Звоздецький Т. І., Мицкан М. М.

ПРО РІВНОСИЛЬНІСТЬ ДЕЯКИХ ЗГОРТКОВИХ СПІВВІДНОШЕНЬ У ПРОСТОРАХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Встановлено рівносильність між собою двох систем з n рівностей у просторах функцій, аналітичних у кругових областях. Використовуючи це твердження, доведено рівносильність аналогічних систем згорткових рівностей для певного класу просторів послідовностей.

Ключові слова і фрази: згортка, простір послідовностей, простір аналітичних функцій, оператор узагальненого інтегрування.

Yurii Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine
e-mail: *t.zvozdetskyi@chnu.edu.ua (T. Zvozdetskyi)*

Вступ

При дослідженні умов еквівалентності в просторах послідовностей операторів, які є лівими оберненими до n-го степеня оператора узагальненого інтегрування, виникла задача про рівносильність деяких двох систем з n згорткових співвідношень. Дана робота присвячена розв'язанню цієї задачі. Відзначимо, що спочатку доводиться рівносильність двох систем з n відповідних рівностей у просторах аналітичних функцій, а потім, використовуючи це твердження, отримується основний результат роботи. Зауважимо також, що для випадку, коли оператор узагальненого інтегрування збігається з оператором звичайного інтегрування, ця задача досліджувалася у дипломній роботі М. Мицкана [3].

Нехай X – деякий векторний простір послідовностей комплексних чисел $x = (x_m)_{m=0}^{\infty}$ над полем $\mathbb{C}$, що містить усі фінітні послідовності, а

$$X^{\alpha} = \{u = (u_m)_{m=0}^{\infty} : \sum_{m=0}^{\infty} |u_m x_m| < +\infty,\ \forall\, x \in X\} -$$

двоїстий до нього простір. Для кожного $u \in X^{\alpha}$ через p_u позначатимемо переднорму на X, яка визначається формулою

$$p_u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} |u_m x_m|,\ x \in X.$$

УДК 517.983
2010 *Mathematics Subject Classification:* 47B37, 47B38.

Вважатимемо надалі, що простір X наділений нормальною топологією Кете [2, с. 410], яка задається набором переднорм $\{p_u : u \in X^\alpha\}$.

Зафіксуємо послідовність відмінних від нуля комплексних чисел $\alpha = (\alpha_m)_{m=0}^\infty$ і через $\mathcal{D}_\alpha$ та $\mathcal{I}_\alpha$ позначимо оператори узагальненого диференціювання та узагальненого інтегрування в X, які породжуються послідовністю α і на елемент $x \in X$ діють відповідно за правилами:

$$\mathcal{D}_\alpha x = \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1}\, x_1, \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\, x_2, ..., \frac{\alpha_m}{\alpha_{m+1}}\, x_{m+1}, ...\right), \qquad \mathcal{I}_\alpha x = \left(0, \frac{\alpha_1}{\alpha_0}\, x_0, \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\, x_1, ..., \frac{\alpha_m}{\alpha_{m-1}}\, x_{m-1}, ...\right).$$

Припустимо, що простір X має такі властивості:

B1) X – досконалий, тобто $X^{\alpha\alpha} = X$;

B2) $\forall\, x \in X : \quad x' = (m\, x_m)_{m=0}^\infty \in X$;

B3) $\forall\, x \in X : \quad \mathcal{D}_\alpha x \in X$;

B4) $\forall\, v \in X^\alpha \quad \exists\, u \in X^\alpha \quad \forall\, m, k = 0, 1, ... : \qquad \left|\dfrac{\alpha_0\, \alpha_{m+k+1}}{\alpha_m\, \alpha_k}\right|\, |v_{m+k+1}| < |u_m\, u_k|$.

Відзначимо, що досконалість простору X рівносильна до його повноти відносно нормальної топології Кете [2, с. 416]. Властивість B2) мають при досить загальних умовах простори, що входять у класифікацію [1, с. 31] (зокрема, й простори послідовностей, що ізоморфні до різних просторів аналітичних функцій). З наведеного вище означення операторів $\mathcal{D}_\alpha$ та $\mathcal{I}_\alpha$, а також з умов B3) і B4) відповідно випливає, що ці оператори лінійно та неперервно діють у просторі X.

Для $m = 0, 1, 2, ...$ покладемо

$$e^{(m)} = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{m+1}, 0, \ldots) \in X,$$

і зауважимо, що система всіх ортів $\left(e^{(m)}\right)_{m=0}^\infty$ утворює базис простору X [2, с. 416]. У роботі [4] доведено, що при зроблених вище припущеннях щодо послідовності α та простору X для всіх $x, y \in X$ формулою

$$x * y = \sum_{m=1}^\infty \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\alpha_0\, \alpha_m\, x_{m-k-1}\, y_k}{\alpha_{m-k-1}\, \alpha_k}\right) e^{(m)}, \tag{1}$$

визначається нетривіальна згортка для оператора $\mathcal{I}_\alpha$ на X, причому $\mathcal{I}_\alpha x = e^{(0)} * x$ для $x \in X$. Пригадаємо, що згорткою для лінійного неперервного оператора $M : \ X \to \ X$ у топологічному векторному просторі X називається нарізно неперервна, білінійна, комутативна й асоціативна операція $* : X \times X \to X$, для якої

$$M(x * y) = (Mx) * y, \quad x, y \in X.$$

Кажуть, що згортка $*$ нетривіальна, якщо вона не має в просторі X анулятoрів, тобто таких ненульових елементів $x \in X$, що $x * y = 0$ для всіх $y \in X$.

Зафіксуємо натуральне число $n \geq 2$. Для кожного $q = 0, 1, ..., n-1$ через P_q позначимо проектор на X, який на послідовність $x \in X$ діє за правилом

$$P_q x = \sum_{m=0}^\infty x_{mn+q}\, e^{(mn+q)}.$$

Завдяки досконалості простору X, маємо, що $P_q x \in X$ для всіх $x \in X$ і $q = 0, 1, ..., n-1$. Зрозуміло також, що для кожного $x \in X$

$$x = \sum_{q=0}^{n-1} P_q x.$$

Основним завданням даної роботи є доведення того факту, що коли послідовності $a^{(j)} = (a_m^{(j)})_{m=0}^{\infty}$ з простору X, де $j = 0, 1, \dots, n-1$, задовольняють умову

$$M = \max_{0 \le j \le n-1} \left\{ \overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{\left| \frac{a_m^{(j)}}{\alpha_m} \right|} \right\} < \infty, \tag{2}$$

то для двох наборів $(a^{(j)})_{j=0}^{n-1}$ та $(b^{(j)})_{j=0}^{n-1}$ елементів простору X система співвідношень

$$b^{(j)} = a^{(j)} + \sum_{k=0}^{n-1} (\mathcal{I}_\alpha^{n-k-1} a^{(k)}) * (P_k b^{(j)}), \quad j = 0, 1, ..., n-1, \tag{3}$$

рівносильна до системи співвідношень

$$b^{(j)} = a^{(j)} + \sum_{k=0}^{n-1} (\mathcal{I}_\alpha^{n-k-1} b^{(k)}) * (P_k a^{(j)}), \quad j = 0, 1, ..., n-1. \tag{4}$$

1 Рівносильність деяких систем рівностей у просторах аналітичних функцій

Нехай $R > 0$, а A_R – простір усіх аналітичних у крузі $|z| < R$ функцій, що наділений топологією компактної збіжності. Він топологічно ізоморфний до простору послідовностей

$$X_R = \left\{ x = (x_m)_{m=0}^{\infty} : \overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|x_m|} \le \frac{1}{R} \right\}$$

з нормальною топологією Кете [1, с. 28-35]. Якщо $\alpha_m = 1$ для всіх $m = 0, 1, 2, \dots$, то відповідний оператор $\mathcal{I}_\alpha$ узагальненого інтегрування в просторі A_R збігається з оператором U_z множення на незалежну змінну, який на функцію $f \in A_R$ діє за правилом $U_z f(z) = z f(z)$, а аналог згортки (1) у просторі A_R визначається формулою

$$(f * g)(z) = z\, f(z)\, g(z), \quad f, g \in A_R.$$

Для кожного $q = 0, 1, ..., n-1$ розглянемо в просторі A_R проектор P_q, для якого

$$(P_q f)(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{nm+q} z^{nm+q}, \quad \text{де } f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m z^m.$$

Тоді для двох наборів функцій $(f^{(j)})_{j=0}^{n-1}$ та $(g^{(j)})_{j=0}^{n-1}$ з простору A_R системи рівностей

$$g^{(j)}(z) = f^{(j)}(z) + \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k}\, f^{(k)}(z)\, (P_k g^{(j)})(z), \quad j = 0, 1, ..., n-1, \tag{5}$$

і

$$g^{(j)}(z) = f^{(j)}(z) + \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k}\, g^{(k)}(z)\, (P_k f^{(j)})(z), \quad j = 0, 1, ..., n-1, \tag{6}$$

є аналогами систем згорткових співвідношень (3) і (4). Доведемо, що при певній умові системи (5) і (6) рівносильні.

Лема 1. *Для* $q, k = 0, 1, ..., n-1$ *та* $f, g \in A_R$

$$P_q\left[z^{n-k} f(z)\,(P_k g)(z)\right] = z^{n-k}\,(P_q f)(z)\,(P_k g)(z).$$

Доведення. Справді, якщо $f(z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} f_m z^m$, $g(z) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} g_s z^s$, то

$$P_q\left[z^{n-k} f(z)\,(P_k g)(z)\right] = P_q\left(\sum_{m=0}^{\infty} f_m\, z^m \sum_{s=0}^{\infty} g_{sn+k}\, z^{(s+1)n}\right)$$

$$= z^{n-k} \sum_{m=0}^{\infty} f_{nm+q}\, z^{nm+q} \sum_{s=0}^{\infty} g_{ns+k}\, z^{ns+k} = z^{n-k}\,(P_q f)(z)\,(P_k g)(z).$$

□

Теорема 1. *Нехай задано функції* $(f^{(j)})_{j=0}^{n-1}$ *з простору* A_R, *для яких виконується умова*

$$D(z) = \det \|\delta_{qk} - z^{n-k}\,(P_q f^{(k)})(z)\|_{q,k=0}^{n-1} \neq 0, \qquad |z| < R, \tag{7}$$

де δ_{qk}– *символ Кронекера. Тоді існує єдиний набір функцій* $(g^{(j)})_{j=0}^{n-1}$ *з простору* A_R, *які задовольняють системи співвідношень (5) і (6).*

Доведення. Зафіксуємо $j = 0, 1, ..., n-1$ і знайдемо функцію $g^{(j)} \in A_R$, яка задовольняє рівність

$$g^{(j)}(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k}\, f^{(k)}(z)\,(P_k g^{(j)})(z) = f^{(j)}(z).$$

Це можна зробити єдиним чином, бо $g^{(j)} = \sum\limits_{q=0}^{n-1} P_q g^{(j)}$, а функції $(P_q g^{(j)})_{q=0}^{n-1}$, враховуючи лему 1, є розв'язками системи

$$(P_q g^{(j)})(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k}\,(P_q f^{(k)})(z)\,(P_k g^{(j)})(z) = (P_q f^{(j)})(z), \quad q = 0, 1, ..., n-1, \tag{8}$$

головний визначник якої збігається з $D(z)$.

Для $q = 0, 1, ..., n-1$ позначимо через $D_{qj}(z)$ визначник, який отримується з $D(z)$ заміною q-го стовпця на стовпець вільних членів системи (8). Тоді, оскільки $D(z) \neq 0$ для $|z| < R$, то функції

$$(P_q g^{(j)})(z) = \frac{D_{qj}(z)}{D(z)}, \quad q = 0, 1, ..., n-1,$$

аналітичні в крузі $|z| < R$, а тому $g^{(j)} \in A_R$.

Таким чином, ми отримали єдиний набір функцій $(g^{(j)})_{j=0}^{n-1}$ з простору A_R, які задовольняють систему співвідношень (5).

Доведемо тепер, що ці функції задовольняють і систему співвідношень (6). Для цього зафіксуємо $q = 0, 1, ..., n-1$ і перевіримо, чи набір $(P_q g^{(j)})_{j=0}^{n-1}$ отриманих вище функцій з A_R є розв'язком системи

$$(P_q g^{(j)})(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k}\,(P_k f^{(j)})(z)\,(P_q g^{(k)})(z) = (P_q f^{(j)})(z), \quad j = 0, 1, ..., n-1. \tag{9}$$

Нехай $d_{kj}(z) = \delta_{kj} - z^{n-j}\,(P_k f^{(j)})(z)$, а $c_{kj}(z)$ – алгебраїчне доповнення елемента $d_{kj}(z)$ визначника $D(z)$, $k, j = 0, 1, ..., n-1$. Зауважимо, що тоді

$$\sum_{k=0}^{n-1} d_{kj}(z)\, c_{kj}(z) = \sum_{j=0}^{n-1} d_{kj}(z)\, c_{kj}(z) = D(z),$$

а

$$\sum_{k=0}^{n-1} d_{kj}(z)\, c_{ks}(z) = 0, \quad j \neq s,$$

бо ліву частину останньої рівності можна подати як визначник n-го порядку з однаковими j-им та s-им стовпцями.

Оскільки $D(z) = c_{qq}(z) - z^{n-q}\, D_{qq}(z)$, то звідси одержимо, що

$$z^{n-q}\,(P_q g^{(q)})(z) = \frac{z^{n-q}\, D_{qq}(z)}{D(z)} = \frac{c_{qq}(z) - D(z)}{D(z)} = -1 + \frac{c_{qq}(z)}{D(z)}. \tag{10}$$

Крім цього, оскільки $c_{jq}(z) - z^{n-j}\, D_{qj}(z) = 0$ (бо ліву частину останньої рівності можна подати як визначник n-го порядку з однаковими j-им та q-им стовпчиками), то

$$z^{n-j}\,(P_q g^{(j)})(z) = \frac{z^{n-j}\, D_{qj}(z)}{D(z)} = \frac{c_{jq}(z)}{D(z)}, \quad j = 0, 1, ..., n-1,\ j \neq q. \tag{11}$$

Тоді, враховуючи (10) і (11), отримаємо, що коли $j = q$, то

$$z^{n-q}\left[(P_q g^{(q)})(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k}\,(P_k f^{(q)})(z)\,(P_q g^{(k)})(z)\right]$$

$$= \left(-1 + \frac{c_{qq}(z)}{D(z)}\right)\left[1 - z^{n-q}\,(P_q f^{(q)})(z)\right] - \sum_{k=0, k\neq q}^{n-1} z^{n-q}\,(P_k f^{(q)})(z)\,\frac{c_{kq}(z)}{D(z)}$$

$$= z^{n-q}\,(P_q f^{(q)})(z) - 1 + \frac{1}{D(z)} \sum_{k=0}^{n-1} d_{kq}\, c_{kq}(z) = z^{n-q}\,(P_q f^{(q)})(z),$$

а коли $j \neq q$, то

$$z^{n-j}\left[(P_q g^{(j)})(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k}\,(P_k f^{(j)})(z)\,(P_q g^{(k)})(z)\right]$$

$$= \frac{c_{jq}(z)}{D(z)} - \sum_{k=0, k\neq q}^{n-1} z^{n-j}\,(P_k f^{(j)})(z)\,\frac{c_{kq}(z)}{D(z)} - z^{n-j}\,(P_q f^{(j)})(z)\left(-1 + \frac{c_{qq}(z)}{D(z)}\right)$$

$$= z^{n-j}\,(P_q f^{(j)})(z) + \frac{1}{D(z)} \sum_{k=0}^{n-1} d_{kj}\, c_{kq}(z) = z^{n-j}\,(P_q f^{(j)})(z).$$

Отже, для кожного $q = 0, 1, ..., n-1$ функції $(P_q g^{(j)})_{j=0}^{n-1}$ є розв'язками системи (9), тому функції $(g^{(j)})_{j=0}^{n-1}$ задовольняють систему співвідношень (6). □

Наслідок 1. *Якщо виконується умова (7), то функції $(f^{(j)})_{j=0}^{n-1}$ та $(g^{(j)})_{j=0}^{n-1}$ з простору A_R задовольняють систему співвідношень (5) тоді й лише тоді, коли вони задовольняють систему співвідношень (6).*

Зауваження 1. *Якщо функції*

$$f^{(j)}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m^{(j)}\, z^m, \quad g^{(j)}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} g_m^{(j)}\, z^m, \quad j = 0, 1, ..., n-1,$$

належать до простору A_R, то для $q, j = 0, 1, ..., n-1$ рівність (8) рівносильна до співвідношень

$$f_q^{(j)} = g_q^{(j)}, \quad f_{pn+q}^{(j)} - g_{pn+q}^{(j)} + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{p-1} f_{(p-s-1)n+q}^{(k)}\, g_{sn+k}^{(j)} = 0, \quad p \in \mathbb{N},$$

а рівність (9) – до співвідношень

$$f_q^{(j)} = g_q^{(j)}, \quad f_{pn+q}^{(j)} - g_{pn+q}^{(j)} + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{p-1} g_{(p-s-1)n+q}^{(k)}\, f_{sn+k}^{(j)} = 0, \quad p \in \mathbb{N}.$$

2 Рівносильність деяких згорткових співвідношень у просторах послідовностей

Зафіксуємо послідовність ненульових комплексних чисел $(\alpha_m)_{m=0}^{\infty}$. Нехай X – деякий векторний простір послідовностей з нормальною топологією Кете, який має властивості B1)-B4).

Лема 2. *Для послідовностей $x, y \in X$, згортки (1), оператора узагальненого інтегрування $\mathcal{I}_\alpha$ та проекторів $(P_q)_{q=0}^{n-1}$ в X виконуються такі рівності:*

$$P_q\left((\mathcal{I}_\alpha^{n-k-1}x) * (P_k y)\right) = (\mathcal{I}_\alpha^{n-k-1}\, P_q x) * (P_k y), \quad \text{де} \quad q, k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Доведення. Якщо $x = \sum_{m=0}^{\infty} x_m\, e^{(m)}$, $y = \sum_{s=0}^{\infty} y_s\, e^{(s)}$, то для фіксованих $q, k = 0, 1, \dots, n-1$ маємо:

$$P_q\left((\mathcal{I}_\alpha^{n-k-1}x) * (P_k y)\right) = P_q\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} x_m\, y_{sn+k}\, \frac{\alpha_{m+n-k-1}}{\alpha_m}\, e^{(m+n-k-1)} * e^{(sn+k)}\right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} x_{mn+q}\, y_{sn+k}\, \frac{\alpha_0\, \alpha_{mn+n+sn+q}}{\alpha_{mn+q}\, \alpha_{sn+k}}\, e^{(mn+n+sn+q)}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} x_{mn+q}\, y_{sn+k}\, \frac{\alpha_{mn+q+n-k-1}}{\alpha_{mn+q}}\, e^{(mn+q+n-k-1)} * e^{(sn+k)} = (\mathcal{I}_\alpha^{n-k-1}\, P_q x) * (P_k y).$$

□

Теорема 2. *Нехай послідовності $a^{(j)} = (a_m^{(j)})_{m=0}^{\infty}$ з простору X, де $j = 0, 1, \dots, n-1$, задовольняють умову* (2). *Якщо набори послідовностей $(a^{(j)})_{j=0}^{n-1}$ та $(b^{(j)})_{j=0}^{n-1}$ з простору X, де $b^{(j)} = (b_m^{(j)})_{m=0}^{\infty}$, задовольняють систему згорткових співвідношень (3), то вони задовольняють і систему згорткових співвідношень (4).*

Доведення. Нехай набори послідовностей $(a^{(j)})_{j=0}^{n-1}$ та $(b^{(j)})_{j=0}^{n-1}$ задовольняють систему згорткових співвідношень (3). Зафіксуємо $j = 0, 1, \dots, n-1$ і подіємо проекторами P_q, де $q = 0, 1, \dots, n-1$, на обидві частини відповідного співвідношення з (3). Враховуючи лему 2, це співвідношення рівносильне до таких n рівностей:

$$P_q b^{(j)} = P_q a^{(j)} + \sum_{k=0}^{n-1} (\mathcal{I}_\alpha^{n-k-1}\, P_q a^{(k)}) * (P_k b^{(j)}), \quad q = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{12}$$

Обчислимо згортки з їхніх правих частин для $k, q = 0, 1, \ldots, n-1$:

$$(\mathcal{I}_\alpha^{n-k-1}\, P_q a^{(k)}) * (P_k b^{(j)}) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} a_{pn+q}^{(k)}\, b_{sn+k}^{(j)} \frac{\alpha_{pn+q+n-k-1}}{\alpha_{pn+q}}\, e^{(pn+q+n-k-1)} * e^{(sn+k)}$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} a_{(p-1)n+q}^{(k)}\, b_{sn+k}^{(j)} \frac{\alpha_0\, \alpha_{(p+s)n+q}}{\alpha_{(p-1)n+q}\, \alpha_{sn+k}}\, e^{(p+s)n+q}$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{p-1} \frac{a_{(p-s-1)n+q}^{(k)}}{\alpha_{(p-s-1)n+q}} \frac{b_{sn+k}^{(j)}}{\alpha_{sn+k}} \right) \alpha_0\, \alpha_{pn+q} e^{(pn+q)}.$$

Тоді рівність (12) можна записати в такому вигляді:

$$\sum_{p=0}^{\infty} b_{pn+q}^{(j)}\, e^{(pn+q)} = a_q^{(j)}\, e^{(q)} + \sum_{p=1}^{\infty} \left(a_{pn+q}^{(j)} + \alpha_0\, \alpha_{pn+q} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{p-1} \frac{a_{(p-s-1)n+q}^{(k)}}{\alpha_{(p-s-1)n+q}} \frac{b_{sn+k}^{(j)}}{\alpha_{sn+k}} \right) e^{(pn+q)},$$

де $q = 0, 1, \ldots, n-1$. Звідси видно, що

$$b_q^{(j)} = a_q^{(j)}, \quad q = 0, 1, \ldots, n-1,$$

і для $p \in \mathbb{N}$

$$\frac{\alpha_0\, a_{pn+q}^{(j)}}{\alpha_{pn+q}} - \frac{\alpha_0\, b_{pn+q}^{(j)}}{\alpha_{pn+q}} + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{p-1} \frac{\alpha_0\, a_{(p-s-1)n+q}^{(k)}}{\alpha_{(p-s-1)n+q}} \frac{\alpha_0\, b_{sn+k}^{(j)}}{\alpha_{sn+k}} = 0, \quad q = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Якщо позначимо

$$f_m^{(j)} = \frac{\alpha_0\, a_m^{(j)}}{\alpha_m}, \quad g_m^{(j)} = \frac{\alpha_0\, b_m^{(j)}}{\alpha_m}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

то останні співвідношення набудуть вигляду

$$f_q^{(j)} = g_q^{(j)}, \quad f_{pn+q}^{(j)} - g_{pn+q}^{(j)} + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{p-1} f_{(p-s-1)n+q}^{(k)}\, g_{sn+k}^{(j)} = 0, \quad q = 0, 1, \ldots, n-1, \quad p \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

Розглянемо функції

$$f^{(j)}(z) = \alpha_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m^{(j)}}{\alpha_m} z^m, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{15}$$

і відзначимо, що, враховуючи умову (2), вони належать до простору A_{R_0}, де $R_0 = \frac{1}{M}$ при $M > 0$ або $R_0 = \infty$ при $M = 0$. Оскільки для відповідного визначника $D(z)$, який обчислюється за формулою (7), маємо, що $D(0) = 1$, то з неперервності функції $D(z)$ при $|z| < R_0$ отримуємо, що існує таке $R > 0$, що $R \le R_0$ і $D(z) \ne 0$ при $|z| < R$. Зафіксуємо надалі так знайдене R.

З теореми 1 випливає, що існує єдиний набір функцій $(g^{(j)})_{j=0}^{n-1}$ з простору A_R, які, разом з функціями $(f^{(j)})_{j=0}^{n-1}$, задовольняють системи співвідношень (5) і (6). Враховуючи зауваження 1 і рівності (14) та (13), одержуємо, що

$$g^{(j)}(z) = \alpha_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m^{(j)}}{\alpha_m} z^m, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{16}$$

Отже, якщо послідовності $(a^{(j)})_{j=0}^{n-1}$ та $(b^{(j)})_{j=0}^{n-1}$ задовольняють систему згорткових співвідношень (3) у просторі послідовностей X, то відповідні набори аналітичних функцій $(f^{(j)})_{j=0}^{n-1}$ та $(g^{(j)})_{j=0}^{n-1}$, які визначаються рівностями (15) та (16) у деякому просторі A_R, задовольняють системи співвідношень (5) і (6). Оскільки, за зауваженням 1, система співвідношень (6) рівносильна до певних співвідношень між тейлорівськими коефіцієнтами функцій $(f^{(j)})_{j=0}^{n-1}$ та $(g^{(j)})_{j=0}^{n-1}$, то залишилось перевірити, чи аналог співвідношень (14) для системи (4) збігається з відповідними рівностями з зауваження 1.

Зафіксуємо $q = 0, 1, \dots, n-1$ і подіємо проектором P_q на обидві частини співвідношень (4). Враховуючи лему 2, отримаємо такі рівності:

$$P_q b^{(j)} = P_q a^{(j)} + \sum_{k=0}^{n-1} (\mathcal{I}_\alpha^{n-k-1} P_q b^{(k)}) * (P_k a^{(j)}), \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \tag{17}$$

Оскільки згортки з їхніх правих частин для $k, q = 0, 1, \dots, n-1$ мають вигляд

$$(\mathcal{I}_\alpha^{n-k-1} P_q b^{(k)}) * (P_k a^{(j)}) = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{p-1} \frac{b^{(k)}_{(p-s-1)n+q}}{\alpha_{(p-s-1)n+q}} \frac{a^{(j)}_{sn+k}}{\alpha_{sn+k}} \right) \alpha_0 \, \alpha_{pn+q} e^{(pn+q)},$$

то рівності (17) можна записати в такому вигляді:

$$\sum_{p=0}^{\infty} b^{(j)}_{pn+q} \, e^{(pn+q)} = a^{(j)}_q \, e^{(q)} + \sum_{p=1}^{\infty} \left(a^{(j)}_{pn+q} + \alpha_0 \, \alpha_{pn+q} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{p-1} \frac{b^{(k)}_{(p-s-1)n+q}}{\alpha_{(p-s-1)n+q}} \frac{a^{(j)}_{sn+k}}{\alpha_{sn+k}} \right) e^{(pn+q)},$$

де $j = 0, 1, \dots, n-1$. Враховуючи позначення (13), як і вище, можна отримати, що ці рівності рівносильні до співвідношень

$$f^{(j)}_q = g^{(j)}_q, \quad f^{(j)}_{pn+q} - g^{(j)}_{pn+q} + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{p-1} g^{(k)}_{(p-s-1)n+q} \, f^{(j)}_{sn+k} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad p \in \mathbb{N},$$

які збігаються з відповідними рівностями з зауваження 1.

Отже, набори послідовностей $(a^{(j)})_{j=0}^{n-1}$ та $(b^{(j)})_{j=0}^{n-1}$ задовольняють систему згорткових співвідношень (4) у просторі послідовностей X. □

Наслідок 2. *Якщо виконується умова (2), то набори послідовностей* $(a^{(j)})_{j=0}^{n-1}$ *та* $(b^{(j)})_{j=0}^{n-1}$ *з простору* X *задовольняють систему згорткових співвідношень (3) тоді й лише тоді, коли вони задовольняють систему згорткових співвідношень (4).*

Список літератури

[1] Korobeinik Yu. F. Shift operators on sets of numbers. Rostov University Publishing House, Rostov-na-Donu, 1983 (in Russian).

[2] Köthe G. Topologische lineare Räume. Bd. 1. Springer, Berlin, 1966 (in German).

[3] Mytskan M. M. The equivalence of some convolutional equalities in spaces of sequences. Graduate work, Chernivtsi, 2020 (in Ukrainian).

[4] Zvozdetskyi T. I., Linchuk S. S. *On convolutions in spaces of sequences.* Nauk. Visnyk Cherniv. Univ. Mathematics. 1999, **46**, 44–49 (in Ukrainian).

Надійшло 15.03.2021

Zvozdetskyi T. I., Mytskan M. M. *On the equivalence of some convolutional equalities in spaces of sequences*, Bukovinian Math. Journal. **9**, 1 (2021), 180–188.

The problem of the equivalence of two systems with n convolutional equalities arose in investigation of the conditions of similarity in spaces of sequences of operators which are left inverse to the n-th degree of the generalized integration operator. In this paper we solve this problem. Note that we first prove the equivalence of two corresponding systems with n equalities in the spaces of analytic functions, and then, using this statement, the main result of paper is obtained.

Let X be a vector space of sequences of complex numbers with Köthe normal topology from a wide class of spaces, $\mathcal{I}_\alpha$ be a generalized integration operator on X, $*$ be a nontrivial convolution for $\mathcal{I}_\alpha$ in X, and $(P_q)_{q=0}^{n-1}$ be a system of natural projectors with $x = \sum\limits_{q=0}^{n-1} P_q x$ for all $x \in X$.

We established that a set $(a^{(j)})_{j=0}^{n-1}$ with

$$\max_{0\le j\le n-1}\left\{\overline{\lim_{m\to\infty}}\sqrt[m]{\left|\frac{a_m^{(j)}}{\alpha_m}\right|}\right\}<\infty$$

and a set $(b^{(j)})_{j=0}^{n-1}$ of elements of the space X satisfy the system of equalities

$$b^{(j)} = a^{(j)} + \sum_{k=0}^{n-1}(\mathcal{I}_\alpha^{n-k-1}a^{(k)}) * (P_k b^{(j)}), \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

if and only if they satisfy the system of equalities

$$b^{(j)} = a^{(j)} + \sum_{k=0}^{n-1}(\mathcal{I}_\alpha^{n-k-1}b^{(k)}) * (P_k a^{(j)}), \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Note that the assumption on the elements $(a^{(j)})_{j=0}^{n-1}$ of the space X allows us to reduce the solution of this problem to the solution of an analogous problem in the space of functions analytic in a disc.

Key words and phrases: convolution, space of sequences, space of analytic functions, generalized integration operator.