Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

Т. І. Звоздецький

ГАРМОНІЙНІ І СУБГАРМОНІЙНІ ФУНКЦІЇ ТА ТЕОРЕМА ГАРТОҐСА

Навчальний посібник

Чернівці
Чернівецький
національний університет
2011

ББК 22.161.55я73
УДК 517.55(075.8)+517.57(075.8)
З-436

Друкується за ухвалою редакційно-видавничої ради
Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича

Звоздецький Тарас Іванович
З-436 Гармонійні і субгармонійні функції та теорема Гартоґса : навч. посібник / Т.І. Звоздецький. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2011. – 60 с.

У посібнику наведено основні властивості гармонійних та субгармонійних функцій від двох дійсних змінних, а також аналітичних функцій від багатьох комплексних змінних. Крім цього, розглядається одна з фундаментальних теорем теорії аналітичних функцій багатьох комплексних змінних – теорема Гартоґса про аналітичність нарізно аналітичної функції багатьох комплексних змінних.

Для студентів старших курсів та аспірантів математичних спеціальностей університету.

ББК 22.161.55я73
УДК 517.55(075.8)+517.57(075.8)

Зміст

Розділ I. Гармонійні функції двох дійсних змінних

1.1. Означення гармонійних функцій та їх взаємозв'язок з аналітичними функціями комплексної змінної

Нехай G – область комплексної площини $\mathbb{C}$, а $u : G \to \mathbb{R}$ – дійсна функція двох дійсних змінних x та y на G ($x + iy = z \in G$). Символом $C^k(G)$ ($k \in \mathbb{N}$) позначатимемо множину всіх дійсних функцій двох дійсних змінних, які мають у G всі частинні похідні до k-го порядку включно, причому всі ці частинні похідні є неперервними на G.

Функція $u \in C^2(G)$ називається *гармонійною* в області G, якщо у всіх точках цієї області вона задовольняє рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Нехай f – аналітична функція комплексної змінної в G. Позначатимемо сукупність усіх таких функцій символом $\mathcal{A}(G)$. Наступними двома теоремами описується взаємозв'язок між гармонійними та аналітичними в області G функціями.

Теорема 1.1. *Дійсна й уявна частини довільної аналітичної в області G функції комплексної змінної f є гармонійними в G.*

Доведення. Нехай $f = u+iv$. Оскільки f аналітична в G, то вона нескінченно диференційовна в G і всі її похідні аналітичні (а тому й неперервні) в G. Отже, всі частинні похідні від функцій u та v є диференційовними (а, значить, і неперервними) в G як дійсні чи уявні частини відповідних похідних функції f. Зокрема, $u, v \in C^2(G)$. Крім цього, враховуючи умови Коші-Рімана-Ейлера-Д'Аламбера, матимемо, що в будь-якій точці з області G

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}=0.$$

Аналогічно $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$ в G. Тому функції u та v гармонійні в G. $\square$

Теорема 1.2. *Якщо G – однозв'язна область, то для гармонійної в цій області функції u існує аналітична в G функція, для якої u є дійсною (чи уявною) частиною.*

Доведення. Зафіксуємо точку $z_0 \in G$ і визначимо на G функцію v формулою

$$v(z)=\int\limits_{z_0}^{z}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\,dx+\frac{\partial u}{\partial x}\,dy\right),\quad z\in G. \tag{1.1}$$

Оскільки G – однозв'язна область, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ та $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ – неперервні в G і в кожній точці з G

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

то [6, с. 45-55] криволінійний інтеграл в (1.1) не залежить від шляху інтегрування (і тому v однозначно визначена в G), а також у всіх точках із G

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y},\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Звідси, враховуючи гармонійність u в G, отримуємо, що $v \in C^1(G)$ і для u та v виконуються умови Коші-Рімана-Ейлера-Д'Аламбера в G. Отже, функція $f=u+iv$ аналітична в G, причому $u=\operatorname{Re} f=\operatorname{Im}(if)$. $\square$

Наслідок. *Якщо функція u гармонійна в області G (не обов'язково однозв'язній), то в деякому околі кожної точки $z_0 \in G$ можна побудувати аналітичну функцію f, для якої u є дійсною (чи уявною) частиною.*

Справді, в цьому випадку формулою (1.1) визначається однозначна функція v в будь-якому крузі U з центром у точці z_0, який міститься в G. Тому функція $f = u + iv$ буде аналітичною в U.

Зауваження. Для багатозв'язних областей G функція v з (1.1) не завжди однозначна на G. Наприклад, якщо $G = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$, а $u(z) = \ln|z|$, $z \in G$, то $v(z) = \operatorname{Arg} z$, $z \in G$.

1.2. Нескінченна диференційовність гармонійних функцій

Теорема 1.3. *Гармонійна в області G функція має в кожній точці з G частинні похідні всіх порядків, які також є гармонійними в G.*

Доведення. Нехай $z_0 \in G$, а $U \subseteq G$ – окіл точки z_0, у якому $u = \operatorname{Re} f$ для деякої функції $f \in \mathcal{A}(U)$. Тоді $f' \in \mathcal{A}(U)$ і $\operatorname{Re} f' = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, а $\operatorname{Im} f' = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$. Тому, згідно з теоремою 1.1, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ гармонійні в U. Внаслідок довільності $z_0 \in G$ одержимо, що $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ гармонійні в G. Продовжуючи такі ж міркування далі (замінюючи функцію u на її частинні похідні першого порядку, другого і т.д.), отримаємо існування та гармонійність в G довільних частинних похідних функції u. $\square$

1.3. Теорема про середнє

У цьому пункті і надалі для дійснозначної функції $u(z)$, визначеної на деякій множині $U \subseteq \mathbb{C}$, під інтегралом $\iint\limits_U u(z)\,dz$ розумітимемо подвійний інтеграл $\iint\limits_U u(x,y)\,dx\,dy$.

Теорема 1.4. *Якщо u – гармонійна в області G функція, то для довільних точки $z \in G$ та круга $U = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z| < R\}$, таких, що $\overline{U} \subset G$, маємо, що*

$$\forall\ r \in (0;R): \quad u(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(z + r\mathrm{e}^{it})\,dt;$$

$$u(z) = \frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_U u(\zeta)d\zeta.$$

Доведення. Зафіксуємо $z \in G$ і такий круг U з центром у точці z і радіусом R, що $\overline{U} \subset G$. Нехай функція $f \in \mathcal{A}(U)$ така, що $u = \operatorname{Re} f$. Згідно з інтегральною формулою Коші, для довільного $r \in (0;R)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta - z| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \overset{\zeta = z + r\mathrm{e}^{it}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z + r\mathrm{e}^{it}) ri\mathrm{e}^{it}}{r\mathrm{e}^{it}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z + r\mathrm{e}^{it})\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(z + r\mathrm{e}^{it})\,dt + \frac{i}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v(z + r\mathrm{e}^{it})\,dt,$$

де $v = \operatorname{Im} f$. Отже, для всіх $r \in (0;R)$

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(z + r\mathrm{e}^{it})\,dt.$$

Домножимо останню рівність на r і проінтегруємо її по r від 0 до R. Отримаємо, що

$$\frac{R^2}{2}\,u(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi} u(z + r\mathrm{e}^{it})\,r\,dt\,dr,$$

звідки, використовуючи формулу переходу до полярних координат у подвійному інтегралі, одержимо, що

$$u(z) = \frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_U u(\zeta)\,d\zeta. \quad \square$$

1.4. Теорема єдиності

Теорема 1.5. *Якщо дві гармонійні в області G функції збігаються на множині $E \subseteq G$, яка має хоча б одну внутрішню точку, то вони збігаються в G.*

Доведення. Нехай u_1 та u_2 – дві гармонійні в G функції, які збігаються на множині E. Позначимо $u = u_1 - u_2$. Тоді $u(z) = 0$, $z \in E$. Розглянемо множину $F = \operatorname{int}\{z \in G : u(z) = 0\}$. Вона є непорожньою відкритою множиною в G (бо $F \supseteq \operatorname{int} E \neq \varnothing$). Доведемо, що вона також і замкнена в G.

Нехай $z_0 \in G$ – гранична точка множини F. Тоді існує така послідовність $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ точок множини F, що $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$. Розглянемо відкритий круг $U \subseteq G$ із центром у точці z_0 і таку функцію $f \in \mathcal{A}(U)$, що $f = u + iv$ на U. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, то існує таке $n \in \mathbb{N}$, що $z_n \in U \cap F$. Отже, $U \cap F$ – відкрита непорожня множина. Зрозуміло, що $u(z) = 0$, $z \in U \cap F$. Тому $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ і $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ на $U \cap F$. Таким чином, $v(z) = C$ на $U \cap F$, де $C \in \mathbb{R}$ – деяка стала. За теоремою єдиності для аналітичних функцій маємо, що $f(z) = iC$ на U. Тому $u(z) = 0$ на U, звідки $U \subseteq F$, тобто $z_0 \in F$.

Таким чином, F – замкнена множина в G. Оскільки вона також відкрита в G і непорожня, то $F = G$. Отже, $u(z) = 0$ на G, тобто $u_1(z) = u_2(z)$ на G. $\square$

Зауваження. Для того, щоб гармонійні функції збігалися в G, недостатньо, щоб вони збігалися на множині, яка містить якусь свою граничну точку (як це є для аналітичних функцій). Наприклад, гармонійна в $\mathbb{C}$ функція $u(z) = \operatorname{Re} z$ дорівнює нулеві на уявній осі, але не рівна тотожно нулеві на $\mathbb{C}$.

1.5. Принцип екстремуму і теорема Ліувілля

Теорема 1.6. *Якщо гармонійна в області G функція u набуває в точці $z_0 \in G$ свого локального максимуму чи мінімуму, то вона є сталою на G.*

Доведення. Нехай $z_0 \in G$ – точка локального максимуму функції u, $U \subseteq G$ – такий окіл точки z_0, що $u(z) \le u(z_0)$, $z \in U$, а функція $f \in \mathcal{A}(U)$ така, що $u = \operatorname{Re} f$. Тоді $\exp(f) \in \mathcal{A}(U)$ і для $z \in U$

$$|\exp f(z)| = \mathrm{e}^{u(z)} \le \mathrm{e}^{u(z_0)} = |\exp f(z_0)|.$$

Згідно з принципом максимуму модуля аналітичної функції, маємо, що f є сталою функцією на U. Тому $u = \operatorname{Re} f$ є також сталою на U. Тоді, за теоремою єдиності для гармонійних функцій, u є сталою на G.

Якщо функція u набуває в точці z_0 свого локального мінімуму, то гармонійна в G функція $-u$ набуває в точці z_0 свого локального максимуму. Тому і в цьому випадку u стала на G. $\square$

Теорема 1.7. *Якщо гармонійна в $\mathbb{C}$ функція u є обмеженою в $\mathbb{C}$ хоча б з одного боку, то вона є сталою на $\mathbb{C}$.*

Доведення. Оскільки $\mathbb{C}$ – однозв'язна область, то існує ціла функція f, для якої $u = \operatorname{Re} f$. Нехай $u(z) < M$ на $\mathbb{C}$. Тоді $f : \mathbb{C} \to P$, де $P = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w < M\}$. Розглянемо дробово-лінійне відображення λ півплощини P на одиничний круг $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Оскільки λ – аналітичне на P, то функція $g = \lambda \circ f$ є цілою і обмеженою ($|g(z)| < 1$ на $\mathbb{C}$). За теоремою Ліувілля для аналітичних функцій $g(z) = \mathrm{const}$, $z \in \mathbb{C}$. Тому $f(z) = \lambda^{-1}(g(z)) = \mathrm{const}$ на $\mathbb{C}$, звідки й $u(z) = \mathrm{Re}\, f(z) = \mathrm{const}$ на $\mathbb{C}$. $\square$

1.6. Інваріантність відносно аналітичних відображень

Нагадаємо, що неперервне відображення називається *конформним у точці*, якщо воно зберігає кути між кривими та напрямки їх відрахування в цій точці. Якщо відображення конформне в кожній точці області G, то кажуть, що воно *конформне в області* G. Відомо [5, с. 10-11, 27], що коли відображення f є конформним і взаємно однозначним в області G, то воно аналітичне в G і $f'(z) \neq 0$ на G.

Теорема 1.8. *Якщо функція v гармонійна в області D, а g – аналітичне відображення області G на область D, то функція $u = v \circ g$ гармонійна в G.*

Доведення. Нехай z_0 – якась точка області D, $U \subseteq D$ – деякий відкритий круг із центром у точці z_0, а $f \in \mathcal{A}(U)$ – така функція, що $v = \mathrm{Re}\, f$. Розглянемо множину $V = g^{-1}(U) \subseteq G$. Оскільки функція $f \circ g$ аналітична на V, то функція $u = v \circ g = \mathrm{Re}\ (f \circ g)$ гармонійна на V. Внаслідок довільності $z_0 \in D$ маємо, що u гармонійна в G. $\square$

Наслідок. *Якщо функція v гармонійна в області D, а k – конформне і взаємно однозначне відображення області G на область D, то функція $u = v \circ k$ гармонійна в G.*

На закінчення цього пункту наведемо без доведення дві теореми з теорії конформних відображень, які будуть використовуватися у наступному пункті (доведення цих теорем можна знайти в [5, с. 32-36, 88]).

Теорема Рімана. *Кожну однозв'язну область розширеної комплексної площини, межа якої містить більше однієї точки, можна конформно і взаємно однозначно відобразити на одиничний круг.*

Нагадаємо, що крива називається жордановою, якщо вона неперервна і не має самоперетинів.

Теорема Каратеодорі. *Нехай області G і D обмежені замкненими жордановими кривими. Тоді конформне і взаємно однозначне відображення $k : G \to D$ можна продовжити на межу ∂G області G до гомеоморфізму $k : \overline{G} \to \overline{D}$.*

1.7. Задача Діріхле

У цьому пункті наведемо розв'язання задачі Діріхле про гармонійне продовження неперервних функцій. Ця властивість гармонійних функцій буде неодноразово використовуватися в наступних пунктах.

Задача Діріхле. *Задано обмежену однозв'язну область $G \subset \mathbb{C}$ із жордановою межею ∂G та неперервну на ∂G функцію u. Потрібно побудувати неперервну на $\overline{G}$ і гармонійну в G функцію, яка на ∂G збігається з u.*

Відзначимо, що розв'язок задачі Діріхле називається *гармонійним продовженням функції u з ∂G в G.*

Теорема 1.9. *Нехай G – обмежена однозв'язна область в $\mathbb{C}$ із жордановою межею. Тоді для кожної неперервної на ∂G функції u існує її єдине гармонійне продовження з ∂G в G.*

Доведення. Єдиність. Переконаємося, що задача Діріхле не може мати двох різних розв'язків. Нехай u_1 та u_2 – гармонійні продовження u в G. Розглянемо функцію $v = u_1 - u_2$. Зрозуміло, що v гармонійна в G, неперервна на $\overline{G}$ і $v(z) = 0$ на ∂G. Оскільки $\overline{G}$ є компактом, то v набуває своїх максимуму і мінімуму на $\overline{G}$. Якщо або максимум, або мінімум набувається у внутрішній точці G, то, за принципом екстремуму, $v(z) = \text{const}$

на G. Враховуючи неперервність v на $\overline{G}$ і те, що $v(z) = 0$ на ∂G, матимемо, що $v(z) = 0$ на G. Якщо ж і максимум, і мінімум v набуваються на ∂G, то $0 \le v(z) \le 0, \quad z \in \overline{G}$, звідки, знову, $v(z) = 0$ на G. Отже, $u_1(z) = u_2(z)$ на G.

Зведення до одиничного круга. Нехай задача Діріхле розв'язана для одиничного круга $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. За теоремою Рімана, область G можна відобразити за допомогою конформного і взаємно однозначного відображення k на круг U, причому, за теоремою Каратеодорі, це відображення можна продовжити до гомеоморфізму $k : \overline{G} \to \overline{U}$. Нехай $v(z) = u(k^{-1}(z))$, $z \in \partial U$. Оскільки v неперервна на ∂U, то v можна гармонійно продовжити в U. За наслідком з теореми 1.8, функція $v \circ k$ гармонійна в G. Крім цього, вона неперервна на $\overline{G}$ і на ∂G дорівнює u. Тому функція $v \circ k$ є шуканим гармонійним продовженням функції u з межі ∂G всередину області G.

Розв'язання для одиничного круга. Почнемо з навідних міркувань. Нехай задача Діріхле розв'язана. Розглянемо функцію $f \in \mathcal{A}(U)$, для якої $u = \operatorname{Re} f$. Припустимо, що f неперервно продовжується на $\overline{U}$. Зафіксуємо якесь $z \in U$. Тоді, за інтегральною формулою Коші,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\zeta}{\zeta - z}\, dt, \tag{1.2}$$

де $\zeta = \mathrm{e}^{it}$. Перетворимо праву частину з (1.2) так, щоб її дійсна частина містила лише відомі значення функції $u(\zeta)$ на колі $|\zeta| = 1$. Візьмемо симетричну до z відносно кола $|\zeta| = 1$ точку $z^* = 1/\bar{z}$. За інтегральною теоремою Коші,

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z^*}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\zeta}{\zeta - z^*}\, dt.$$

Віднявши останню рівність від (1.2) і врахувавши, що

$$\frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{\zeta}{\zeta - z^*} = \frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{\zeta\bar{z}}{\zeta\bar{z} - 1} = \frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{\zeta\bar{z}}{\zeta\bar{z} - \zeta\bar{\zeta}} =$$

$$= \frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} = \frac{1 - \zeta\bar{z} + \zeta\bar{z} - z\bar{z}}{(\zeta - z)(\overline{\zeta - z})} = \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2},$$

одержимо

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}\,dt.$$

Отже, для $z \in U$

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\zeta)\frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}\,dt, \tag{1.3}$$

де $\zeta = \mathrm{e}^{it}$. Ця формула називається формулою Пуассона. Переконаємося далі, що функція u, яка визначається формулою (1.3), є шуканим розв'язком задачі Діріхле для круга U.

Спочатку перевіримо, чи u є гармонійною в крузі U. Оскільки для $\zeta = \mathrm{e}^{it}$ і $z \in U$

$$\mathrm{Re}\,\frac{\zeta + z}{\zeta - z} = \mathrm{Re}\,\frac{(\zeta + z)(\bar{\zeta} - \bar{z})}{|\zeta - z|^2} = \mathrm{Re}\,\frac{1 - |z|^2 + (z\bar{\zeta} - \bar{z}\zeta)}{|\zeta - z|^2} = \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}$$

($z\bar{\zeta} - \bar{z}\zeta$ є чисто уявним числом, бо $\overline{z\bar{\zeta} - \bar{z}\zeta} = \bar{z}\zeta - z\bar{\zeta} = -(z\bar{\zeta} - \bar{z}\zeta)$), то досить довести, що функція

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\zeta)\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\,dt$$

є диференційовною в крузі U (бо $u = \mathrm{Re}\,f$).

Зафіксуємо $z_0 \in U$. Тоді

$$\left|\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(\zeta)\frac{\zeta}{(\zeta-z_0)^2}\,dt\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{u(\zeta)}{\Delta z}\left(\frac{\zeta+z_0+\Delta z}{\zeta-z_0-\Delta z}-\frac{\zeta+z_0}{\zeta-z_0}\right)dt-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}u(\zeta)\frac{\zeta}{(\zeta-z_0)^2}\,dt\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left|\int\limits_0^{2\pi}u(\zeta)\zeta\left[\frac{1}{(\zeta-z_0-\Delta z)(\zeta-z_0)}-\frac{1}{(\zeta-z_0)^2}\right]dt\right| =$$

$$= \frac{|\Delta z|}{\pi}\left|\int\limits_0^{2\pi}\frac{u(\zeta)\zeta\,dt}{(\zeta-z_0-\Delta z)(\zeta-z_0)^2}\right| \le$$

$$\le \frac{|\Delta z|}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{|u(\zeta)||\zeta|\,dt}{|\zeta-z_0-\Delta z||\zeta-z_0|^2} \le$$

$$\le \frac{|\Delta z|}{\pi}\frac{M2\pi}{(1-|z_0|-|\Delta z|)(1-|z_0|)^2}\xrightarrow[\Delta z\to 0]{} 0,$$

де $M = \max\limits_{|\zeta|=1}|u(\zeta)|$.

Отже, f диференційовна в U, тому f аналітична в U. Звідси отримуємо, що функція $u = \operatorname{Re} f$ гармонійна в U.

Залишилося переконатися, що функція u, визначена формулою (1.3), неперервна на $\overline{U}$. Зафіксуємо $\zeta_0 = \mathrm{e}^{it_0}$ $(0 \le t_0 < 2\pi)$ і доведемо, що

$$\lim_{U\ni z\to\zeta_0} u(z) = u(\zeta_0). \tag{1.4}$$

Позначимо

$$P(\zeta, z) = \frac{1}{2\pi}\ \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2}, \quad |\zeta| = 1,\ z \in U.$$

Оскільки функція $v(z) \equiv 1$ є гармонійною в U і неперервною на $\overline{U}$, то, згідно з формулою (1.3),

$$\int\limits_0^{2\pi} P(\zeta, z)\, dt = 1, \quad z \in U.$$

Тому для $z \in U$

$$u(z) - u(\zeta_0) = \int\limits_0^{2\pi} [u(\zeta) - u(\zeta_0)] P(\zeta, z)\, dt$$

(зауважимо, що коли $t_0 = 0$, то тут і далі в цьому пункті замість відрізка $[0; 2\pi]$ можна розглянути, наприклад, відрізок $[-\pi; \pi]$).

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Оскільки u – неперервна на колі $\{\zeta = \mathrm{e}^{it} : 0 \le t \le 2\pi\}$, то

$$\exists\, \delta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) :\ t \in (t_0 - 2\delta; t_0 + 2\delta) \subset [0; 2\pi] \Rightarrow |u(\mathrm{e}^{it}) - u(\mathrm{e}^{it_0})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Позначимо через T_1 інтервал $(t_0 - 2\delta; t_0 + 2\delta)$, а через T_2 – множину $[0; 2\pi] \setminus T_1$. Матимемо, що

$$\int\limits_{T_1} |u(\zeta) - u(\zeta_0)| P(\zeta, z)\, dt \le \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{T_1} P(\zeta, z)\, dt < \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_0^{2\pi} P(\zeta, z)\, dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Оцінимо тепер $\displaystyle\int\limits_{T_2} |u(\zeta) - u(\zeta_0)| P(\zeta, z)\, dt$ для $z \in U$. Нехай $m = \displaystyle\min_{t \in T_2, |\mathrm{Arg}\, z - t_0| < \delta} |\zeta - z| = \sin\delta$. Тоді для $z \in U$ $(|\mathrm{Arg}\, z - t_0| < \delta)$

$$\sup_{t \in T_2} |P(\zeta, z)| \le \frac{1-|z|^2}{2\pi m^2}.$$

Звідси отримаємо, оскільки $|z| \to 1$ при $U \ni z \to \zeta_0$, що для зафіксованого раніше $\varepsilon > 0$

$$\exists \varrho > 0 : 1 - \varrho < |z| < 1 \Rightarrow \sup_{t \in T_2} |P(\zeta, z)| < \frac{\varepsilon}{8\pi M},$$

де $M = \max\limits_{|\zeta|=1} |u(\zeta)|$. Тому для таких $z \in U$, що $|\operatorname{Arg} z - t_0| < \delta$ і $1 - \varrho < |z| < 1$, будемо мати, що

$$\left| \int\limits_{T_2} [u(\zeta) - u(\zeta_0)] P(\zeta, z)\, dt \right| \leq \int\limits_{T_2} 2M \frac{\varepsilon}{8\pi M}\, dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким чином,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \exists \varrho > 0\ \forall z \in U(|\operatorname{Arg} z - t_0| < \delta,\, 1 - \varrho < |z| < 1) :$$

$$|u(z) - u(\zeta_0)| < \varepsilon,$$

що й означає виконання рівності (1.4). □

1.8. Достатня умова гармонійності функції

Нехай G – область в $\mathbb{C}$ і для $z \in G$

$$r_0(z) = \inf\{|\zeta - z| : \zeta \in \partial G\},$$

тобто $r_0(z)$ – це відстань від точки $z \in G$ до межі області G.

Теорема 1.10. *Нехай локально інтегровна в області G функція u така, що*

$$\forall z \in G\ \forall r \in (0; r_0(z)) :\ u(z) = \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{|\zeta - z| < r} u(\zeta) d\zeta.$$

Тоді функція u гармонійна в області G.

Доведення. Спочатку переконаємося, що u неперервна в G. Зафіксуємо $z_0 \in G$ і $r = \frac{1}{2}r_0(z_0)$. Позначимо

$$U = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

і для $z \in U$ покладемо

$$U_z = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z| < r\}.$$

Очевидно, що $U \subset G$ і $U_z \subset G$ для кожного $z \in U$. Тоді

$$\forall\, z \in U : \quad |u(z) - u(z_0)| =$$

$$= \frac{1}{\pi r^2} \left| \int\limits_U \int u(\zeta) d\zeta - \int\limits_{U_z} \int u(\zeta) d\zeta \right| \le \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{U \triangle U_z} \int |u(\zeta)| d\zeta.$$

Звідси, використовуючи абсолютну неперервність подвійного інтеграла, одержимо, що $\lim\limits_{z \to z_0} (u(z) - u(z_0)) = 0$. Тому u неперервна в точці z_0. Враховуючи довільність $z_0 \in G$, маємо, що u неперервна в G.

Зафіксуємо знову якусь точку $z_0 \in G$, число $r = \frac{1}{2}r_0(z_0)$ і розглянемо відкритий круг U з центром у точці z_0 і радіусом r. Оскільки $\overline{U} \subset G$, то на ∂U функція u неперервна. Тому її можна гармонійно продовжити на $\overline{U}$. Позначимо це продовження через h. Розглянемо функцію $v(z) = u(z) - h(z)$, $z \in \overline{U}$, і покажемо, що $v(z) = 0$ на $\overline{U}$.

Оскільки функція v неперервна на $\overline{U}$, то вона набуває на $\overline{U}$ своїх максимуму і мінімуму. Якщо обидві точки (максимуму і мінімуму) лежать на межі ∂U (а тут $v(z) = 0$), то $0 \le v(z) \le 0$, $z \in \overline{U}$, тобто $v(z) = 0$ на $\overline{U}$. Припустимо, що або максимум, або мінімум функція v набуває всередині U. Нехай точка $z_1 \in U$ є точкою максимуму функції v і $v(z_1) = M$. Доведемо, що існує окіл $V \subseteq U$ точки z_1, у якому $v(z) = M$. Нехай це не так, тобто в довільно вибраному крузі $V = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| < r_1\}$ $(r_1 < r_0(z_1))$, у якому $v(z) \leq v(z_1)$, існує точка z_2, для якої $v(z_2) < M$. Оскільки функція v неперервна в точці z_2, то існує окіл $V_2 \subseteq V$ точки z_2, у якому $v(z) < \frac{1}{2}(M + v(z_2))$. Тоді

$$M = v(z_1) = \frac{1}{\pi r_1^2} \int\limits_V\!\!\int v(z)\,dz =$$

$$= \frac{1}{\pi r_1^2} \left(\int\limits_{V_2}\!\!\int v(z)\,dz + \int\limits_{V \setminus V_2}\!\!\int v(z)\,dz \right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi r_1^2} \left(\frac{M + v(z_2)}{2}\, s(V_2) + M\, s(V \setminus V_2) \right) < \frac{1}{\pi r_1^2}\, M\, s(V) = M,$$

де $s(V_2)$, $s(V \setminus V_2)$ і $s(V)$ – площі відповідних фігур. Отримана суперечність вказує, що справді функція v разом із кожною своєю точкою максимуму дорівнює цьому максимуму і на деякому околі цієї точки. Тому множина $E = \{z \in U : v(z) = M\}$ є непорожньою відкритою в U множиною. Разом з цим, враховуючи неперервність v, E замкнена в U. Тому $E = U$, тобто $v(z) = M$ на U. Але тоді (внаслідок неперервності) $v(z) = M$ і на ∂U, тобто $M = 0$.

Таким чином, $v(z) = 0$ на U, тобто u гармонійна в U. Оскільки точка z_0 – довільна з G, то u є гармонійною в G. $\square$

1.9. Теорема Гарнака про границю спадної послідовності гармонійних функцій

Теорема 1.11. *Границя спадної послідовності $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ гармонійних в області G функцій є або гармонійною в G, або тотожно рівною $-\infty$.*

Доведення. Зауважимо, що для всіх $k \in \mathbb{N}$ можна вважати, що $u_k(z) \leq 0$, $z \in G$ (якщо це не так, то замість послідовності $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ розглянемо послідовність $(u_k - u_1)_{k=1}^{\infty}$).

Позначимо $u(z) = \lim\limits_{k\to\infty} u_k(z)$, $z \in G$. Спочатку розглянемо випадок, коли $u(z) > -\infty$ для всіх $z \in G$.

Зафіксуємо $z \in G$. Нехай $r_0(z)$ – відстань від z до ∂G. Тоді

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\ \forall\, r \in (0; r_0(z)) : \quad \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{|\zeta - z| < r} u_k(\zeta)\, d\zeta = u_k(z) \geq u(z).$$

Тому, за теоремою Беппо Леві [3, с. 348],

$$\lim_{k\to\infty} \iint\limits_{|\zeta - z| < r} u_k(\zeta)\, d\zeta = \iint\limits_{|\zeta - z| < r} u(\zeta)\, d\zeta.$$

Отже, враховуючи довільність $z \in G$, маємо, що

$$\forall\, z \in G\ \forall\, r \in (0; r_0(z)) : \ u(z) = \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{|\zeta - z| < r} u(\zeta)\, d\zeta.$$

Звідси, згідно з теоремою 1.10, отримуємо, що u гармонійна в G.

Нехай тепер існує таке $z' \in G$, що $u(z') = -\infty$. Розглянемо множину $E = \{z \in G : u(z) = -\infty\}$ (зауважимо, що $E \neq \emptyset$) і переконаємося, що вона відкрита. Нехай $z_0 \in E$, відстань від z_0 до ∂G дорівнює $3r$, а $U = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$. Тоді

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{U} u_k(\zeta)\, d\zeta = u_k(z_0) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Для $z \in U$ позначимо $U_z = \{\zeta : |\zeta - z| < 2r\}$. Враховуючи, що $U \subseteq U_z$ і $u_k(\zeta) \leq 0$ для $k \in \mathbb{N}$ та $\zeta \in U_z$, отримаємо, що для всіх $z \in U$

$$u(z) \leq u_k(z) = \frac{1}{\pi 4 r^2} \iint\limits_{U_z} u_k(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{\pi 4 r^2} \iint\limits_{U} u_k(\zeta)\, d\zeta +$$

$$+\frac{1}{\pi 4r^2}\iint\limits_{U_z\setminus U} u_k(\zeta)\,d\zeta \le \frac{1}{4}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{U} u_k(\zeta)\,d\zeta = \frac{1}{4}\,u_k(z_0)\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Отже, $u(z) = -\infty$ на крузі U, тобто $U \subseteq E$. Звідси випливає, що множина E відкрита в G.

Доведемо, що E є замкненою множиною в G. Нехай $z_n \in E$ ($n \in \mathbb{N}$) і $z_0 \in G$ такі, що $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$. Тоді для деякого $r > 0$ одержимо, що

$$u(z_0) \le u_k(z_0) = \frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{|\zeta - z_0|<r} u_k(\zeta)\,d\zeta, \quad k \in \mathbb{N}.$$

У круг $\{\zeta : |\zeta - z_0| < r\}$ разом із якимось своїм околом $\{\zeta : |\zeta - z_n| < r_n\}$ потрапляє деяке z_n. Оскільки

$$\frac{1}{\pi r_n^2}\iint\limits_{|\zeta - z_n|<r_n} u_k(\zeta)\,d\zeta = u_k(z_n)$$

і $u_k(\zeta) \le 0$ ($k \in \mathbb{N}$, $\zeta \in G$), то, як і вище, матимемо, що

$$u(z_0) \le \frac{r_n^2}{r^2}\,u_k(z_n)\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Отже, $u(z_0) = -\infty$, тобто $z_0 \in E$. Таким чином, множина E замкнена в G. Тому $E = G$, тобто $u(z) = -\infty$ на G. $\square$

Розділ II. Субгармонійні функції двох дійсних змінних

2.1. Означення напівнеперервних зверху функцій

Нехай $G \subseteq \mathbb{C}$, а $f : G \to [-\infty; +\infty)$ – дійсна функція двох дійсних змінних на G. f називається *напівнеперервною зверху* в точці $z_0 \in G$, якщо

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, z \in G: \ |z - z_0| < \delta \Rightarrow f(z) < f(z_0) + \varepsilon$$

при $f(z_0) \neq -\infty$ або якщо

$$\forall\, E > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, z \in G: \ |z - z_0| < \delta \Rightarrow f(z) < -E$$

при $f(z_0) = -\infty$. Коли функція f напівнеперервна зверху в усіх точках множини G, то вона напівнеперервна зверху на G.

Функція f називається *напівнеперервною знизу* в точці z_0, якщо $-f$ є напівнеперервною зверху в цій точці. Зрозуміло, що f неперервна в точці z_0 тоді й лише тоді, коли вона одночасно напівнеперервна зверху і знизу в цій точці.

Теорема 2.1. *Для того, щоб функція f була напівнеперервною зверху на множині G, необхідно і досить, щоб для кожного $a \in \mathbb{R}$ множина $H(a) = \{z \in G : f(z) < a\}$ була відкритою в G.*

Доведення. Необхідність. Нехай функція f напівнеперервна зверху на множині G. Зафіксуємо $a \in \mathbb{R}$ і доведемо, що відповідна множина $H(a)$ відкрита в G. Оскільки порожня множина відкрита, то вважатимемо, що $H(a) \neq \varnothing$. Розглянемо точку $z_0 \in H(a)$. Тоді з означення напівнеперервності зверху в точці z_0 випливає, що для числа $\varepsilon = \frac{a - f(z_0)}{2} > 0$ (коли $f(z_0) \neq -\infty$) чи $E = |a| + 1 > 0$ (коли $f(z_0) = -\infty$) існує таке $\delta > 0$, що для тих $z \in G$, для яких $|z - z_0| < \delta$, будемо мати, що

$$f(z) < f(z_0) + \varepsilon = \frac{a + f(z_0)}{2} < a$$

чи, відповідно,

$$f(z) < -E = -|a| - 1 < a.$$

А це означає, що $H(a)$ містить δ-окіл точки z_0 в G. Тому множина $H(a)$ відкрита в G.

Достатність. Нехай для кожного $a \in \mathbb{R}$ множина $H(a)$ відкрита в G. Зафіксуємо $z_0 \in G$ і переконаємося, що функція f напівнеперервна зверху в цій точці.

Якщо $f(z_0) = -\infty$, то

$$\forall\, E > 0 : \quad f(z_0) < -E.$$

Зафіксуємо якесь $E > 0$. Оскільки множина $H(-E)$ відкрита в G і $z_0 \in H(-E)$, то

$$\exists\, \delta > 0\ \forall\, z \in G : \ |z - z_0| < \delta \Rightarrow f(z) < -E.$$

Отже, f напівнеперервна зверху в точці z_0.

Нехай тепер $f(z_0) \neq -\infty$. Зафіксуємо число $\varepsilon > 0$. Тоді $f(z_0) < f(z_0) + \varepsilon$. Тому $z_0 \in H(f(z_0) + \varepsilon)$. Оскільки множина $H(f(z_0) + \varepsilon)$ відкрита в G, то

$$\exists\, \delta > 0\ \forall\, z \in G : \ |z - z_0| < \delta \Rightarrow f(z) < f(z_0) + \varepsilon.$$

Отже, і в цьому випадку f напівнеперервна зверху в точці z_0. $\square$

2.2. Деякі властивості напівнеперервних зверху функцій

Теорема 2.2. *Напівнеперервна зверху на непорожньому компакті K функція f набуває на K свого максимального значення.*

Доведення. Нехай $M = \sup\limits_{z\in K} f(z)$. Якщо $f(z) \equiv -\infty$, то $M = -\infty$ і $f(z) = M$ для будь-якого $z \in K$.

Нехай $f(z) \not\equiv -\infty$. Тоді існує така послідовність $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ точок із K, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $f(z_n) > M - \frac{1}{n}$ (коли $M < +\infty$) або $f(z_n) > n$ (коли $M = +\infty$). Зауважимо, що $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = M$. Оскільки послідовність $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ обмежена, а множина K замкнена, то існує збіжна до деякого $z_0 \in K$ підпослідовність $(z_{n_k})_{k=1}^{\infty}$. Переконаємося, що $f(z_0) = M$.

Припустимо, що $f(z_0) < M$. Розглянемо таке μ, що $f(z_0) < \mu < M$. Оскільки $z_0 \in H(\mu)$ і $H(\mu)$ – відкрита, то

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, z \in K : \quad |z - z_0| < \delta \Rightarrow f(z) < \mu.$$

Із рівності $z_0 = \lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k}$ випливає, що для знайденого δ

$$\exists\, k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, k \geq k_0 : \quad |z_{n_k} - z_0| < \delta,$$

тому

$$\forall\, k \geq k_0 : \quad f(z_{n_k}) < \mu.$$

З іншого боку, оскільки $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_{n_k}) = M$ і $\mu < M$, то

$$\exists\, k_1 \in \mathbb{N} \quad \forall\, k \geq k_1 : \quad f(z_{n_k}) > \mu.$$

Отримали суперечність. Тому $f(z_0) = M$. $\square$

Теорема 2.3. *Якщо $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ – монотонно спадна послідовність напівнеперервних зверху на деякій множині G функцій, то функція $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ також напівнеперервна зверху на G.*

Доведення. Зрозуміло, що $f : G \to [-\infty; +\infty)$. Зафіксуємо $a \in \mathbb{R}$ і переконаємося, що множина $H(a) = \{z \in G : f(z) < a\}$ відкрита в G. Нехай $z_0 \in G$. Оскільки $f(z_0) < a$ і $f(z_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z_0)$, то існує таке $n \in \mathbb{N}$, що $f_n(z_0) < a$. З напівнеперервності зверху на G функції f_n випливає, що

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, z \in G : \quad |z - z_0| < \delta \Rightarrow f_n(z) < a.$$

Тоді

$$\forall\, z \in G : \quad |z - z_0| < \delta \Rightarrow f(z) \le f_n(z) < a.$$

Отже, $H(a)$ відкрита в G. Тому, за теоремою 2.1, f напівнеперервна зверху на G. $\square$

На закінчення цього пункту наведемо деякі допоміжні твердження про напівнеперервні зверху функції, які будуть використовуватись у наступних пунктах.

Лема 2.1. *Нехай напівнеперервна зверху в області G функція u набуває свого локального максимуму в деякій точці $z_0 \in G$ і*

$$\exists\, r_0 > 0\ \forall\, r \in (0; r_0) :\ u(z_0) \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(z_0 + r\mathrm{e}^{it})\, dt.$$

Тоді $u(z) = u(z_0)$ в деякому околі точки z_0.

Доведення. Нехай u не є сталою в жодному околі точки z_0. Тоді існує такий круг U ($\overline{U} \subset G$) із центром у точці z_0 і радіусом $r \in (0; r_0)$, що $u(z) \le u(z_0)$ при $z \in \overline{U}$ і існує таке $z_1 \in \partial U$, для якого $u(z_1) < u(z_0)$. Розглянемо таке число μ, що $u(z_1) < \mu < u(z_0)$. Для $t \in [0; 2\pi]$ позначимо $\zeta_t = z_0 + r\mathrm{e}^{it}$. З напівнеперервності зверху в точці z_1 функції u одержимо існування такого проміжку (чи об'єднання двох проміжків, якщо $z_1 = \zeta_0$) $T \subseteq [0; 2\pi]$, що $u(\zeta_t) < \mu$ при $t \in T$. Тоді

$$u(z_0) \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(\zeta_t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \left(\int\limits_T u(\zeta_t)\, dt + \int\limits_{[0;2\pi]\setminus T} u(\zeta_t)\, dt \right) \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \left(\mu \int\limits_T dt + u(z_0) \int\limits_{[0;2\pi]\setminus T} dt \right) < u(z_0).$$

Отримали суперечність. Тому $u(z) = u(z_0)$ в деякому околі точки z_0. $\square$

Лема 2.2. *Нехай D – обмежена область в $\mathbb{C}$, u – напівнеперервна зверху в $\overline{D}$ функція і $M = \max\limits_{z \in \overline{D}} u(z) > -\infty$. Тоді:*

а) множина $E = \{z \in D : u(z) = M\}$ замкнена в D;

б) якщо $u(z) = M$ на D, то $u(z) = M$ на $\overline{D}$.

Доведення. а) Нехай $z_n \in E$, $z_0 \in D$ і $z_n \to z_0$ при $n \to \infty$. Спочатку відзначимо, що $u(z_0) \neq -\infty$, інакше для деякого $n \in \mathbb{N}$ мали б, що $M = u(z_n) < -|M| - 1$, що неможливо. З напівнеперервності зверху в точці z_0 функції u випливає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} : \; M = u(z_n) < u(z_0) + \varepsilon,$$

звідки матимемо:

$$\forall \varepsilon > 0 : \; M - \varepsilon < u(z_0) \leq M.$$

Тому, прямуючи тут ε до 0, отримаємо, що $u(z_0) = M$, тобто $z_0 \in E$. Отже, множина E замкнена в D.

б) Доведемо, що $u(z) = M$ при $z \in \partial D$. Припустимо, що $u(z_0) < M$ для деякого $z_0 \in \partial D$. Тоді з напівнеперервності зверху в точці z_0 функції u матимемо, що

$$\exists \delta > 0 \; \forall z \in D : \; |z - z_0| < \delta \Rightarrow u(z) < M.$$

А це суперечить тому, що $u(z) = M$ на D. Отже, $u(z) = M$ на ∂D, а тому $u(z) = M$ на $\overline{D}$. □

2.3. Наближення напівнеперервної зверху функції монотонно спадною послідовністю неперервних функцій

У цьому пункті наведемо теорему про наближення напівнеперервної зверху на колі функції монотонно спадною послідовністю неперервних на цьому колі функцій. Зазначимо, що подібна теорема правильна і для напівнеперервної зверху функції на довільній підмножині комплексної площини [7, с. 22-24].

Теорема 2.4. *Нехай функція u напівнеперервна зверху на колі* Γ, *а*

$$u_k(z) = \max_{\zeta\in\Gamma}(u(\zeta) - k|\zeta - z|), \ z \in \Gamma, \ k \in \mathbb{N}.$$

Тоді всі функції u_k $(k \in \mathbb{N})$ *неперервні на* Γ, *послідовність* $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ *монотонно спадає на* Γ *і* $\lim\limits_{k\to\infty} u_k(z) = u(z)$, $z \in \Gamma$.

Доведення. Зафіксуємо $z \in \Gamma$. Тоді для $k \in \mathbb{N}$ маємо, що

$$\forall\, \zeta \in \Gamma : \ u(\zeta) - k|\zeta - z| \geq u(\zeta) - (k+1)|\zeta - z|,$$

звідки отримуємо, що

$$u_k(z) = \max_{\zeta\in\Gamma}(u(\zeta) - k|\zeta - z|) \geq \max_{\zeta\in\Gamma}(u(\zeta) - (k+1)|\zeta - z|) = u_{k+1}(z).$$

Отже, послідовність $(u_k(z))_{k=1}^{\infty}$ монотонно спадна. Тому існує (скінченна або нескінченна) $\lim\limits_{k\to\infty} u_k(z)$. З означення функції u_k випливає, що $u_k(z) \geq u(z)$ $(k \in \mathbb{N})$. Отже, $\lim\limits_{k\to\infty} u_k(z) \geq u(z)$. Припустимо, що $\lim\limits_{k\to\infty} u_k(z) > u(z)$. Тоді

$$\exists\, c \in \mathbb{R} : \ \lim_{k\to\infty} u_k(z) > c > u(z).$$

Оскільки u напівнеперервна зверху в точці z, то

$$\exists\, \delta > 0 \ \forall\, \zeta \in \overline{U}_\delta(z) = \{\zeta \in \Gamma : \ |\zeta - z| \leq \delta\} : \ u(\zeta) < c.$$

Нехай для $k \in \mathbb{N}$ точка $\zeta_k \in \Gamma$ така, що $u_k(z) = u(\zeta_k) - k|\zeta_k - z|$ (вона існує, бо функція u_k напівнеперервна зверху на компакті Γ). Тоді, враховуючи нерівності

$$u(\zeta_k) - k|\zeta_k - z| = u_k(z) > c > \max_{\zeta\in\overline{U}_\delta(z)} u(\zeta),$$

одержимо, що $|\zeta_k - z| > \delta$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ (інакше мали б, що $u(\zeta_k) - k|\zeta_k - z| \leq u(\zeta_k) \leq \max\limits_{\zeta\in\overline{U}_\delta(z)} u(\zeta)$). Тому

$$\forall\, k \in \mathbb{N} : \ u(\zeta_k) > c + k|\zeta_k - z| > c + k\delta,$$

звідки випливає, що напівнеперервна зверху на компакті Γ функція u необмежена зверху. Отримана суперечність вказує, що $\lim\limits_{k\to\infty} u_k(z) = u(z)$.

Доведемо ще неперервність на Γ функцій u_k, $k \in \mathbb{N}$. Для цього зафіксуємо $k \in \mathbb{N}$ та $z_1, z_2 \in \Gamma$ і переконаємося, що

$$|u_k(z_1) - u_k(z_2)| < k|z_1 - z_2|.$$

Справді, оскільки

$$\forall\, \zeta \in \Gamma: \; |\zeta - z_2| - |z_1 - z_2| \le |\zeta - z_1| \le |\zeta - z_2| + |z_1 - z_2|,$$

то

$$\forall\, \zeta \in \Gamma: \; u(\zeta) - k|\zeta - z_2| - k|z_1 - z_2| \le$$
$$\le u(\zeta) - k|\zeta - z_1| \le u(\zeta) - k|\zeta - z_2| + k|z_1 - z_2|.$$

Перейшовши тут до максимуму по $\zeta \in \Gamma$, отримаємо:

$$u_k(z_2) - k|z_1 - z_2| \le u_k(z_1) \le u_k(z_2) + k|z_1 - z_2|,$$

тобто

$$-k|z_1 - z_2| \le u_k(z_1) - u_k(z_2) \le k|z_1 - z_2|,$$

що й потрібно було довести. $\Box$

2.4. Субгармонійні функції та їх найпростіші властивості

Нехай $G \subseteq \mathbb{C}$, а $u : G \to [-\infty; +\infty)$ – дійсна функція двох дійсних змінних на G. Функція u називається *субгармонійною* в G, якщо вона напівнеперервна зверху на G і для довільного круга U ($\overline{U} \subset G$) та довільної гармонійної в U і неперервної на $\overline{U}$ функції h з того, що $u \le h$ на ∂U, випливає, що $u \le h$ на U. При цьому h називається *гармонійною мажорантою* функції

u для U. Відзначимо, що коли функція u субгармонійна в G, а функція h гармонійна в G, то функції $u-h$ та $u+h$ субгармонійні в G.

Теорема 2.5. *Якщо субгармонійна в області G функція u набуває локального максимуму в деякій точці $z_0 \in G$, то вона стала в деякому околі цієї точки.*

Доведення. Нехай u не є сталою в жодному околі точки z_0. Тоді існує такий круг U ($\overline{U} \subset G$) із центром у точці z_0 і радіусом r, що $u(z) \le u(z_0)$ при $z \in \overline{U}$, і існує таке $z_1 \in \Gamma = \partial U = \{\zeta_t = z_0 + r\mathrm{e}^{it} : t \in [0; 2\pi]\}$, для якого $u(z_1) < u(z_0)$. Зафіксуємо таке $\mu \in \mathbb{R}$, що $u(z_1) < \mu < u(z_0)$. Тоді, внаслідок напівнеперервності зверху в точці z_1 функції u, маємо, що існує така відкрита в Γ дуга $\Gamma_1 \subset \Gamma$, для якої $u(z) < \mu$ при $z \in \Gamma_1$. Розглянемо неперервну на Γ функцію h, яка визначається так: нехай Γ_2 – така дуга ненульової довжини кола Γ, що $\overline{\Gamma}_2 \subset \Gamma_1$; при $z \in \Gamma_2$ вважатимемо $h(z) = \mu$, при $z \in \Gamma \setminus \Gamma_1$ – $h(z) = u(z_0)$, а на частинах дуги $\Gamma_1 \setminus \Gamma_2$ довизначимо h лінійно і неперервно. Тоді, згідно з теоремою 1.9, h можна продовжити до гармонійної в U і неперервної в $\overline{U}$ функції. Оскільки u субгармонійна в G і $u(z) \le h(z)$, $z \in \Gamma$, то

$$u(z_0) \le h(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} h(\zeta_t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int\limits_{t\colon \zeta_t \in \Gamma_2} h(\zeta_t)\, dt + \int\limits_{t\colon \zeta_t \in \Gamma \setminus \Gamma_2} h(\zeta_t)\, dt \right) \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \left(\mu \int\limits_{t\colon \zeta_t \in \Gamma_2} dt + u(z_0) \int\limits_{t\colon \zeta_t \in \Gamma \setminus \Gamma_2} dt \right) < u(z_0).$$

Отримали суперечність. Тому припущення неправильне. $\square$

Теорема 2.6. *Якщо функція u субгармонійна в області G, а обмежена область D така, що $\overline{D} \subset G$, то для довільної гармонійної в D і неперервної на $\overline{D}$ функції h із того, що $u(z) \le h(z)$ при $z \in \partial D$, випливає, що $u(z) \le h(z)$ при $z \in D$.*

Доведення. Розглянемо функцію $v = u - h$. Оскільки v напівнеперервна зверху на компакті $\overline{D}$, то вона набуває на $\overline{D}$ свого максимуму M. Досить переконатися, що $M \le 0$.

Нехай $E = \{z \in D : v(z) = M\}$. Якщо $E = \emptyset$, то максимум набувається на межі D, де $v(z) \le 0$. Тому в цьому випадку $M \le 0$. Припустимо, що $E \ne \emptyset$. З теореми 2.5 випливає, що E є відкритою множиною в D, а з леми 2.2 отримуємо її замкненість у D. Отже, $v(z) = M$ на D. Використовуючи знову лему 2.2, одержимо, що $v(z) = M$ на $\overline{D}$. Тому і в цьому випадку $M \le 0$. $\square$

Теорема 2.7. *Нехай $\{u_i : i \in I\}$ – сім'я субгармонійних в області G функцій і $u(z) = \sup_{i \in I} u_i(z)$ $(z \in G)$ – напівнеперервна зверху на G функція. Тоді u – субгармонійна в G функція.*

Доведення. Нехай U $(\overline{U} \subset G)$ – деякий круг, а h – гармонійна в U і неперервна на $\overline{U}$ функція, для якої $u(z) \le h(z)$ при $z \in \partial U$. Тоді

$$\forall\, i \in I \quad \forall\, z \in \partial U : \quad u_i(z) \le h(z).$$

Оскільки всі функції u_i $(i \in I)$ субгармонійні в G, то

$$\forall\, i \in I \quad \forall\, z \in U : \quad u_i(z) \le h(z),$$

звідки

$$\forall\, z \in U : \quad u(z) = \sup_{i \in I} u_i(z) \le h(z).$$

Тому функція u субгармонійна в G. $\square$

2.5. Принцип максимуму для субгармонійних функцій

Теорема 2.8. *Нехай u – субгармонійна в області G функція, а D – деяка обмежена область, для якої $\overline{D} \subset G$. Якщо в якійсь точці $z_0 \in D$ функція u збігається зі своєю гармонійною мажорантою h для області D, то $u(z) = h(z)$ на D.*

Доведення. Розглянемо функцію $v(z) = u(z) - h(z)$, $z \in D$. Вона субгармонійна в D і $v(z) \le 0$ на D. Тому в точці z_0 функція v набуває свого максимуму, який дорівнює 0. Нехай $E = \{z \in D : v(z) = 0\}$. Множина E непорожня (бо $z_0 \in E$) і відкрита (згідно з теоремою 2.5). Оскільки функція v напівнеперервна зверху на $\overline{D}$, то, за лемою 2.2, отримуємо, що E замкнена в D. Отже, $E = D$. Тому $v(z) = 0$ на D, тобто $u(z) = h(z)$ на D. □

Наслідок (принцип максимуму). *Якщо субгармонійна в області G функція u набуває свого максимуму M у точці $z_0 \in G$, то $u(z) = M$ на G.*

Доведення. Зафіксуємо якесь $z_1 \in G$ і розглянемо таку обмежену область D, для якої $z_1, z_0 \in D$ і $\overline{D} \subset G$. Тоді функція $h(z) \equiv M$ є гармонійною мажорантою функції u для D, причому $u(z_0) = h(z_0)$. Тому, за теоремою 2.8, $u(z) = M$ на D, звідки $u(z_1) = M$. Враховуючи довільність точки $z_1 \in G$, одержуємо, що $u(z) = M$ на G. □

2.6. Критерій субгармонійності напівнеперервних зверху функцій

Теорема 2.9. *Для того, щоб напівнеперервна зверху в області G функція u була субгармонійною в G, необхідно і досить, щоб*

$$\forall\, z \in G\ \exists\, r_0(z) > 0\ \forall\, r \in (0; r_0(z)) :$$

$$u(z) \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(z + r\mathrm{e}^{it})\, dt. \tag{2.2}$$

Доведення. Необхідність. Нехай функція u субгармонійна в G. Зафіксуємо $z \in G$ та $r \in (0; r_0(z))$, де $r_0(z)$ – це відстань від z до ∂G. Позначимо через U круг $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z| < r\}$, а через Γ – коло ∂U. Згідно з теоремою 2.4, на Γ існує послідовність неперервних функцій $(u_k)_{k=1}^{\infty}$, яка монотонно спадає на Γ до u.

Нехай h_k – гармонійне продовження функції u_k на U ($k \in \mathbb{N}$). Оскільки u субгармонійна в G і $u(\zeta) \le u_k(\zeta) = h_k(\zeta)$ на Γ, то

$$u(z) \le h_k(z), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Згідно з принципом максимуму для гармонійних функцій, маємо, що для всіх $k \in \mathbb{N}$ функція $h_{k+1} - h_k$ досягає максимуму на Γ, тому

$$\max_{\zeta \in \overline{U}} [h_{k+1}(\zeta) - h_k(\zeta)] = \max_{\zeta \in \Gamma} [u_{k+1}(\zeta) - u_k(\zeta)] \le 0.$$

Отже, $(h_k)_{k=1}^{\infty}$ – монотонно спадна в U послідовність гармонійних функцій. За теоремою Гарнака, вона збігається або до гармонійної в U функції, або до тотожно рівної $-\infty$ в U функції. Позначимо $h(\zeta) = \lim\limits_{k \to \infty} h_k(\zeta)$, $\zeta \in U$. Якщо $h(\zeta) = -\infty$ на U, то з (2.3) отримаємо, що $u(z) = -\infty$, а тому нерівність із (2.2) виконується.

Припустимо, що h гармонійна в U. За теоремою про середнє, для гармонійної функції h_k маємо, що

$$h_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u_k(z + r\mathrm{e}^{it})\, dt, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Переходячи тут до границі при $k \to \infty$ та використовуючи теорему Беппо Леві, отримаємо

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(z + r\mathrm{e}^{it})\, dt.$$

Тому, враховуючи (2.3), одержимо

$$u(z) \le \lim_{k\to\infty} h_k(z) = h(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(z + r\mathrm{e}^{it})\, dt,$$

що й потрібно було довести.

Достатність. Нехай u – напівнеперервна зверху в G функція і виконується умова (2.2). Зафіксуємо довільний круг U ($\overline{U} \subset G$) і таку гармонійну в U та неперервну на $\overline{U}$ функцію h, для якої $u(z) \le h(z)$, $z \in \partial U$. Доведемо, що $u(z) \le h(z)$, $z \in U$.

Розглянемо на $\overline{U}$ функцію $v = u - h$. На ∂U вона недодатня. Переконаємося, що $v(z) \le 0$ і для $z \in U$. Функція v напівнеперервна зверху на $\overline{U}$. Крім цього, для довільних $z \in U$ та досить малих $r > 0$ виконується нерівність

$$v(z) = u(z) - h(z) \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(z + r\mathrm{e}^{it})\, dt - \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} h(z + r\mathrm{e}^{it})\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} v(z + r\mathrm{e}^{it})\, dt.$$

Нехай $M = \max\limits_{z\in\overline{U}} v(z)$, а $E = \{z \in U : v(z) = M\}$. За лемою 2.1, множина E відкрита в U, а, за лемою 2.2, вона замкнена в U. Тому $E = \emptyset$ або $E = U$. Якщо $E = \emptyset$, то максимум v досягається на ∂U, де $v(z) \le 0$, тому $v(z) \le 0$ на U. Якщо ж $E = U$, то за лемою 2.2 $v(z) = M$ на $\overline{U}$. Отже, і в цьому випадку $M \le 0$, тобто $v(z) \le 0$ на U. □

2.7. Субгармонійність логарифма модуля аналітичної функції

Теорема 2.10. *Якщо функція f аналітична в області G, то функція $u = \ln|f|$ субгармонійна в G.*

Доведення. Зафіксуємо довільну точку $z \in G$ і доведемо, що u є напівнеперервною зверху в z та виконується нерівність з умови (2.2) для точки z і досить малих $r > 0$.

Якщо $f(z) = 0$, то $\lim\limits_{\zeta \to z} u(\zeta) = -\infty = u(z)$. Звідси випливає і напівнеперервність зверху функції u в точці z, і виконання нерівності з умови (2.2). Припустимо тепер, що $f(z) \neq 0$. Тоді u неперервна в точці z, а отже, й напівнеперервна зверху в z. Крім цього, в деякому околі U цієї точки багатозначна функція $\operatorname{Ln} f$ допускає виділення однозначної аналітичної вітки, причому функція $u = \ln|f|$ є дійсною частиною цієї вітки. Тому u гармонійна в U, звідки випливає виконання нерівності з умови (2.2) (зі знаком рівності). □

2.8. Теорема про множину точок нескінченності субгармонійної функції

Теорема 2.11. *Якщо функція u субгармонійна в області G, причому $u(z) \not\equiv -\infty$, то $E = \operatorname{int}\{z \in G : u(z) = -\infty\} = \emptyset$.*

Доведення. Припустимо, що $E \neq \emptyset$. Розглянемо якусь точку $z_0 \in G \cap \partial E$ (вона існує, бо $u(z) \not\equiv -\infty$). Тоді існує таке $r > 0$, що замикання круга $U = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ міститься в G і деяка дуга Γ_1 кола $\Gamma = \partial U$ міститься в E, причому можна вважати, що відстань від дуги Γ_1 до дуги $\Gamma \setminus E$ дорівнює деякому $\delta > 0$. Оскільки функція u напівнеперервна зверху на Γ, то, згідно з теоремою 2.4, можна побудувати послідовність $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ неперервних на Γ функцій, які монотонно спадають на Γ до u. Продовжимо кожну функцію u_k до неперервної на $\overline{U}$ та гармонійної в U функції h_k ($k \in \mathbb{N}$). Відзначимо, що послідовність $(h_k)_{k=1}^{\infty}$ монотонно спадає на $\overline{U}$ (згідно з принципом максимуму для гармонійних функцій) і на Γ збігається до u (бо $h_k = u_k$ на Γ для всіх $k \in \mathbb{N}$). Враховуючи субгармонійність u, отримаємо, що

$$u(z) \le h_k(z), \quad z \in \overline{U}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Переконаємося, що $\lim\limits_{k\to\infty} h_k(z_0) = -\infty$. Справді, позначаючи $\zeta_t = z_0 + re^{it}$ для $t \in [0; 2\pi]$ і $T_1 = \{t \in [0; 2\pi] : \zeta_t \in \Gamma_1\}$, матимемо

$$h_k(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u_k(\zeta_t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{T_1} u_k(\zeta_t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{[0;2\pi]\setminus T_1} u_k(\zeta_t)\,dt \le$$

$$\le \sup_{z\in\Gamma_1} u_k(z) + \max_{z\in\Gamma} u_1(z), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Другий доданок тут дорівнює якомусь числу, що не залежить від k. Оцінимо перший доданок. Спочатку нагадаємо, що для фіксованих $z \in \Gamma$ та $k \in \mathbb{N}$, згідно з теоремою 2.4,

$$u_k(z) = \max_{\zeta\in\Gamma}(u(\zeta) - k|\zeta - z|) = u(\zeta_k) - k|\zeta_k - z|$$

для деякого $\zeta_k \in \Gamma$. Оскільки $u(z) = -\infty$ на $\Gamma \cap E$, то всі точки максимуму ζ_k, $k \in \mathbb{N}$, належать множині $\Gamma \setminus E$. Тому, пригадуючи вибір дуги Γ_1 та позначаючи $M = \max\limits_{\zeta\in\Gamma} u(\zeta)$, одержимо, що

$$\sup_{z\in\Gamma_1} u_k(z) \le M - k\delta, \quad k \in \mathbb{N},$$

звідки, враховуючи (2.4), й випливає, що $\lim\limits_{k\to\infty} h_k(z_0) = -\infty$. Але тоді, за теоремою Гарнака, отримуємо, що $\lim\limits_{k\to\infty} h_k(z) = -\infty$ для всіх $z \in U$. Тому

$$u(z) \le \lim_{k\to\infty} h_k(z) = -\infty, \quad z \in U,$$

тобто $u(z) = -\infty$ на U. Отже, $z_0 \in E$.

Таким чином, множина E одночасно відкрита і замкнена в G. Оскільки, за припущенням, $E \neq \emptyset$, то $E = G$, що суперечить умові теореми. □

2.9. Теорема Гартоґса про оцінку послідовності субгармонійних функцій

Теорема 2.12. *Нехай $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ – послідовність субгармонійних в області G функцій, яка рівномірно обмежена на кожній компактній підмножині цієї області. Якщо*

$$\exists\, A \in \mathbb{R} \quad \forall\, z \in G : \quad \varlimsup_{k\to\infty} u_k(z) \le A,$$

то для довільних числа $\varepsilon > 0$ та компакта $K \subset G$

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, k \ge N \quad \forall\, z \in K : \quad u_k(z) \le A + \varepsilon.$$

Доведення. По-перше, можна вважати, що послідовність $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ рівномірно обмежена на G, бо довільний компакт $K \subset G$ можна помістити в обмежену область G_1, для якої $\overline{G}_1 \subset G$, а на G_1, за умовою, $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ рівномірно обмежена. По-друге, вважатимемо, що $u_k(z) \le 0$ на G для всіх $k \in \mathbb{N}$ (інакше замість u_k будемо розглядати функцію $u_k - M$, де $M = \sup\limits_{z\in G, k\in\mathbb{N}} u_k(z)$).

Зафіксуємо число $\varepsilon > 0$, компакт $K \subset G$, точку $\zeta \in K$ і вважатимемо, що відстань від K до ∂G дорівнює $3R$. Тоді з критерію субгармонійності випливає, що

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \quad \forall\, r \in (0; 2R) \quad \forall\, z\ (|z-\zeta| < R) \quad \forall\, \varrho \in (0; r):$$

$$u_k(z) \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u_k(z + \varrho\, \mathrm{e}^{it})\, dt;$$

$$\int\limits_0^r \varrho\, u_k(z)\, d\varrho \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^r \int\limits_0^{2\pi} u_k(z + \varrho\, \mathrm{e}^{it}) \varrho\, dt\, d\varrho;$$

$$\pi r^2 u_k(z) \le \iint\limits_{|\xi - z| \le r} u_k(\xi)\, d\xi.$$

Крім цього, за теоремою Фату [1, с. 170], отримаємо, що

$$\varlimsup_{k\to\infty} \iint\limits_{|\xi-\zeta| \le R} u_k(\xi)\, d\xi \le \pi R^2 A.$$

Тому для зафіксованого $\varepsilon > 0$

$$\exists\, k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, k \ge k_0: \qquad \iint\limits_{|\xi-\zeta|\le R} u_k(\xi)\, d\xi \le \pi R^2 \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Розглянемо довільне $\delta \in (0; R)$. Тоді для всіх z $(|z-\zeta| < \delta)$ і $k \ge k_0$, враховуючи, що круг $|\xi - \zeta| \le R$ міститься в крузі $|\xi - z| \le R + \delta$ і $u_k(\xi) \le 0$ в G, будемо мати, що

$$\pi(R+\delta)^2 u_k(z) \le \iint\limits_{|\xi - z| \le R+\delta} u_k(\xi)\, d\xi \le$$

$$\leq \iint\limits_{|\xi-\zeta|\leq R} u_k(\xi)\,d\xi \leq \pi R^2 \left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

тобто

$$u_k(z) \leq \left(\frac{R}{R+\delta}\right)^2 \left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Оскільки $A+\frac{\varepsilon}{2} < A+\varepsilon$ і $\frac{R}{R+\delta} \to 1$ при $\delta \to 0$, то існує таке $\delta > 0$, що

$$\left(\frac{R}{R+\delta}\right)^2 \left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right) < A+\varepsilon.$$

Отже, для зафіксованих раніше числа $\varepsilon > 0$, компакта $K \subset G$ та точки $\zeta \in K$ можна так підібрати числа $\delta > 0$ та $k_0 \in \mathbb{N}$, що

$$\forall\, z\ (|z-\zeta| < \delta) \quad \forall\, k \geq k_0 : \quad u_k(z) \leq A+\varepsilon.$$

Позначимо для кожного $\zeta \in K$ знайдені вище числа δ та k_0 через $\delta(\zeta)$ та $k_0(\zeta)$ відповідно. Скориставшись компактністю множини K, виберемо з її відкритого покриття $\{U(\zeta) : \zeta \in K\}$, де $U(\zeta) = \{z \in \mathbb{C} : |z-\zeta| < \delta(\zeta)\}$, скінченне підпокриття $\{U(\zeta_i) : i = 1, 2, ..., m\}$. Тоді, очевидно, шукане число $N \in \mathbb{N}$ можна визначити формулою

$$N = \max_{1\leq i\leq m} k_0(\zeta_i).\square$$

Розділ III. Аналітичні функції багатьох комплексних змінних

3.1. Простір $\mathbb{C}^n$. Лінійні функції на $\mathbb{C}^n$

Для $n \in \mathbb{N}$ через $\mathbb{C}^n$ будемо позначати декартовий добуток n просторів $\mathbb{C}$, тобто

$$\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, z_2, ..., z_n) : z_j \in \mathbb{C}, j = \overline{1, n}\}.$$

Якщо на цьому просторі у звичайний спосіб ввести операції додавання та множення на скаляр, а саме

$$z' + z'' = (z'_1 + z''_1, ..., z'_n + z''_n), \quad z', z'' \in \mathbb{C}^n,$$

$$\lambda z = (\lambda z_1, ..., \lambda z_n), \quad \lambda \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}^n,$$

то $\mathbb{C}^n$ стане лінійним простором над полем $\mathbb{C}$.

У $\mathbb{C}^n$ можна різними способами вводити метрику. Як правило, на $\mathbb{C}^n$ розглядаються дві метрики, а саме, *евклідова* метрика та *полікругова* метрика, які для довільних $z', z'' \in \mathbb{C}^n$ визначаються відповідно формулами

$$|z' - z''|_n = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |z'_j - z''_j|^2}$$

та

$$||z' - z''||_n = \max_{1 \leq j \leq n} |z'_j - z''_j|.$$

Кожна метрика породжує відповідну топологію на $\mathbb{C}^n$. Оскільки, очевидно,

$$||z' - z''||_n \leq |z' - z''|_n \leq \sqrt{n}\, ||z' - z''||_n, \quad z', z'' \in \mathbb{C}^n,$$

то обидві метрики породжують одну й ту ж топологію на $\mathbb{C}^n$. Тому надалі, коли говоритимемо про якісь топологічні поняття в $\mathbb{C}^n$, то не уточнятимемо, яка саме метрика розглядається.

Як звичайно, відкриту зв'язну множину в $\mathbb{C}^n$ називатимемо *областю*. Прикладами найпростіших областей у $\mathbb{C}^n$ є куля $B_r(a) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z - a|_n < r\}$ із центром у точці $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n$ і радіусом $r > 0$ та полікруг $U_r(a) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - a_j| < r_j, j = \overline{1, n}\}$ із центром у точці $a \in \mathbb{C}^n$ і векторним радіусом $r = (r_1, r_2, ..., r_n)$, де $r_j > 0$, $j = \overline{1, n}$.

Функція $l : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ називається $\mathbb{R}$-*лінійною* (чи $\mathbb{C}$-*лінійною*), якщо:

а) $l(z' + z'') = l(z') + l(z''), \quad z', z'' \in \mathbb{C}^n$;

б) $l(\lambda z) = \lambda\, l(z), \quad z \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (відповідно, $\lambda \in \mathbb{C}$).

Теорема 3.1. *Загальний вигляд $\mathbb{R}$-лінійних (чи $\mathbb{C}$-лінійних) на $\mathbb{C}^n$ функцій такий:*

$$l(z) = \sum_{j=1}^{n} (a_j z_j + b_j \bar{z}_j), \quad z \in \mathbb{C}^n, \tag{3.1}$$

де $a_j, b_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1, n}$ (відповідно,

$$l(z) = \sum_{j=1}^{n} a_j z_j, \quad z \in \mathbb{C}^n, \tag{3.2}$$

де $a_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1, n}$).

Доведення. Нехай l – $\mathbb{R}$-лінійна функція на $\mathbb{C}^n$. Для $j = \overline{1, n}$ позначимо через $e^{(j)}$ та $d^{(j)}$ такі точки з $\mathbb{C}^n$, що

$$e^{(j)} = (\underbrace{0, ...0, 1}_{j}, 0, ..., 0); \quad d^{(j)} = (\underbrace{0, ...0, i}_{j}, 0, ..., 0).$$

Зафіксуємо $z \in \mathbb{C}^n$. Тоді, якщо $z_j = x_j + iy_j$, $j = \overline{1, n}$, то

$$z = (x_1 + iy_1, 0, ..., 0) + (0, x_2 + iy_2, 0, ..., 0) + ... + (0, ..., 0, x_n + iy_n) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(x_j e^{(j)} + y_j d^{(j)}).$$

Тому

$$l(z) = \sum_{j=1}^{n}[x_j l(e^{(j)}) + y_j l(d^{(j)})] = \sum_{j=1}^{n}(x_j a'_j + y_j b'_j),$$

де

$$a'_j = l(e^{(j)}) \in \mathbb{C}, \quad b'_j = l(d^{(j)}) \in \mathbb{C}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Якщо тепер врахувати, що

$$x_j = \frac{z_j + \bar{z}_j}{2}, \quad y_j = \frac{z_j - \bar{z}_j}{2i}, \quad j = \overline{1,n},$$

то одержимо, що

$$l(z) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{a'_j - ib'_j}{2}z_j + \frac{a'_j + ib'_j}{2}\bar{z}_j\right) = \sum_{j=1}^{n}(a_j z_j + b_j \bar{z}_j),$$

де

$$a_j = \frac{a'_j - ib'_j}{2} \in \mathbb{C}, \quad b_j = \frac{a'_j + ib'_j}{2} \in \mathbb{C}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Отже, l має вигляд (3.1).

Аналогічно, якщо l – $\mathbb{C}$-лінійна функція на $\mathbb{C}^n$, то для $z \in \mathbb{C}^n$

$$l(z) = \sum_{j=1}^{n} z_j l(e^{(j)}) = \sum_{j=1}^{n} a_j z_j,$$

де $a_j = l(e^{(j)})$, $j = \overline{1,n}$, тобто l має вигляд (3.2).

З іншого боку, очевидно, що функції вигляду (3.1) чи (3.2) є відповідно $\mathbb{R}$-лінійними чи $\mathbb{C}$-лінійними.$\square$

3.2. Диференційовність функції багатьох комплексних змінних

Поняття диференційовної функції багатьох комплексних змінних узагальнює відповідне поняття для функції однієї комплексної змінної.

Спочатку пригадаємо, що коли $z \in \mathbb{C}$, U – деякий окіл точки z у $\mathbb{C}$, а приріст $dz \in \mathbb{C}$ такий, що $z + dz \in U$, то функція однієї комплексної змінної $f : U \to \mathbb{C}$ називається диференційовною в точці z, якщо її відповідний приріст $\triangle f$ у цій точці можна подати у вигляді

$$\triangle f = a\, dz + o(dz), \quad dz \to 0,$$

де $a \in \mathbb{C}$. Зауважимо, що перший доданок у правій частині останнього співвідношення є лінійною функцією однієї комплексної змінної dz.

Нехай тепер $z \in \mathbb{C}^n$, U – деякий окіл точки z у $\mathbb{C}^n$, а приріст $dz = (dz_1, ..., dz_n) \in \mathbb{C}^n$ такий, що $z + dz \in U$. Тоді функція багатьох комплексних змінних $f : U \to \mathbb{C}$ називається $\mathbb{R}$-*диференційовною* (чи $\mathbb{C}$-*диференційовною*) в точці z, якщо її відповідний приріст $\triangle f$ у цій точці можна подати у вигляді

$$\triangle f = l(dz) + o(|dz|_n), \quad dz \to 0,$$

де $l(dz)$ – деяка $\mathbb{R}$-лінійна (чи, відповідно, $\mathbb{C}$-лінійна) функція комплексних змінних $dz_1, ..., dz_n$. Функція l при цьому називається *диференціалом* функції f у точці z і позначається df.

Зауважимо, що коли функція f $\mathbb{R}$-диференційовна в точці $z \in \mathbb{C}^n$, то, враховуючи теорему 3.1, можемо записати відповідний приріст $\triangle f$ у вигляді

$$\triangle f = \sum_{j=1}^{n} (a_j\, dx_j + b_j\, dy_j) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\frac{o(|dz|_n)}{|dz|_n}\left(\frac{dx_j}{|dz|_n}\,dx_j+\frac{dy_j}{|dz|_n}\,dy_j\right),\quad dz\to 0,$$

де $a_j, b_j \in \mathbb{C}$, $dz_j = dx_j + i\,dy_j$, $j=\overline{1,n}$. Тому $\mathbb{R}$-диференційовність функції f від n комплексних змінних у точці $(z_1,...,z_n)\in\mathbb{C}^n$ рівносильна диференційовності дійсних функцій $u=\operatorname{Re} f$ та $v=\operatorname{Im} f$ від $2n$ дійсних змінних у точці $(x_1,...,x_n,y_1,...,y_n)\in\mathbb{R}^{2n}$ $(z_j = x_j+iy_j,\ j=\overline{1,n})$.

Теорема 3.2. *Якщо функція f $\mathbb{R}$-диференційовна в точці z, то в цій точці для приросту $dz=(dz_1,...,dz_n)$ будемо мати, що*

$$df=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial z_j}dz_j+\frac{\partial f}{\partial \bar z_j}d\bar z_j\right),\tag{3.3}$$

де

$$\frac{\partial f}{\partial z_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}-i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right),\quad \frac{\partial f}{\partial \bar z_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}+i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right),$$

а $dz_j = dx_j+idy_j$, $d\bar z_j = dx_j - idy_j$, $j=\overline{1,n}$.

Доведення. Нехай f – $\mathbb{R}$-диференційовна в точці z. Тоді

$$\triangle f=\sum_{j=1}^{n}(a_jdx_j+b_jdy_j)+o(|dz|_n),\quad dz\to 0,$$

де $a_j,b_j\in\mathbb{C}$, $j=\overline{1,n}$. Припустимо тут, що $dz=(dx_1,0,...,0)$. Одержимо:

$$\triangle f = a_1dx_1+o(|dx_1|),\quad dx_1\to 0.$$

Тому

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(z)=\lim_{dx_1\to 0}\frac{\triangle f(z)}{dx_1}=\lim_{dx_1\to 0}\left(a_1+\frac{o(|dx_1|)}{|dx_1|}\frac{|dx_1|}{dx_1}\right)=a_1.$$

Аналогічно отримуємо, що для всіх $j=\overline{1,n}$

$$a_j=\frac{\partial f}{\partial x_j}(z),\quad b_j=\frac{\partial f}{\partial y_j}(z),$$

тобто в точці z

$$df = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial f}{\partial y_j} dy_j \right).$$

Звідси, враховуючи рівності

$$dx_j = \frac{dz_j + d\bar{z}_j}{2}, \quad dy_j = \frac{dz_j - d\bar{z}_j}{2i}, \quad j = \overline{1, n},$$

одержуємо потрібне співвідношення (3.3). $\square$

Теорема 3.3. *Для того, щоб $\mathbb{R}$-диференційовна в точці $z \in \mathbb{C}$ функція f була $\mathbb{C}$-диференційовною в цій точці, необхідно і досить, щоб у цій точці виконувалися умови Коші-Рімана-Ейлера-Д'Аламбера:*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Доведення. Функція f $\mathbb{R}$-диференційовна в точці z тоді й лише тоді, коли

$$\triangle f = df + o(|dz|_n), \quad dz \to 0,$$

де df – $\mathbb{R}$-лінійна відносно dz функція. Тому $\mathbb{R}$-диференційовна функція f буде $\mathbb{C}$-диференційовною в точці z тоді й лише тоді, коли df буде $\mathbb{C}$-лінійною відносно dz функцією, тобто коли

$$df(i\ dz) = i\ df(dz), \quad dz \in \mathbb{C}^n. \tag{3.4}$$

Зі співвідношення (3.3) видно, що для $dz \in \mathbb{C}^n$

$$df(i\ dz) = i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j - i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j,$$

$$i\ df(dz) = i\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial z_j}dz_j + i\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}d\bar{z}_j.$$

Тому рівність (3.4) рівносильна рівності

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}d\bar{z}_j = 0, \quad d\bar{z} \in \mathbb{C}^n,$$

тобто, враховуючи довільність $d\bar{z} \in \mathbb{C}^n$, умовам Коші-Рімана-Ейлера-Д'Аламбера. □

Зауваження. Оскільки $f = u + iv$, то для $j = \overline{1, n}$

$$2\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + i\frac{\partial f}{\partial y_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial v}{\partial y_j} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial y_j}\right).$$

Тому умови Коші-Рімана-Ейлера-Д'Аламбера можна подати у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial v}{\partial y_j}, \quad \frac{\partial u}{\partial y_j} = -\frac{\partial v}{\partial x_j}, \quad j = \overline{1, n}.$$

3.3. Аналітичність функції багатьох комплексних змінних

Функція f називається *аналітичною в точці* $z \in \mathbb{C}^n$, якщо вона $\mathbb{C}$-диференційовна в деякому околі цієї точки. Якщо f аналітична в кожній точці деякої області $G \subseteq \mathbb{C}^n$, то ця функція називається *аналітичною в області* G.

Зазначимо, що з теореми 3.3 випливає, що коли f аналітична в області $G \subseteq \mathbb{C}^n$, то для фіксованих $\zeta \in G$ і $j = \overline{1, n}$ функція $f_j(z_j) = f(\zeta_1, ..., \zeta_{j-1}, z_j, \zeta_{j+1}, ..., \zeta_n)$ аналітична відносно змінної z_j в області $G_j = \{z_j \in \mathbb{C} : (\zeta_1, ..., \zeta_{j-1}, z_j, \zeta_{j+1}, ..., \zeta_n) \in G\}$. Справді, згідно з теоремою 3.3, в G_j функція $f_j(z_j)$ має диференційовні дійсну й уявну частини та виконуються відповідні умови Коші-Рімана-Ейлера-Д'Аламбера ($j = \overline{1, n}$). Іншими словами, з аналітичності функції f в області G випливає її нарізна аналітичність у цій області.

Виявляється, що для функцій багатьох комплексних змінних правильним є і обернене твердження. Це твердження називають теоремою Гартоґса про аналітичність нарізно аналітичної функції багатьох комплексних змінних і воно буде доведене в наступних пунктах. Точніше, буде доведено, що коли f аналітична в деякій області $G \subseteq \mathbb{C}^n$ відносно кожної змінної $z_1, ..., z_n$, то вона автоматично буде $\mathbb{R}$-диференційовною в G. Адже тоді, згідно з теоремою 3.3, вона буде і $\mathbb{C}$-диференційовною в G (бо виконуються умови Коші-Рімана-Ейлера-Д'Аламбера внаслідок нарізної аналітичності), а тому й аналітичною в G.

Зауважимо, що дійсний аналог теореми Гартоґса неправильний. Наприклад, функція Шварца

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \text{ при } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \text{ і } f(0, 0) = 0$$

диференційовна всюди відносно кожної змінної x чи y (при будь-якому фіксованому y чи x відповідно), але не є навіть неперервною в точці $(0, 0)$.

3.4. Інтегральна формула Коші

Нехай U – це полікруг із центром у точці $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n$ і векторним радіусом $r = (r_1, ..., r_n)$ ($r_j > 0$, $j = \overline{1, n}$), а $\Gamma = \Gamma_1 \times ... \times \Gamma_n$, де $\Gamma_j = \{\zeta_j \in \mathbb{C} : |\zeta_j - a_j| = r_j\}$, $j = \overline{1, n}$.

Теорема 3.4. *Якщо функція f нарізно аналітична в U і неперервна на $\overline{U}$, то при $z \in U$*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta,$$

де $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n)$, $d\zeta = d\zeta_1 \dots d\zeta_n$, а $\zeta - z = (\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_n - z_n)$.

Доведення. Зафіксуємо $z \in U$. Нехай $z' = (z_1, ..., z_{n-1})$, а $U' = \{\zeta' \in \mathbb{C}^{n-1} : |\zeta_1 - a_1| < r_1, ..., |\zeta_{n-1} - a_{n-1}| < r_{n-1}\}$. Оскільки функція $f_n(\zeta_n) = f(z', \zeta_n)$ аналітична в крузі $\{\zeta_n \in \mathbb{C} : |\zeta_n - a_n| < r_n\}$ і неперервна на його замиканні, то, за інтегральною формулою Коші для функцій однієї комплексної змінної [4, с. 216], маємо, що

$$f(z) = f_n(z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_n} \frac{f(z', \zeta_n)}{\zeta_n - z_n} \, d\zeta_n.$$

У свою чергу, для кожного $\zeta_n \in \Gamma_n$ число $f(z', \zeta_n)$ можна аналогічно подати у вигляді інтеграла Коші

$$f(z', \zeta_n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{n-1}} \frac{f(z_1, ..., z_{n-2}, \zeta_{n-1}, \zeta_n)}{\zeta_{n-1} - z_{n-1}} \, d\zeta_{n-1},$$

звідки одержимо, що

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma_n} d\zeta_n \int\limits_{\Gamma_{n-1}} \frac{f(z_1, ..., z_{n-2}, \zeta_{n-1}, \zeta_n)}{(\zeta_{n-1} - z_{n-1})(\zeta_n - z_n)} \, d\zeta_{n-1}.$$

Оскільки функція f неперервна за сукупністю змінних на $\Gamma_{n-1} \times \Gamma_n$, то повторний інтеграл у правій частині останньої рівності дорівнює подвійному інтегралу по добутку $\Gamma_{n-1} \times \Gamma_n$ [6, с. 169]. Тому

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma_{n-1} \times \Gamma_n} \frac{f(z_1, ..., z_{n-2}, \zeta_{n-1}, \zeta_n)}{(\zeta_{n-1} - z_{n-1})(\zeta_n - z_n)} \, d\zeta_{n-1} \, d\zeta_n.$$

Продовжуючи такі ж міркування далі, отримаємо потрібну формулу. □

3.5. Розклад аналітичної функції у степеневий ряд

Нехай U – це полікруг із центром у точці $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n$ і векторним радіусом $r = (r_1, ..., r_n)$ $(r_j > 0,\ j = \overline{1,n})$, а $\Gamma = \Gamma_1 \times ... \times \Gamma_n$, де $\Gamma_j = \{\zeta_j \in \mathbb{C} : |\zeta_j - a_j| = r_j\}$, $j = \overline{1,n}$.

Теорема 3.5. *Якщо функція f нарізно аналітична в U і неперервна на $\overline{U}$, то в кожній точці $z \in U$ вона подається у вигляді кратного степеневого ряду*

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

з коефіцієнтами

$$c_k = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}}\, d\zeta,$$

де $k = (k_1, ..., k_n)$, $|k| = k_1 + ... + k_n$, $k+1 = (k_1+1, ..., k_n+1)$, а $(z-a)^k = (z_1 - a_1)^{k_1} ... (z_n - a_n)^{k_n}$.

Доведення. Зафіксуємо $z \in U$. Для кожного $\zeta \in \Gamma$ маємо:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta_1 - a_1 - (z_1 - a_1)) \cdot ... \cdot (\zeta_n - a_n - (z_n - a_n))} =$$

$$= \frac{1}{\zeta - a} \frac{1}{\left(1 - \frac{z_1 - a_1}{\zeta_1 - a_1}\right) \cdot ... \cdot \left(1 - \frac{z_n - a_n}{\zeta_n - a_n}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\zeta - a} \sum_{k_1=0}^{\infty} \left(\frac{z_1 - a_1}{\zeta_1 - a_1}\right)^{k_1} ... \sum_{k_n=0}^{\infty} \left(\frac{z_n - a_n}{\zeta_n - a_n}\right)^{k_n} = \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{(z-a)^k}{(\zeta - a)^{k+1}}.$$

Відзначимо, що останній кратний ряд збігається абсолютно, а також рівномірно відносно ζ на Γ. Тому, домноживши рівність

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{(z-a)^k}{(\zeta - a)^{k+1}}$$

на неперервну на Γ функцію $\dfrac{f(\zeta)}{(2\pi i)^n}$, проінтегрувавши цю рівність по Γ та врахувавши теорему 3.4, отримаємо співвідношення

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}}\, d\zeta\, (z-a)^k,$$

яке і треба було довести. □

Безпосередньо з формули для коефіцієнтів розкладу функції f у степеневий ряд випливають так звані нерівності Коші для цих коефіцієнтів.

Наслідок. *Якщо функція f нарізно аналітична в U, неперервна на $\overline{U}$ і $|f(z)| \leq M$ на Γ, то для всіх коефіцієнтів c_k розкладу f у степеневий ряд виконуються нерівності*

$$|c_k| \leq \frac{M}{r^k}$$

де $r^k = r_1^{k_1} ... r_n^{k_n}$.

3.6. Лема Абеля. Аналітичність суми степеневого ряду

Теорема 3.6 (лема Абеля). *Якщо члени кратного степеневого ряду $\sum\limits_{|k|=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$ обмежені в якійсь точці $\zeta \in \mathbb{C}^n$, то він збігається абсолютно й рівномірно на довільній компактній підмножині K полікруга $U_\varrho(a)$, де $\varrho = (\varrho_1, ..., \varrho_n)$, а $\varrho_j = |\zeta_j - a_j|$, $j = \overline{1, n}$.*

Доведення. Нехай для всіх k виконуються нерівності $|c_k\, (\zeta - a)^k| \leq M$. Зафіксуємо компакт $K \subset U_\varrho(a)$. Відзначимо, що

$$\forall\, j = \overline{1, n}: \quad q_j = \max_{z \in K} \frac{|z_j - a_j|}{\varrho_j} < 1.$$

Оскільки для всіх k та $z \in K$

$$|c_k(z-a)^k| = \left| c_k(\zeta - a)^k \frac{(z-a)^k}{(\zeta-a)^k} \right| \le |c_k| \varrho^k q^k \le M q^k,$$

а ряд $\sum\limits_{|k|=0}^{\infty} q^k$ збіжний, то даний степеневий ряд абсолютно та рівномірно збіжний на K. $\square$

Теорема 3.7. *Якщо кратний степеневий ряд* $\sum\limits_{|k|=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ *збігається в полікрузі* $U_r(a)$, *то сума цього ряду є аналітичною в* $U_r(a)$ *функцією.*

Доведення. Нехай

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k(z-a)^k, \quad z \in U_r(a).$$

Оскільки за лемою Абеля ряд у правій частині цієї рівності збігається абсолютно в $U_r(a)$, то його члени можна переставляти. Тому для кожного $j = \overline{1,n}$ функція f аналітична відносно z_j в крузі $\{z_j \in \mathbb{C} : |z_j - a_j| < r_j\}$ як сума відповідного степеневого ряду, причому частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial z_j}$ отримується почленним диференціюванням цього степеневого ряду. Більше того, функція $\frac{\partial f}{\partial z_j}$ неперервна за сукупністю змінних в $U_r(a)$ як границя рівномірно збіжного ряду неперервних функцій ($j = \overline{1,n}$). Отже, дійсні функції $u = \operatorname{Re} f$ та $v = \operatorname{Im} f$ мають в $U_r(a)$ всі частинні похідні, які, до того ж, є там неперервними. Тому u та v є диференційовними в $U_r(a)$ функціями дійсних змінних, тобто f є $\mathbb{R}$-диференційовною в $U_r(a)$. Крім цього, з аналітичності функції f відносно кожної змінної випливає виконання в $U_r(a)$ умов Коші-Рімана-Ейлера-Д'Аламбера. Тому, згідно з теоремою 3.3, f аналітична в $U_r(a)$. $\square$

Наслідок. Нехай функція f нарізно аналітична та неперервна за сукупністю змінних в області G. Тоді вона аналітична за сукупністю змінних у G.

Доведення. За теоремою 3.5 функцію f у деякому околі кожної точки з G можна подати у вигляді суми кратного степеневого ряду. Тоді, згідно з теоремою 3.7, f аналітична в цьому околі, а тому аналітична і в області G. $\square$

Таким чином, для доведення теореми Гартоґса досить перевірити неперервність за сукупністю змінних нарізно аналітичної в G функції.

3.7. Нескінченна диференційовність аналітичної функції

Теорема 3.8. *Якщо функція f аналітична в області G, то всюди в G вона має частинні похідні всіх порядків, які також є аналітичними в G.*

Доведення. Зафіксуємо $a \in G$. Згідно з теоремою 3.5, у деякому полікрузі $U_r(a)$ функція f подається у вигляді суми кратного степеневого ряду. Оскільки за лемою Абеля цей степеневий ряд збігається абсолютно в $U_r(a)$, то його члени можна переставляти. Тому функція f має в $U_r(a)$ всі частинні похідні відносно змінних $z_1, ..., z_n$, які є сумами відповідних степеневих рядів. Тоді, згідно з теоремою 3.7, усі ці частинні похідні першого порядку функції f є аналітичними в $U_r(a)$. Аналогічно, замінюючи функцію f її частинними похідними першого порядку, одержимо існування та аналітичність в $U_r(a)$ всіх частинних похідних другого порядку функції f. Продовжуючи такі ж міркування далі, отримаємо існування та аналітичність в $U_r(a)$ частинних похідних будь-якого порядку функції f. Для завершення доведення теореми залишилося скористатися довільністю точки $a \in G$. $\square$

Наслідок. *Якщо функція f аналітична в точці $a \in \mathbb{C}^n$, то коефіцієнти її розкладу в степеневий ряд в околі a можна обчислити за формулами*

$$c_k = \frac{1}{k_1! \dots k_n!} \, \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} f}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}}(a) = \frac{1}{k!} \, \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(a).$$

3.8. Узагальнена лема Шварца

Нехай φ – аналітична в крузі $U_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ $(r > 0)$ функція однієї комплексної змінної z. У курсі комплексного аналізу доводиться так звана лема Шварца [4, с. 317], згідно з якою при виконанні умов $|\varphi(z)| \leq 1$ на U_1 та $\varphi(0) = 0$ функція φ задовольняє нерівність $|\varphi(z)| \leq |z|$, $z \in U_1$. У цьому пункті доведемо певне узагальнення цієї леми Шварца.

Теорема 3.9. *Нехай функція φ аналітична в крузі U_r, $z_0 \in U_r$, $\varphi(z_0) = 0$ і $|\varphi(z)| \leq M$ при $z \in U_r$. Тоді*

$$|\varphi(z)| \leq Mr\frac{|z - z_0|}{|r^2 - \bar{z}_0 z|}, \quad z \in U_r.$$

Доведення. Розглянемо дробово-лінійну функцію

$$\lambda(z) = r\frac{z - z_0}{r^2 - \bar{z}_0 z}, \quad z \in U_r.$$

Вона відображає круг U_r на одиничний круг U_1. Справді, $\lambda(z_0) = 0$ і коли $|z| = r$, то $r^2 = \bar{z}z$, а тому

$$|\lambda(z)| = \frac{r|z - z_0|}{|z||\bar{z} - \bar{z}_0|} = 1.$$

Нехай

$$\psi(w) = \frac{1}{M}\,\varphi(\lambda^{-1}(w)), \quad w \in U_1.$$

Оскільки функція ψ аналітична в U_1, $\psi(0) = 0$ і $|\psi(w)| \leq 1$ при $|w| < 1$, то, згідно з лемою Шварца,

$$|\psi(w)| \leq |w|, \quad w \in U_1.$$

Підставляючи сюди $\lambda(z)$ замість w, отримаємо потрібну нерівність. $\square$

3.9. Неперервність обмеженої нарізно аналітичної функції

Нехай U – це полікруг $\{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| < r_j, j = \overline{1,n}\}$.

Теорема 3.10. *Якщо функція f нарізно аналітична й обмежена в U, то вона неперервна за сукупністю змінних в U.*

Доведення. Нехай нарізно аналітична в U функція f обмежена сталою M. Зафіксуємо $z_0 \in U$. Тоді для $z \in U$

$$f(z) - f(z_0) = [f(z_1, z_2, ..., z_n) - f(z_1^0, z_2, ..., z_n)]+$$
$$+[f(z_1^0, z_2, z_3, ..., z_n) - f(z_1^0, z_2^0, z_3, ..., z_n)] + ...+$$
$$+[f(z_1^0, ..., z_{n-1}^0, z_n) - f(z_1^0, ..., z_{n-1}^0, z_n^0)] = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(z_j),$$

де $\varphi_j(z_j) = f(z_1^0, ..., z_{j-1}^0, z_j, ..., z_n) - f(z_1^0, ..., z_j^0, z_{j+1}, ..., z_n)$, $j = \overline{1,n}$. Оскільки для кожного $j = \overline{1,n}$ функція φ_j аналітична в крузі $U_j = \{z_j \in \mathbb{C} : |z_j| < r_j\}$, $\varphi_j(z_j^0) = 0$ і $|\varphi_j(z_j)| \leq 2M$ на U_j, то за теоремою 3.9

$$|\varphi_j(z_j)| \leq 2M r_j \frac{|z_j - z_j^0|}{|r_j^2 - \bar{z}_j^0 z_j|}, \quad z_j \in U_j.$$

Тому

$$|f(z) - f(z_0)| \leq 2M \sum_{j=1}^{n} \frac{r_j |z_j - z_j^0|}{|r_j^2 - \bar{z}_j^0 z_j|}, \quad z \in U.$$

Звідси видно, що при $z \to z_0$ будемо мати, що $f(z) \to f(z_0)$. Отже, f неперервна за сукупністю змінних у кожній точці $z_0 \in U$, тобто f неперервна за сукупністю змінних на U. $\square$

Зауваження. Враховуючи цю теорему та наслідок із теореми 3.7, бачимо, що для доведення аналітичності в нулі нарізно аналітичної в цій точці функції досить довести її обмеженість у деякому полікрузі з центром у нулі. Відзначимо, що в наступному пункті буде отримано лише з нарізної неперервності функції в околі нуля її неперервність за сукупністю змінних у якомусь полікрузі, але центр цього полікруга не обов'язково буде в нулі.

3.10. Лема Осґуда

Для $R > 0$ позначимо $U = \{z \in \mathbb{C}^n : ||z||_n < R\} = U' \times U_n$, де $U' = \{z' \in \mathbb{C}^{n-1} : ||z'||_{n-1} < R\}$, а $U_n = \{z_n \in \mathbb{C} : |z_n| < R\}$.

Теорема 3.11. *Якщо функція $f(z', z_n)$ неперервна відносно z' в $\overline{U}'$ для кожного $z_n \in \overline{U}_n$ і неперервна відносно z_n в $\overline{U}_n$ для кожного $z' \in \overline{U}'$, то існує такий полікруг $W' \subseteq U'$, що в полікрузі $W' \times U_n \subseteq U$ функція f обмежена.*

Доведення. Для кожного $z' \in \overline{U}'$ позначимо

$$M(z') = \max_{z_n \in \overline{U}_n} |f(z', z_n)|.$$

Зафіксуємо $m \in \mathbb{N}$ і переконаємося, що множина

$$E_m = \{z' \in \overline{U}' : M(z') \leq m\}$$

замкнена в $\overline{U}'$. Розглянемо послідовність $(\zeta^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ точок із E_m, яка збігається до якогось $\zeta^{(0)} \in \overline{U}'$. Оскільки

$$\forall\, z_n \in \overline{U}_n : \quad |f(\zeta^{(k)}, z_n)| \leq m, \quad k \in \mathbb{N},$$

то внаслідок неперервності функції f відносно z' будемо мати, що

$$\forall\, z_n \in \overline{U}_n : \quad |f(\zeta^{(0)}, z_n)| \leq m,$$

тобто $\zeta^{(0)} \in E_m$. Отже, множина E_m замкнена в $\overline{U}'$.

З означення множин E_m $(m \in \mathbb{N})$ випливає, що

$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq ... \subseteq E_m \subseteq ... \quad \text{і} \quad \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m = \overline{U}'.$$

Якщо би всі множини E_m $(m \in \mathbb{N})$ були ніде не щільними в $\overline{U}'$, то існувала би така послідовність $(B_m)_{m=1}^{\infty}$ куль в $\mathbb{C}^{n-1}$, радіуси яких прямують до нуля при $m \to \infty$, що $B_1 \subset U'$, $B_{m+1} \subset B_m$ і $\overline{B}_m \cap E_m = \emptyset$ $(m \in \mathbb{N})$. Тоді за теоремою про вкладені кулі [3, с. 81-82] мали би, що

$$\exists \, \zeta \in \overline{U}' = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m : \; \zeta \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{B}_m.$$

Тому існувало би таке $m_0 \in \mathbb{N}$, для якого $\zeta \in E_{m_0} \cap \overline{B}_{m_0}$, що суперечило би вибору кулі B_{m_0}.

Отже, якась із множин E_m $(m \in \mathbb{N})$ є десь щільною, тобто існують такі $m_0 \in \mathbb{N}$ та полікруг $W' \subseteq U'$, що $W' \subset \overline{E}_{m_0} = E_{m_0}$. Тоді W' є шуканим полікругом, оскільки

$$\forall \, z = (z', z_n) \in W' \times U_n : \quad |f(z)| \leq m_0. \square$$

3.11. Лема Гартоґса

Для $0 < r < R$ та $a' \in \mathbb{C}^{n-1}$ позначимо $U_n = \{z_n \in \mathbb{C} : |z_n| < R\}$, $U' = \{z' \in \mathbb{C}^{n-1} : ||z' - a'||_{n-1} < R\}$, $V' = \{z' \in \mathbb{C}^{n-1} : ||z' - a'||_{n-1} < r\}$, $U = U' \times U_n$, $V = V' \times U_n$.

Теорема 3.12. *Якщо функція $f(z', z_n)$ аналітична відносно z' в U' для кожного $z_n \in U_n$, аналітична відносно z_n в U_n для кожного $z' \in U'$, а також аналітична за сукупністю змінних у V, то вона буде аналітичною за сукупністю змінних в U.*

Доведення. З умов теореми, теореми 3.5 та наслідку з теореми 3.8 випливає, що

$$\forall\, z_n \in U_n : \quad f(z', z_n) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k(z_n)(z' - a')^k, \quad z' \in U', \tag{3.5}$$

причому

$$c_k(z_n) = \frac{1}{k!}\,\frac{\partial^{|k|} f}{\partial (z')^k}\,(a', z_n),$$

де $k = (k_1, ..., k_{n-1})$. Оскільки всі $c_k(z_n)$ є частинними похідними від аналітичної у V функції f $(a' \in V')$, то всі функції $c_k(z_n)$ аналітичні відносно z_n в U_n. Тому всі функції $u_k(z_n) = \frac{1}{|k|} \ln |c_k(z_n)|$ субгармонійні в U_n.

Нехай $\varrho < R$. Оскільки

$$\forall\, z_n \in U_n : \quad |c_k(z_n)|\varrho^{|k|} \to 0, \quad |k| \to \infty,$$

то

$$\exists\, k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, |k| \ge k_0 :$$

$$\ln(|c_k(z_n)|\varrho^{|k|}) \le 0;$$

$$\ln |c_k(z_n)| + |k| \ln \varrho \le 0;$$

$$\frac{1}{|k|} \ln |c_k(z_n)| \le \ln \frac{1}{\varrho}.$$

Тому

$$\forall\, z_n \in U_n : \quad \overline{\lim_{|k|\to\infty}}\, u_k(z_n) \le \ln \frac{1}{\varrho}.$$

Крім цього, з аналітичності f у V випливає неперервність f у $\overline{W}$, де $W = W' \times W_n$, а $W' = \{z' \in \mathbb{C}^{n-1} : ||z' - a'||_{n-1} < r_1\}$ $(r_1 < r)$, $W_n = \{z_n \in \mathbb{C} : |z_n| < \varrho\}$. Тому

$$\exists\, M > 0 \quad \forall\, z \in \overline{W} : \quad |f(z)| \le M.$$

Звідси, використовуючи оцінки Коші, будемо мати, що

$$\forall\, k \quad \forall z_n \in W_n : \quad |c_k(z_n)| \leq \frac{M}{r_1^{|k|}}.$$

Отже,

$$\exists\, C > O \quad \forall\, k \quad \forall z_n \in W_n :$$

$$|u_k(z_n)| = \frac{1}{|k|} \ln |c_k(z_n)| \leq \frac{1}{|k|} \ln \frac{M}{r_1^{|k|}} \leq \ln \frac{M^{\frac{1}{|k|}}}{r_1} \leq C.$$

Тому послідовність $(u_k(z_n))_{|k|=1}^{\infty}$ рівномірно обмежена в W_n.

Таким чином, для послідовності $(u_k(z_n))_{|k|=1}^{\infty}$ виконуються умови теореми Гартоґса про оцінку послідовності субгармонійних функцій (теореми 2.12). Тому, згідно з цією теоремою,

$$\forall\, \sigma < \varrho \quad \exists\, k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, |k| \geq k_0 \quad \forall\, |z_n| \leq \sigma :$$

$$u_k(z_n) \leq \ln \frac{1}{\sigma};$$

$$\frac{1}{|k|} \ln |c_k(z_n)| + \ln \sigma \leq 0;$$

$$|c_k(z_n)| \sigma^{|k|} \leq 1.$$

Звідси, використовуючи лему Абеля, одержуємо, що ряд у правій частині (3.5) збігається рівномірно при $||z - a||_n \leq \sigma_1$, де $a = (a', 0)$, а $\sigma_1 < \sigma$. Оскільки члени цього ряду неперервні за сукупністю змінних (бо нарізно аналітичні й обмежені), то і функція f, як рівномірна границя ряду з (3.5), є неперервною за сукупністю змінних при $||z-a||_n \leq \sigma_1$. Тому, враховуючи наслідок із теореми 3.7, f аналітична в полікрузі $\{z \in \mathbb{C}^n : ||z-a||_n < \sigma_1\}$. Оскільки цей полікруг можна вибрати як завгодно близьким до U, то f буде аналітичною в U. $\square$

3.12. Теорема Гартоґса

Теорема 3.13. *Якщо функція f аналітична в кожній точці області $G \subseteq \mathbb{C}^n$ відносно кожної змінної, то вона аналітична в G за сукупністю змінних.*

Доведення. Для доведення теореми треба для кожної фіксованої точки $z_0 \in G$ перевірити аналітичність у цій точці за сукупністю змінних функції f. Для цього, очевидно, досить довести аналітичність у нулі нарізно аналітичної в нулі функції $g(z) = f(z + z_0)$. Отже, можна вважати, що $0 \in G$ і досить переконатися, що f є аналітичною за сукупністю змінних у нулі.

Скористаємося індукцією по кількості змінних. При $n = 1$ теорема тривіальна. Припустимо, що функція $f(z', z_n)$ аналітична відносно z' у полікрузі $U'_R = \{z' \in \mathbb{C}^{n-1} : ||z'||_{n-1} < R\}$ для кожного фіксованого z_n із круга $U_n = \{z_n \in \mathbb{C} : |z_n| < R\}$ й аналітична відносно z_n в U_n для кожного фіксованого $z' \in U'_R$.

Нехай $r = \frac{R}{3}$, $\varrho = \frac{2R}{3}$, $U'_r = \{z' \in \mathbb{C}^{n-1} : ||z'||_{n-1} < r\}$, $V_n = \{z_n \in \mathbb{C} : |z_n| < \varrho\}$. З аналітичності f відносно z' в U'_R випливає неперервність f в $\overline{U}'_r$ для кожного фіксованого $z_n \in \overline{V}_n$, а з аналітичності f відносно z_n в U_n – неперервність f відносно z_n у $\overline{V}_n$ для кожного фіксованого $z' \in \overline{U}'_r$. Тоді, за лемою Осґуда, існує такий полікруг $W' \subset \mathbb{C}^{n-1}$ із центром у точці $a' \in \mathbb{C}^{n-1}$, для якого $W' \subseteq U'_r$ і f обмежена в $W' \times V_n$. Тому, за теоремою 3.10, функція f неперервна за сукупністю змінних у $W' \times V_n$, а за наслідком із теореми 3.7, – аналітична за сукупністю змінних у $W' \times V_n$. Але тоді, за лемою Гартоґса, f буде аналітичною за сукупністю змінних і в більшому полікрузі $V = V' \times V_n$, де V' є полікругом у $\mathbb{C}^{n-1}$ із центром у точці a' та радіусом ϱ (зауважимо, що $U'_r \subset V' \subset U'_R$). Оскільки $0 \in V$, то функція f аналітична за сукупністю змінних у нулі. $\square$

Література

1. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. – М. : Изд-во иностр. лит-ры, 1962. – 895 с.

2. Картан А. Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких переменных. – М. : Изд-во иностр. лит-ры, 1963. – 296 с.

3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М. : Наука, 1989. – 624 с.

4. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций : в 2 т. – М. : Наука, 1967. – Т. 1. – 488 с.

5. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций : в 2 т. – М. : Наука, 1968. – Т. 2. – 624 с.

6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. – М. : Наука, 1969. – Т. 3. – 656 с.

7. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. – М. : Мир, 1980. – 304 с.

8. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ : в 2 ч. – М. : Наука, 1976. – Ч. 1. – 320 с.

9. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ : в 2 ч. – М. : Наука, 1976. – Ч. 2. – 400 с.

Навчальне видання

Звоздецький Тарас Іванович

Гармонійні і субгармонійні функції
та теорема Гартоґса

Навчальний посібник

Відповідальний за випуск	***Маслюченко В.К.***
Комп'ютерний набір та верстка	***Звоздецький Т.І.***
Обкладинка	***Карлова О.О.***
Літературний редактор	***Колодій О.В.***