Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

Обчислення похибок прямих та опосередкованих вимірювань

Методичний посібник

Чернівці 2021

УДК53.088(07)
К 93
ББК 22.192.2я7

Рекомендовано вченою радою Навчально-наукового інституту фізико-технічних та комп'ютерних наук Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, протокол №12 від 16 грудня 2021 року

Обчислення похибок прямих та опосередкованих вимірювань. Методичний посібник. Укл.: Курек І. Г., Курек Є. І., Олійнич-Лисюк А.В., Струк Я. М.– Чернівці: 2021. – 48 с.

*“**Експеримент – це запитання природі**”*
Джеймс К. Максвелл

Вступ

Фізика – експериментальна наука. Це означає, що фізичні закони встановлюються і перевіряються шляхом накопичення й аналізу експериментальних даних. Поряд зі спостереженням експеримент є формою емпіричного пізнання об’єктивної дійсності, одним із основних методів наукового дослідження.

Наукове спостереження полягає у цілеспрямованому і планомірному сприйнятті властивостей предметів і явищ дійсності для одержання відповідної інформації про об’єкт пізнання за допомогою органів чуттів. У наукових спостереженнях широко використовуються спеціальні засоби (мікроскопи, телескопи, фото- і телеапаратура тощо), які компенсують певну природну обмеженість органів чуттів людини, підвищують точність та об’єктивність результатів спостереження.

Експеримент грунтується на забезпеченні відтворення фізичного явища в штучній (лабораторній) обстановці (йдеться також про забезпечення активного впливу на хід явищ і процесів) і супроводжується точними, наскільки це можливо, вимірюваннями та математичною обробкою даних.

Відповідно до основних завдань експерименти поділяються на дві групи. До першої належать експерименти, метою яких є емпірична перевірка певних теорій або гіпотез. До другої групи належать пошукові експерименти. Їх завдання полягає у збиранні потрібної попередньої інформації для побудови або уточнення певних припущень і здогадів.

Відповідно до методів та результатів досліджень експерименти поділяють на якісні і кількісні. Кількісний експеримент передбачає точне вимірювання всіх визначальних параметрів певного процесу з наступною математичною обробкою результатів вимірювань.

Експеримент має вирішальне значення для пізнання навколишньої природи, по-перше, як первинне джерело пізнання і, по-друге, як критерій істинності теорій та гіпотез. Він також відіграє величезну роль при формуванні нових гіпотез і теоретичних уявлень.

Невід'ємною частиною фізичного експерименту є статистична обробка його результатів. Ця задача часто буває більш складною і громіздкою, ніж постановка і виконання самого експерименту.

Даний посібник має на меті ознайомити студентів, які починають працювати в лабораторії фізичного практикуму із загальної фізики, з основами теорії похибок і методикою статистичної обробки результатів вимірювань. Значна частина посібника присвячена оцінці випадкових похибок.

Основні співвідношення теорії похибок подано без виводу з метою полегшення сприйняття матеріалу студентами, особливо першого курсу, які мають недостатню математичну підготовку. З виводом цих співвідношень студенти ознайомляться пізніше в курсах математичного аналізу та теорії ймовірностей.

У посібнику вказані алгоритми проведення розрахунків похибок прямих і непрямих вимірювань, а додатки містять детально розібрані приклади таких розрахунків. У додатках також наведений довідковий матеріал, який може стати у пригоді при статистичній обробці результатів експерименту.

Автори висловлюють надію, що даний посібник стане у пригоді не тільки студентам, а й тим, кому за характером діяльності доводиться мати справу з експериментом.

§ 1. Фізичні величини та їх вимірювання

Фізичною величиною називається властивість яка в якісному відношенні спільна для багатьох фізичних об'єктів (фізичних систем, їхніх станів і процесів, що в них відбуваються), але в кількісному відношенні індивідуальна для кожного об'єкта. Фізичними величинами є маса, довжина, температура, період коливань тощо.

Конкретні реалізації фізичної величини називають *однорідними величинами*. Наприклад, довжина стола і висота телевежі є конкретними реалізаціями однієї фізичної величини – довжини, і тому вони є однорідними величинами. Однорідні фізичні величини відрізняються одна від одної розміром.

Розмір фізичної величини – це кількісний вміст у даному об'єкті властивості, яка відповідає поняттю "фізична величина". Розміри однорідних фізичних величин різних об'єктів можна порівняти між собою, якщо відомі значення цих величин.

Значенням фізичної величини називається оцінка фізичної величини за допомогою деякого числа прийнятих для неї одиниць. Потрібно розрізняти істинне та дійсне значення фізичної величини. *Істинним значенням* фізичної величини називається таке її значення, яке б ідеально відобразило в якісному і кількісному відношенні відповідну властивість об'єкта. *Дійсне значення* фізичної величини – це значення величини, яке знайдене експериментально і настільки наближається до істинного, що для даної потреби може бути використане замість нього.

Одиниця фізичної величини – це фізична величина, якій за визначенням надано числове значення, що дорівнює одиниці. Абстрактне число, яке виражає відношення значення величини до відповідної одиниці цієї фізичної величини, називається *числовим значенням* цієї величини. Наприклад, 15 секунд – це значення тривалості певного процесу; 2 кг – значення маси певного об'єкта.

Всі одиниці фізичних величин можна поділити на системні та позасистемні. *Системні одиниці* – це сукупність одиниць, об'єднаних теоретичним способом у певну систему. *Позасистемні одиниці* – сукупність довільно встановлених одиниць фізичних величин.

Для побудови відповідної системи одиниць установлюють порядок взаємозалежності фізичних величин між собою. Для цього їх поділяють на основні та похідні фізичні величини. *Основною* називається фізична величина, яка входять до системи й умовно приймається як незалежна від інших величин цієї системи. *Похідна* фізична величина – це фізична величина, яка входить до системи і визначається через основні величини цієї системи. Залежність кожної похідної фізичної величини від основних виражається її розмірністю.

Розмірність величини – це добуток позначень основних величин, піднесених у відповідні степені, який є якісною характеристикою. Розмірності основних величин виражаються через їхні позначення, наприклад, розмірності довжини, маси і часу записуються так: $\dim(l) = L$, $\dim(m) = M$, $\dim(t) = T$, де dim – скорочення "dimension", тобто "розмірність". Розмірності величин визначаються на основі відповідних визначальних рівнянь фізики. Наприклад, визначальним рівнянням сили F є рівняння поступального руху $F = ma$. Підставивши у нього розмірності маси та прискорення, знаходимо

$$\dim F = LMT^{-2}. \qquad (1)$$

У загальному випадку розмірність фізичної величини x у системі LMT можна подати у вигляді

$$\dim x = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma}, \qquad (2)$$

де α, β, γ – степені розмірностей основних фізичних величин. Якщо степені розмірностей деякої фізичної величини дорівнюють нулеві, то величина називається *безрозмірною*. Безрозмірними величинами є, наприклад, відносна деформація, відносна діелектрична проникність тощо. *Розмірна фізична величина* – це величина, в розмірності якої хоча б один степінь розмірностей основних величин відмінний від нуля.

Велика кількість одиниць фізичних величин, а також значне число систем одиниць невиправдано утруднювали розвиток фізико-математичних наук, проведення науково-технічних розрахунків, пов'язаних з переведенням значень вимірюваних величин з однієї системи в іншу, ставали на перешкоді міжнародним економічним, торговельним і науковим зв'язкам.

Розвиток науки і техніки в останні роки висуває нові вимоги до підвищення єдності та точності вимірювань, а також питання про нове визначення на основі досконаліших еталонів (конктретних мір або вимірювальних приладів, призначення яких полягає у відтворенні та збереженні одиниць вимірювання у державному та міжнародному масштабах, наприклад, еталони метра, кілограма тощо).

У жовтні 1960 року XI Генеральна конференція з мір і ваги прийняла рішення про встановлення Міжнародної системи одиниць (The International System of Units). Скорочена назва "SI". Міжнародна система одиниць охоплює всі сфери вимірювання механічних, теплових, електричних, магнітних та інших величин.

ГОСТ 8.417–81 встановлено сукупність одиниць, в основу якої покладено одиниці Міжнародної системи: сім основних: довжини – метр (м), маси – кілограм (кг), часу – секунда (с), сили електричного струму – ампер (А), термодинамічної температури – кельвін (К), сили світла – кандела (кд), кількості речовини – моль (моль); дві додаткові одиниці: радіан і стерадіан та похідні одиниці.

Визначення основних і додаткових одиниць SI такі.

Метр – одиниця довжини – дорівнює шляху, який проходить світло у вакуумі за інтервал часу 1/299792458 с.

Кілограм – одиниця маси – дорівнює масі циліндра діаметром і висотою 39 мм, виготовленого зі сплаву платини (90%) та іридію (10%). З допомогою даного прототипу 1 кг відтворюється з відносною похибкою $2 \cdot 10^{-8}$.

Секунда – одиниця часу – дорівнює 9192631770 періодам випромінювання, що відповідає переходу між двома рівнями надтонкої структури основного стану атома цезію-133.

Ампер – одиниця сили струму – дорівнює силі незмінного струму, який при проходженні по двох паралельних провідниках нескінченної довжини та дуже малої площі кругового поперечного перерізу, розміщених у вакуумі на відстані 1 м один від одного, спричинив би виникнення на кожній ділянці провідника довжиною 1 м силу взаємодії $2 \cdot 10^{-7}$ Н.

Кельвін – одиниця термодинамічної температури – дорівнює 1/273,16 частині термодинамічної температури потрійної точки води.

Моль – одиниця кількості речовини – дорівнює кількості речовини, яка містить стільки ж структурних елементів, скільки міститься атомів у вуглеці-12 масою 0,012 кг. При застосуванні моля структурні елементи повинні бути специфікованими і можуть бути атомами, молекулами, іонами, електронами та іншими частками або групами часток.

Кандела – одиниця сили світла – дорівнює силі світла в заданому напрямі, яку випромінює джерело монохроматичного світла з частотою $5402 \cdot 10^{12}$ Гц, енергетична сила світла якого у цьому напрямі складає 1/683 Вт/ср.

Радіан – одиниця плоского кута – дорівнює центральному куту, що опирається на дугу кола, довжина якої дорівнює радіусу.

Стерадіан – одиниця тілесного кута – дорівнює тілесному куту з вершиною в центрі сфери, який вирізає на поверхні сфери площу, що дорівнює площі квадрата зі стороною, яка дорівнює радіусу сфери.

Радіан і стерадіан у будь-якій системі одиниць мають те саме значення; воно не залежить від основних одиниць. Тому їх не можна віднести до похідних одиниць. Для плоских кутів допускається застосування градусної системи вимірювання.

Вимірюванням називається процес знаходження дослідним шляхом за допомогою спеціальних технічних засобів значення шуканої фізичної величини.

За наявністю розмірності у фізичної величини вимірювання поділяють на абсолютні та відносні.

Абсолютне вимірювання – вимірювання, що грунтується на прямих вимірюваннях однієї або кількох основних величин і (або) використанні значень фізичних констант.

Відносне вимірювання – вимірювання відношення величини до однойменної величини, яка відіграє роль одиниці, або зміни величини відносно однойменної величини, взятої за вихідну.

За характером вимірювання поділяють на прямі, посередні, сукупні та спільні.

Пряме вимірювання – вимірювання, при якому значення фізичної величини знаходять за допомогою вимірювальних пристроїв, тобто безпосередньо з дослідних даних.

Посереднє вимірювання – вимірювання, при якому шукане значення фізичної величини знаходять на основі відомої функціональної залежності між цією величиною і величинами, які піддаються прямим вимірюванням. Наприклад, визначення густини тіла за його масою та геометричними розмірами.

Сукупні вимірювання – виконувані одночасно вимірювання кількох однойменних величин, при яких шукані значення величин знаходять розв'язуванням системи рівнянь, здобутих при прямих вимірюваннях різних сполучень цих величин або при зміні умов вимірювання.

Спільні вимірювання – одночасно виконувані вимірювання двох або кількох неоднойменних величин для знаходження залежності між ними (наприклад, вимірювання температурної залежності опору провідників: одночасно проводяться вимірювання температури та опору провідника).

Вимірювання виконується за допомогою засобів вимірювання. *Засіб вимірювання* – це технічний пристрій, який використовується при вимірюванні і має нормовані метрологічні властивості. До засобів вимірювання належать:

1) *міри* – засоби вимірювання, призначені для відтворення фізичної величини заданого розміру (наприклад гиря – міра маси). Міри можуть бути однозначними, тобто такими, що відтворюють фізичну величину одного розміру, наприклад гиря, нормальний елемент тощо, або багатозначними, що відтворюють однойменні величини різного розміру, наприклад штангенциркуль, конденсатор змінної ємності і т.д.;
2) *вимірювальні прилади* – засоби вимірювання, призначені для вироблення сигналу вимірюваної інформації у формі, доступній для безпосереднього сприйняття спостерігачем. Вимірювальні прилади завдяки своїм структурним елементам мають певний принцип дії (фізичний принцип покладений в основу його побудови), та вимірювальний механізм, складовими якого є чутливий і перетворювальний елементи та відліковий

пристрій. Вимірювальні прилади за ступенем автоматизації поділяються на автоматичні та неавтоматичні, за формою вихідного сигналу – на аналогові (вихідним сигналом є відхилення або переміщення покажчика відносно шкали) та цифрові (покази приладу подано у цифровій формі);

3) *вимірювальні установки* – сукупність функціонально об'єднаних засобів вимірювання (мір, вимірювальних приладів, перетворювачів сигналів) і допоміжних пристроїв, які призначені для вироблення вимірювальної інформації у формі, зручній для безпосереднього сприйняття.

Залежно від природи фізичної величини, яка вимірюється на досліді, конструкції засобу вимірювання, потрібної точності, зручності і швидкості вимірювання застосовують різні методи вимірювання:

1) *метод безпосередньої оцінки* – метод вимірювання, при якому значення величини визначають безпосередньо за відліковим пристроєм вимірювального приладу прямої дії, тобто приладу, в якому передбачене одне або декілька перетворень сигналу одержаної інформації в одному напрямку без застосування зворотного зв'язку. Прикладом методу безпосереднього вимірювання є вимірювання тиску пружинним манометром, сили електричного струму амперметром тощо;
2) *метод порівняння з мірою* – метод вимірювання при якому вимірювану величину порівнюють з величиною відтворюваною за допомогою міри (наприклад, вимірювання маси на важільних терезах при зрівноваженні з гирями);
3) *метод протиставлення* – метод порівняння з мірою, при якому вимірювана величина і величина, відтворювана мірою, одночасно впливають на прилад порівняння, за допомогою якого встановлюється співвідношення між цими величинами (наприклад, вимірювання маси на рівноплечих терезах при вміщенні вимірювальної маси та гир, які її зрівноважують, на двох шальках терезів);
4) *диференціальний метод* – метод порівняння з мірою, при якому на вимірювальний прилад впливає різниця відомої та вимірюваної величин, які відтворюються мірою, тобто цей метод

характеризується вимірюванням різниці між вимірюваною величиною та величиною, значення якої відоме; значення вимірюваної величини має бути близьким до значення відомої;

5) *нульовий метод* – метод порівняння з мірою, в якому результуючий ефект впливу величин на прилад порівняння доводять до нуля (наприклад, вимірювання мас на важільних терезах); в історії розвитку техніки точних вимірювань цей метод один з найдавніших;
6) *метод заміщення* – метод порівняння з мірою, при якому вимірювану величину заміщають відомою величиною, яка відтворюється мірою;
7) *метод збігів* – метод порівняння з мірою, при якому різницю між вимірюваною величиною і величиною, яка відтворюється мірою, вимірюють, використовуючи збіг позначок шкал або періодичних сигналів (наприклад, вимірювання довжин приладами з ноніусом, вимірювання частоти коливань з допомогою стробоскопа тощо).

§ 2. Похибки вимірювань

Метою вимірювання є встановлення дослідним шляхом істинного значення фізичної величини. При будь-якому вимірюванні, як би старанно його не проводили, неминучі похибки. Це пов'язано з недосконалістю методів та засобів вимірювання, обмеженістю наших знань, неможливістю урахувати всі фактори, які тим чи іншим чином впливають на протікання певного явища, обмеженими можливостями наших органів чуттів тощо. Отже, ***виміряти фізичну величину абсолютно точно***, тобто визначити її істинне значення, ***неможливо***. Але в кожному конкретному випадку можна встановити інтервал значень даної фізичної величини, у який з даною ймовірністю потрапить її істинне значення. Такий інтервал називається ***довірчим інтервалом***, а згадана ймовірність – ***надійністю***.

Похибкою вимірювання називається відхилення результату вимірювання від істинного значення фізичної величини. Похибки можуть бути зумовлені різними причинами, але за характером зміни їх поділяють на систематичні, випадкові і промахи.

Систематичні похибки зумовлені дією незмінних за величиною факторів. Вони сталі за розміром або змінюються за відомими законами. Іншими словами, у їх появі простежується певна система – звідси і походить їх назва. Систематичні похибки поділяються на:

- *інструментальні похибки*, які залежать від конструкції використовуваних приладів, якості їх виготовлення та класу точності;
- *методичні похибки*, джерелом яких є недосконалість методів вимірювання, вимірювальних перетворень та обмежена точність фізичних констант.

Систематичні похибки встановлюють шляхом використання для вимірювання фізичної величини кількох взаємно незалежних методів, які грунтуються на різних фізичних явищах, а також шляхом перевірки приладу приладом більш високої точності і т.д.

Отже, систематичні похибки, зважаючи на їх причинність, можуть бути усунуті з результатів вимірювання, наприклад, методами автоматичної корекції, якщо відомий закон їхньої зміни, або зменшені шляхом удосконалення методів вимірювання та уточненням теорії відповідного фізичного явища.

Випадкові похибки – це похибки, які змінюються випадково без будь-якої очевидної закономірності. Їх появу неможливо передбачити, оскільки вони зумовлені дією дуже багатьох відомих і невідомих факторів. Зокрема, вони можуть бути зумовлені як об'єктивними, так і суб'єктивними причинами, наприклад дією навколишнього середовища (освітленням приладів, стрибками напруги в електричній мережі, повітряними течіями і т. д.); недосконалістю наших органів чуттів (недостатною гостротою та якістю зору та слуху), уповільненою реакцією, психологічним настроєм тощо.

Отже, випадкові похибки не є сталими ні за абсолютним значенням, ні за знаком, тому їх неможливо усунути введенням сталих поправок. Але вони підпорядковуються статистичним закономірностям, і тому їх значення можна оцінити. Якщо результати вимірювань, які виконуються при однакових умовах, близькі один до одного, то це свідчить про малі значення випадкових похибок і високий збіг результатів повторних вимірювань.

Промахи (грубі похибки вимірювань) – це похибки вимірювань, які істотно (сильно) перевищують похибку, очікувану в даних умовах. Вони зумовлені неуважністю експериментатора, який неправильно зробив відлік або неправильно записав результат, а також неправильним поводженням із засобами вимірювання (неправильним вмиканням та вимиканням приладів) і т.д. При підсумковій оцінці результатів вимірювань такі помилкові дані належить відкинути і провести вимірювання вдруге при інших умовах або через деякий проміжок часу.

У процесі вимірювання ці похибки виявляються одночасно, і загальна похибка може бути виражена їх сумою.

За способом вираження, змістом і критерієм оцінки точності вимірювання похибки поділяють на абсолютні та відносні.

Абсолютною похибкою вимірювання називається різниця між істинним значенням фізичної величини та її значенням, отриманим у результаті вимірювання:

$$\Delta x_i = X_{\text{іст}} - x_i . \qquad (3)$$

Абсолютна похибка має розмірність вимірюваної величини.

При оцінці якості вимірювання важливим є не саме значення похибки, а те, яку частину вимірюваної величини вона становить. Розглянемо такий приклад. Нехай точність амперметра ±0,1 А. При двох різних вимірюваннях одержано такі значення сили струму (35,0±0,1) А і (0,2±0,1) А. Отже при однакових абсолютних похибках (±0,1 А) у першому випадку вимірювання досить точні, а у другому – вони дозволяють оцінити тільки порядок величини.

Якість вимірювання визначає ***відносна похибка***, яка дорівнює відношенню абсолютної похибки до істинного значення вимірюваної величини:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x_i}{X_{\text{іст}}} . \qquad (4)$$

Відносна похибка виражається у частках від одиниці або у відсотках. Щоб отримати відносну похибку у відсотках, праву частину (4) потрібно домножити на 100%.

Величина обернена до відносної похибки $\gamma = \frac{1}{\varepsilon}$ називається точністю вимірювань. Вона відображає наскільки близьке виміряне значення фізичної величини до її істинного значення. Чим менше значення відносної похибки, тим точніші вимірювання.

§3. Елементи теорії похибок

Теорія похибок базується на таких припущеннях:

1. Похибки однакові за величиною, але різні за знаком рівноймовірні (зустрічаються однаково часто) за умови, що кількість вимірювань $N \to \infty$.
2. Чим більша похибка за абсолютним значенням, тим менша ймовірність її появи. (Малі за модулем похибки зустрічаються частіше, ніж великі.)
3. Похибки вимірювань становлять неперервний ряд значень.

Позначимо буквами $x_1, x_2, x_3, \ldots x_N$ – результати вимірювання деякої фізичної величини x. Абсолютна похибка окремого вимірювання

$$\Delta x_i = X_{\text{іст}} - x_i, \quad i=1, 2, 3, \ldots N, \tag{5}$$

де $X_{\text{іст}}$ – істинне значення фізичної величини. Δx_i можуть бути як додатні, так і від'ємні. Просумувавши рівняння типу (5), одержимо

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta x_i = N X_{\text{іст}} - \sum_{i=1}^{N} x_i\ . \tag{6}$$

Згідно з першим припущенням теорії похибок ліва частина даної рівності прямує до нуля при великих N (строго при $N \to \infty$), тому

$$X_{\text{іст}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i\ . \tag{7}$$

Отже, ***істинне значення вимірюваної величини дорівнює середньому арифметичному значенню цієї величини, отриманому в нескінченній серії вимірювань.*** При обмеженій кількості вимірювань формула (7) буде наближеною. Тому завдання теорії похибок полягає у тому, щоб оцінити межі довірчого інтервалу з наперед визначеною надійністю.

Розглянемо випадкові похибки, які набагато менші за вимірювану величину. Це дає змогу застосувати математичний аналіз, вважаючи похибки нескінченно малими.

Як уже відзначалося, похибка при вимірюванні є величиною випадковою. Прояв випадкової величини визначається її ймовірністю P. Імовірністю випадкової події A називається відношення кількості випробувань, в яких подія A відбулася (N_A), до загальної кількості випробувань (N) при прямуванні останньої до нескінченності:

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N} . \qquad (8)$$

Звернімо увагу на те, що у $N - N_A$ випадках подія A не відбулася.

Похибка ***завжди має місце*** при будь-якому вимірюванні і приймає значення з неперервного ряду чисел. Тому говорять не про ймовірність того чи іншого її значення, а про ймовірність того, що значення похибки потрапляє в деякий інтервал $[x, x + dx]$ (dx – це позначення нескінченно малого приросту величини x).

Для неперервних випадкових величин можна ввести щільність розподілу ймовірності. Щільністю розподілу ймовірності випадкової величини x називається функція $\varphi(x)$, помноживши яку на інтервал похибки dx, отримуємо ймовірність dP того, що величина похибки міститься в інтервалі $[x, x + dx]$

$$dP = \varphi(x)dx . \qquad (9)$$

Величину dP іноді називають елементом імовірності. Користуючись елементом ймовірності, інтегруванням можна знайти імовірність потрапляння значення похибки x у довільний скінченний інтервал $[x_1, x_2]$

$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)dx . \qquad (10)$$

Щільність розпроділу має такі властивості:

1) $\varphi(x) \geq 0$, тому що ймовірність невід'ємна;

2) Для функції розподілу виконується умова нормування

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1. \quad (11)$$

Умова нормування відображає той факт, що ймовірність достовірної події дорівнює одиниці. Якщо можливі значення випадкової величини x скупчені в скінченному інтервалі $[\alpha,\beta]$, тобто поза цим інтервалом $\varphi(x) \equiv 0$, то умова нормування набуває вигляду

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)dx = 1. \quad (12)$$

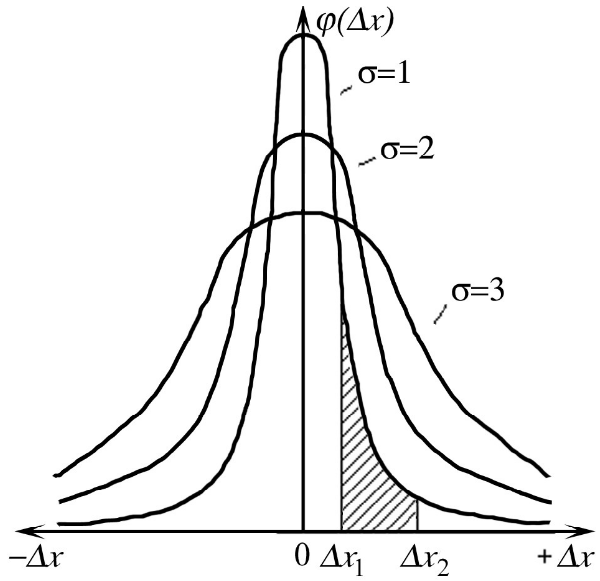
З (10) випливає, що імовірність потрапляння випадкової величини x в інтервал $[x_1, x_2]$ чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженою зверху графіком функції розподілу, прямими $x = x_1$ та $x = x_2$ та віссю абсцис. Підкреслимо, що все вищесказане стосується неперервних випадкових величин.

Розподіл прохибок при вимірюваннях описується різними законами, але найчастіше для опису розподілу випадкових похибок використовується розподіл Гаусса, або як його ще називають – нормальний закон розподілу:

$$\varphi(\Delta x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Delta x^2}{2\sigma^2}}. \quad (13)$$

e=2,718281828… – основа натуральних логарифмів, σ і Δx – параметри розподілу.

На рисунку наведено форму кривої Гаусса для різних значень σ. Початок координат розміщено в точці, яка відповідає нульовій похибці. Характерне те, що дана крива симетрична відносно осі ординат. Це є наслідком першого припущення теорії похибок. Обидві вітки кривої розподілу при збільшенні $|\Delta x|$ монотонно асимптотично наближаються до осі абсцис, що є наслідком другого і третього припущень. Функція розподілу має один максимум, що відповідає



значенню $\Delta x = 0$ і дорівнює $1/\sigma\sqrt{2\pi}$. Чим менше σ, тим вища, гостріша крива розподілу, і навпаки, із зростанням σ зростає розкид відліків і максимум функціїї розподілу “розпливається.” Кожному вимірюванню відповідає точка на осі Δx. Зміст функції Гаусса такий: площа криволінійної трапеції, обмеженої зверху кривою Гаусса, віссю абсцис і двома прямими $\Delta x = \Delta x_1$ і $\Delta x = \Delta x_2$ (заштрихована на рисунку) чисельно дорівнює ймовірності того, що похибка при довільному вимірюванні потрапить в інтервал $[\Delta x_1, \Delta x_2]$.

Той факт, що при вимірюваннях ми припускаємося похибки є, очевидно, достовірною подією (при вимірюваннях похибка неминуча). Тобто ймовірність того, що похибка при вимірюванні набуде значення з інтервалу $(-\infty;+\infty)$ повинна дорівнювати одиниці, як імовірність достовірної події. Підставивши (13) у (11), безпосереднім інтегруванням можна показати, що вся площа під кривою Гаусса дорівнює ***точно*** одиниці.

Для оцінки випадкової похибки є кілька способів. Найбільш поширена оцінка за допомогою середньоквадратичної (або стандартної) похибки S_N. Іноді застосовується середня арифметична похибка r_N. Згідно з визначеннями

$$S_N = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta x_i^2}{N-1}}, \qquad r_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|\Delta x_i\right|.$$

Якщо число вимірювань дуже велике, то випадкова величина S_N прагне до деякої сталої величини σ, яку називають статистичною границею S_N

$$\sigma = \lim_{N\to\infty} S_N,$$

яка, власне, і є середньоквадратичною похибкою.

Аналогічно істинне значення середньої арифметичної похибки визначається співвідношенням

$$\rho = \lim_{N\to\infty} r_N.$$

Генеральною сукупністю називається множина можливих значень вимірюваної величини x_i або можливих значень похибок Δx_i при вимірюваннях.

Генеральна сукупність характеризується математичним сподіванням або генеральним середнім і дисперсією $D(x)$. Математичне сподівання являє собою істинне значення вимірюваної величини. Дисперсія – це міра відхилення випадкових величин від математичного сподівання (*dispersus* – розсіювання, розсипання).

Для нормального розподілу $M(x) = X_{\text{іст}}$; $D(x) = \sigma^2$. Мірою розсіювання вимірюваних значень x_i відносно $M(x)$ є також середнє квадратичне або стандартне відхилення

$$\sigma = \sqrt{D(x)}. \tag{14}$$

У лабораторній практиці дістають обмежене число виміряних значень, як правило, два-три, які утворюють невеликі вибірки з генеральної сукупності. У цьому випадку розподіл Гаусса несправедивий, а відповідно стають несправедливими усі співвідношення, отримані за його допомогою. Тому обчислюють лише наближені значення $M(x)$ і $D(x)$, які називають оцінками. Оцінкою математичного сподівання є середнє арифметичне значення величин x_i, які складають вибірку

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \approx M(x); \qquad \lim_{N\to\infty} \bar{x} \equiv M(x). \qquad (15)$$

Оцінками дисперсії та стандартного відхилення є дисперсія і стандартне відхилення вибірки:

$$S^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \approx D(x); \quad \lim_{N\to\infty} S^2 \equiv D(x); \quad (16)$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} \approx \sqrt{D(x)} = \sigma; \quad \lim_{N\to\infty} S \equiv \sigma. \quad (17)$$

Зауважимо, що результат вимірювання середнього арифметичного значення $\bar{x}$, обчислений за (15), також є випадковою величиною.

Для оцінки точності результату виміряного значення фізичної величини використовують такі характеристики: довірчий інтервал і граничну (надійну) похибку середнього арифметичного. Довірчий інтервал – це інтервал значень фізичної величини x, який містить істинне значення $X_{\text{іст}}$ вимірюваної величини із заданою імовірністю α, яка називається надійністю. При цьому справедливий вираз

$$P\left(\bar{x} - \Delta x \le X_{\text{іст}} \le \bar{x} + \Delta x\right) = \alpha, \qquad (18)$$

де Δx – гранична похибка середнього арифметичного, яка дорівнює половині довірчого інтервалу і обчислюється за формулою

$$\Delta x = t(\alpha, N) \cdot S_{\bar{x}}, \qquad (19)$$

де $S_{\bar{x}}$ – оцінка стандартного відхилення від середнього арифметичного значення:

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}, \qquad (20)$$

а $t(\alpha, N)$ – нормований коефіцієнт Стьюдента, для якого складено таблиці. (*Student* – псевдонім англійського математика і хіміка

В. Госсета).

У 1908 році Стьюдент довів, що статистичний підхід справедливий і при малій кількості вимірювань. Розподіл Стьюдента при $N \to \infty$ (практично при $N \geq 30$) переходить у розподіл Гаусса з одиничною дисперсією, а при малій кількості вимірів мало відрізняється від нього. Математичний вираз для розподілу Стьюдента складний, тому ми його тут не наводимо. Характерним для розподілу Стьюдента є його незалежність від параметрів $M(x)$ і $D(x)$ генеральної нормальної сукупності, а також можливість оцінки при невеликій кількості вимірів (N<<30) граничної похибки середнього арифметичного Δx за заданою надійністю α, або знаходження надійності вимірювань за заданим Δx .

Розподіл Стьюдента також дає змогу встановити, що при $N \to \infty$ середнє арифметичне значення $\bar{x}$ з імовірністю як завгодно близькою до 1, нескінченно наближається до істинного значення вимірюваної величини $X_{\text{іст}}$.

§4. Оцінка точності одного прямого виміру

Бувають випадки, коли при повторенні вимірювань в однакових умовах отримується один і то й же результат x_0, або немає можливості повторити дослід при однакових умовах і вимірювання проводиться лише один раз і результатом його є виміряне значення фізичної величини x_0. ***Але це не означає, що $X_{\text{іст}} = x_0$***! Отриманий результат лише означає, що істинне значення вимірюваної величини можна записати у вигляді

$$X_{\text{іст}} = x_0 \pm \Delta x . \tag{21}$$

Похибка Δx у цьому випадку визначається похибкою вимірювальних пристроїв або методу вимірювання. Така похибка, як уже зазначалося вище, називається систематичною похибкою. Подальші вимірювання в даних умовах не мають змісту. Результат вимірювання записують у вигляді (21), де $\Delta x \equiv \Delta x_{\text{сист}}$. Для більш точного визначення фізичної величини x у даному випадку необхідно змінити умови досліду, взяти більш точні прилади тощо. У найпростіших випадках $\Delta x_{\text{сист}}$ визначається похибкою вимірювальних пристроїв і обчислюється за формулою

$$\Delta x_{\text{сист}} = t(\alpha,\infty)\frac{\delta}{3}, \tag{22}$$

де $t(\alpha,\infty)$ – коефіцієнт Стьюдента для нескінченної кількості вимірювань (береться з таблиці), δ – величина похибки приладу (визначається або класом точності, або вибирається такою, що дорівнює половині ціни найменшої поділки).

§5. Класи точності приладів

Абсолютною похибкою вимірювального приладу називається різниця між його показом x_0 та істинним значенням вимірюваної величини $X_{\text{іст}}$

$$\delta = x_0 - X_{\text{іст}}. \tag{23}$$

Зведена похибка вимірювального приладу по суті є відносною похибкою, вираженою у відсотках

$$\varepsilon_{\text{зв}} = \left|\frac{\delta}{x_{\max}}\right| \cdot 100\%. \tag{24}$$

$x_{\max}$ – найбільше значення величини, яке може бути виміряне за шкалою даного приладу (верхня межа у приладів з односторонньою шкалою і повний діапазон вимірювань (по обидва боки від нуля) у приладів з двосторонньою шкалою).

За зведеною похибкою прилади поділяються на вісім класів точності: 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0. Прилади класів 0,05; 0,1; 0,2; 0,5 застосовуються для точних лабораторних вимірювань і називаються прецизійними. У техніці застосовуються прилади класів 1,0; 1,5; 2,5; 4,0. Клас точності приладу вказують на його шкалі. Якщо на шкалі такого позначення немає, то це означає, що даний прилад позакласний і його зведена похибка більша ніж 4%.

Абсолютну похибку приладу визначають за формулою,

$$\delta = \pm\left|\frac{\varepsilon_{\text{зв}}}{100}\right| \cdot x_{\max}, \tag{25}$$

визначивши попередньо за шкалою клас точності та $x_{\max}$. Знаки “+” і “–” означають, що похибка може бути допущена як у бік збільшення, так і у бік зменшення дійсного значення вимірюваної величини. У тих випадках, коли клас точності не вказано, абсолютна похибка приймається такою, що дорівнює половині найменшої поділки шкали.

§6. Порядок обробки результатів прямих вимірювань

У випадку, коли кількість вимірювань $N \geq 2$, результати вимірювань заносяться у ***другу*** колонку спеціальної таблиці (див. додаток), а розрахунок похибок і подальше заповнення таблиці проводять у такій послідовності:

1. За формулою $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ обчислюють середнє арифметичне значення величини x з N вимірів.
2. За формулою $\Delta x_i = \overline{x} - x_i$ обчислюють похибки окремих вимірів.
3. Обчислюють відповідні Δx_i^2.
4. За формулою $S_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N} \Delta x_i^2}$ обчислюється стандартне відхилення від середнього арифметичного значення, яке характеризує серію проведених вимірювань у цілому.
5. Задається надійність α в межах від 0,9 до 0,99 (див. таблицю 1).
6. Визначають коефіцієнт Стьюдента $t(\alpha, N)$. Він знаходиться на перетині стовпчика, який відповідає вибраній надійності α і рядка, що відповідає кількості проведених вимірів *N*.
7. За формулою $\Delta x_{\text{вип}} = t(\alpha, N) \cdot S_{\overline{x}}$ знаходять абсолютну похибку вимірювань, яка зумовлена випадковими чинниками.
8. За формулою (22) та правилами, що описані у §5 знаходять $\Delta x_{\text{сист}}$.
9. Визначається повна похибка. Якщо величини $\Delta x_{\text{сист}}$ і $\Delta x_{\text{вип}}$ порівняльні, то повна похибка обчислюється за формулою $\Delta x_{\text{повн}} = \sqrt{\Delta x_{\text{сист}}^2 + \Delta x_{\text{вип}}^2}$. Якщо ж похибки відрізняються щонайменше на порядок, то в якості повної похибки вибирається більша.

10. За формулою $\varepsilon = \frac{\Delta x_{\text{повн.}}}{\bar{x}} \cdot 100\%$ знаходять відносну похибку вимірювань.
11. Нижче заповненої таблиці записується кінцевий результат $x = \bar{x} \pm \Delta x_{\text{повн}}$ і в дужках ***обов'язково*** вказується розмірність даної величини в одиницях системи SI.

Таблиця 1. **Коефіцієнти Стьюдента** $t(\alpha, N)$

N	α			
	0,9	0,95	0,98	0,99
2	6,31	12,70	31,80	63,70
3	2,92	4,30	6,96	9,92
4	2,35	3,18	4,54	5,84
5	2,13	2,78	3,75	4,60
6	2,02	2,57	3,36	4,03
7	1,94	2,45	3,14	3,71
8	1,89	2,36	3,00	3,50
9	1,86	2,31	2,90	3,36
10	1,83	2,26	2,82	3,25
12	1,80	2,20	2,72	3,11
14	1,77	2,16	2,65	3,01
16	1,75	2,13	2,60	2,95
18	1,74	2,11	2,57	2,90
20	1,73	2,09	2,54	2,86
25	1,71	2,06	2,49	2,80
30	1,70	2,05	2,46	2,75
40	1,68	2,02	2,42	2,70
∞	1,67	1,99	2,37	2,65

§7. Обчислення похибок опосередкованих вимірювань

Нагадаємо, що *опосередкованими або непрямими* називаються вимірювання, при яких шукане значення фізичної величини знаходять на основі відомої функціональної залежності між цією величиною і величинами, які піддаються прямим вимірюванням. Безпосередньо вимірювані величини називаються аргументами, а посередньо вимірювані – функціями.

Щоб отримати середнє значення функції N аргументів потрібно підставити в неї середні значення аргументів. Тобто у випадку, коли маємо функцію

$$y = f\left(x_1, x_2, \ldots x_N\right) \tag{26}$$

її середнє значення обчислюється за формулою

$$\overline{y} = f\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_N}\right). \tag{27}$$

Похибки непрямих вимірювань визначають за похибками тих величин, що вимірюються безпосередньо з використанням правил диференційного числення.

Розглянемо спочатку найпростіший випадок, коли функція $y = f(x)$ залежить тільки від одного аргумента. При прямих вимірюваннях абсолютна похибка величини x дорівнює $\pm dx$. Очевидно, що

$$y \pm dy = f\left(x \pm dx\right). \tag{28}$$

Тут використане позначення нескінченно малої величини dx замість Δx оскільки похибку можна вважати нескінченно малою у порівнянні з $\overline{x}$. Розкладемо праву частину (28) в ряд Тейлора за малим параметром dx і отримаємо:

$$y \pm dy = f(x) \pm \frac{df(x)}{dx}dx \pm \frac{1}{2!}\frac{d^2 f(x)}{dx^2}dx^2 \pm \ldots \tag{29}$$

Позначення $\frac{df(x)}{dx}$ читається “де еф по де ікс” і означає першу похідну від функції f за аргументом x. Позначення $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$

читається “де два еф по де ікс квадрат” і означає другу похідну функції f за аргументом x. Величина dx^2 є величиною вищого порядку мализниі порівняно з dx, тому всіма членами розкладу, які містять dx у степені, вищому за перший, нехтують і одержують:

$$y \pm dy = f(x) \pm \frac{df(x)}{dx} dx . \qquad (30)$$

Оскільки $y = f(x)$, то $dy = \frac{df(x)}{dx} dx$. Замінивши після диференціювання d на Δ і підставивши у похідну середнє значення аргумента $\bar{x}$, матимемо:

$$\Delta y = \frac{df(\bar{x})}{dx} \Delta x . \qquad (31)$$

Отже, ***абсолютна похибка функції одного аргумента дорівнює добутку похідної від функції при середньому значенні аргумента на повну абсолютну похибку аргумента.***

Відносна похибка у випадку функціїї ***одного*** аргумента шукається за формулою

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta y}{\bar{y}} 100\%. \qquad (32)$$

Приклад обчислення похибки від функціїі одного аргумента наведено у додатку.

Розглянемо тепер випадок, коли функція залежить від двох аргументів, тобто $y = f(x_1, x_2)$. Як і в попередньому випадку, похибка функції визначається через абсолютні похибки її аргументів $\pm dx_1$ і $\pm dx_2$. Зауважимо, що ***абсолютні похибки аргументів повинні визначатися з однаковою надійністю***. Очевидно, що

$$y \pm dy = f(x_1 \pm dx_1, x_2 \pm dx_2). \qquad (33)$$

Розклавши праву частину (33) в ряд Тейлора за малими параметрами dx_1 і dx_2, отримаємо:

$$y \pm dy = f(x_1, x_2) \pm \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \pm \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 \pm \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1^2 \pm$$

$$\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} dx_2^2 \pm \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 \pm \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} dx_1 dx_2 \pm \ldots \qquad (34)$$

Тут використані нові позначення для похідних і правила диференціювання функцій багатьох змінних. Позначення $\frac{\partial}{\partial x_1}$ означає частинну похідну від функції f за аргументом x_1. При взятті цієї похідної другий аргумент x_2 вважається константою. Позначення $\frac{\partial}{\partial x_2}$ означає частинну похідну від функції f за аргументом x_2. Константою у цьому випадку вважається перший аргумент x_1. ***Частинні похідні від функції багатьох змінних беруться з використанням тієї ж таблиці похідних і за тими самими правилами, що і похідні від функції однієї змінної. Ті аргументи, за якими диференціювання не ведеться, вважаються константами. Вони або виносяться за знак похідної, якщо входять у функцію у вигляді множників, або похідна від них дорівнює нулеві, якщо вони входять у функцію у вигляді доданків.***

Позначення $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$ означає другу частинну похідну від функції f за аргументом x_1; $\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}$ – змішану похідну спочатку за аргументом x_1, а потім за аргументом x_2 і т.д.

Як і у випадку функції одного аргумента, у (34) нехтуємо величинами вищого порядку малості по відношенню до dx_1 і dx_2, тобто dx_1^2, dx_2^2 і $dx_1 dx_2$ і т.п. Далі враховуємо, що $y = f(x_1, x_2)$, замінюємо d на Δ і, підставивши у похідні середні значення аргументів, для абсолютної похибки функції двох аргументів отримуємо:

$$\Delta y = \pm\left(\left|\frac{\partial f\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}\right)}{\partial x_1}\right|\Delta x_1 + \left|\frac{\partial f\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}\right)}{\partial x_2}\right|\Delta x_2\right). \tag{35}$$

Зауважимо, що ***всі доданки у* (35) *беруться за модулем***, тобто знак похідної не береться до уваги, оскільки ***похибки не можуть виключати одна одну, а можуть тільки накопичуватися***.

Середньоквадратична похибка функції двох аргументів обчислюється за формулою

$$S_{\bar{y}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}\right)}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}\right)}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2}\,. \tag{36}$$

Відносна середньоквадратична похибка

$$\varepsilon_y = \frac{S_{\bar{y}}}{\bar{y}}\,. \tag{37}$$

Підставимо (36) у (37) і проведемо деякі математичні перетворення:

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= \frac{S_{\bar{y}}}{\bar{y}} \equiv \frac{1}{f}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial(\ln f)}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial(\ln f)}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2}\end{aligned} \tag{38}$$

Тут використане правило взяття похідної від складної функції $\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$ у застосуванні до функції $\ln(f(x))$:

$$\frac{d(\ln f(x))}{dx} = \frac{d\ln f}{df}\frac{df}{dx} = \frac{1}{f}\frac{df}{dx}\,.$$

У загальному випадку, коли аргументів є N, формули (35),(36) і (38) перепишуться

$$\Delta y = \pm \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right|, \tag{39}$$

$$S_{\bar{y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2}, \tag{40}$$

$$\varepsilon_y = \frac{S_{\bar{y}}}{\bar{y}} \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial (\ln f)}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2}. \tag{41}$$

Отже, на практиці для знаходження ε_y функцію зручно спочатку прологарифмувати, а потім знайти частинні похідні від натурального логарифма функції по кожному з N аргументів. Якщо функція зручна для логарифмування, тобто якщо аргументи входять у неї в якості добутків і часток степенів, то обчисливши попередньо відносну похибку і скориставшись співвідношенням (37), можна обчислити середньоквадратичну похибку, яка є оцінкою довірчого інтервалу посередніх вимірювань:

$$S_{\bar{y}} = \varepsilon_y \cdot \bar{y}. \tag{42}$$

У всіх вищезгаданих формулах частинні похідні обчислюються при середніх значеннях усіх аргументів.

Зауважимо, що середнє арифметичне значення функції одного аргумента можна обчислювати двома способами:

1. Спочатку знайти середнє значення аргумента і підставити його у функцію;
2. Знайти значення функції при кожному виміряному значенні аргумента $y_i = f(x_i)$, а потім за формулою $\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$ знайти середнє значення функції.

Відповідно до цих способів можна по-різному обчислювати значення середньоквадратичних похибок. У першому випадку – за формулою (31), у другому – за формулою

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta y_i^2}{N-1}}, \tag{43}$$

де $\Delta y_i = \overline{y} - y_i$. Якщо похибки малі у порівнянні з вимірюваними величинами, то обидва способи дають практично однакові результати, тому байдуже який з них використовувати. Проте перший спосіб менш трудомісткий.

Часто буває, що внесок однієї або кількох похибок у кінцеву похибку набагато менший, ніж внесок похибок інших величин. У такому разі цією похибкою мохна знехтувати. Наприклад, нехай $y = x_1 + x_2$, $S_{\overline{x}_1} = 0{,}4$ і $S_{\overline{x}_2} = 4$. Тоді $S_y = \sqrt{(0{,}4)^2 + 4^2} = 4{,}02$. Зрозуміло, що внесок $S_{\overline{x}_1}$ у сумарну похибку досить малий, і тому ним можна знехтувати. Взагалі можна знехтувати такими похибками, що не перевищують 1/3 максимальної похибки для функції, яка являє собою суму аргументів.

Ці міркування також застосовні до випадків, коли функція є добутком або часткою аргументів. При цьому в аналогічних випадках нехтують не абсолютною, а відносною похибкою, яка становить менш як 1/3 від максимальної відносної похибки.

Отже, похибками, які не є істотним внеском у похибку кінцевого результату, можна взагалі знехтувати. Але перш ніж це зробити, їх потрібно обов’язково оцінити з певним надлишком, який гарантує таке нехтування.

Ні в якому разі при малій кількості вимірювань не можна користуватися середньою арифметичною похибкою. В цьому випадку треба вдатися до середньоквадратичної похибки (формули (40) або (43)), для якої на основі таблиці коефіцієнтів Стьюдента можна легко дістати значення надійності. Провести аналогічну операцію для середньої арифметичної похибки через складну залежність надійності α від кількості вимірювань, а також через відсутність відповідних таблиць досить складно.

При невисокій точності вимірювальних приладів випадковими похибками, порівняно з інструментальними, можна взагалі знехтувати. При цьому максимальна похибка результату визначається класом точності вимірювального приладу та зведеною похибкою.

Якщо x_1, x_2, x_3 – безпосередньо вимірювані величини, а Δx_1, Δx_2, Δx_3– їхні абсолютні (не випадкові) похибки, то для окремих видів функції $y = f(x_1, x_2, x_3)$ максимальні похибки визначаються за формулами, наведеними у таблиці 2.

Отже, при обробці результатів посередніх вимірювань рекомендується такий порядок операцій:

1. Провести статистичну обробку результатів прямих вимірювань аргументів за схемою, наведеною у §6. При цьому треба пам’ятати, що ***для всіх аргументів задається одне і те саме значення надійності*** α.
2. Обчислити середнє значення функції за формулою (27).
3. Оцінити абсолютну похибку посередніх вимірювань за формулою (39), якщо функція зручна для логарифмування, або середньоквадратичну похибку за формулою (40), якщо функція погано логарифмується, тобто аргументи входять у функцію у вигляді доданків. Нагадаємо, що похідні обчислюються при середніх значеннях аргументів і беруться за абсолютним значенням.
4. Записати кінцевий результат у вигляді

$$y = f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_N}) \pm \Delta y . \qquad (44)$$

5. Прологарифмувати функцію у випадку, якщо аргументи входять у неї у вигляді добутків і часток степенів з відповідними показниками, і за формулою (41) визначити відносну похибку посередніх вимірювань. У тому разі, коли функція логарифмується погано і границі довірчого інтервалу визначаються за допомогою середньоквадратичної похибки, відносну середньоквадратичну похибку обчислюють за формулою (37), скориставшись для цього значенням середньоквадратичної похибки, яке обчислюється за формулою (40).

Таблиця 2. **Максимальні похибки**

Математична операція	Похибка	
	Абсолютна	Відносна
$y = x_1 + x_2 + x_3$	$\pm(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3)$	$\pm\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3}{x_1 + x_2 + x_3}$
$y = x_1 - x_2$	$\pm(\Delta x_1 + \Delta x_2)$	$\pm\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{x_1 - x_2}$
$y = x_1 \cdot x_2$	$\pm(x_2\Delta x_1 + x_1\Delta x_2)$	$\pm\left(\frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2}\right)$
$y = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$	$\pm(x_2x_3\Delta x_1 + x_1x_3\Delta x_2 + x_1x_2\Delta x_3)$	$\pm\left(\frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2}\right)$
$y = x^n$	$\pm nx^{n-1}\Delta x$	$\pm n\frac{\Delta x}{x}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$\pm\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}\Delta x$	$\pm\frac{1}{n}\frac{\Delta x}{x}$
$y = \frac{x_1}{x_2}$	$\pm\frac{x_2\Delta x_1 + x_1\Delta x_2}{x_2^2}$	$\pm\left(\frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2}\right)$
$y = \sin x$	$\pm(\cos x)\Delta x$	$\pm(\mathrm{ctg}\, x)\Delta x$
$y = \cos x$	$\pm(\sin x)\Delta x$	$\pm(\mathrm{tg}\, x)\Delta x$
$y = \mathrm{tg}\, x$	$\pm(\sec^2 x)\Delta x$	$\pm 2\left(\frac{\Delta x}{\sin 2x}\right)$
$y = \mathrm{ctg}\, x$	$\pm(\mathrm{cosec}^2\, x)\Delta x$	$\pm 2\left(\frac{\Delta x}{\sin 2x}\right)$
$y = \ln x$	$\pm\frac{\Delta x}{x}$	$\pm\frac{\Delta x}{x\ln x}$

§8. Точність вимірювань

Прямі вимірювання фізичних величин у лабораторії проводять декілька разів для того, щоб звести до мінімуму випадкові похибки вимірювань. З фундаментального закону зростання точності вимірювань при зростанні числа вимірювань $S_{\bar{x}} = S/\sqrt{N}$ випливає, що збільшенням числа вимірювань можна одержати як завгодно малу середньоквадратичну похибку. Збільшення числа вимірювань у 9 разів може підвищити точність у 3 рази, а збільшення числа вимірювань у 100 разів призводить до збільшення точності у 10 разів. Проте цей аналіз вимагає суворого дотримання важливої умови для справедливості всіх висновків теорії похибок – ***забезпечення сталості та однаковості всіх умов вимірювання***. При значному збільшенні кількості дослідів цю умову задовольнити важко.

Ці міркування справедливі лише для вимірювань, при яких точність результату цілком визначається випадковими похибками. Крім того, неможливо повністю позбутися систематичних похибок. Тому при $S_{\bar{x}}$, меншому від систематичної похибки, подальше його зменшення за рахунок збільшення числа вимірювань позбавлене смислу.

Знаючи величину систематичної похибки, можна задати допустиме значення випадкової похибки, наприклад таке, що дорівнює 5-10% від систематичної. Вибираючи для обраного у такий спосіб довірчого інтервалу певне значення надійної ймовірності α (наприклад 0,95), можна визначити необхідне число вимірювань, яке гарантує малий вплив випадкової похибки на точність результату. Для цього зручно скористуватися таблицею 3, в якій інтервали подано в частках величини S. Ці інтервали називають стандартом вимірювань; вони є мірою точності певного вимірювання відносно випадкових похибок.

На перший погляд здається, що при вимірюванні потрібно прагнути до підвищення точності вимірювань усіх вимірюваних величин, застосовуючи для цього прилади високої точності. Насправді це не так. Відносна похибка посередніх вимірювань визначається через відносні похибки прямих вимірювань аргументів, які входять у функцію. Якщо ці величини вимірюються з неоднаковою точністю, то відносна похибка результату визначається насамперед відносною похибкою найменш точно виміряного аргумента. Тому для підвищення точності кінцевого результату потрібно насамперед подбати про підвищення точності вимірювання саме цього аргумента, взявши для цього точніші прилади. Добираючи прилади, треба намагатися, щоб відносні похибки окремих прямих вимірювань були близькими між собою. Підвищення точності окремих вимірювань за рахунок використання дуже точних приладів може бути пов'язане зі значними труднощами, тому цей спосіб треба застосовувати лише тоді, коли це справді необхідно в умовах певного досліду.

Таблиця 3. **Кількість вимірювань, що потрібна для того, щоб мати випадкову відносну похибку ε з надійністю α.**

ε	α				
	0,5	0,7	0,9	0,95	0,99
1,0	2	3	5	7	11
0,5	3	6	13	18	31
0,4	4	8	19	27	46
0,3	6	13	32	46	78
0,2	13	29	70	99	171
0,1	47	100	273	387	668

§9. Наближені обчислення і запис остаточних результатів

Точність визначення фізичної величини визначається точністю вимірювань, а не точністю обчислень. Тому виконувати обчислення з точністю більшою, ніж це дозволяють експериментальні дані, нераціонально і непотрібно. Надмірна "точність" обчислень призводить до некорисного, зайвого витрачання часу і, крім того, створює хибне враження про високу точність вимірювань.

Похибки вимірювання вказують, які цифри у числовому записі виміряної величини сумнівні. Наприклад, у записі числа 2334,1845±0,03 цифра 8, яка визначає число сотих, сумнівна. Всі цифри, які стоять зліва від сумнівної, правильні. Цифри, які стоять справа від сумнівної, неправильні і повинні бути відкинуті. ***Тому значення фізичних величин, які отримані в результаті обчислень, треба заокруглювати до того ж порядку, що й похибка вимірювання.*** У наведеному прикладі результат потрібно записати так: 2334,18±0,03.

При заокругленні результатів потрібно користуватися такими правилами:

1. Зайві цифри цілих чисел замінюють нулями, а у десяткових дробів відкидаються. Наприклад, y=123357±678 (до заокруглення)

   y=123400±700 (після заокруглення).

2. Якщо цифра, яку заміняють нулем, або цифра старшого розряду, яка відкидається, менше 5, то цифри, які залишаються, не змінюються. Якщо вказана цифра більше 5, то остання цифра, що залишається, збільшується на одиницю.

   Наприклад, y=123,37±0,13 (до заокруглення)

   y=123,4±0,1 (після заокруглення).

3. Якщо цифра, яку заміняють нулем, або цифра старшого розряду, яка відкидається, дорівнює 5, то заокруглення проводиться так: остання цифра в заокругленому числі залишається без змін, якщо вона парна, і збільшується на одиницю, якщо непарна.

   Наприклад, y=237,465±0,127 (до заокруглення)

   y=237,46±0,13 (після заокруглення).

   y=123,75±0,13 (до заокруглення)

   y=123,8±0,1 (після заокруглення).

Наведемо правила, яких необхідно дотримуватися при виконанні математичних операцій над наближеними числами.

1. Наближені числа треба заокруглювати перед виконанням відповідних операцій, користуючись наведеними вище правилами.

При заокругленні до розряду найменш точного числа доцільно залишити одну або дві “запасні” цифри. Це дає змогу точніше заокруглити кінцевий результат. В остаточному записі результату обчислень “запасні” цифри відкидають.

2. При додаванні і відніманні наближених чисел кінцевий результат належить заокруглювати так, щоб у ньому не було значущих цифр у тих розрядах, яких немає хоча б в одному з наближених чисел. Наприклад, 5,962+**2,49**+7,184+6,147=21,783 ≈ **21,78**.
3. При множенні і діленні наближених чисел у кінцевому результаті належить залишити стільки значущих цифр, скільки їх є в наближеному числі з найменшою кількістю значущих цифр. Наприклад, 3,624·**2,4**·5,11=8,688 ≈ **8,7**.
4. При піднесенні до степеня в кінцевому результаті потрібно залишати стільки значущих цифр, скільки їх має наближене ÷èñëî , ÿêå ï ³äí î ñèòüñÿ äî ñòåï åí ÿ. Í àï ðèêëàä, $\mathbf{1,26}^2$=3,276 ≈ **3,28**.
5. При добуванні коренів у кінцевому результаті потрібно залишати стільки значущих цифр, скільки їх має підкореневе наближене число. Наприклад, $\sqrt{\mathbf{2,29}}$ ≈ 1,513 ≈ **1,51**.
6. Знаходячи логарифм наближеного числа, в мантисі логарифма належить залишати стільки значущих цифр, скільки їх містить саме число. Наприклад, lg**77,23** ≈ 2,878 ≈ **2,89**.

Зауважимо, що числове значення фізичної величини, отримане в результаті вимірювання, завжди містить сумнівну цифру, а у числових значеннях величин, узятих з таблиць, усі цифри правильні. Тому, якщо при обчисленнях використовують і експериментальні, і табличні дані, то при записі кінцевого результату сумнівні цифри можна не зберігати.

§10. Графічне зображення результатів експерименту

У багатьох випадках результати фізичного експерименту зручно представляти у вигляді графіків. Графічний метод дозволяє:

1. Наочно побачити залежність одних фізичних величин (функцій) від інших (аргументів), особливо у випадках, коли цю залежність не можна задати аналітично;

2. За допомогою інтерполяції та екстраполяції графічно знаходити значення функції для таких значень аргумента, які безпосередньо не вимірювалися;
3. Встановити емпіричну аналітичну залежність функції від аргумента.

У більшості випадків користуються прямокутною системою координат. Значення аргумента відкладають на осі абсцис, а функції – на осі ординат. Масштаб на осях можна вибирати довільним з єдиною вимогою – на графіку повинен розміститися весь діапазон виміряних значень фізичних величин і ціна поділки, по можливості, повинна виражатися цілим числом. Якщо аргумент виражається у кутових величинах, зручніше використовувати полярну систему координат.

Отримані на площині експериментальні точки з'єднують ***плавною лінією*** (прямою або кривою) так, щоб вона проходила якомога ближче до всіх точок і щоб приблизно однакова кількість точок була по обидва боки від цієї лінії. Якщо окремі точки значно відхиляються від даної лінії, то це свідчить або про великі похибки вимірювання та явні промахи, або про наявність сингулярностей.

Сингулярностями на експериментальних кривих називають точки перегину, мінімуму чи максимуму. Вони відповідають якісним змінам у системах, наприклад утворенню нової фази тощо. У таких точках порушується рівномірність зміни всіх властивостей системи, і тому в околі сингулярних точок треба підвищити якість вимірювання, або провести вимірювання частіше.

У деяких випадках графічного подання результатів експерименту доцільно користуватися логарифмічними та напівлогарифмічними функціональними сітками, які виготовляються друкарським способом. На логарифмічній сітці залежність виду $y = ax^b$, а на напівлогарифмічній – $y = ab^x$ зображуються прямими лініями.

Використання функціональних сіток дозволяє встановити емпіричні формули. Якщо на функціональну сітку відповідного закону нанести експериментальні дані й отримана залежність зображується прямою лінією, то даний закон придатний для опису функціональної залежності між фізичними величинами.

Взагалі кажучи, якщо відома аналітична залежність між досліджуваними величинами, то масштаб на графіку доцільно вибирати так, щоб очікувана експериментальна залежність була лінійною. Розглянемо такий приклад. Нехай нам потрібно визначити прискорення вільного падіння із співвідношення $h = gt^2/2$. Якщо зобразити результати досліду на графіку залежності $h(t)$, то точки розмістяться навколо параболи, яку провести "на око" досить складно, а тим більше визначити з цієї параболи *g*. Якщо ж на графіку зобразити залежність $h(t^2)$, то вона буде мати вигляд прямої лінії, яку нескладно провести з достатньою точністю. Прискорення вільного падіння у цьому випадку визначається через тангенс кута, що його утворює дана пряма з віссю абсцис ($g = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha$).

ДОДАТКИ

Таблиця похідних

Функція	Похідна
const	0
x^{α}, $\alpha \in R$	$\alpha x^{\alpha-1}$
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg}\, x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\mathrm{ctg}\, x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{arctg}\, x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arcctg}\, x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$

Правила диференціювання

$$(c \cdot u(x))' = c \cdot u'(x)$$

$$(u(x) \pm \mathrm{v}(x))' = u'(x) \pm \mathrm{v}'(x)$$

$$(u(x)\mathrm{v}(x))' = u'(x)\mathrm{v}(x) + u(x)\mathrm{v}'(x)$$

$$\left(\frac{u(x)}{\mathrm{v}(x)}\right)' = \frac{u'(x)\mathrm{v}(x) - u(x)\mathrm{v}'(x)}{(\mathrm{v}(x))^2}$$

Якщо $y = g(f(x))$, то $y' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Властивості логарифмів

$a^{\log_a M} = M$

$\log_a a = 1 \;\; (a > 0, a \neq 1)$

$\log_a (a^k) = k \;\; (a > 0, a \neq 1)$

$\log_a (M_1 \cdot M_2) = \log_a M_1 + \log_a M_2 \;\; (M_1 > 0, M_2 > 0)$

$\log_a \left(\frac{M_1}{M_2}\right) = \log_a M_1 - \log_a M_2 \;\; (M_1 > 0, M_2 > 0)$

$\log_a (b^c) = c \log_a b$; $\quad \log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$; $\quad \log_a c = \frac{1}{\log_c a}$

Приклад заповнення таблиці при обчисленні похибок прямих вимірювань

У першій колонці таблиці ставиться номер виміру. Далі, починаючи з другої колонки, таблиця заповнюється згідно алгоритму, який наведений у §6. У другій колонці записується також розмірність величини, похибки вимірювання якої розраховуються. Всі розрахунки записуються під таблицею.

Припустимо, що проводиться вимірювання відстані, яку проходить маятник Максвела від верхнього положення до нижньої "мертвої" точки з допомогою лінійки, що має міліметрові поділки. В результаті вимірювань отримали такі дані: h_1=39,3 см; h_2=39,4 см; h_3=39,2 см.

1. Обчислюємо середнє арифметичне значення:

$$\overline{h} = \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3} = \frac{39{,}3 + 39{,}4 + 39{,}2}{3} = 39{,}3$$

і записуємо у ***третю*** колонку таблиці.

2. Обчислюємо абсолютні похибки кожного виміру Δh_i :

$$\Delta h_1 = \overline{h} - h_1 = 39{,}3 - 39{,}3 = 0$$
$$\Delta h_2 = \overline{h} - h_2 = 39{,}3 - 39{,}4 = -0{,}1$$
$$\Delta h_1 = \overline{h} - h_3 = 39{,}3 - 39{,}2 = 0{,}1$$

і записуємо у ***четверту*** колонку таблиці.

3. Обчислюємо відповідні Δh_i^2 :

$$\Delta h_1^2 = 0;$$
$$\Delta h_2^2 = 0{,}01;$$
$$\Delta h_3^2 = 0{,}01;$$

і записуємо у ***п'яту*** колонку таблиці.

4. Проводимо оцінку стандартної похибки середнього арифметичного $S_{\overline{h}}$, яка характеризує серію вимірювань у цілому:

$$S_{\overline{h}} = \sqrt{\frac{\Delta h_1^2 + \Delta h_2^2 + \Delta h_3^2}{3 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{0 + 0{,}01 + 0{,}01}{6}} = 0{,}057735 \cong 0{,}058$$

і записуємо у ***шосту*** колонку таблиці.

Звертаємо увагу на те, що даний проміжний результат заокруглюється, і в ньому залишається "запасна" цифра 8, яка буде відкинута пізніше при записуванні остаточного результату.

5. Вибираємо надійність $\alpha = 0{,}95$ і записуємо у ***сьому*** колонку таблиці.

6. За таблицею коефіцієнтів Стьюдента знаходимо $t(0{,}95;3)=4{,}3$ і записуємо у ***восьму*** колонку таблиці.

7. Оцінюємо випадкову похибку

$$\Delta h_{\text{вип}} = S_{\bar{h}} \cdot t(\alpha, N) = 0{,}058 \cdot 4{,}3 = 0{,}2494 \cong 0{,}25$$

і записуємо у ***дев'яту*** колонку таблиці.

8. Оцінюємо систематичну похибку. Для цього за таблицею коефіцієнтів Стьюдента в останньому рядку колонки, яка відповідає надійності 0,95, знаходимо $t(0{,}95;\infty)=2$. Лінійка є приладом поза класами точності, тому інструментальну похибку беремо такою, що дорівнює половині найменшої поділки, тобто 0,5 мм = 0,05 см. Далі за відповідною формулою отримуємо

$$\Delta h_{\text{сист}} = t(\alpha, \infty) \cdot \frac{\delta}{3} = 2 \cdot \frac{0{,}05}{3} = 0{,}03$$

і записуємо у ***десяту*** колонку таблиці.

9. Обчислюємо повну похибку, яка визначає границі довірчого інтервалу

$$\Delta h_{\text{повн}} = \sqrt{\Delta h_{\text{сист}}^2 + \Delta h_{\text{вип}}^2} = \sqrt{0{,}03^2 + 0{,}25^2} = 0{,}25179 \cong 0{,}2$$

і записуємо в ***одинадцяту*** колонку таблиці.

Як бачимо, повна похибка при вимірюваннях визначається в основному випадковими похибками (систематична похибка менша на порядок). У даному випадку систематичною похибкою у порівнянні з випадковою можна знехтувати. Звертаємо увагу на те, що значення повної похибки заокруглюється до точності вимірювань.

10. Обчислюємо відносну похибку

$$\varepsilon = \frac{\Delta h_{повн}}{\bar{h}} \cdot 100\% = \frac{0{,}2}{39{,}3} \cdot 100\% = 0{,}5089\% \approx 0{,}51\%$$

і записуємо у ***дванадцяту*** колонку таблиці.

11. Записуємо остаточний результат

$$h = 39{,}3 \pm 0{,}2\ (\textbf{см}).$$

Розмірність у кінцевому записі результату вказується обов'язково. У проміжних розрахунках її можна не вказувати.

№	h_i (см)	$\overline{h}$	Δh_i	Δh_i^2	$S_{\overline{h}}$	α	$t(\alpha, N)$	$\Delta h_{\text{вип}}$	$\Delta h_{\text{сист}}$	$\Delta h_{\text{повн}}$	ε,%
1	39,3		0	0							
2	39,4	39,3	–0,1	0,01	0,058	0,95	4,3	0,25	0,03	0,2	0,51
3	39,2		0,1	0,01							

Обчислення похибок непрямих вимірювань у випадку, коли шукана фізична величина є функцією одного аргумента.

Нехай потрібно визначити об'єм куба, маючи у розпорядженні штангенциркуль, точність ноніуса якого дорівнює 0,1 мм. Штангенциркулем можна виміряти сторону куба *a*, а площу обчислити за формулою

$$V = a^3 .$$

У результаті прямих вимірювань довжини сторони та обробки результатів цих вимірювань отримали: *a*=23,4±0,1 (мм).

Середнє значення об'єму куба отримується після підстановки у відповідну формулу середнього значення довжини сторони:

$$\overline{V} = \overline{a}^3 = (23,4)^3 \approx 12812,9 \text{ мм}^3.$$

Абсолютна похибка обчислюється за формулою (31):

$$\Delta V = \frac{dV(\overline{a})}{da}\Delta a = 3\overline{a}^2 \Delta a = 3\cdot(23,4)^2\cdot 0,1 = 164,27 \approx 164,3 \text{ мм}^3.$$

Відносна похибка вимірювання об'єму, згідно з (32), дорівнює:

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{\overline{V}}\cdot 100\% = \frac{164,3}{12812,9}\cdot 100\% = 1,28\% .$$

Обчислення похибок непрямих вимірювань у випадку, коли шукана фізична величина є функцією двох аргументів

Нехай потрібно визначити об'єм циліндричного тіла з допомогою штангенциркуля, точність ноніуса якого дорівнює 0,05 мм. Безпосередньо можна виміряти висоту *h* та діаметр основи циліндра *d*, а об'єм *V* обчислити за формулою

$$V = \frac{\pi d^2}{4} h . \tag{45}$$

Припустимо, що в результаті прямих вимірювань діаметра і висоти після статистичної обробки результатів отримали такі дані:

$$d = 16,24 \pm 0,93 \text{ мм}, \ \varepsilon_d = 0,057 \ (5,7\%);$$

$$h = 36{,}45 \pm 0{,}91 \text{ мм}, \ \varepsilon_h = 0{,}025 \ (2{,}5\%).$$

Підставляючи середні значення d і h у (45), знаходимо середнє значення об'єму

$$\overline{V} = \frac{3{,}14 \cdot (16{,}24)^2}{4} \cdot 36{,}45 = 7546{,}3898 \approx 7546{,}39 \text{ мм}^3 .$$

Для обчислення абсолютної похибки вимірювання об'єму знаходимо частинні похідні

$$\frac{\partial V}{\partial d} = \frac{\pi d}{2} h ; \quad \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi d^2}{4}$$

і за формулою (39) обчислюємо абсолютну похибку ΔV :

$$\Delta V = \pm\left(\frac{\partial V}{\partial d} \Delta d + \frac{\partial V}{\partial h} \Delta h \right) = \pm\left(\frac{\pi \overline{d}}{2} \overline{h} \cdot \Delta d + \frac{\pi \overline{d}^2}{4} \cdot \Delta h \right) =$$

$$= \pm \frac{\pi \overline{d}^2}{4} \cdot \overline{h} \cdot \left(\frac{2\Delta d}{\overline{d}} + \frac{\Delta h}{\overline{h}} \right) = \pm\overline{V}\left(2\varepsilon_d + \varepsilon_h\right) =$$

$$= \pm 7546{,}39 \cdot \left(2 \cdot 0{,}057 + 0{,}025\right) = \pm 1048{,}94821 \approx \pm 1048{,}95 \text{ мм}^3 .$$

Виведемо формулу для відносної похибки. Спочатку прологарифмуємо (45):

$$\ln V = \ln\left(\frac{\pi d^2}{4} h \right) = \ln \pi + 2 \ln d + \ln h - \ln 4 .$$

Тут ми використали наведені вище властивості логарифмів.
Візьмемо частинні похідні

$$\frac{\partial(\ln V)}{\partial d} = \frac{2}{d} ; \quad \frac{\partial(\ln V)}{\partial h} = \frac{1}{h} .$$

За формулою (41) знаходимо відносну похибку

$$\varepsilon_V = \sqrt{\left(\frac{\partial(\ln V)}{\partial d}\Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial(\ln V)}{\partial h}\Delta h\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2\Delta d}{\overline{d}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{\overline{h}}\right)^2} = \sqrt{(2\varepsilon_d)^2 + (\varepsilon_h)^2} = \qquad (46)$$

$$= \sqrt{(2 \cdot 0{,}057)^2 + (0{,}025)^2} = 0{,}117 \,.$$

У відсотках даний результат становитиме 11,7%.

Проаналізуємо формули (45) і (46) більш детально. Формула (45) добре логарифмується, оскільки аргументи входять у функцію у вигляді добутку степенів. У цьому випадку відносна похибка функції дорівнює кореню квадратному із суми квадратів відносних похибок аргументів з відповідними коефіцієнтами. З формул (45) і (46) легко бачити, що коефіцієнтами біля відносних похибок аргументів виступають показники степенів, у яких аргументи входять у вихідну функцію. Цей факт дозволяє у багатьох випадках досить легко знайти відносну похибку функції, а потім за формулою (42) визначити її середньоквадратичну похибку.

Оцінимо середньоквадратичну похибку вимірювання об'єму за формулою (42)

$$S_{\overline{V}} = \varepsilon_V \cdot \overline{V} = 0{,}117 \cdot 7546{,}39 = 882{,}92763 \approx 882{,}93 \text{ мм}^3 \,.$$

Із отриманих результатів видно, що середньоквадратична похибка менша за абсолютну.

Результат записуємо у вигляді

$$V = 7546{,}46 \pm 1048{,}95 \ (\text{мм}^3)$$

у випадку, коли межі довірчого інтервалу визначаються абсолютною похибкою, або

$$V = 7546{,}46 \pm 882{,}93 \ (\text{мм}^3),$$

коли межі довірчого інтервалу визначаються середньоквадратичною похибкою.

Множники і префікси для утворення десяткових кратних і дольних одиниць та їх найменувань

Множник	Префікс	Позначення	Множник	Префікс	Позначення
10^{18}	екса	Е	10^{-1}	деци	д
10^{15}	пета	П	10^{-2}	санти	с
10^{12}	тера	Т	10^{-3}	мілі	м
10^{9}	гіга	Г	10^{-6}	мікро	мк
10^{6}	мега	М	10^{-9}	нано	н
10^{3}	кіло	к	10^{-12}	піко	п
10^{2}	гекто	г	10^{-15}	фемто	ф
10^{1}	дека	да	10^{-18}	атто	а

Список використаних джерел

1. Барановський В. М., Бережний П. В., Горбачук І. Т., Дущенко В. П., Шут М. І. Загальна фізика. Лабораторний практикум. – К.: Вища школа, 1992. – 512 с.
2. Руководство к лабораторным занятиям по физике. Под ред. Гольдина Л. Л. – М.: Наука, 1973. – 688 с.
3. Агекян Т. А. Основы теории ошибок для астрономов и физиков. – М.: Наука, 1968. – 148 с.
4. Чепуренко В. Г., Нижник В. Г., Соколова Н. И. Вычисление погрешностей измерений. – К.: Вища школа, 1978. –38 с.
5. Евграфова Н. Н., Каган В. Л. Руководство по лабораторным работам по физике. – М.: Высшая школа, 1970. – 384 с.
6. Каленков С. Г., Соломахо Г. И. Практикум по физике. Механика. – М.: Высшая школа, 1990. – 112 с.
7. Зайдель А. Н. Элементарные оценки ошибок измерений. – М.:Наука, 1965. – 80 с.

Зміст

Навчальне видання

Обчислення похибок прямих та опосередкованих вимірювань

Методичний посібник

Курек Ігор Геннадійович
Курек Єлена Ігорівна
Олійнич-Лисюк Алла Василівна
Струк Ярослав Михайлович