ замкнена, то $\overline{A} \subseteq X \setminus U$ за означенням замикання. Але тоді $x \in X \setminus U$, суперечність.

Візьмемо тепер довільну точку $x \in X$, яка є точкою дотику множини A, і покажемо, що вона входить в усі замкнені множини, які містять A. Нехай F – довільна замкнена множина, така, що

$A \subseteq F \subseteq X$. Якщо $x \notin F$, то $X \setminus F$ є відкритим околом точки x. За означенням точки дотику $(X \setminus F) \cap A \neq \emptyset$. Тоді $A \setminus F \neq \emptyset$. Отримується суперечність, адже $A \subseteq F$. □

Твердження 6.12. *Множина A замкнена в топологічному просторі X тоді і тільки тоді, коли $A = \overline{A}$.*

Доведення. Розглянемо замкнену множину A. Зрозуміло, що $A \subseteq \overline{A}$. Для доведення оберненого включення візьмемо довільну точку $x \in \overline{A}$. Зауважимо, що доповнення $G = X \setminus A$ є відкритою множиною. Якщо припустити, що $x \notin A$, то тоді G буде відкритим околом точки x. З попереднього твердження маємо, що x є точкою дотику множини A, а значить, $G \cap A \neq \emptyset$. А це суперечить припущенню.

Навпаки, нехай $A = \overline{A}$. З означення замикання маємо, що множина A замкнена. □

Приклад 6.13. *Нехай $X = \mathbb{R}$ зі стандартною топологією.*

1) $\overline{[0,1)} = [0,1]$.

Доведення. Нехай $x \in \overline{[0,1)}$. Припустимо, що $x \notin [0,1]$. Тоді множина $U = \mathbb{R} \setminus [0,1]$ є відкритим околом точки x, який повинен перетинатися з $[0,1)$ (адже x – точка дотику проміжку $[0,1)$). А це неможливо. Отже, $x \in [0,1]$.

Навпаки, нехай $x \in [0,1]$ і $U = (a,b)$ – довільний окіл точки x. Якщо раптом $(a,b) \cap [0,1) = \emptyset$, то або $a \geq 1$, або $b \leq 0$. Але тоді або $x > 1$, або $x < 0$, що неможливо. Отже, $(a,b) \cap [0,1) \neq \emptyset$. Значить, x є точкою дотику множини $[0,1)$. Таким чином, за твердженням 6.11, $x \in \overline{[0,1)}$. □

2) $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Доведення. Зрозуміло, що $\overline{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{R}$. Доведемо обернене включення. Нехай $x \in \mathbb{R}$ і $U = (a,b)$ – довільний окіл точки x. За лемою про щільність раціональних чисел, $U \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Отже, $x \in \overline{\mathbb{Q}}$. □

Приклад 6.14. *Нехай X – топологічний простір з прикладу 6.8. Знайдіть $\overline{\{a\}}$.*

Розв'язання. Подивимося, чи входять точки b, c і d до $\overline{\{a\}}$. Для цього треба перевірити, чи кожний окіл вказаних точок містить точку a. За означенням даної топології, множина $\{b\}$ є околом точки b, але точку a не містить. Отже, $b \notin \overline{\{a\}}$. Околами точки c є множини $\{a, c\}$, $\{a, b, c\}$ і весь простір X. Всі вони містять точку a, отже, $c \in \overline{\{a\}}$. Єдиним околом точки d є весь простір $\{a, b, c, d\}$, який містить точку a. Отже, $d \in \overline{\{a\}}$. Таким чином,

$$\overline{\{a\}} = \{a, c, d\}.$$

□

Лекція 7

Оператори замикання та внутрішності

7.1 Властивості оператора замикання

Теорема 7.1. *Нехай X – топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді*

1) *якщо $A \subseteq B$, то $\overline{A} \subseteq \overline{B}$;*

2) *$A \subseteq \overline{A}$;*

3) *$\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;*

4) *$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.*

Доведення. **1)** Нехай $x \in \overline{A}$ і U – довільний окіл точки x. Тоді $U \cap A \neq \emptyset$. Оскільки $A \subseteq B$, то $U \cap B \neq \emptyset$. Отже, $x \in \overline{B}$.

2) Безпосередньо випливає з означення замикання.

3) Замикання $\overline{A}$ множини A є замкненою множиною, тому на підставі Твердження 6.12 попередньої лекції маємо, що $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

4) Оскільки $A \subseteq A \cup B$ і $B \subseteq A \cup B$, то з властивості 1) випливає включення

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}. \tag{7.1}$$

З іншого боку, $A \subseteq \overline{A}$ і $B \subseteq \overline{B}$. Тоді

$$A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}.$$

З властивості 1) маємо, що

$$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}.$$

Зауважимо, що множина $\overline{A} \cup \overline{B}$ замкнена, тому $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Отже,

$$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}. \tag{7.2}$$

Поєднавши включення (7.1) і (7.2), ми отримаємо шукану рівність. $\square$

Зауваження 7.2. Аналогічна рівність до рівності (4) не вірна для перетину двох множин. Справедливе тільки включення

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Справді, розглянемо точку $x \in \overline{A \cap B}$ і довільний її окіл U. Тоді $U \cap (A \cap B) = (U \cap A) \cap (U \cap B) \neq \emptyset$. Звідси випливає, що $U \cap A \neq \emptyset \neq U \cap B$. Отже, $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

Але обернене включення не вірне. Наприклад, для множин $A = (0,1)$ і $B = (1,2)$ маємо

$$\overline{A} = [0,1], \quad \overline{B} = [1,2], \quad \overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}.$$

А з іншого боку,

$$\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset \not\supseteq \{1\}.$$

7.2 Зв'язок між замиканням та внутрішністю

Теорема 7.3. *Для довільної множини $A \subseteq X$ має місце рівність*

$$\mathrm{int}A = X \setminus \overline{X \setminus A}. \tag{7.3}$$

Доведення. Припустимо, що існує точка $x \in \mathrm{int}A$, яка не належить до правої частини рівності. Тоді $x \in \overline{X \setminus A}$. Звідси випливає, що довільний окіл точки x (зокрема, окіл $\mathrm{int}A$) перетинається з множиною $X \setminus A$. Але ж $\mathrm{int}A \cap (X \setminus A) = \emptyset$. Отримуємо суперечність.

Навпаки, нехай $x \notin \overline{X \setminus A}$. Оскільки множина $X \setminus \overline{X \setminus A}$ відкрита, то точка x належить до неї разом з деяким своїм околом U. Тоді $U \cap \overline{X \setminus A} = \emptyset$. Оскільки $X \setminus A$ є підмножиною $\overline{X \setminus A}$, то

$$U \cap (X \setminus A) = \emptyset.$$

Отже, $x \in U \subseteq A$. А це означає, що $x \in \mathrm{int}A$. □

7.3 Властивості оператора внутрішності

Теорема 7.4. *Нехай X – топологічний простір і $A, B \subseteq X$. Тоді*

1) *якщо $A \subseteq B$, то $\mathrm{int}A \subseteq \mathrm{int}B$;*

2) $\mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}A \cap \mathrm{int}B$;

3) $\mathrm{int}(\mathrm{int}A) = \mathrm{int}A$.

Доведення. **1)** Нехай $x \in \mathrm{int}A$. Тоді існує окіл U точки x, такий, що $U \subseteq A$. Оскільки $A \subseteq B$, то $U \subseteq B$. Отже, $x \in \mathrm{int}B$.

2) Застосуємо формулу (7.3) і правила де Моргана. Тоді

$$\mathrm{int}(A \cap B) = X \setminus \overline{X \setminus (A \cap B)} = X \setminus \overline{(X \setminus A) \cup (X \setminus B)}.$$

З рівності 4) теореми 7.1 випливає, що

$$X \setminus \overline{(X \setminus A) \cup (X \setminus B)} = X \setminus \left(\overline{X \setminus A} \cup \overline{X \setminus B}\right) =$$
$$= (X \setminus \overline{X \setminus A}) \cap (X \setminus \overline{X \setminus B}) = \mathrm{int}A \cap \mathrm{int}B.$$

3) Застосуємо формулу (7.3). Тоді

$$\mathrm{int}(\mathrm{int}A) = X \setminus \overline{X \setminus \mathrm{int}A} = X \setminus \overline{X \setminus \overline{X \setminus A}} =$$
$$= X \setminus \overline{\overline{X \setminus A}}.$$

Згідно з рівністю 3) теореми 7.1 маємо, що

$$\overline{\overline{X \setminus A}} = \overline{X \setminus A}.$$

Отже,

$$\mathrm{int}(\mathrm{int}A) = X \setminus \overline{X \setminus A} = \mathrm{int}A.$$

□

Зауваження 7.5. Внутрішність об'єднання двох множин не завжди є об'єднанням їхніх внутрішностей. Справедливе тільки включення

$$\mathrm{int}A \cup \mathrm{int}B \subseteq \mathrm{int}(A \cup B),$$

яке пропонується для самостійного доведення.

Обернене включення не вірне: покладемо $A = [0,1]$, $B = [1,2]$. Тоді

$$\mathrm{int}A = (0,1), \quad \mathrm{int}B = (1,2), \quad \mathrm{int}A \cup \mathrm{int}B = (0,1) \cup (1,2), \text{ але}$$
$$\mathrm{int}(A \cup B) = \mathrm{int}[0,2] = (0,2).$$

Отже, в цьому випадку включення $\mathrm{int}A \cup \mathrm{int}B \subset \mathrm{int}(A \cup B)$ строге.

7.4 Межа множини. Всюди щільні та ніде не щільні множини

Означення 7.6. *Межею ∂A множини A* в топологічному просторі

X називається множина

$$\partial A = \overline{A} \setminus \mathrm{int} A.$$

В літературі також зустрічається позначення $\mathrm{fr} A$ (від французького "frontière" та англійського "frontier").

Твердження 7.7. *Для довільної множини $A \subseteq X$ справедлива рівність*

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}. \tag{7.4}$$

Доведення. Застосуємо формулу (7.3):

$$\partial A = \overline{A} \setminus \mathrm{int} A = \overline{A} \setminus (X \setminus \overline{X \setminus A}) = \\ = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}.$$

□

Твердження 7.8. *Нехай X – топологічний простір і $A \subseteq X$. Тоді*

1) *межа ∂A збігається з множиною граничних точок множини A;*

2) *якщо множина A відкрита, то*
$$\partial A = \overline{A} \setminus A; \tag{7.5}$$

3) *якщо множина A замкнена, то*
$$\partial A = A \setminus \mathrm{int} A; \tag{7.6}$$

4) *якщо множина A відкрито-замкнена, то $\partial A = \emptyset$;*

5) *межа ∂A є замкненою множиною.*

Доведення. **1)** Візьмемо довільне $x \in \partial A = \overline{A} \setminus \mathrm{int} A$ і довільний окіл U цієї точки. З включення $x \in \overline{A}$ випливає, що $U \cap A \neq \emptyset$. Далі, з включення $x \notin \mathrm{int} A$ випливає, що $U \not\subseteq A$, а значить, $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Отже, точка x є граничною для множини A. Обернене твердження доводиться аналогічно.

2) Випливає з рівності $\mathrm{int}A = A$.

3) Випливає з рівності $\overline{A} = A$.

4) Якщо множина A відкрито-замкнена, то $A = \overline{A} = \mathrm{int}A$. Тоді $\partial A = A \setminus A = \emptyset$.

5) Запишемо рівність для межі у вигляді

$$\partial A = \overline{A} \setminus \mathrm{int}A = \overline{A} \cap (X \setminus \mathrm{int}A).$$

Тоді межа ∂A замкнена, як перетин двох замкнених множин. □

Означення 7.9. Нехай A та B – підмножини топологічного простору X, причому $A \subseteq B$. Кажуть, що

- ✘ множина A *щільна в множині* B, якщо

$$\overline{A} \supseteq B;$$

- ✘ множина A є *всюди щільною*, якщо

$$\overline{A} = X.$$

Твердження 7.10. *Множина A є всюди щільною в просторі X тоді і тільки тоді, коли вона перетинає кожну відкриту непорожню множину в X.*

Доведення. Необхідність. Візьмемо довільну відкриту непорожню множину $U \subseteq X$ і довільну точку $x \in U$. З рівності $\overline{A} = X$ випливає, що $x \in \overline{A}$. Значить, точка x є точкою дотику множини A, звідки $U \cap A \neq \emptyset$.

Достатність. Все так само, тільки в інший бік. □

Означення 7.11. Підмножина A топологічного простору X називається *ніде не щільною*, якщо в кожному околі довільної точки з X існує відкрита непорожня підмножина V, яка не перетинається з A.

Твердження 7.12. *Межа замкненої (або відкритої) підмножини топологічного простору ніде не щільна.*

Доведення. Нехай $A \subseteq X$, $x \in X$ і U – довільний відкритий окіл точки x.

Розглянемо випадок, коли множина A замкнена. Тоді з властивістю 3) твердження 7.8

$$\partial A = A \setminus \mathrm{int} A.$$

Покладемо

$$V = U \cap (X \setminus \partial A)$$

Множина V відкрита, як перетин двох відкритих множин, причому $V \subseteq U$ і $V \cap \partial A = \emptyset$.

Залишилося показати, що $V \neq \emptyset$. Згідно з властивістю 1) твердження 7.8, точка x є граничною для множини A. Значить,

$$U \cap A \neq \emptyset \neq U \cap (X \setminus A).$$

Звідси

$$V = U \setminus \partial A = U \setminus (A \setminus \mathrm{int} A) = U \setminus (A \cap (X \setminus \mathrm{int} A)) =$$
$$= (U \setminus A) \cup (U \setminus (X \setminus \mathrm{int} A)) = (U \setminus A) \cup (U \cap \mathrm{int} A) \neq \emptyset,$$

адже $U \setminus A \neq \emptyset$.

Доведення цього твердження для відкритої множини A залишається на самостійне опрацювання. □

Приклад 7.13. *Доведіть, що в стандартній топології числової прямої*

- ✘ *множина всіх раціональних чисел всюди щільна;*
- ✘ *множина всіх ірраціональних чисел всюди щільна;*
- ✘ *множина* $(0, 1)$ *щільна в* $[0, 1]$*;*
- ✘ *множина* $\{0\}$ *ніде не щільна;*
- ✘ *будь-яка скінченна підмножина числової прямої ніде не щільна.*

Лекція 8

Відображення: основні типи та властивості

В цій лекції ми не будемо працювати з топологіями чи топологічними просторами, а тільки з множинами без введеної на них топологічної структури.

8.1 Означення та основні типи

Означення 8.1. *Відображенням* множини X в множину Y називається правило f, за яким кожному елементу множини x ставиться у відповідність єдиний елемент з множини Y.

Для підкреслення того, що відображення діє з множини X в множину Y, ми використовуємо позначення

$$f : X \to Y.$$

Означення 8.2. Елемент $y \in Y$, який ставиться у відповідність елементу $x \in X$ при відображенні f, позначається $f(x)$ і називається *образом* елемента x при відображенні f або *значенням* відображення f в точці x.

Позначають це так: $y = f(x)$.

Оскільки кожне відображення можна задати множиною впорядкованих пар (x, y), де $x \in X$ і $y = f(x) \in Y$, то відображення f можна ототожнювати з цією множиною (вона називається *графіком відображення* f), яка є підмножиною декартового добутку $X \times Y$ множин X і Y. Таким чином, графік $\mathrm{Gr}(f)$ відображення f – це множина

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\} \subseteq X \times Y.$$

Означення 8.3. Відображення $f : X \to Y$ називається

- ✘ *сюр'юкцією* або *відображенням "на"*, якщо кожний елемент множини Y є образом хоча б одного елемента з множини X;
- ✘ *ін'єкцією*, якщо образи різних елементів з множини X різні;
- ✘ *бієкцію*, або *взаємно однозначним*, якщо воно є одночасно сюр'єкцію та ін'єкцією.

Означення 8.4. Відображення $f : X \to X$, яке діє за правилом $f(x) = x$ для кожного $x \in X$, називається *тотожним*, і позначається id_X.

8.2 Образи та прообрази

Означення 8.5. *Образом* множини $A \subseteq X$ при відображенні $f : X \to Y$ називається множина $f(A)$ вигляду

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}.$$

Образ всієї множини X називається *образом відображення* f.

Означення 8.6. *Прообразом* множини $B \subseteq Y$ при відображенні $f : X \to Y$ називається множина $f^{-1}(B)$ вигляду

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Сліз зазначити, що не завжди образ прообразу множини B збігається з B. Наприклад, якщо відображення $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ діє за правилом $f(x) = x^2$, а $B = (-\infty, 0]$, то

$$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0\} = \{0\},$$

але

$$f(f^{-1}(B)) = f(0) = 0 \neq (-\infty, 0].$$

Так само, не можна вважати, що прообраз образу множини $A \subseteq X$ збігається з A. На прикладі цього ж відображення $f(x) = x^2$ бачимо, що для $A = \{1\}$ образ $f(A) = f(1) = 1^2 = 1$, але

$$f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(f(1)) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\} = \{-1, 1\} \neq A.$$

Твердження 8.7 (включення для образів та прообразів)**.** *Нехай $f : X \to Y$ – довільне відображення, $A \subseteq X$ та $B \subseteq Y$ – довільні множини. Тоді:*

1) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$;

2) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$.

Доведення. **1)** Візьмемо довільну точку $y \in f(f^{-1}(B))$. Позначимо $C = f^{-1}(B)$. За означенням образу $y \in \{f(x) : x \in C\}$, тобто, існує таке $x \in C$, що $y = f(x)$. Оскільки $x \in C$, то за означенням прообразу $f(x) \in B$. Але ж $f(x) = y$. Отже, $y \in B$.

2) Зафіксуємо довільне $x \in A$ і позначимо $y = f(x)$. Тоді $f(x) \in f(A)$ за означенням образу множини A. Звідси $x \in f^{-1}(f(A))$ за означенням прообразу. $\square$

Твердження 8.8 (рівності для образів та прообразів)**.** *Нехай $f : X \to Y$ – довільне відображення, $A \subseteq X$ та $B \subseteq Y$ – довільні множини. Тоді*

1) $f(f^{-1}(B)) = B \Leftrightarrow B \subseteq f(X)$;

2) $f^{-1}(f(A)) = A \Leftrightarrow f(A) \cap f(X \setminus A) = \emptyset$

Доведення. **1)** $\Rightarrow$) Припустимо, що виконується рівність $f(f^{-1}(B)) = B$ і зафіксуємо $y \in B$. Тоді $y \in f(f^{-1}(B))$, звідки випливає, що існує $x \in f^{-1}(B)$, таке, що $y = f(x)$. Отже, $y \in f(X)$, що і потрібно було довести.

$\Leftarrow$) Навпаки, нехай $B \subseteq f(X)$. За твердженням 8.7 (1) потрібно довести тільки включення $B \subseteq f(f^{-1}(B))$. Для цього зафіксуємо $y \in B$. Тоді виберемо таке $x \in X$, що $y = f(x)$. З включення $f(x) \in B$ маємо, що $x \in f^{-1}(B)$. Таким чином, $y \in f(f^{-1}(B))$.

2) $\Rightarrow$) Візьмемо довільне $y \in f(A)$ і покажемо, що $y \notin f(X \setminus A)$ (тобто, що для всіх $x \in X \setminus A$ виконується нерівність $f(x) \neq y$). Зафіксуємо $x \in X \setminus A$. Тоді $x \notin f^{-1}(f(A))$, звідки випливає, що $f(x) \notin f(A)$. Отже, $f(x) \neq y$, адже $y \in f(A)$.

$\Leftarrow$) Згідно з твердженням 8.7 (2) ми повинні встановити включення $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$. Візьмемо довільне $x \in f^{-1}(f(A))$. Тоді $f(x) \in f(A)$. За умовою $f(x) \notin f(X \setminus A)$. Отже, $x \in A$. $\square$

Теорема 8.9. *Нехай $f : X \to Y$ – довільне відображення, $A, B \subseteq Y$. Тоді*

1) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,

2) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,

3) $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$.

Доведення. **1)** Доведення цієї рівності випливає з низки рівносильних фактів:

$$\begin{array}{rcc} x \in f^{-1}(A \cup B) & \Leftrightarrow & f(x) \in A \text{ або } f(x) \in B \\ & & \Updownarrow \\ & & x \in f^{-1}(A) \text{ або } x \in f^{-1}(B) \\ & & \Updownarrow \\ & & x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B). \end{array}$$

Доведення властивостей **2)** та **3)** цілком аналогічні і пропонуються в якості вправи. $\square$

Читачеві також пропонується довести, що для довільних множин $A, B \subseteq X$ і довільного відображення $f : X \to Y$ вірна рівність

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),$$

а також навести приклади множин $A, B \subseteq \mathbb{R}$ і відображень $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для яких **не виконуються** рівності

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B), \quad \text{і} \quad f(\mathbb{R} \setminus A) = \mathbb{R} \setminus f(A).$$

8.3 Композиція

Означення 8.10. *Композицією* відображень $f : X \to Y$ та $g : Y \to Z$ називається відображення $h : X \to Z$, яке визначається правилом

$$h(x) = g(f(x))$$

для кожного $x \in X$.

Композиція відображень f і g позначається $g \circ f$.

Твердження 8.11 (асоціативність композиції)**.** *Для довільних відображень $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ і $h : Z \to T$ справедлива рівність*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Доведення. Позначимо $s = g \circ f$ і $t = h \circ g$. Тоді $s : X \to Z$ і $t : Y \to T$. Покажемо, що $h \circ s = t \circ f$. Зафіксуємо $x \in X$ і позначимо $y = f(x) \in Y$. Тоді

$$s(x) = g(f(x)), \quad \text{і} \;\; h(s(x)) = h(g(f(x))).$$

З іншого боку,

$$t(f(x)) = t(y) = h(g(y)) = h(g(f(x))),$$

що і потрібно було довести. □

Твердження 8.12. *Для довільного відображення $f : X \to Y$ мають місце рівності*

$$f \circ \mathrm{id}_X = f = \mathrm{id}_Y \circ f.$$

Доведення. Зафіксуємо $x \in X$ і позначимо $y = f(x)$. Тоді

$$f(\mathrm{id}_X(x)) = f(x).$$

З іншого боку,

$$\mathrm{id}_Y(f(x)) = \mathrm{id}_Y(y) = y = f(x).$$

□

8.4 Обернені і оборотні відображення

Означення 8.13. Відображення $g : Y \to X$ називається *оберненим* до відображення $f : X \to Y$, якщо

$$g \circ f = \mathrm{id}_X, \text{ тобто, } g(f(x)) = x \ \forall x \in X, \text{ і}$$
$$f \circ g = \mathrm{id}_Y, \text{ тобто, } f(g(y)) = y \ \forall y \in Y.$$

Відображення, для якого існує обернене, називається *оборотним.*

Твердження 8.14. *Відображення $f : X \to Y$ оборотне тоді і тільки тоді, коли воно бієктивне.*

Доведення. Необхідність. Припустимо, що існує обернене відображення $g : Y \to X$ до відображення f.

Доведемо, що f сюр'єктивне. Нехай $y \in Y$. Позначимо $x = g(y)$. Тоді

$$f(x) = f(g(y)) = y$$

за означенням 8.13.

Тепер доведемо, що f ін'єктивне. Розглянемо різні точки $x_1, x_2 \in X$ і припустимо, що $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$. З означення 8.13 випливає, що

$$g(y_1) = g(f(x_1)) = x_1, \quad g(y_2) = g(f(x_2)) = x_2,$$

отже,

$$g(y_1) = x_1 \neq x_2 = g(y_2).$$

Але з іншого боку, $g(y_1) = g(y_2)$, адже ми припустили рівність $y_1 = y_2$. Таким чином, наше припущення не вірне, а відображення f ін'єкивне.

Отже, f – бієкція.

Достатність. Припустимо, що відображення f бієктивне і визначимо обернене до нього відображення $g : Y \to X$. Врахувавши, що f – сюр'єкція, для кожного $y \in Y$ покладемо

$$g(y) = x \quad \Leftrightarrow y = f(x).$$

Оскільки відображення f ін'єктивне, то для кожного $y \in Y$ значення $g(y)$ визначається єдиним чином. Отже, відображення g визначене коректно. Крім того,

$$g(f(x)) = g(y) = x, \quad \text{і} \quad f(g(y)) = f(x) = y.$$

Таким чином, відображення g є оберненим до f. $\square$

Лекція 9

Неперервність: загальні поняття

9.1 Топологічне означення

Означення 9.1. Відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами називається *неперервним*, якщо прообраз $f^{-1}(V)$ довільної відкритої множини $V \subseteq Y$ є відкритою множиною в просторі X.

Звичайно, після цього означення виникає питання: "а як же те складне означення на мові ε-δ, яке ми вчили на першому курсі?.." Виявляється, що воно рівносильне топологічному означенню для просторів $X = Y = \mathbb{R}$.

Теорема 9.2. *Нехай $X = Y = \mathbb{R}$ і $f : X \to Y$ – довільна функція. Тоді наступні умови рівносильні*

1) f – неперервна за означенням 9.1

2) $\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \ \forall a \in X$

$$|a - x| < \delta \ \Rightarrow \ |f(a) - f(x)| < \varepsilon$$

Доведення. **1)** $\Rightarrow$ **2)** Зафіксуємо $x_0 \in \mathbb{R}$ і $\varepsilon > 0$. Позначимо

$$V = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$$

і зауважимо, що множина V відкрита в стандартній топології $\mathbb{R}$. З означення 9.1 випливає, що прообраз

$$U = f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$$

є відкритою множиною в $\mathbb{R}$. Зрозуміло, що $x_0 \in U$. Кожна відкрита множина складається з усіх своїх внутрішніх точок, отже, точка x_0 міститься в U разом з деяким своїм базисним околом. Отже, існує таке $\delta > 0$, що

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq U.$$

Візьмемо довільне $a \in \mathbb{R}$, таке, що $|a - x_0| < \delta$. Тоді $a \in U = f^{-1}(V)$. Звідси випливає, що $f(a) \in V$. Таким чином,

$$|f(a) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

2) $\Rightarrow$ **1)** Нехай $V \subseteq \mathbb{R}$ – довільна відкрита множина і $U = f^{-1}(V)$. Покажемо, що кожна точка множини U є внутрішньою. Зафіксуємо $x_0 \in U$. Оскільки $f(x_0)$ – внутрішня точка множини V, то існує базисний окіл цієї точки, який міститься у V. Тобто, існує $\varepsilon > 0$, таке, що

$$(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \subseteq V.$$

Для цього ε існує $\delta > 0$, таке, що для всіх $a \in \mathbb{R}$ вірна імплікація

$$|a - x_0| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Множина $G = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ є відкритим околом точки x_0. Крім того, $G \subseteq U$ згідно із вищенаведеною імплікацію. $\square$

Цілком аналогічно можна довести, що для відображень зі значеннями в метричному просторі наступне означення неперервності рівносильне означенню 9.1.

Означення 9.3. Нехай X – топологічний простір, (Y, d) – метричний простір і $f : X \to Y$. Відображення f *неперервне на просторі* X, якщо для кожного $x \in X$ і для кожного $\varepsilon > 0$ існує окіл U точки x в просторі X, такий, що

$$d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

для всіх $y \in U$.

9.2

Загальні властивості

Твердження 9.4. *Нехай X та Y – топологічні простори і $f : X \to Y$.*

1) *Відображення f неперервне тоді і тільки тоді прообраз $f^{-1}(F)$ довільної замкненої множини $F \subseteq Y$ замкнений в просторі X.*

2) *Тотожне відображення* $\mathrm{id} : X \to X$ *неперервне.*

3) *Якщо простір X дискретний, то кожне відображення, визначене на ньому, неперервне.*

4) *Стале відображення неперервне.*

5) *Якщо f – неперервне, Z – топологічний простір і $g : Y \to Z$ – ще одне неперервне відображення, то композиція $g \circ f : X \to Z$ неперервна.*

Доведення. 1) Нехай f неперервне і $F \subseteq Y$ – замкнена множина. Тоді $Y \setminus F$ – відкрита множина. За означенням 9.1, прообраз $f^{-1}(Y \setminus F)$ є відкритою множиною. За формулою для прообразу різниці

$$f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F).$$

Звідси отримуємо, що множина $X \setminus f^{-1}(F)$ відкрита в X. Тоді $f^{-1}(F)$ замкнена.

Доведення в інший бік цілком аналогічне.

2) Для тотожного відображення виконується рівність $\mathrm{id}^{-1}(V) = V$ для довільної відкритої множини $V \subseteq X$. Отже, це відображення неперервне.

3) Якщо простір X дискретний, то кожна його підмножина (зокрема, і прообраз $f^{-1}(V)$) є відкритою.

4) Нехай f – стале, тобто, $f(x) = y_0$ для всіх $x \in X$, де $y_0 \in Y$. Розглянемо прообраз $f^{-1}(V)$ довільної відкритої множини $V \subseteq Y$. Якщо $y_0 \in V$, то $f^{-1}(V) = X$. Якщо ж $y_0 \notin V$, то $f^{-1}(V) = \emptyset$. В обох випадках прообраз є відкритою множиною.

5) Нехай $W \subseteq Z$ – відкрита множина. Оскільки g – неперервне, то множина $V = g^{-1}(W)$ є відкритою в Y. Застосуємо неперервність відображення $f : X \to Y$, і отримаємо, що прообраз $U = f^{-1}(V)$ є відкритою множиною в просторі X. З іншого боку,

$$(g \circ f)^{-1}(W) = \{x \in X : g(f(x)) \in W\} =$$
$$= \{x \in X : f(x) \in g^{-1}(W)\} = f^{-1}(g^{-1}(W))\} = f^{-1}(V).$$

Таким чином, прообраз відкритої множини $W \subseteq Z$ при відображенні $g \circ f$ є відкритою множиною.

Якщо f – неперервне, Z – топологічний простір і $g : Y \to Z$ – ще одне неперервне відображення, то композиція $g \circ f : X \to Z$ неперервна.

□

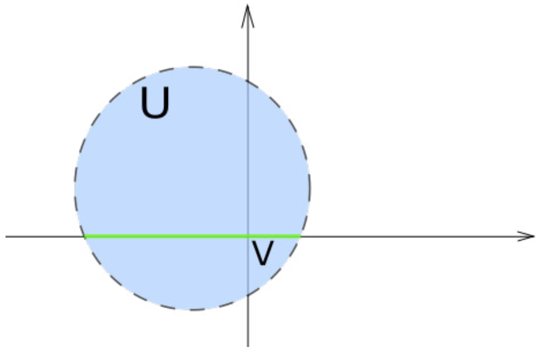
9.3 Топологія підпростору. Звуження відображення

Нехай $(X, \mathscr{O})$ – топологічний простір і $E \subseteq X$ – деяка його підмножина. Позначимо

$$\mathscr{O}_E = \{O \cap E : O \in \mathscr{O}\} \tag{9.1}$$

Нескладно переконатися, що сукупність множин $\mathscr{O}_E$ утворює топологічну структуру на множині E.

Означення 9.5. Пара $(E, \mathscr{O}_E)$ називається *підпростором* простору $(X, \mathscr{O})$, сукупність множин $\mathscr{O}_E$ – *відносною* топологією або *топологією, індукованою з простору* X, а її елементи називаються *відкритими множинами в* E.



На малюнку відкрита куля U є елементом топологічної структури площини $\mathbb{R}^2$, а інтервал V – індукованим нею елементом топологічної структури на прямій. Крім того, інтервал V є відкритою множиною в $\mathbb{R}$, але не є відкритою множиною в $\mathbb{R}^2$.

Твердження 9.6. *Множина F замкнена в підпросторі $E \subseteq X$ тоді і тільки тоді, коли її можна подати у вигляді $F = E \cap A$, де множина A замкнена у всьому просторі X.*

Доведення. Необхідність. Нехай множина $F \subseteq E$ замкнена в E. Тоді її доповнення в E відкрите. Тобто, множина $U = E \backslash F$ відкрита в E. За означенням відносної топології, U є перетином E та деякої відкритої в усьому просторі X множини V. Позначимо

$$A = X \setminus V.$$

Тоді множина A замкнена в просторі X як доповнення до відкритої. Крім того,

$$F = E \setminus U = E \setminus (E \cap V) = E \setminus V = \\ = E \cap (X \setminus V) = E \cap A.$$

Достатність. Аналогічно. $\square$

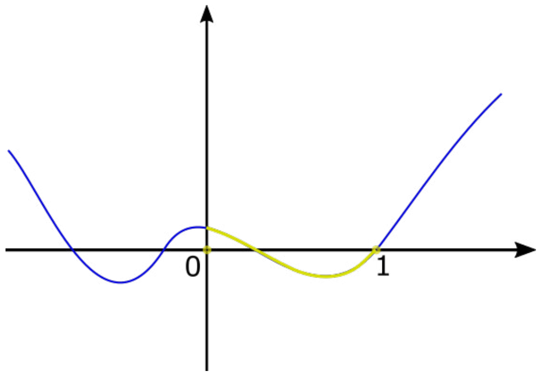
Розглянемо тепер топологічний простір X і його підпростір E. Нехай відображення $f : X \to Y$ визначене на всьому просторі X та набуває значень в топологічному просторі Y.

Означення 9.7. *Звуженням* відображення f на множину E називається відображення $g : E \to Y$, визначене формулою

$$g(x) = f(x) \quad \forall x \in E,$$

і позначається

$$g = f|_E.$$



На цьому малюнку синім кольором зображено графік деякого відображення $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, а жовтим – графік його звуження $f|_{[0,1]}$ на відрізок $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$.

Твердження 9.8. *Звуження $f|_E$ неперервного відображення $f : X \to Y$ на підпростір $E \subseteq X$ неперервне.*

Доведення. Зафіксуємо відкриту множину $V \subseteq Y$ і позначимо $g = f|_E$, $g : E \to Y$. Зауважимо, що

$$g^{-1}(V) = \{x \in E : g(x) \in V\} = \{x \in E : f(x) \in V\} = \\ = E \cap \{x \in X : f(x) \in V\} = E \cap f^{-1}(V).$$

З неперервності відображення f випливає, що прообраз $f^{-1}(V)$ відкритий в X. Отже, за означенням відносної топології, множина $g^{-1}(V)$ відкрита в підпросторі E, що і потрібно було показати. $\square$

9.4 Рівносильні переформулювання

Означення 9.1 спирається на поняття відкритої множини. Часто зручно оперувати іншими критеріями неперервності, які ми розглянемо в наступному твердженні.

Теорема 9.9. *Нехай X та Y – топологічні простори і $f : X \to Y$ – відображення. Наступні умови рівносильні:*

1) *f – неперервне.*

2) *Прообраз довільного елемента бази $\mathscr{B}$ простору Y є відкритим в X.*

3) *Для довільної множини $A \subseteq X$ виконується включення*

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}. \tag{9.2}$$

4) *Для довільної множини $B \subseteq Y$ виконується включення*

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B}). \tag{9.3}$$

5) *Для довільної множини $B \subseteq Y$ виконується включення*

$$f^{-1}(\operatorname{int} B) \subseteq \operatorname{int} f^{-1}(B). \tag{9.4}$$

Доведення. **1) $\Rightarrow$ 2).** Очевидно випливає з означення 9.1, адже кожна базисна множина є відкритою.

2) $\Rightarrow$ 3). Зафіксуємо точку $y \in f(\overline{A})$ та покажемо, що y – гранична точка множини $f(A)$. Для цього візьмемо відкритий окіл V точки y та доведемо, що $V \cap f(A) \neq \emptyset$.

Виберемо базисний окіл $B \in \mathscr{B}$ точки y, такий, що $B \subseteq V$. Крім того, існує таке $x \in \overline{A}$, що $y = f(x)$. Тоді $x \in f^{-1}(B)$, звідки згідно з властивістю 2) цього твердження $f^{-1}(B)$ є відкритим околом точки x. Оскільки x – гранична точка множини A, то $f^{-1}(B) \cap A \neq \emptyset$.

Нехай $a \in A \cap f^{-1}(B)$. Тоді $f(a) \in f(A)$ і $f(a) \in B \subseteq V$, а це значить, що $V \cap f(A) \neq \emptyset$.

3) $\Rightarrow$ 4). Для множини $A = f^{-1}(B)$ застосуємо попереднє включення. Маємо

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(B))} = \overline{B},$$

звідки випливає, що

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B}).$$

4) $\Rightarrow$ 5). Застосуємо включення 9.3 до множини $Y \setminus B$ та отримаємо

$$\overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \subseteq f^{-1}(\overline{Y \setminus B}). \tag{9.5}$$

Пригадаємо, що внутрішність за замикання пов'язані рівністю

$$\operatorname{int} B = Y \setminus \overline{Y \setminus B}.$$

Тоді

$$f^{-1}(\operatorname{int} B) = f^{-1}(Y \setminus \overline{Y \setminus B}) = X \setminus f^{-1}(\overline{Y \setminus B}),$$

звідки згідно з включенням (9.5) маємо

$$X \setminus f^{-1}(\overline{Y \setminus B}) \subseteq X \setminus \overline{f^{-1}(Y \setminus B)} = X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} = \operatorname{int} f^{-1}(B).$$

5) $\Rightarrow$ 1). Розглянемо довільну відкриту множину $V \subseteq Y$. Застосуємо до неї включення (9.4) з урахуванням рівності $V = \operatorname{int} V$:

$$f^{-1}(\operatorname{int} V) = f^{-1}(V) \subseteq \operatorname{int} f^{-1}(V).$$

Оскільки внутрішність довільної множини міститься в самій множині, то

$$f^{-1}(V) \subseteq \operatorname{int} f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(V),$$

звідки випливає, що $f^{-1}(V) = \operatorname{int} f^{-1(V)}$. А це означає, що множина $f^{-1}(V)$ відкрита. Отже, відображення f неперервне за означенням 9.1. $\square$

Означення 9.10. Відображення $f : X \to Y$ називається *неперервним в точці* $x \in X$, якщо для кожного околу V точки $f(x)$ в просторі Y існує окіл U точки x в просторі X, такий, що $f(U) \subseteq V$.

Читачеві пропонується довести самостійно, що відображення, яке неперервне в кожній точці з X, є неперервним на всьому просторі X.

9.5 Деякі приклади

Приклад 9.11. Якщо на множині X визначені дві топології $\mathscr{O}_1$ та $\mathscr{O}_2$, то тотожне відображення $\mathrm{id} : (X, \mathscr{O}_1) \to (X, \mathscr{O}_2)$ неперервне тоді і тільки тоді, коли топологія $\mathscr{O}_1$ сильніша, ніж $\mathscr{O}_2$.

Зауважимо, що оскільки $\mathrm{id}^{-1}(V) = V$ для довільної множини $V \in \mathscr{O}_2$, то відображення $\mathrm{id} : (X, \mathscr{O}_1) \to (X, \mathscr{O}_2)$ неперервне тоді і тільки тоді, коли $V \in \mathscr{O}_1$. $\square$

Приклад 9.12. Нехай $\mathscr{O}_1$ – топологія прямої Зорґенфрея $\mathbb{S}$ (див. п. 4.3), а $\mathscr{O}_2$ – канонічна топологія числової прямої $\mathbb{R}$. Нагадаємо, що $\mathscr{O}_2 \subset \mathscr{O}_1$.

З попереднього прикладу випливає, що тотожне відображення $\mathrm{id} : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ неперервне.

Розглянемо обернене відображення $f = \mathrm{id}^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{S}$, $f(x) = x$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Покажемо, що це відображення розривне в кожній точці з $\mathbb{R}$. Зафіксуємо $x \in \mathbb{R}$ і розглянемо відкритий окіл $V = [x, x+1)$ точки $f(x)$ в $\mathbb{S}$. Тоді для жодного околу U точки x в $\mathbb{R}$ вигляду $(x-\delta, x+\delta)$ не виконується включення $f(U) \subseteq V$, адже $f(U) = U = (x-\delta, x+\delta) \nsubseteq [x, x+1)$. Отже, f не є неперервним в точці x. $\square$

Приклад 9.13. Нехай $Y = \{0, 1\}$ з дискретною топологією. Тоді відображення $f : \mathbb{R} \to Y$ неперервне тоді і тільки тоді, коли воно стале.

Справді, якщо f стале, то воно неперервне згідно з твердженням 9.4.

В інший бік, припустимо, що f не є сталим. Тоді множини $X_0 = f^{-1}(0)$ та $X_1 = f^{-1}(1)$ непорожні і неперетинні, причому $\mathbb{R} = X_0 \cup X_1$. Оскільки множина $\{0\}$ відкрита в Y, а f неперервне, то X_0 – відкрита підмножина числової прямої. Аналогічно, X_1 – теж відкрита підмножина числової прямої. З лекції №2 відомо, що кожна відкрита підмножина в $\mathbb{R}$ є об'єднанням послідовності попарно неперетинних інтервалів. Отже, і вся числова пряма буде зображатися в такому вигляді, тобто, $\mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k)$, де $(a_k, b_k) \cap (a_l, b_l) = \emptyset$ для всіх $k \neq l$. Виберемо таке l, що одне з чисел

a_l або b_l (скажімо, a_l) не є нескінченністю. Тоді $a_l \notin \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k)$, адже всі інтервали попарно неперетинні.

Таким чином, наше припущення не вірне, а значить, якась з множин X_0 чи X_1 порожня. Отже, відображення f стале. $\square$

Приклад 9.14. Нехай Y – "зв'язна двоточка" (див. лекцію №2), тобто, $Y = \{0, 1\}$ з топологією $\mathscr{O} = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{0\}\}$. Розглянемо відображення $f : \mathbb{R} \to Y$, таке, що

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0), \\ 1, & x \in [0, +\infty). \end{cases}$$

Тоді f – неперервне відображення, оскільки прообраз $f^{-1}(\{0\})$ єдиної нетривіальної відкритої множини в Y – це відкритий проміжок $(-\infty, 0)$. $\square$

Лекція 10

Властивості неперервних відображень

10.1

Неперервність метрики

Нехай (X, d) – метричний простір і $A \subseteq X$.

Означення 10.1. *Відстань* $d(x, A)$ *від точки* x *до множини* A визначається рівністю

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a),$$

якщо $A \neq \emptyset$. Крім того,

$$d(x, \emptyset) = +\infty.$$

Означення 10.2. *Відстанню* $d(A, B)$ *між множинами* A *і* B називається число

$$d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b).$$

Твердження 10.3. *Нехай* (X, d) *– метричний простір,* $x, y \in X$ *і* $A \subseteq X$*. Тоді*

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y). \tag{10.1}$$

Доведення. Припустимо, що $A \neq \emptyset$. З нерівності трикутника маємо, що

$$d(x,A) \leq d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a)$$

для довільного $a \in A$. Перейдемо до інфімума по $a \in A$ в цих нерівностях і отримаємо

$$\inf_{a \in A} d(x,a) \leq d(x,y) + \inf_{a \in A} d(y,a),$$
$$d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,A),$$

тобто,

$$d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y).$$

З міркувань симетрії можемо зробити також висновок, що

$$d(y,A) - d(x,A) \leq d(x,y).$$

Поєднуючи останні дві нерівності, ми отримаємо нерівність (10.3). $\square$

Теорема 10.4. *Нехай* A *– підмножина метричного простору* (X, d)*. Тоді функція* $\varrho : X \to [0, +\infty)$*, яка діє за правилом*

$$\varrho(x) = d(x,A) \quad \forall x \in X,$$

неперервна на просторі X*.*

Доведення. Зафіксуємо $x \in X$ і покажемо, що відображення ϱ неперервне в цій точці. Виберемо довільний окіл $V = (\varrho(x)-\varepsilon, \varrho(x)+\varepsilon) \subseteq [0, +\infty)$ точки $\varrho(x)$, де $\varepsilon > 0$. Покладемо $U = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$ і зауважимо, що U – відкритий окіл точки x в X. Залишилося довести, що $\varrho(U) \subseteq V$. Для цього візьмемо довільне $y \in U$ і зауважимо, що $d(x,y) < \varepsilon$. Тоді з твердження 10.3 випливає, що

$$|\varrho(y) - \varrho(x)| = |d(y,A) - d(x,A)| \leq d(x,y) < \varepsilon.$$

Таким чином, $\varrho(y) \in (\varrho(x) - \varepsilon, \varrho(x) + \varepsilon) = V$, що і потрібно було довести. $\square$

10.2 Замкнені множини в метричних просторах

Теорема 10.5. *Для довільної підмножини A метричного простору (X, d) виконується рівність*

$$\overline{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}. \tag{10.2}$$

Доведення. Розглянемо функцію $\varrho : X \to [0, +\infty)$, яка діє за правилом $\varrho(x) = d(x, A) \quad \forall x \in X$. Тоді

$$B = \{x \in X : d(x, A) = 0\} = \{x \in X : \varrho(x) = 0\} = \varrho^{-1}(0).$$

Оскільки функція ϱ неперервна за теоремою 10.4, то множина $B = \varrho^{-1}(0)$ замкнена, як прообраз замкненої множини. Зрозуміло, що $A \subseteq B$. Тоді

$$\overline{A} \subseteq \overline{B} = B.$$

З іншого боку, нехай $x \in B$. Покажемо, що $x \in \overline{A}$. Для цього розглянемо довільний базисний окіл $U = B(x, \varepsilon)$ точки x в метричному просторі X. Оскільки $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a) = 0$, то для цього $\varepsilon > 0$ існує $a \in A$, таке, що

$$d(x, a) < \varepsilon.$$

Отже, $a \in A \cap U$. Звідси випливає, що $U \cap A \neq \emptyset$, а значить, $x \in \overline{A}$.

Таким чином, $\overline{A} = B$. □

Теорема 10.6. *Множина F замкнена в метричному просторі (X, d) тоді і тільки тоді, коли*

$$\forall (x_n)_{n=1}^{\infty},\ x_n \in F \quad \left(\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in F \right). \tag{10.3}$$

Доведення. Необхідність. Нехай $F = \overline{F}$ – замкнена множина і $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність точок з F, така, що $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$ для деякого $x \in X$. Покажемо, що $d(x, F) = 0$. Для цього зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ та за означенням границі послідовності, знайдемо таке $N \in \mathbb{N}$, що

$$d(x_N, x) < \varepsilon.$$

Оскільки $x_N \in F$, то згідно з характеристичними властивостями інфімума, маємо, що

$$d(x, F) = \inf_{a \in F} d(x, a) = 0.$$

З теореми 10.5 випливає, що $x \in \overline{F} = F$.

Достатність. Припустимо, що виконується умова (10.3) і доведемо, що множина F замкнена. Візьмемо $x \in \overline{F}$. Тоді $d(x, F) = 0$. Звідси з означення інфімума випливає, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує $x_n \in F$, таке, що

$$0 \leq d(x, x_n) < \frac{1}{n}.$$

Звідси

$$0 \leq \lim_{n \to \infty} d(x, x_n) \leq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Таким чином,

$$\lim_{n \to \infty} d(x, x_n) = 0.$$

З умови (10.3) маємо, що $x \in F$. Отже, $\overline{F} = F$, а значить, множина F замкнена. □

10.3 Арифметичні дії над неперервними дійснозначними функціями

Теорема 10.7. *Нехай X – топологічний простір, $f, g : X \to \mathbb{R}$ – неперервні відображення. Тоді відображення*

1) $f(x) + g(x)$

2) $f(x) - g(x)$

3) $f(x) \cdot g(x)$

4) $f(x) : g(x)$ *(при умові* $g(x) \neq 0$ *для всіх* $x \in X$*)*

5) $|f(x)|$

6) $\max\{f(x), g(x)\}$

7) $\min\{f(x), g(x)\}$

неперервні на просторі X*.*

Доведення. Оскільки всі доведення однотипні, виберемо щось одне, наприклад, неперервність добутку.

Позначимо $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ для кожного $x \in X$. Розглянемо функцію $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x, y) = x \cdot y$$

для всіх $x, y \in \mathbb{R}$. З курсу математичного аналізу відомо, що функція φ неперервна на $\mathbb{R}^2$.

Далі, розглянемо відображення $\Delta : X \to \mathbb{R}^2$,

$$\Delta(x) = (f(x), g(x))$$

для кожного $x \in X$, та покажемо, що Δ – неперервне на X. Як відомо з попередніх лекцій, одну з еквівалентних баз евклідової топології на $\mathbb{R}^2$ утворюють відкриті прямокутники, сторони яких паралельні до осей координат, тобто, прямокутники вигляду $U \times V$, де U та V – інтервали на числовій прямій. Отже, зафіксуємо один з таких прямокутників $W = U \times V$ і доведемо, що прообраз $\Delta^{-1}(W)$ є відкритою множиною в X. Справді,

$$\Delta^{-1}(W) = \Delta^{-1}(U \times V) = \{x \in X : (f(x), g(x)) \in U \times V\} = \\ \{x \in X : f(x) \in U \text{ і } g(x) \in V\} = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V).$$

Оскільки відображення $f : X \to \mathbb{R}$ і $g : X \to \mathbb{R}$ неперервні, то прообрази $f^{-1}(U)$ і $g^{-1}(V)$ є відкритим множинами в X. А значить, їхній перетин теж є відкритою множиною в X.

Залишилось зауважити, що відображення

$$h = \varphi \circ \Delta : X \to \mathbb{R}$$

неперервне, як композиція неперервних відображень. □

10.4 Сума рівномірно збіжного ряду

Означення 10.8. Нехай X – топологічний простір, (Y,d) – метричний простір і $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність відображень $f_n : X \to Y$. Ми кажемо, що послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *збігається рівномірно* до відображення $f : X \to Y$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $N \in \mathbb{N}$, що

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

для всіх $n \geq N$ та всіх $x \in X$.

Теорема 10.9. *Нехай X – топологічний простір, (Y,d) – метричний простір і $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність неперервних відображень $f_n : X \to Y$. Якщо послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ рівномірно збігається до відображення f, то f – неперервне.*

Доведення. Зафіксуємо $x_0 \in X$ і $\varepsilon > 0$. З означення рівномірної збіжності випливає існування такого числа $N \in \mathbb{N}$, що

$$d(f(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{10.4}$$

для всіх $n \geq N$ і всіх $x \in X$. Оскільки функція f_N неперервна, то існує такий окіл U точки x_0, що

$$d(f_N(x_0), f_N(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{10.5}$$

для всіх $x \in U$.

Нехай $x \in U$ – довільна точка. Тоді з (10.4), (10.5) і нерівності трикутника маємо

$$d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(x_0)) + d(f_N(x_0), f(x_0)) <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

□

Означення 10.10. Нехай X – топологічний простір і $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність відображень $f_n : X \to \mathbb{R}$. Ми кажемо, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{10.6}$$

збігається рівномірно на просторі X, якщо існує таке відображення $f : X \to \mathbb{R}$, що послідовність $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ частинних сум цього ряду, яка для кожного $x \in X$ визначається рівністю

$$u_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x),$$

збігається рівномірно до f на просторі X. Відображення f при цьому називається *сумою ряду (10.6)*.

Теорема 10.11. *Нехай X – топологічний простір. Тоді сума*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

рівномірно збіжного на просторі X ряду, що складається з неперервних функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$, є неперервною функцією на просторі X.

Доведення. Оскільки кожна функція $u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$, неперервна за теоремою 10.7, то твердження негайно випливає з теореми 10.9. $\square$

10.5 Гомеоморфізми

Означення 10.12. Відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами X та Y називається *гомеоморфізмом*, якщо

- бієктивне
- неперерeвне

- обернене відображення $f^{-1} : Y \to X$ неперервне.

Якщо між просторами X та Y існує гомеоморфізм, то такі простори називаються *гомеоморфними*.

Для кожного $x \in \mathbb{R}$ позначимо $f(x) = \mathrm{arctg}x$. Легко перевірити, що $f : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ – бієктивне, неперервне, і обернене відображення $f^{-1} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \mathrm{tg}\, x$, теж неперервне. Отже, топологічні простори $\mathbb{R}$ і $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ – гомеоморфні.

Однак, відрізок $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ і числова пряма $\mathbb{R}$ не гомеоморфні (спробуйте довести!)

Зауваження 10.13. З означення випливає, що обернене відображення до гомеоморфізма теж є гомеоморфізмом, адже обернене до бієктивного відображення – бієктивне.

Наступне важливе твердження теж є безпосереднім наслідком означення гомеморфізма.

Теорема 10.14. *Нехай $f : X \to Y$ – гомеоморфізм. Тоді для довільної множини $A \subseteq X$*

1) A замкнена тоді і тільки тоді, коли множина $f(A)$ замкнена в Y;

2) $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$;

3) $f(\operatorname{int} A) = \operatorname{int} f(A)$;

4) $f(\partial A) = \partial f(A)$;

5) A – окіл точки $x \in X$ тоді і тільки тоді, коли $f(A)$ – окіл точки $f(x)$.

Таким чином, з топологічної точки зору гомеоморфні простори влаштовані абсолютно однаково – гомеоморфізм між ними встановлює взаємно-однозначну відповідність між усіма явищами в X та Y, які виражаються в термінах топологічних структур.

Інваріанти (тобто, незмінні властивості) гомеоморфізмів є особливо важливими та називаються *топологічними властивостями*. Предмет топології – вивчення топологічних властивостей, і з точки зору топології два гомеоморфні об'єкти можна ототожнювати та розглядати як один об'єкт.

Лекція 11

Зв'язність

11.1 Означення і найпростіші приклади

Означення 11.1. Топологічний простір X називається *зв'язним*, якщо довільна його відкрито-замкнена підмножина або порожня, або збігається з усім простором X.

Означення 11.2. *Розбиттям* множини називається представлення її у вигляді об'єднання попарно неперетинних підмножин.

Якщо множини A та B неперетинні, то їхнє об'єднання ми позначатимемо так:

$$A \sqcup B.$$

Твердження 11.3. *Топологічний простір X є зв'язним тоді і тільки тоді, коли його не можна розбити на дві непорожні відкриті множини.*

Доведення. Необхідність. Припустимо, що простір X зв'язний, але існують дві неперетинні відкриті множини A і B, такі, що $X = A \sqcup B$. Оскільки A – відкрита, то $B = X \setminus A$ – замкнена. Будучи одночасно й відкритою множиною, $B = \emptyset$ або $B = X$. Якщо $B = X$, то $A = \emptyset$, суперечність.

Достатність. Розглянемо відкрито-замкнену множину A в просторі X. Якщо $X \neq A \neq \emptyset$, то $X \neq X \setminus A \neq \emptyset$. Оскільки $X = A \sqcup (X \setminus A)$, а обидві множини A і $X \setminus A$ відкриті, то ми отримуємо розбиття X на дві непорожні відкриті частини, що суперечить припущенню. □

Зауваження 11.4. Оскільки доповнення до відкритої множини є замкненим, то топологічний простір зв'язний тоді і тільки тоді, коли його не можна розбити на дві непорожні замкнені множини.

Приклад 11.5. В прикладі 9.12 ми довели, що єдині відкрито-замкнені множини на числовій прямій $\mathbb{R}$ – це порожня множина і весь простір $\mathbb{R}$. Таким чином, числова пряма є зв'язним простором. В наступному пункті ми охарактеризуємо всі зв'язні підмножини прямої.

Приклад 11.6. Дискретний простір X незв'язний. Кожна точка $\{x\}$ в ньому є відкрито-замкненою, тому простір X можна подати у вигляді

$$X = \{x\} \sqcup (X \setminus \{x\})$$

об'єднання двох неперетинних відкритих підмножин.

Приклад 11.7. Пряма Зорґенфрея $\mathbb{S}$ незв'язна. В лекції №4 ми показали, що базисний проміжок $[a, b)$ на прямій Зорґенфрея є відкрито-замкненою множиною. Тоді

$$\mathbb{S} = [a, b) \sqcup (S \setminus [a, b))$$

є розбиттям $\mathbb{S}$ на дві відкриті частини.

Приклад 11.8. Двоточка $X = \{0, 1\}$ з топологією Серпінського (тобто, топологією вигляду $\mathscr{O} = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{0\}\}$) є зв'язним простором. Множина $\{0\}$ є відкритою, але не замкненою. Тому єдині відкрито-замкнені множини в X – це $\emptyset$ і $\{0, 1\}$.

В просторах $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ і $\mathbb{R}^3$ зв'язні множини можна уявляти собі, як ті, що складаються з одного "шматка", і не є розділеними на окремі частини. Проте насправді структура зв'язних множин може бути набагато складнішою.

11.2 Зв'язні підмножини числової прямої

Твердження 11.9. *Топологічний простір X буде зв'язним тоді і тільки тоді, коли кожне неперервне відображення $f : X \to \mathbb{D}$ простору X в двоточковий дискретний простір $\mathbb{D} = \{0, 1\}$ стале.*

Доведення. Необхідність. Нехай X – зв'язний простір. Позначимо $X_1 = f^{-1}(0)$ і $X_2 = f^{-1}(1)$. Оскільки f неперервне, то множини X_i замкнені. Припустимо, що $X_1 \neq \emptyset$ і $X_2 \neq \emptyset$. Тоді з того, що $X = X_1 \sqcup X_2$, випливає, що X – незв'язний простір, отже, $X_1 = \emptyset$ або $X_2 = \emptyset$.

Достатність. Нехай X – незв'язний простір, тоді $X = X_1 \sqcup X_2$, де $X_1 \neq \emptyset$ і $X_2 \neq \emptyset$. Покладемо

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in X_1, \\ 1, & x \in X_2. \end{cases}$$

Оскільки множини X_1 і X_2 замкнені, то функція f неперервна, причому $f(X) = \mathbb{D}$, що суперечить умові. Отже, простір X зв'язний. □

Нагадаємо, що під *проміжком* на числовій прямій ми розуміємо множину вигляду

$$[a, b], \ [a, b), \ (a, b], \ (a, b),$$

де $a \leq b$. Проміжки, в яких $a, b \in \mathbb{R}$, ми називаємо *скінченними*, а ті, в яких хоча б одне з чисел a, b є безмежністю, – *нескінченними*. Якщо $a = b$, то проміжок $[a, b] = \{a\}$ називається *виродженим*.

Теорема 11.10. *Довільна підмножина A числової прямої $\mathbb{R}$ є зв'язною тоді і тільки тоді, коли A – проміжок (вироджений або невироджений, скінченний або нескінченний).*

Доведення. Необхідність. Нехай A – зв'язна пімножина $\mathbb{R}$. Візьмемо точки a і b з A. Нехай існує точка $c \in (a, b)$, така, що $c \notin A$.

Покладемо $F_1 = A \cap (-\infty, c]$, $F_2 = A \cap [c, +\infty)$. Тоді непорожні множини F_1 та F_2 замкнені в A і $A = F_1 \sqcup F_2$, але A – зв'язна множина, звідки випливає, що $c \in A$. Нехай A – обмежена множина і $s = \sup A$, $t = \inf A$. Тоді $A \subseteq [t, s]$. Якщо $x \in A$, $t \leq x \leq s$, то $(t, x] \subseteq A$ і $[x, s) \subseteq A$. Звідси випливає, що $(t, s) \subseteq A \subseteq [t, s]$, отже, A – проміжок. Аналогічно у випадку, коли A – необмежена множина.

Достатність. Навпаки, нехай A – проміжок, наприклад, $A = [a, b]$.

Покажемо, що множина A зв'язна. Розглянемо неперервне відображення $f : [a, b] \to \mathbb{D} = \{0, 1\}$ і доведемо, що $f(X) \subseteq \{0\}$ або $f(X) \subseteq \{1\}$. Нехай це не так. Тоді існують точки $x_1 \in [a, b]$ і $x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$, такі, що $f(x_1) = 0$ і $f(x_2) = 1$. Відображення $g = f|_{[x_1, x_2]}$ неперервне. Тоді, згідно з теоремою Больцано-Коші про проміжне значення, $g([x_1, x_2]) = [0, 1]$, але функція f набуває значення лише 0 або 1, отже, ми отримали суперечність. Таким чином, $f(X) \subseteq \{0\}$ або $f(X) \subseteq \{1\}$. Тоді з твердження 11.9 випливає, що A – зв'язна множина.

Аналогічно показується, що проміжки інших типів (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$ є зв'язними. □

11.3 Ще одна характеризація зв'язності

Означення 11.11. Множини A та B в топологічному просторі X називаються *відокремними*, якщо

$$A \cap \overline{B} = \emptyset = \overline{A} \cap B.$$

Зроуміло, що відокремні множини неперетинні. Крім того, довільні неперетинні відкрито-замкнені множини є відокремними.

Твердження 11.12. *Для довільного топологічного простору X наступні умови рівносильні:*

1) простір X зв'язний;

2) якщо $X = A \cup B$ і множини A та B відокремні, то одна з них порожня.

Доведення. **1)⇒ 2).** Оскільки $\overline{A} \cap B = \emptyset$, то $\overline{A} \subseteq X \backslash B$. Крім того, $A \cup B = X$, тому $X \setminus B = A$. Отже, $A \subseteq \overline{A} \subseteq A$, звідки випливає, що $\overline{A} = A$.

Цілком аналогічно можна показати, що $\overline{B} = B$.

Отримуємо, що множини A та B замкнені. Оскільки вони не перетинаються, то одна з цих множин порожня, адже простір X зв'язний.

2)⇒ 1). Доведемо, що кожне неперервне відображення з X у дискретну двоточку $\mathbb{D} = \{0, 1\}$ стале. Припустимо, що це не так. Тоді існує неперервне відображення $f : X \to \mathbb{D}$, таке, що

$$f^{-1}(0) \neq \emptyset \neq f^{-1}(1).$$

Позначимо

$$A = f^{-1}(0), \quad B = f^{-1}(1).$$

Зрозуміло, що

$$X = A \cup B.$$

Крім того, з неперервності відображення f і замкненості множин $\{0\}$ та $\{1\}$ в просторі $\mathbb{D}$ випливає, що множини A та B замкнені. Тоді

$$\overline{A} = A = f^{-1}(0) \cap B = \emptyset,$$

$$\overline{B} = B = f^{-1}(1) \cap A = \emptyset.$$

Отже, згідно з умовою 2) твердження, одна з множин A чи B має бути порожньою. Отримана суперечність доводить, що кожне неперервне відображення з X в $\mathbb{D} = \{0, 1\}$ стале. За твердженням 11.9 простір X зв'язний. □

11.4 Замикання та внутрішність множини в підпросторі

Перед тим, як продовжити дослідження властивостей зв'язних множин, нам будуть потрібні формули для обчислення відносних замикань та відносних внутрішностей.

Замикання множини A *в підпросторі* E топологічного простору X, тобто, множину всіх точок з E, які є граничними точками множини A в підпросторі E, ми позначатимемо

$$\overline{A}^E.$$

Аналогічно, внутрушність множини A *в підпросторі* E, тобто, множину всіх точок з E, які є внутрішніми точками множини A в підпросторі E, ми позначатимемо

$$\mathrm{int}_E A.$$

Твердження 11.13. *Якщо E – підпростір топологічного простору X і $A \subseteq E$, то*

$$\overline{A}^E = E \cap \overline{A}. \tag{11.1}$$

Доведення. За означенням, замикання $\overline{A}^E$ – це перетин всіх замкнених множин F_s в E, які містять A, тобто,

$$\overline{A}^E = \bigcap_{s \in S} F_s,$$

де кожна множина F_s, будучи замкненою в E, зображається у вигляді

$$F_s = E \cap A_s,$$

де A_s – замкнена множина в X. Тоді

$$\overline{A}^E = \bigcap_{s \in S} (E \cap A_s) = E \cap \left(\bigcap_{s \in S} A_s \right) = E \cap \overline{A}.$$

$\square$

Приклад 11.14. Нехай E – числова пряма, яку ми розглядаємо, як підпростір площини. Іншими словами, $E = \mathbb{R} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Розглянемо підмножину $A = (0,1) \times \{0\}$ множини E. Тоді

$$\overline{A}^E = E \cap \overline{A} = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cap ([0,1] \times \{0\}) = [0,1] \times \{0\}.$$

Тут замикання множини в підпросторі збігається із замиканням множини у всьому просторі $\mathbb{R}^2$.

Але для внутрішності в підпросторі подібна рівність не вірна. Множина A є відкритою в числовій прямій, тому $\mathrm{int}_E A = (0,1) \times \{0\} = A$. З іншого боку, множина A, як підмножина площини $\mathbb{R}^2$ має порожню внутрішність. Тому $E \cap \mathrm{int} A = \emptyset$.

11.5 Лема про віник

Сформулюємо наслідок з твердження 11.9.

Твердження 11.15. *Якщо підпростір C топологічного простору X зв'язний, то для довільних двох відокремних підмножин A, B простору X, таких, що $C \subseteq A \cup B$, завжди або $C \subseteq A$, або $C \subseteq B$.*

Доведення. Множини $A \cap C$ і $B \cap C$ відокремні в X, бо

$$\overline{A \cap C} \cap (B \cap C) \subseteq \overline{A} \cap B = \emptyset.$$

Аналогічно,

$$\overline{B \cap C} \cap (A \cap C) \subseteq \overline{B} \cap A = \emptyset.$$

Згідно з формулою (11.1)

$$\overline{A \cap C}^C = C \cap \overline{A \cap C} \subseteq \overline{A \cap C}.$$

Оскільки $A \cap C$ та $B \cap C$ відокремні в X, то $\overline{A \cap C} \subseteq X \setminus (B \cap C)$, звідки

$$\overline{A \cap C}^C \cap (B \cap C) = \emptyset.$$

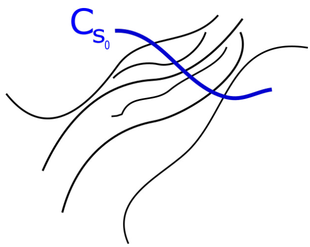
Аналогічно,

$$\overline{B \cap C}^{C} \cap (A \cap C) = \emptyset.$$

Отже, множини $A \cap C$ і $B \cap C$ відокремні в C. Крім того, їхнє об'єднання дає множину C. Згідно з твердженням 11.12, одна з цих множин порожня, отже, множина C міститься в іншій множині. Тобто, $C \subseteq C \cap A \subseteq A$ або $C \subseteq C \cap B \subseteq B$. $\square$

Наступне твердження ми називаємо **"лемою про віник"**.

Теорема 11.16. *Нехай $\mathscr{C} = (C_s : s \in S)$ – деяка сім'я зв'язних підмножин топологічного простору X. Якщо існує $s_0 \in S$, таке, що що множина C_{s_0} не відокремна від жодної з множин C_s, то об'єднання $\bigcup\limits_{s \in S} C_s$ – зв'язне.*



Доведення. Позначимо

$$C = \bigcup_{s \in S} C_s.$$

Міркуючи від супротивного, припустимо, що множина C не зв'язна. Тоді її можна подати у вигляді

$$C = X_1 \cup X_2,$$

де X_1 і X_2 – відкрито-замкнені непорожні підмножини C. Оскільки $C_{s_0} \subseteq X_1 \cup X_2$, то згідно з твердженням 11.15 $C_{s_0} \subseteq X_1$ або $C_{s_0} \subseteq X_2$. Нехай $C_{s_0} \subset X_1$.

Аналогічні міркування для кожної зв'язної множини C_s показують, кожна з множин C_s знаходиться або в X_1, або в X_2. Припустимо, що деяка множина C_s міститься в X_2. Але тоді

$$C_{s_0} \cap \overline{C_s} \subseteq X_1 \cap \overline{X_2} = \emptyset,$$

а це суперечить тому факту, що C_{s_0} не є відокремною від C_s. Отже, $C_s \subseteq X_1$ для всіх $s \in S$. Звідси випливає, що $C \subseteq X_1$ і $X_2 = \emptyset$. □

Наслідок 11.17. *Якщо підпростір C простору X зв'язний, то і кожний підпростір A простору X, для якого*

$$C \subseteq A \subseteq \overline{C},$$

також зв'язний.

Доведення. Позначимо $C_{s_0} = C$ і $C_x = C \cup \{x\}$ для кожного $x \in A$. Оскільки для кожного $x \in A$

$$C \subseteq C_x \subseteq \overline{C},$$

то

$$\overline{C} \cap C_x \neq \emptyset \neq C \cap \overline{C_x}.$$

Таким чином, множини C і C_x не є відокремними для всіх $x \in A$. З леми про віник випливає, що об'єднання

$$A = \bigcup_{x \in A} (C_x \cup C_{s_0})$$

зв'язне. □

Наслідок 11.18. *Якщо $\mathscr{C} = (C_s : s \in S)$ – сім'я зв'язних множин, одна з яких перетинає кожну іншу множину з сім'ї $\mathscr{C}$, то об'єднання*

$$C = \bigcup_{s \in S} C_s$$

зв'язне.

Доведення. Позначимо через C_{s_0} множину, яка перетинає всі інші множини з $\mathscr{C}$. Оскільки $C_{s_0} \cap C_s \neq \emptyset$, то C_{s_0} і C_s не відокремні для кожного $s \in S$. Залишилось застосувати лему про віник. □

Наслідок 11.19. *Якщо A та B – зв'язні множини і $A \cap B \neq \emptyset$, то їхнє об'єднання $A \cup B$ зв'язне.*

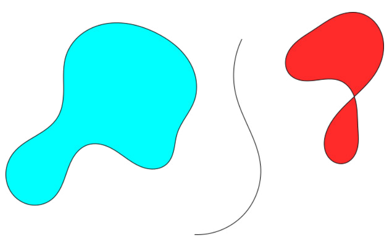
Доведення. Зрозуміло, що множини A та B не відокремні, бо мають непорожній перетин. Звідси з леми про віник для двоелементної сім'ї $\mathscr{C} = (A, B)$ негайно випливає зв'язність об'єднання. □

Лекція 12

Зв'язність і неперервні функції

12.1 Компоненти зв'язності

Означення 12.1. *Компонентою зв'язності* простору X називається кожна його зв'язна підмножина, яка не міститься в жодній строго більшій зв'язній множині.



На цьому малюнку різними кольорами зображені три компоненти зв'язності простору, який є об'єднанням цих множин. Весь простір, очевидно, незв'язний.

Твердження 12.2. *Кожна точка простору X міститься в деякій компоненті зв'язності, причому тільки в одній: нею є об'єднання всіх зв'язних множин, що містять дану точку.*

Доведення. Зафіксуємо $x \in X$ і розглянемо сім'ю $\mathscr{C} = (C_s : s \in S)$ всіх зв'язних множин, які містять точку x. Позначимо

$$C = \bigcup_{s \in S} C_s.$$

Застосуємо наслідок 11.18 леми про віник для сім'ї $\mathscr{C}$ і множини $C_{s_0} = \{x\}$ (яка, очевидно, зв'язна, і є елементом цієї сім'ї), і отримаємо зв'язність множини C.

Зрозуміло, що множина C є максимальною серед усіх зв'язних множин, що містять x. Отже, C є компонентою зв'язності простору X. $\square$

Наслідок 12.3. *Кожна зв'язна непорожня множина топологічного простору X міститься в деякій компоненті зв'язності цього простору.*

Доведення. Розглянемо довільну зв'язну множину $C \neq \emptyset$. Візьмемо довільну точку $x \in C$. За твердженням 12.2 $x \in E$, де E – об'єднання всіх зв'язних множин, які містять цю точку. Тоді $C \subseteq E$. $\square$

Твердження 12.4. *Дві компоненти зв'язності топологічного простору X або збігаються, або не перетинаються.*

Доведення. Нехай A та B – компоненти зв'язності простору X. Міркуючи від супротивного, припустимо, що $A \neq B$ і $A \cap B \neq \emptyset$. З наслідку 11.19 леми про віник випливає, що тоді множина $A \cup B$ зв'язна. Оскільки $A \cup B$ є ширшою зв'язною множиною, ніж A, ми отримуємо суперечність означенню компоненти. $\square$

Твердження 12.5. *Компоненти зв'язності є замкненими множинами.*

Доведення. Нехай C – компонента зв'язності. З наслідку 11.17 леми про віник випливає, що її замикання $\overline{C}$ теж зв'язне. З максимальності компоненти зв'язності випливає, що $C = \overline{C}$. Отже, множина C замкнена. $\square$

12.2

Зв'язність – топологічна властивість

Теорема 12.6. *Нехай X – зв'язний топологічний простір, Y – топологічний простір і $f : X \to Y$ – неперервне відображення. Тоді образ $f(X)$ є зв'язною підмножиною в Y.*

Доведення. Припустимо, що це не так. Тоді множина $f(X)$ покривається двома неперетинними непорожніми відкрито-замкненими підпросторами Y_1 та Y_2. З неперервності відображення f випливає, що кожний з прообразів $X_i = f^{-1}(Y_1)$, $i = 1, 2$, є відкрито-замкненою множиною в X. Крім того, легко бачити, що $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ і $X = X_1 \cup X_2$. А це суперечить зв'язності простору X. $\square$

Наслідок 12.7. *Кількість компонент зв'язності є топологічним інваріантом (тобто, не змінюється при гомеоморфізмах).*

Доведення. Нехай $\{X_i : i \in I\}$ – сукупність всіх компонент зв'язності топологічного простору X. Згідно з твердженням 12.4 ми можемо вважати, що $X_i \cap X_j = \emptyset$ для всіх $i \neq j$.

Розглянемо довільний простір Y, гомеоморфний до X, і доведемо, що потужність сім'ї $\mathscr{C}$ всіх його компонент зв'язності дорівнює $|I|$.

Нехай $f : X \to Y$ – гомеоморфізм між X та Y. Позначимо $Y_i = f(X_i)$ для кожного $i \in I$ і доведемо, що $\mathscr{C} = \{Y_i : i \in I\}$. З неперервності f і попередньої теореми випливає, що множина Y_i зв'язна для всіх $i \in I$. Далі, оскільки f – бієкція, а множини X_i попарно неперетинні, то і $Y_i \cap Y_j = \emptyset$ для всіх різних $i, j \in I$.

Доведемо, що кожна непорожня зв'язна множина в Y міститься в деякому Y_i (звідки негайно випливатиме, що Y_i – компонента зв'язності простору Y). Зафіксуємо зв'язну множину $C \neq \emptyset$ в Y. Оскільки обернене відображення $g = f^{-1} : Y \to X$ неперервне, то множина $g(C) \subseteq X$ зв'язна. Згідно з наслідком 12.3, $g(C) \subseteq X_i$ для деякого $i \in I$. З рівності $g(C) = f^{-1}(C)$ випливає, що $f^{-1}(C) \subseteq X_i$, а значить, $C \subseteq f(X_i) = Y_i$.

Таким чином, $\{Y_i : i \in I\}$ – це сукупність всіх компонент зв'язності в Y. $\square$

12.3 Теорема про проміжне значення

В курсі математичного аналізу вивчається наступна властивість, яка є одною з ключових властивостей неперервних на відрізку функцій.

Теорема 12.8. [Теорема про проміжне значення] *Якщо $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ – неперервна функція, $f(a) = A$, $f(b) = B$ і C – довільне число, яке знаходиться між числами A та B, то існує точка $c \in [a, b]$, така, що $f(c) = C$.*

Насправді, цей факт випливає з наступного загальнішого твердження.

Теорема 12.9. *Нехай X – зв'язний топологічний простір і $f : X \to \mathbb{R}$ – неперервна функція. Тоді множина $f(X)$ – проміжок.*

Доведення. Оскільки функція f неперервна, то з теореми 12.6 випливає, що множина $f(X)$ – зв'язна в $\mathbb{R}$. Згідно з теоремою 11.10 попередньої лекції, $f(X)$ – проміжок. $\square$

Тепер виведемо теорему про проміжне значення з теореми 12.9. Отже, розглянемо неперервну функцію f, яка задовольняє умови теореми 12.9. Без обмеження загальності вважатимемо, що $A \leq B$. Оскільки відрізок $[a, b]$ – зв'язний простір, то множина $f([a, b])$ є проміжком на числовій прямій. Зауважимо, що $A, B \in f([a, b])$. Оскільки довільний проміжок разом із двома точками містить цілий відрізок, що їх сполучає, то $[A, B] \subseteq f([a, b])$. Тоді для довільного $C \in [A, B]$ виконується $C \in f([a, b])$, тобто, існує деяке $c \in [a, b]$, таке, що $f(c) = C$.

Лекція 13

Перші аксіоми відокремності

В цій лекції ми вивчимо природні вимоги на топологічну структуру, які наближають властивості топологічного простору до властивостей метричного простору. Відомо багато аксіом відокремності, але ми обмежимося найважливішими з них. Кожна аксіома відокремності має свій номер (не обов'язково цілий) і позначаються вони T_0, T_1, T_2, T_3, $T_{3\frac{1}{2}}$ і T_4.

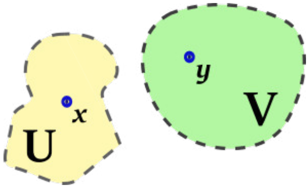
13.1 Почнемо одразу з другої

Ми почнемо з найбільш важливої – другої аксіоми T_2, яка ще називається *аксіомою Гаусдорфа*.

Означення 13.1. Топологічний простір X задовольняє *аксіому T_2* або *є T_2-простором*, якщо будь-які дві різні точки мають неперетинні околи.

Більш формальний запис цього означення наступний:

$\forall x, y \in X$, $x \neq y$, $\exists U$ – окіл точки x, $\exists V$ – окіл точки y, такі, що $U \cap V = \emptyset$.



T_2-простори називають *гаусдорфовими*.

Твердження 13.2. *Кожний метричний простір є гаусдорфовим.*

Доведення. Нехай (X, d) – метричний простір і $x, y \in X$ – дві різні точки цього простору. Через r позначимо відстань між цими точками: $r = d(x, y)$. Тоді $r > 0$, оскільки $x \neq y$. Покладемо

$$U = B(x, \tfrac{1}{3}r), \quad V = B(y, \tfrac{1}{3}r).$$

Якщо $u \in U$, то $d(x, u) < \frac{1}{3}$. З нерівності трикутника маємо, що

$$d(x, y) \leq d(x, u) + d(u, y),$$

звідки

$$d(u, y) \geq d(x, y) - d(x, u) > r - \tfrac{1}{3}r = \tfrac{2}{3}r > \frac{1}{3}r.$$

Отже, $u \notin B(y, \frac{1}{3}r)$. Таким чином, $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Існують також T_2-простори, які не є метризовними.

Приклад 13.3. *Пряма Зорґенфрея $\mathbb{S}$ є гаусдорфовим простором.*

Справді, нехай $x, y \in \mathbb{S}$ – дві різні точки. Позначимо

$$r = |x - y| > 0$$

і покладемо

$$U = [x, x + \tfrac{1}{3}r), \quad V = [y, y + \tfrac{1}{3}).$$

Тоді U та V є неперетинними околами точок x та y, відповідно.

Неметризовність прямої Зорґенфрея ми покажемо дещо пізніше.

Розглянемо тепер приклад топологічного простору, який не є гаусдорфовими.

Приклад 13.4. Зв'язна двоточка $X = \{0, 1\}$ з топологією Серпінського не задовольняє аксіому T_2.

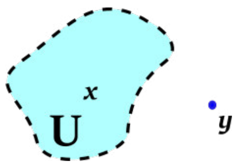
Розглянемо точки $x = 0$ і $y = 1$. Відкритий окіл точки y – це тільки весь простір $X = \{0, 1\}$, який, очевидно, перетинається з кожним околом точки x. □

13.2 Перша аксіома відокремності

Означення 13.5. Топологічний простір X задовольняє *першій аксіомі відокремності* T_1, якщо кожна з двох різних точок цього простору має окіл, який не містить іншої з цих точок.

Більш формальний запис:

$$\forall x, y \in X,\ x \neq y,$$
$$\exists U \text{ – окіл точки } x, \text{ такий, що } y \notin U,$$
$$\text{а також } \exists V \text{ – окіл точки } y, \text{ такий, що } x \notin V.$$



Твердження 13.6. *Для топологічного простору X наступні умови рівносильні:*

1) X задовольняє аксіомі T_1;

2) довільна одноточкова підмножина простору X замкнена;

3) довільна скінченна підмножина простору X замкнена.

Доведення. **1) $\Rightarrow$ 2).** Нехай $x \in X$ і $F = \{x\}$. Візьмемо довільну точку $y \in \overline{F}$ і покажемо, що $y \in F$ (тобто, $y = x$). Від супротивного, припустимо, що $y \neq x$. Оскільки X є T_1-простором, то існує відкритий окіл V точки y, такий, що $x \notin V$. З того, що $y \in \overline{F}$ маємо, що $V \cap F \neq \emptyset$. Але тоді $x \in V$, суперечність. Отже, $\overline{F} = F$, що і потрібно було довести.

2) $\Rightarrow$ 3). Нехай $F = \{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq X$ – скінченна множина, $k \geq 1$. Оскільки $F = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \{x_i\}$, а кожна одноточкова множина $\{x_i\}$ замкнена в X, то і множина F замкнена як об'єднання скінченної кількості замкнених множин.

3) $\Rightarrow$ 1). Розглянемо дві різні точки $x, y \in X$. Оскільки множина $\{x\}$ замкнена, то доповнення до неї $V = X \setminus \{x\}$ відкрите. Крім того, $y \in V$. Отже, V – відкритий окіл точки y, який не містить x. Аналогічно, існує відкритий окіл точки x (а саме, $U = X \setminus \{y\}$), який не містить y. $\square$

З означень безпосередньо випливає наступний факт.

Твердження 13.7. *Кожний T_2-простір є T_1-простором.*

Обернене твердження не вірне, як показує наступний приклад.

Приклад 13.8. Розглянемо на числовій прямій $\mathbb{R}$ топологію

$$\mathscr{O} = \{A \subseteq \mathbb{R} : \mathbb{R} \setminus A - \text{скінченна}\} \cup \{\emptyset\}.$$

Тоді $X = (\mathbb{R}, \mathscr{O})$ – T_1-простір, який не є гаусдорфовим.

Нехай $x, y \in X$, причому $x \neq y$. Тоді $U = X \setminus \{y\}$. За означенням, $U \in \mathscr{O}$, бо $X \setminus U = \{y\}$. Крім того, $x \in U$ і $y \notin U$. Аналогічно міркуємо для точи y. Отже, X є T_1-простором.

Тепер покажемо, що простір X не задовольняє аксіому T_2. Справді, розглянемо дві різні точки $x, y \in X$ та довільні два околи $U \ni x$ та $V \ni y$. За означенням топології простору X, множини $X \setminus U$ та $X \setminus V$ – скінченні. Оскільки

$$X \setminus (U \cap V) = (X \setminus U) \cup (X \setminus V),$$

то множина $X \setminus (U \cap V)$ теж скінченна. Звідси випливає, що

$$U \cap V \neq \emptyset,$$

бо інакше $X \setminus \emptyset = X = \mathbb{R}$, що суперечить нескінченності числової прямої. Отже, довільні дві відкриті підмножини в X перетинаються. Звідси отримується негаусдорфовість простору X. $\square$

13.3 Аксіома Колмогорова

Означення 13.9. Кажуть, що топологічний простір X *задовольняє аксіому Колмогорова* або *є T_0-простором*, якщо для довільних двох різних точок цього простору *хоча б одна* з них має окіл, який не містить іншу точку.

Приклад 13.10. Антидискретний простір X, що складається більше, ніж з однієї точки, не задовольняє аксіому T_0.

Справді, нехай $x, y \in X$, причому $x \neq y$. Нагадаємо, що єдиними відкритими множинами в X є сам простір і порожня множина. Тоді єдиним околом, який містить x, є множина $U = X$, а єдиним околом, який містить y є множина $V = X$. В будь-якому випадку, $U \cap V = X \neq \emptyset$. $\square$

Твердження 13.11. *Для топологічного простору X наступні умови рівносильні:*

1) *X – T_0-простір;*

2) *замикання будь-яких двох різних одноточкових множин різні.*

Доведення. **1) $\Rightarrow$ 2).** Нехай $x, y \in X$ – дві різні точки. Покажемо, що $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$. Застосуємо аксіому T_0 і знайдемо відкритий окіл U однієї з точок, скажімо, точки x, такий, що $y \notin U$. Тоді $x \notin \overline{\{y\}}$, адже інакше $U \cap \{y\} \neq \emptyset$. Отже, $x \in \overline{\{x\}} \setminus \overline{\{y\}}$, що і потрібно було довести.

2) $\Rightarrow$ 1). Нехай $x, y \in X$ – дві різні точки. За умовою $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$. Тоді хоча б одна з цих множин не міститься в іншій. Припустимо, що $\overline{\{x\}} \not\subseteq \overline{\{y\}}$. Тоді $\overline{\{x\}} \setminus \overline{\{y\}} \neq \emptyset$. Позначимо $U = X \setminus \overline{\{y\}}$ і отримаємо відкритий окіл точки x, який не містить точки y. $\square$

З означень безпосередньо випливає наступне твердження.

Твердження 13.12. *Кожний T_1-простір є T_0-простором.*

Обернене твердження не вірне, як показує наступний приклад.

Приклад 13.13. Нехай X – довільна множина, що складається більше, ніж з однієї точки, і нехай $x_0 \in X$. Покладемо

$$\mathscr{O} = \{X \setminus (A \cup \{x_0\}) : \emptyset \neq A \subseteq X\} \cup \{X\}.$$

Тоді $\{x_0\}$ – це єдина одноточкова підмножина в X, яка замкнена в цій топології. Інші одноточкові множини відкриті, але не замкнені.

Доведемо це. Замкненість множини $\{x_0\}$ випливає з того, що доповнення $X \setminus \{x_0\}$ відкрите, оскільки $X \setminus \{x_0\} \in \mathscr{O}$ (де в ролі множини A виступає множина $\{x_0\}$). Розглянемо довільну іншу точку $x \in X$. Тоді

$$\{x\} = X \setminus ((X \setminus \{x\}) \cup \{x_0\}) \in \mathscr{O}.$$

Таким чином, множина $\{x\}$ відкрита. Оскільки $x \neq x_0$, то множина $\{x_0\}$ не замкнена, адже кожна замкнена множина в X повинна містити точку x_0.

Отже, з твердження 13.11 випливає, що простір X задовольняє аксіому T_0, а з твердження 13.6 випливає, що X не є T_1-простором. $\square$

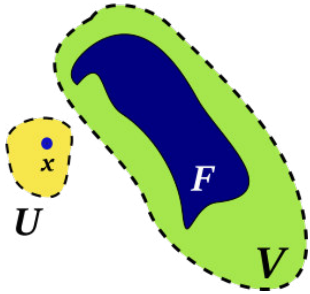
Лекція 14

Подальші аксіоми відокремності

14.1 Третя аксіома відокремності

Означення 14.1. Топологічний простір X задовольняє *третій аксіомі відокремності* T_3, якщо в ньому кожна замкнена множина і точка, яка до неї не належить, мають неперетинні відкриті околи, тобто, для довільної замкненої множини $F \subseteq X$ і довільної точки $x \in X \setminus F$ існують відкриті множини $U, V \subseteq X$, такі, що

$$x \in U, \;\; F \subseteq V \;\text{ і }\; U \cap V = \emptyset.$$



Означення 14.2. Топологічний простір X називається *регулярним*, якщо він задовольняє аксіоми T_1 і T_3.

Твердження 14.3. *Будь-який регулярний простір X є гаусдорфовим.*

Доведення. Нехай $x, y \in X$ – довільні різні точки. З твердження 13.6 випливає, що одноточкова множина $F = \{y\}$ замкнена в просторі X. Крім того, $x \notin F$. Тепер аксіома T_3 дає існування двох неперетинних околів U та V точок x та y, відповідно. $\square$

Наступний приклад показує, що існують гаусдорфові простори, які не є регулярними.

Приклад 14.4. Розглянемо на числовій прямій множину

$$Z = \{\pm\tfrac{1}{n} : n = 1, 2, \dots\}$$

і для кожного $x \in \mathbb{R}$ покладемо

$$B_k(x) = (x - \tfrac{1}{k}, x + \tfrac{1}{k}),$$

якщо $x \neq 0$, і

$$B_k(0) = (-\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k}) \setminus Z.$$

Нескладно переконатися, що сім'я

$$\mathscr{B} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{B_k(x) : k \in \mathbb{N}\}$$

задовольняє аксіоми (B1) і (B2) твердження 3.2 (див. лекцію №3). Отже, $\mathscr{B}$ утворює базу деякої топології $\mathscr{O}$ на числовій прямій. Позначимо $X = (\mathbb{R}, \mathscr{O})$.

Доведемо, що простір X є нерегулярним T_2-простором.

Зафіксуємо дві різні точки $x, y \in X$. Візьмемо $k \in \mathbb{N}$, таке, що $\frac{1}{k} < \frac{1}{2}|x-y|$. Якщо жодне з чисел x та y не є нулем, то покладемо $U = (x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k})$ і $V = (y - \frac{1}{k}, y + \frac{1}{k})$. Якщо ж одне з чисел, скажімо, x, дорівнює нулеві, по покладемо $U = (-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \setminus Z$. Тоді множини U і V є неперетинними околами x і y, відповідно. Отже, X – гаусдорфовий простір.

Покажемо, що X не задовольняє аксіому T_3.

Зауважимо спочатку, що множина Z замкнена в X. Справді, нехай $x \notin Z$. Якщо $x = 0$, то довільний окіл U точки x не перетинається з Z за визначенням околу нуля. Якщо ж $x \neq 0$, то, взявши $k \in \mathbb{N}$ достатньо великим, наприклад так, що $\frac{1}{k} < |x|$, ми отримаємо, що $B_k(x) \subseteq X \setminus Z$. Іншими словами, кожна точка з $X \setminus Z$ є внутрішньою, а це означає, що множина $X \setminus Z$ відкрита. В свою чергу, Z – замкнена множина в X.

Легко бачити, що довільний окіл U точки $x = 0$ (зауважимо, що $x \notin Z$) і довільна відкрита множина $V \supseteq Z$ перетинаються. Отже, X не є регулярним простором. □

Твердження 14.5. *Кожний метричний простір є регулярним.*

Доведення. Нехай (X, d) – метричний простір. Зафіксуємо $x_0 \in X$ і замкнену множину $F \subseteq X$, такі, що $x_0 \notin F$. Для кожного $x \in X$ позначимо $\varrho(x) = d(x, F)$ і нагадаємо, що функція $\varrho : X \to [0, +\infty)$ неперервна згідно з теоремою 10.4. Крім того, з теореми 10.5 випливає, що

$$r = \varrho(x_0) = d(x_0, F) > 0.$$

Покладемо

$$U = \{x \in X : \varrho(x) > \tfrac{r}{2}\} = \varrho^{-1}((\tfrac{r}{2}, +\infty))$$

і

$$V = \{x \in X : \varrho(x) < \tfrac{r}{2}\} = \varrho^{-1}([0, \tfrac{r}{2})).$$

Тоді кожна множина U і V відкрита, як прообраз відкритої множини при неперервному відображенні. Крім того,

$$x_0 \in U,$$

оскільки $\varrho(x_0) = r > \frac{r}{2}$. З того, що $\varrho(x) = 0 < \frac{r}{2}$ для всіх $x \in F$ випливає, що

$$F \subseteq V.$$

Нарешті, з визначення множин U і V маємо, що $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Теорема 14.6. *Для T_1-простору X наступні умови рівносильні:*

1) X – регулярний;

2) для кожної точки $x \in X$ і кожного її околу V з деякої фіксованої бази $\mathscr{B}$ існує окіл U цієї точки, такий, що $\overline{U} \subseteq V$.

Доведення. **1) $\Rightarrow$ 2).** Зафіксуємо $x \in X$ і окіл $V \in \mathscr{B}$ цієї точки. Оскільки множина $F = X \setminus V$ замкнена і $x \notin F$, то з регулярності простору X випливає існування відкритих неперетинних множин U і G, таких, що $x \in U$ і $F \subseteq G$. Тоді

$$U \subseteq X \setminus G \subseteq V,$$

звідки

$$\overline{U} \subseteq \overline{X \setminus G} = X \setminus G \subseteq V.$$

Отже, $\overline{U} \subseteq V$.

2) $\Rightarrow$ 1). Виберемо $x \in X$ і замкнену множину F так, що $x \notin F$. За означенням бази, існує множина $V \in \mathscr{B}$, така, що

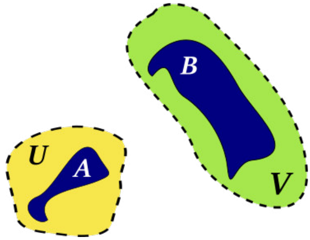
$$x \in V \subseteq X \setminus F.$$

За умовою теореми існує окіл U точки x, такий, що $\overline{U} \subseteq V$. Тоді U і $X \setminus \overline{U}$ є відкритими неперетинними околами точки x і множини F, відповідно. Отже, X – регулярний простір. $\square$

14.2 Четверта аксіома відокремності

Означення 14.7. Топологічний простір X задовольняє *четвертій аксіомі відокремності T_4*, якщо в ньому кожні дві неперетинні замкнені множини мають неперетинні відкриті околи, тобто, для довільних замкнених множин $A, B \subseteq X$, таких, що $A \cap B = \emptyset$ існують відкриті множини $U, V \subseteq X$, такі, що

$$A \subseteq U,\ B \subseteq V \text{ і } U \cap V = \emptyset.$$



Означення 14.8. Топологічний простір X називається *нормальним*, якщо він задовольняє аксіоми T_1 і T_4.

З означень безпосередньо випливає, що кожний нормальний простір є регулярним.

Твердження 14.9. *Кожний метричний простір нормальний.*

Доведення. Розглянемо дві неперетинні замкнені множини A і B в метричному просторі (X, d). Для кожного $x \in X$ покладемо

$$\alpha(x) = d(x, A),\ \ \beta(x) = d(x, B).$$

Згідно з теоремою 10.4 функції $\alpha, \beta : X \to [0, +\infty)$ неперервні. Оскільки множини A та B замкнені, то з теореми 10.5 випливає, що

$$A = \overline{A} = \alpha^{-1}(0),\ \ B = \overline{B} = \beta^{-1}(0).$$

Утворимо третю функцію

$$\gamma(x) = \frac{\alpha(x)}{\alpha(x) + \beta(x)} \tag{14.1}$$

для всіх $x \in X$. Покажемо, що γ коректно визначена, тобто, що її знаменник не обертається в нуль. Справді, якщо $x \in A$, то $x \notin B$, а тоді $\alpha(x) + \beta(x) = \beta(x) > 0$; якщо $x \in B$, то $x \notin A$, і тоді $\alpha(x) + \beta(x) = \alpha(x) > 0$; якщо ж $x \notin A \cup B$, то $\alpha(x) + \beta(x) > 0$.

Згідно з теоремою 10.7 функція $\gamma : X \to [0, +\infty)$ неперервна. Тому множини

$$U = \gamma^{-1}([0, \tfrac{1}{2})) \text{ і } V = \gamma^{-1}((\tfrac{1}{2}, +\infty))$$

відкриті в X. Крім того, зрозуміло, що $U \cap V = \emptyset$.

Якщо $x \in A$, то $\alpha(x) = 0$, звідки $\gamma(x) = 0 < \frac{1}{2}$. Отже, $A \subseteq U$.

Якщо $x \in B$, то $\beta(x) = 0$, звідки $\gamma(x) = \frac{\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1 > \frac{1}{2}$. Таким чином, $B \subseteq V$. □

Існують також нормальні простори, які не є метризовними. Прикладом такого простору є пряма Зорґенфрея.

Твердження 14.10. *Пряма Зорґенфрея $\mathbb{S}$ є нормальним простором.*

Доведення. Розглянемо дві неперетинні замкнені множини $A, B \subseteq \mathbb{S}$. Оскільки B – замкнена, то кожна точка множини $\mathbb{S} \setminus B$ міститься в ній разом з деяким своїм базисним околом. Отже, для кожного $a \in A$ виберемо базисний проміжок $[a, x(a))$, який не перетинається з B. Аналогічно, для кожного $b \in B$ виберемо базисний проміжок $[b, x(b))$, який не перетинається з A. Покладемо

$$U = \bigcup_{a \in A} [a, x(a)) \quad \text{і} \quad V = \bigcup_{b \in B} [b, x(b)).$$

Зрозуміло, що множини U та V відкриті, причому

$$A \subseteq U \quad \text{і} \quad B \subseteq V.$$

Покажемо, що

$$U \cap V = \emptyset.$$

Якщо $u \in U$, то $u \in [a, x(a))$ для деякого $a \in A$. Припустимо, що $u \in [b, x(b))$ для деякого $b \in B$. Але тоді, в залежності від того, чи $a < b$, чи $b < a$, виконується включення $b \in [a, x(a))$ або $a \in [b, x(b))$. А це суперечить вибору даних проміжків. □

14.3 Цілком регулярні простори

Означення 14.11. Топологічний простір X задовольняє аксіому $T_{3\frac{1}{2}}$, якщо для довільної точки $x \in X$ і замкненої множини F, яка

не містить цієї точки, існує неперервна функція $f : X \to [0,1]$, така, що
$$f(x) = 0 \text{ і } f(y) = 1 \text{ для всіх } y \in F.$$

Означення 14.12. Топологічний простір називається *цілком регулярним* або *тихоновським*, якщо він задовольняє аксіоми T_1 і $T_{3\frac{1}{2}}$.

Оскільки для відкритих множин
$$U = f^{-1}([0, \tfrac{1}{2})) \text{ і } V = f^{-1}((\tfrac{1}{2}, 1])$$
мають місце співвідношення
$$x \in U,\ F \subseteq V \text{ і } U \cap V = \emptyset,$$
то кожний цілком регулярний простір є регулярним.

Твердження 14.13. *Для T_1-простору X наступні умови рівносильні:*

1) *X – тихоновський,*

2) *для довільної точки $x \in X$ і довільного околу U цієї точки з деякої бази $\mathscr{B}$ існує неперервна функція $f : X \to [0,1]$, така, що $f(x) = 0$ і $f(y) = 1$ для всіх $y \in X \setminus U$.*

Доведення. **1) $\Rightarrow$ 2).** Зафіксуємо $x \in X$ та окіл $U \in \mathscr{B}$ цієї точки. Оскільки множина $X \setminus U$ замкнена і не містить точки x, то умова 2) негайно випливає з означення тихоновського простору.

2) $\Rightarrow$ 1). Нехай $x \in X$ і $F \subseteq X$ – замкнена множина, така, що $x \notin F$. Тоді $V = X \setminus F$ є відкритою множиною, що містить x. З означення бази випливає існування такого околу $U \in \mathscr{B}$ точки x, що $U \subseteq V$. Згідно з умовою 2) існує неперервна функція $f : X \to [0,1]$, така, що $f(x) = 0$ і $f(y) = 1$ для всіх $y \in X \setminus U$. Тоді для всіх $y \in F$ з того, що $F = X \setminus V \subseteq X \setminus U$ випливає рівність $f(y) = 1$. $\square$

Покажемо безпосередньо, що пряма Зорґенфрея задовольняє аксіому $T_{3\frac{1}{2}}$.

Твердження 14.14. *Пряма Зорґенфрея $\mathbb{S}$ є цілком регулярним простором.*

Доведення. Зафіксуємо довільну точку $x_0 \in \mathbb{S}$ та довільний її базисний окіл $U = [x_0, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Для всіх $x \in \mathbb{S}$ покладемо

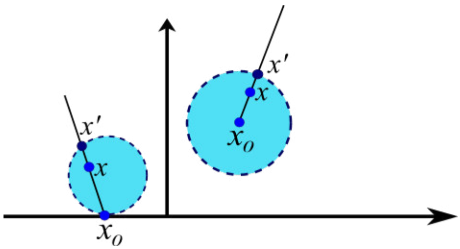
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in U, \\ 1 & \text{якщо } x \notin U. \end{cases}$$

Оскільки множина U відкрито-замкнена в $\mathbb{S}$, то відображення $f : \mathbb{S} \to [0,1]$ неперервне. Крім того, $f(x_0) = 0$ і $f(x) = 1$ для всіх $x \in X \setminus U$. □

Нагадаємо, що топологічний простір, відомий в літературі як "площина Немицького" був уведений в лекції №4.

Твердження 14.15. *Площина Немицького $\mathbb{P}$ є цілком регулярним простором.*

Доведення. Зафіксуємо довільну точку $x_0 \in \mathbb{P}$ та довільний її базисний окіл U. Для кожної точки $x \in U \setminus \{x_0\}$ позначимо через x' точку, в якій промінь, що виходить з точки x_0 і проходить через x, перетинає коло, що обмежує множину U.



Визначимо функцію $f : \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ формулою

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = x_0 \\ 1, & x \in \mathbb{P} \setminus U, \\ \frac{|x - x_0|}{|x' - x_0|}, & x \in U \setminus \{x_0\}, \end{cases}$$

де через $|a - b|$ ми позначаємо відстань на площині між точками a і b. Нескладно переконатися, що ця функція неперервна, і $f(x_0) = 0$, $f(x) = 1$ для всіх $x \notin U$. □

Зауважимо, що площина Немицького не задовольняє аксіому T_4, а, отже, не є нормальним простором. Ми покажемо це в подальших лекціях.

Отже, підсумуємо попередні дві лекції на діаграмі.

Для топологічного простору X вірні наступні імплікації:

$$\begin{array}{ccccc}
\text{метричний} & \Rightarrow & \text{нормальний} & \Rightarrow & \text{цілком регулярний} \\
 & & & & \Downarrow \\
T_1 & \Leftarrow & \text{гаусдорфовий} & \Leftarrow & \text{регулярний} \\
\Downarrow & & & & \\
T_0 & & & &
\end{array}$$

Жодна з обернених імплікацій не вірна.

Лекція 15

Досконало нормальні простори

15.1 Лема Урисона

Наступна теорема є однією з фундаментальних в топології. По історичним причинам вона називається *лемою Урисона.*

Теорема 15.1 (Лема Урисона). *Для кожної пари неперетинних замкнених множин A і B в нормальному просторі X існує неперервна функція $f : X \to [0,1]$, така, що*

$$f(x) = 0 \text{ при } x \in A \quad і \quad f(x) = 1 \text{ при } x \in B.$$

Доведення. Для кожного раціонального числа r з відрізка $[0,1]$ визначимо відкриту множину $V_r \subseteq X$, так, що

$$\overline{V_r} \subseteq V_q, \text{ якщо } r < q, \tag{15.1}$$

$$A \subseteq V_0, \ B \subseteq X \setminus V_1. \tag{15.2}$$

Цю побудову ми здійснимо індуктивно. Покладемо $r_1 = 0$, $r_2 = 1$ і занумеруємо множину всіх раціональних чисел з інтервалу $(0,1)$ у послідовність $\{r_3, r_4, \dots\}$.

Оскільки простір X нормальний, то існують дві відкриті непеPeтинні множини U і V, такі, що $A \subseteq U$ і $B \subseteq V$.

Позначимо

$$V_0 = U \text{ і, } V_1 = X \setminus B.$$

Зрозуміло, що для цих множин виконується умова (15.2). Крім того,

$$\overline{V_0} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subseteq X \setminus B = V_1.$$

Значить,

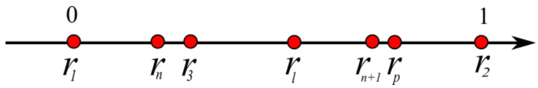
$$\overline{V_0} \subseteq V_1,$$

отже, виконується умова (15.1) при $r = 0$, $q = 1$.

Тепер припустимо, що для деякого $n \geq 2$ ми вже визначили n відкритих множин $V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_n}$, які задовольняють включення

$$\overline{V_{r_i}} \subseteq V_{r_k}, \quad \text{якщо} \quad r_i < r_k \tag{15.3}$$

для всіх $i, k \leq n$. Розглянемо число r_{n+1} і позначимо через r_l і r_p ті з чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, які ближче всього до r_{n+1} зліва і справа.



Оскільки $r_l < r_p$, то $\overline{V_{r_l}} \subseteq V_{r_p}$ згідно з (15.3). З нормальності простору X випливає, що існують такі відкриті неперетинні множини U і V, такі, що

$$\overline{V_{r_l}} \subseteq U \quad \text{і} \quad X \setminus V_{r_p} \subseteq V.$$

Тоді

$$U \subseteq X \setminus V \setminus V_{r_p},$$

звідки

$$\overline{U} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subseteq V_{r_p}.$$

Покладемо

$$V_{r_{n+1}} = U.$$

Тоді послідовність $V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots V_{r_{n+1}}$ задовольняє умови (15.1) і (15.2)

Визначимо функцію $f : X \to [0, 1]$ формулою

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r : x \in V_r\}, & \text{якщо} \quad x \in V_1, \\ 1, & \text{якщо} \quad x \in X \setminus V_1. \end{cases} \tag{15.4}$$

Якщо $x \in A$, то згідно з (15.2) $x \in V_0 =\subseteq V_1$, звідки $\inf\{r : x \in V_r\} = 0$, а тому $f(x) = 0$. Якщо $x \in B$, то знову згідно з (15.2) $x \in X \setminus V_1$, а тому $f(x) = 1$.

Залишилося показати, що функція $f : X \to [0, 1]$ неперервна. Доведемо спочатку, що прообраз довільної відкритої в $[0, 1]$ множини вигляду $[0, a)$ та $(b, 1]$ є відкритою множиною в X, де $a \leq 1$, $b \geq 0$.

Розглянемо прообраз $G = f^{-1}([0, a))$ для деякого $a \leq 1$. Нехай $x \in G$. Тоді $0 \leq f(x) < a$. Звідси $\inf\{r : x \in V_r\} < a$, а тому за означенням точної нижньої межі існує таке раціональне число $q < a$, що $x \in V_q$. Доведемо, що $V_q \subseteq G$. Візьмемо довільне $y \in V_q$. Тоді $f(y) = \inf\{r : y \in V_r\} \leq q < a$. Отже, $x \in V_q \subseteq G$, значить, точка x є внутрішньою точкою множини G. Таким чином, множина G відкрита в X.

Тепер розглянемо прообраз $H = f^{-1}((b, 1])$ для деякого $b \geq 0$. Візьмемо $x \in H$. Тоді $b < f(x) \leq 1$. Якби для всіх $q > b$ виконувалось включення $x \in V_q$, то $f(x) = \inf\{r : x \in V_r\} \leq b$, що неможливо. Отже, існує таке $q > b$, що $x \notin V_q$. Але тоді згідно з (15.1), існує $p > b$, що $x \notin \overline{V_p}$. Значить, множина

$$H = \bigcup_{r>b} (X \setminus \overline{V_r})$$

є відкритою.

Нарешті, для неперервності функції f достатньо довести, що прообраз довільного базисного інтервалу $(, d)$ є відкритою множиною (див. теорему 9.8 з лекції №9). Зафіксуємо $c, d \in [0, 1]$, $0 \leq c < d \leq 1$. Тоді

$$f^{-1}((c, d)) = f^{-1}((c, 1]) \cap f^{-1}([0, d))$$

є відкритою множиною, як перетин двох відкритих множин. $\square$

15.2 Ще два класи підмножин топологічного простору

Нехай X – топологічний простір.

Означення 15.2. Множина $A \subseteq X$ називається *множиною типу* F_σ, якщо існує послідовність $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ замкнених підмножин простору X, така, що

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Означення 15.3. Множина $A \subseteq X$ називається *множиною типу* G_σ, якщо існує послідовність $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ відкритих підмножин простору X, така, що

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Очевидно, кожна замкнена множина $F \subseteq X$ є типу F_σ, адже ми можемо покласти $F_n = F$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, а кожна відкрита множина $G \subseteq X$ є типу G_δ при $G_n = G$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Навпаки не так, як показує наступний приклад.

Приклад 15.4. Множина $A = [0, 1)$ є типу F_σ і типу G_δ на числовій прямій, але не є ані замкненою, ані відкритою.

Справді, розглянемо послідовності замкнених множин $F_n = [0, 1 - \frac{1}{n}]$ і відкритих множин $G_n = (\frac{1}{n}, 1)$, $n \in \mathbb{N}$. Як нескладно зрозуміти,

$$[0, 1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Твердження 15.5. *Множина A є типу F_σ в X тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ є типу G_δ.*

Доведення. Необхідність. Нехай $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність замкнених множин, така, що $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Тоді

$$X \setminus A = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus F_n).$$

Позначимо $G_n = X \setminus F_n$ і отримаємо послідовність відкритих множин $(G_n)_{n=1}^{\infty}$, таку, що $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Отже, множина $X \setminus A$ є типу G_δ в X.

Достатність. Цілком аналогічно. □

Теорема 15.6. *Для підмножини A нормального простору X наступні умови рівносильні:*

1) A – замкнена G_δ-множина,

2) існує неперервна функція $f : X \to [0,1]$, така, що $A = f^{-1}(0)$.

Доведення. **1) $\Rightarrow$ 2).** Нехай A – замкнена G_δ-множина. Розглянемо її доповнення $X \setminus A$. Згідно з твердженням 15.5, існує послідовність замкнених множин $(F_n)_{n=1}^\infty$, така, що $X \setminus A = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$. Оскільки $A \cap F_n = \emptyset$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то за лемою Урисона існує неперервна функція $f_n : X \to [0,1]$, така, що

$$f_n(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in A,$$

і

$$f_n(x) = 1 \quad \text{при} \quad x \in F_n.$$

Для кожного $x \in X$ покладемо

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} f_n(x)$$

і отримаємо, що функція $f : X \to [0,1]$ неперервна, як сума рівномірно збіжного ряду з неперервних функцій (див. лекцію №10).

Якщо $x \in A$, то $f_n(x) = 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, а значить, $f(x) = 0$. Якщо ж $x \in X \setminus A$, то існує таке $n \in \mathbb{N}$, що $x \in F_n$. Тоді $f_n(x) = 1$, а значить, $f(x) > 0$. Отже, $A = f^{-1}(0)$.

2) $\Rightarrow$ 1). Нехай тепер $A = f^{-1}(0)$ для деякої неперервної функції $f : X \to [0,1]$. Тоді множина A замкнена як прообраз замкненої множини $\{0\}$ при неперервному відображенні. Зауважимо, що

$$\{0\} = \bigcap_{n=1}^\infty (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}).$$

Тоді

$$A = \bigcap_{n=1}^\infty f^{-1}\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

є множиною типу G_δ, оскільки кожна множина $f^{-1}(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ відкрита як прообраз відкритої множини при неперервному відображенні. $\square$

Враховуючи твердження 15.5, попередню теорему можна переформулювати в наступному вигляді.

Теорема 15.7. *Для підмножини A нормального простору X наступні умови рівносильні:*

1) *A – відкрита F_σ-множина,*

2) *існує неперервна функція $f : X \to [0,1]$, така, що $A = f^{-1}((0,1])$.*

Введемо тепер ще один важливий клас множин в топологічному просторі – функціональні множини.

Означення 15.8. Множина A називається *функціонально замкненою* в топологічному просторі X, якщо існує неперервна функція $f : X \to [0,1]$, така, що

$$A = f^{-1}(0).$$

Означення 15.9. Доповнення до функціонально замкненої множини в топологічному просторі називається *функціонально відкритим.*

З означень 15.8 і 15.10 легко випливає наступна характеризація функціонально відкритих множин.

Твердження 15.10. *Для підмножини A в топологічному просторі X наступні умови рівносильні:*

1) *A – функціонально відкрита в X*

2) *існує неперервна функція $f : X \to [0,1]$, така, що*

$$A = f^{-1}((0,1]).$$

15.3 Теорема Веденісова

Означення 15.11. Топологічний простір X називається *досконалим*, якщо кожна відкрита множина в ньому є типу F_σ.

Рівносильно, простір X є досконалим, якщо кожна замкнена його підмножина є типу G_δ.

Означення 15.12. Топологічний простір X називається *досконало нормальним*, якщо він досконалий і нормальний.

Теорема 15.13 (Теорема Веденісова)**.** *Нехай X – T_1-простір. Тоді наступні умови рівносильні:*

1) простір X – досконало нормальний

2) кожна відкрита підмножина в X функціонально відкрита

3) кожна замкнена підмножина в X функціонально замкнена

4) для довільної пари неперетинних замкнених множин A, B в X існує неперервна функція $f : X \to [0,1]$, така, що

$$A = f^{-1}(0) \quad i \quad B = f^{-1}(1).$$

Доведення. **1) $\Rightarrow$ 2).** Нехай $G \subseteq X$ – відкрита множина. З досконалої нормальності простору X випливає, що множина G є типу F_σ. Отже, з теореми 15.7 випливає, що множина G функціонально замкнена.

2) $\Rightarrow$ 3). Нехай $F \subseteq X$ – замкнена множина. Оскільки доповнення $G = X \setminus F$ відкрите, то з умови 2) випливає функціональна відкритість множини G. Звідси, F – функціонально замкнена, як доповнення до функціонально відкритої множини.

3) $\Rightarrow$ 4). Розглянемо дві неперетинні замкнені підмножини A та B в X. З умови 3) маємо, що кожна з них функціонально замкнена. Таким чином, існують неперервні функції $g, h : X \to [0,1]$, такі, що $A = g^{-1}(0)$ і $B = h^{-1}(0)$. Аналогічно як в доведенні твердження 14.9, можна довести, що функція

$$f(x) = \frac{g(x)}{g(x) + h(x)}$$

є шуканою.

4) $\Rightarrow$ 1). Нехай F – замкнена множина в X. Зрозуміло, що у випадку $F = X$ ця множина відкрита, а значить, є типу G_δ. Припустимо, що $F \neq X$ і виберемо $x \in X \setminus F$. Оскільки X – T_1-простір, то одноточкова множина $B = \{x\}$ замкнена в цьому просторі. За умовою 4) існує неперервна функція $f : X \to [0, 1]$, така, що $F = f^{-1}(0)$ і $B = f^{-1}(1)$. Згідно з теоремою 15.6 множина F є типу G_δ. Отже, простір X досконалий.

Тепер покажемо нормальність простору X. Для цього зафіксуємо дві неперетинні замкнені множини A та B і розглянемо неперервну функцію $f : X \to [0, 1]$, таку, що $A = f^{-1}(0)$ і $B = f^{-1}(1)$. Покладемо

$$U = f^{-1}([0, \tfrac{1}{2})) \quad \text{і} \quad V = f^{-1}((\tfrac{1}{2}, 1])$$

і отримаємо дві неперетинні відкриті множини, такі, що $A \subseteq U$ і $B \subseteq V$. $\square$

Література

[1] Виро О. Я., Иванов О. А., Нецветаев Н. Ю., Харламов В. М. *Элементарная топология*, 2-е изд., исправл. М.: МЦНМО, 2012, 358 с.

[2] Куратовский К. *Топология. Т.1.* Москва: Мир (1966), 596 с.

[3] Куратовский К. *Топология. Т.2.* Москва: Мир (1969), 624 с.

[4] Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной*, М.: Наука, (1974), 480 с.

[5] Хаусдорф Ф. *Теория множеств*, М.: Гостехиздат, (1937) (М.: Изд-во ЛКИ (2007), 304 с.).

[6] Энгелькинг Р. *Общая топология*, М.: Мир (1986), 752 с.

[7] Маслюченко В.К. *Елементи теорії множин*, Чернівці:Рута (2002).

[8] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функции и функционального анализа*, М.: Наука (1968).

[9] Alexandroff P., Urysohn P. *Mémoire sur les espaces topologiques compacts*, Verh. Akad. Wetensch. Amsterdam 14 (1929).

[10] Alexandroff P., Hopf H. *Topologie I.* Berlin, (1935).

[11] Sorgenfrey R.H. *On the topological product of paracompact spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), 631–632.

Зміст