Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

ЗАДАЧІ З МЕХАНІКИ

ТА МЕТОДИКА ЇХ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ

Чернівці
2021

УДК 53(076.1)
К93

Рекомендовано вченою радою Навчально-наукового інституту фізико-технічних та комп'ютерних наук Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, протокол №12 від 16 грудня 2021 року

Задачі з механіки та методика їх розв'язування. Методичний посібник. Укл.: Курек І.Г., Курек Є.І., Ткач О.О., Олійнич-Лисюк А. В. – Чернівці, 2021 – 120 с.

Методичний посібник призначений для студентів першого курсу, які навчаються за спеціальностями “Фізика та астрономія”, “Середня освіта (фізика)” та “Прикладна фізика”

ВСТУП

Серед інших частин курсу загальної фізики механіка займає особливе місце з двох причин. Перша полягає в тому, що тут вивчається низка найбільш загальних, фундаментальних законів природи, які мають важливе значення для всіх розділів фізики, насамперед закони збереження і механічного руху. Друга полягає в тому, що механіка є початковим ступенем вивчення фізики, тому при розв'язуванні задач виникають певні труднощі, пов'язані з браком належного досвіду. Студенти не вміють переходити від загальних законів і положень у їх абстрактному формулюванні до конкретного практичного застосування цих законів і положень. Тому в методичних вказівках і порадах щодо розв'язування задач потрібна особлива ретельність і увага з тим, щоб не пропустити "дрібниць", які допомагають послідовно виробляти практичні навички та набувати необхідного досвіду.

При розв'язуванні задач можна користуватися такою загальною схемою.

1. Уважно вивчити умову задачі, для того щоб не пропустити важливих відомостей та не додати своїх недоречних догадок.

2. Чітко сформулювати умову задачі, тобто перевести її на мову математичних символів. Це означає встановити функціональні залежності між величинами, заданими в умові задачі, та величиною, яку треба знайти.

3. Розв'язати задачу математично. Це можна зробити двома методами: аналітичним і синтетичним. Аналітичний метод полягає в тому, що спочатку знаходять формулу, в яку входить шукана величина та найбільша кількість відомих з умови задачі величин. Якщо в цій формулі є невідомі величини, необхідно взяти додаткові формули, за допомогою яких можна

було б визначити їх через відомі величини. Підставивши знайдені вирази нових невідомих величин у формулу шуканої величини, ми одержимо розв'язок задачі в загальному вигляді.

Синтетичний метод полягає в тому, що розв'язання задачі починають не з шуканої величини, а з величин, відомих з умови задачі. Використовуючи відомі зв'язки між величинами, даними в умові задачі, знаходимо формули, що дають функціональні залежності між ними. Переходячи від однієї формули до іншої, зупиняємось на формулі, яка дає відповідь на запитання задачі, тобто дає величину, яка нас цікавить.

4. Отриманий результат перекласти з мови математики на звичайну, тобто усвідомити, що ж ми отримали. Треба пам'ятати, що в загальну формулу розв'язку треба підставляти числові значення фізичних величин з найменуванням одиниць виміру, взятих у системі СІ. Якщо розв'язок задачі в загальному вигляді складний, рекомендується спочатку провести аналіз розмірностей, тобто спочатку підставити у формулу найменування одиниць виміру фізичних величин, що ввійшли в неї. Якщо розмірність правої та лівої частини формули загального розв'язку неоднакова, то це свідчить про наявність помилки в розв'язку задачі.

У складних, нестандартних задачах часом не вистачає даних, або є лишні. Треба мати мужність розв'язувати задачу до кінця, бо завжди є надія, що невідомі в врешті решт скоротяться. Взагалі правило таке: все, що не заборонено умовою задачі - дозволено, а будь-яка невизначеність трактується на свою користь.

Треба завжди прагнути розв'язувати задачу не тільки правильно, але й раціонально, тобто розв'язок повинен містити мінімальну кількість кроків.

МАТЕМАТИЧНІ ДОПОВНЕННЯ
Спеціальні знаки

$\sim$ - пропорційно ($y \sim x$ - пропорційно x)

const (constanta) - постійна величина (**v**=const - величина і напрямок вектора швидкості є величина постійна).

∞ - нескінченно велика величина ($\text{const}/\infty = 0$)

$\Rightarrow$ - знак слідування ($A \Rightarrow B$ - з A слідує B).

Δ (дельта) - знак зміни чи приросту величини: $dx = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x$.

$\vec{a}, \mathbf{a}$ - вектор.

$\sum$ (сигма) - знак суми. $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + ... + \mathbf{F}_n$; i - індекс сумування, i=1,2,3,...,n.

$\int$ - інтеграл.

$\overline{v}$, $\langle v \rangle$ - середнє значення.

$\parallel$ - паралельно, $\uparrow\downarrow$ - антипаралельно, $\perp$ - перпендикулярно (нормально).

$|\ |$ - модуль (абсолютне значення).

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Вектори

Вектор - це напрямлений відрізок. Векторна рівність **a=b** означає:

1. Рівність модулів (довжин) $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$.
2. Співпадання напрямків: $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$.

Вектори називаються колінеарними, якщо вони лежать на одній або на паралельних прямих. Вектори називаються ортогональними, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих. Кут між векторами — це кут між напрямками.

Додавання векторів a+b

Спосіб трикутника. Сумістити початок вектора **b** з кінцем вектора **a**. Вектор суми **c** сполучає початок вектора **a** і кінець вектора **b** (рис. 1). В такий спосіб можна додавати і велику кількість векторів.

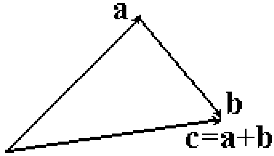

Рис.1.

Спосіб паралелограма. Сумістити початки векторів **a** і **b** та добудувати на них паралелограм. Вектор суми **c** буде діагональлю паралелограма, яка проходить через спільний початок векторів-доданків (рис. 2).

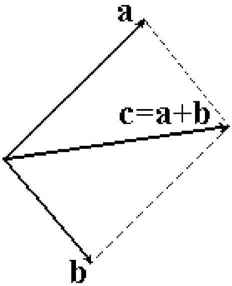

Рис.2.

Векторна сума, як і звичайна, володіє переставною **a**+**b**=**b**+**a** та комутативною $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ властивостями.

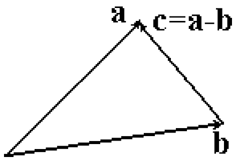

Рис.3.

Віднімання векторів **a**–**b**

Сумістити початки векторів. Вектор різниці сполучає кінці векторів і напрямлений до зменшуваного (рис. 3).

Множення вектора на число

Добутком λ**a** числа λ на вектор **a** у випадку **a**≠0, λ≠0, називається вектор, колінеарний вектору **a**, модуль якого дорівнює $|\lambda|\cdot|\mathbf{a}|$ і який напрямлений в ту ж сторону, що й вектор **a,** якщо λ>0, і в протилежну, якщо λ<0. Якщо λ=0 або **a**=0, то по означенню λ**a**=0.

Проекція вектора на вісь координат

З початку і кінця вектора **a** опускаємо перпендикуляри на осі координат (рис. 4). $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$ і $\mathbf{a}_z$ - називають складовими вектора **a** за напрямком координатних осей. $a_x=|\mathbf{a}_x|$, $a_y=|\mathbf{a}_y|$ та $a_z=|\mathbf{a}_z|$ - називаються проекціями вектора **a** на координатні осі: $a_x=x-x_0>0$; $a_y=y-y_0<0$.

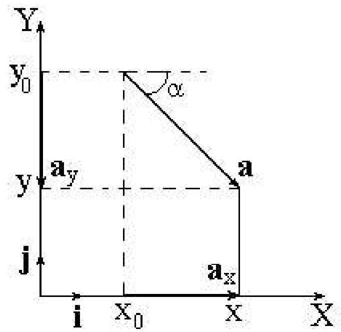

Рис.4.

Це означає, що $\mathbf{a}_x$ збігається за напрямком з віссю oX, а $\mathbf{a}_y$ - не збігається з oY. На рис. 4. складові і проекції вектора **a** на вісь oZ не вказані. Якщо ввести одиничні вектори (орти) **i, j** та **k** причому $|\mathbf{i}|=|\mathbf{j}|=|\mathbf{k}|=1$, $\mathbf{i}\parallel oX$, $\mathbf{j}\parallel oY$, $\mathbf{k}\parallel oZ$, $\mathbf{i}\perp\mathbf{j}\perp\mathbf{k}$, то складові вектора можна записати:

$\mathbf{a}_x=a_x\mathbf{i}$, $\mathbf{a}_y=a_y\mathbf{j}$, $\mathbf{a}_z=a_z\mathbf{k}$, а сам вектор через складові $\mathbf{a}=\mathbf{a}_x+\mathbf{a}_y+\mathbf{a}_z=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$.

Модуль вектора $|\mathbf{a}|\equiv a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$

Якщо вектор лежить у площині XoY, як це вказано на рис. 4, то

$$a_x=a\cos\alpha;\ a_y=a\sin\alpha;\ \mathrm{tg}\alpha=\frac{a_y}{a_x}$$

Розклад вектора на складові вздовж довільних двох напрямків oX_1 та oX_2

Через кінець і початок вектора **a** проводять прямі паралельні oX_1 та oX_2 до перетину з осями і отримують складові $\mathbf{a}_1$ і $\mathbf{a}_2$. $\mathbf{a}=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$, (рис. 5).

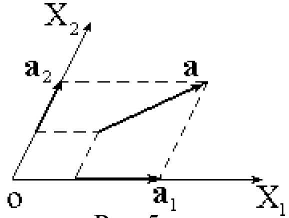

Рис.5.

Скалярний добуток векторів.

Позначається $(\mathbf{a},\mathbf{b})\equiv\mathbf{ab}$. Результатом є число - скаляр.

$c=(\mathbf{a},\mathbf{b})=ab\cos\alpha$, $\alpha=\mathbf{a}\hat{}\mathbf{b}$.

Властивості скалярного добутку: $\mathbf{ab}=\mathbf{ba}$; $\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{ab}+\mathbf{ac}$; $(\alpha\mathbf{a})\mathbf{b}=\alpha(\mathbf{ab})$; $\mathbf{aa}=a^2=|\mathbf{a}|^2\geq0$; $|\mathbf{ab}|\leq|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|$. У прямокутних декартових координатах, якщо вектори **a** і **b** задано через їх проекції $\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$; $\mathbf{b}=b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}$, то $c=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$. Кут між двома векторами

$$\cos\alpha=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{|a||b|}, \quad \text{де} \quad |\mathbf{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2},$$

$$|\mathbf{b}|=\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}.$$

Векторний добуток векторів

Позначається $[\mathbf{a},\mathbf{b}]=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$. Результатом векторного добутку є вектор **c** нормальний до площини в якій лежать вектори множники (рис. 6).

$c=ab\cdot\sin\alpha$, де $\alpha=\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$.

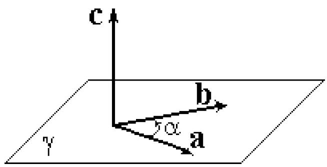

Рис.6.

Властивості векторного добутку:

$[\mathbf{a},\mathbf{b}]=-[\mathbf{b},\mathbf{a}]$;

$[\mathbf{a},(\mathbf{b}+\mathbf{c})]=[\mathbf{a},\mathbf{b}]+[\mathbf{a},\mathbf{c}]$;

$[(\alpha\mathbf{a}),\mathbf{b}]=\alpha[\mathbf{a},\mathbf{b}]$; $[\mathbf{a},\mathbf{a}]=0$;

$\mathbf{a}[\mathbf{a},\mathbf{b}]=\mathbf{b}[\mathbf{a},\mathbf{b}]=0$. Подвійний векторний добуток $[\mathbf{a}[\mathbf{b},\mathbf{c}]]=\mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b})$. В декартових прямокутних координатах $[\mathbf{i},\mathbf{i}]=[\mathbf{j},\mathbf{j}]=[\mathbf{k},\mathbf{k}]=0$. $[\mathbf{i},\mathbf{j}]=\mathbf{k}$; $[\mathbf{j},\mathbf{k}]=\mathbf{i}$; $[\mathbf{k},\mathbf{i}]=\mathbf{j}$. Тоді:

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}]=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\mathbf{i}+\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\mathbf{k}=$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\mathbf{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\mathbf{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\mathbf{k}.$$

Напрямок визначається за правилом правого гвинта. Якщо обертати правий гвинт в напрямку від першого множника до другого по найменшому куту, то напрямок його поступального руху покаже напрямок результуючого вектора.

Похідна функції

Похідна функції y=f(x) позначається y′=f′(x), або $\frac{dy}{dx}$. Це границя відношення приросту функції Δy=y(x+Δx)−y(x) до приросту аргумента Δx при Δx→0: $\frac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Властивості похідної

1. Похідна від суми двох функцій дорівнює сумі похідних:

$$y(x)=u(x)+v(x);\quad \frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}.$$

2. Похідна від const дорівнює нулю.
3. Похідна від добутку двох функцій:

$$y(x)=u(x)\cdot v(x);\quad \frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}\cdot v+\frac{dv}{dx}\cdot u.$$

4. Похідна від частки:

$$y(x)=\frac{u(x)}{v(x)};\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{du}{dx}\cdot v-u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

5. Стала виноситься за знак похідної:

$$y(x)=C\cdot u(x);\quad \frac{dy}{dx}=C\cdot\frac{du}{dx}.$$

6. Похідна від складної функції:

$$y(x)=u(v(x));\quad \frac{dy}{dx}=\frac{du}{dv(x)}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

У таблиці 1 наведені похідні від деяких простих функцій.

Інтеграл

$\int f(x)dx=F(x)+C$. Функція F(x) називається первісною функції f(x), або неозначеним інтегралом. Неозначений інтеграл

- це функція, похідна від якої дає нам підінтегральну, тобто $(F(x)+C)'=f(x)$. Отже для отримання неозначеного інтегралу треба вгадати таку функцію $F(x)$, похідна від якої дає $f(x)$. Неозначений інтеграл береться з точністю до const, оскільки похідна від константи дорівнює нулю.

Означений інтеграл, тобто інтеграл з визначеними межами інтегрування, є уже не функцією, а числом. Для його обчислення існує формула Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

У таблиці 2 наведені первісні від деяких простих функцій.

Таблиця 1

N	f(x)	f′(x)
1	x^a	ax^{a-1}
2	e^x	e^x
3	a^x	$a^x \ln a$
4	$\ln x$	$1/x$
5	$\log_a x$	$1/(x \ln a)$
6	$\sin x$	$\cos x$
7	$\cos x$	$-\sin x$
8	$\mathrm{tg}x$	$(\cos x)^{-2}$
9	$\mathrm{ctg}x$	$-(\sin x)^{-2}$

Таблиця 2

N	f(x)	F(x)
1	1	x
2	x^a	$x^{a+1}/a+1$
3	e^x	e^x
4	a^x	$a^x/\ln a$
5	$1/x$	$\ln x$
6	$\sin x$	$-\cos x$
7	$\cos x$	$\sin x$
8	$(\cos x)^{-2}$	$\mathrm{tg}x$
9	$(\sin x)^{-2}$	$-\mathrm{ctg}x$
10	$(kx+b)^n$, $n\neq-1$	$(kx+b)^{n+1}/(k(n+1))$
11	$1/(x-a)$, $x>a$	$\ln(x-a)$

РОЗДІЛ 1. КІНЕМАТИКА

§1.1. Кінематика поступального руху матеріальної точки

Основна задача механіки полягає у визначенні положення тіла в просторі в будь-який момент часу при відомих початкових умовах. Кінематика - це розділ механіки, який вивчає рух тіл без врахування причин, що призводять до виникнення руху і її задача полягає у визначенні закону руху, тобто залежності координати від часу. Механічний рух - це зміна положення тіла в просторі з плином часу. Матеріальна точка – це тіло, розмірами якого можна знехтувати за даних умов.

Закон поступального руху і закон зміни швидкості матеріальної точки має вигляд:

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad (1.1)$$

$$v = v_0 + at, \quad (1.2)$$

де $$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}. \quad (1.3)$$

З аналізу формул (1.1) і (1.2) можна отримати практично всі формули кінематики поступального руху. Для зручності вибирають S_0=0.

Прямолінійний рівномірний рух (a=0)

$$S = v_0 t. \quad (1.4)$$

Якщо тіло бере участь одночасно в декількох рівномірних рухах, кожний з яких характеризується вектором швидкості $\mathbf{v}_i$ (i=1,2,3,...), то результуючий рух буде також рівномірним з швидкістю

$$\mathbf{v}=\sum_i \mathbf{v}_i\,. \quad (1.5)$$

Вектори швидкостей додаються за правилом додавання векторів.

Середня швидкість за означенням:

$$v \equiv \langle v \rangle = \frac{S_{заг}}{t_{заг}}, \quad (1.6)$$

де $S_{заг}$ -загальний шлях, пройдений тілом; $t_{заг}$ - загальний час руху.

Прямолінійний рівнозмінний рух (a≠0)

$$\left.\begin{aligned} S &= v_0 t + \frac{at^2}{2} \\ v &= v_0 + at \end{aligned}\right\}. \quad (1.7)$$

Виключаючи з системи (1.7) час, можна отримати:

$$v^2 - v_0^2 = 2aS\,. \quad (1.8)$$

В окремому випадку, коли v_0=0, маємо:

$$\left.\begin{aligned} S &= \frac{at^2}{2} \\ v &= at \end{aligned}\right\}, \quad (1.9)$$

$$v^2 = 2aS\,. \quad (1.10).$$

У формулах (1.7)-(1.8) прискорення a може бути як додатним, так і від'ємним, коли відмінна від нуля початкова швидкість v_0 з часом зменшується. Тобто рівнозмінний рух може бути рівноприскореним (a>0) і рівносповільненим (a<0). Прискорення вважається додатним, якщо його напрям збігається з напрямком швидкості.

Важливими випадками прямолінійного рівнозмінного руху є вільне падіння та рух тіла, кинутого вертикально вгору. ***Вільне***

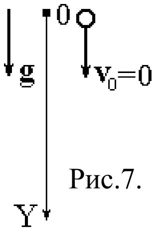

Рис.7.

падіння - це рух по вертикалі з $v_0=0$ і наперед відомим прискоренням $a\equiv g=9{,}81$ м/с^2 (рис. 7). У вибраній системі координат закон руху отримується з (1.9) формальною заміною $S \to H$, $a \to g$.

$$\left.\begin{aligned} H &= \frac{gt^2}{2} \\ v &= gt \end{aligned}\right\}. \quad (1.11)$$

З формули (1.10) маємо $v^2 = 2gH \;\Rightarrow\; v = \sqrt{2gH}$ (1.12) - швидкість, з якою тіло впаде на землю з висоти H.

$$H = \frac{v^2}{2g} \quad (1.13)$$

висота, з якої впало тіло, якщо в момент удару об землю воно мало швидкість v. Час падіння можна визначити з першого або другого рівняння системи (1.11), в залежності від того, що відомо, H чи v.

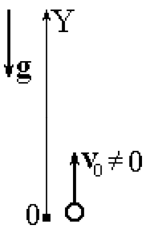

Рис.8.

При русі тіла, кинутого вертикально, як видно з рис. 8 $\mathbf{v}_0 \uparrow\downarrow \mathbf{g}$, тому рух буде рівносповільненим. Закон руху і закон зміни швидкості отримуються з (1.7) заміною $S \to H$, $a \to g$ та врахуванням знаку прискорення:

$$\left.\begin{aligned} H &= v_0 t - \frac{gt^2}{2} \\ v &= v_0 - gt \end{aligned}\right\}. \quad (1.14)$$

З (1.14) можна отримати час підйому тіла до максимальної висоти, врахувавши, що в найвищій точці воно зупинилось і його швидкість стала рівна нулю:

$$t = \frac{v_0}{g}. \quad (1.15)$$

Зауважимо, що у випадку відсутності опору повітря, час підйому дорівнює часу падіння, і швидкість, набута тілом до моменту падіння, дорівнює швидкості кидання, але напрямлена в протилежну сторону. Ці твердження треба використовувати при розв'язуванні задач як відомі, не витрачаючи час на їх доведення.

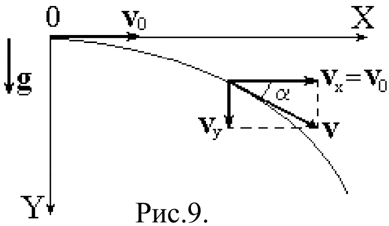

Рис.9.

Криволінійний поступальний рух

Рух тіла, кинутого горизонтально. Швидкість **v** в кожній точці напрямлена по дотичній до траєкторії і має дві складові v_x і v_y (рис. 9). У вибраній системі координат видно, що $\mathbf{g} \perp \mathbf{v}_0$ і на протязі всього польоту не змінює горизонтальної складової швидкості, тобто рух вздовж осі oX буде рівномірний з швидкістю v_0. Початкова швидкість по вертикалі $v_{0y}=0$, тому рух вздовж осі oY буде вільним падінням. Закон такого руху в координатній формі згідно з (1.4) і (1.11) матиме вигляд:

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0 t \\ y &= \frac{gt^2}{2} \end{aligned}\right\}. \quad (1.16)$$

Закон зміни швидкості відповідно

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = v_0 \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = gt \end{aligned}\right\}. \quad (1.17)$$

Виключаючи в (1.16) час t, отримуємо рівняння траєкторії:

$$y = \frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2, \quad (1.18)$$

а з (1.17) модуль вектора повної швидкості, як функцію від часу:

$$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}. \quad (1.19)$$

Кут між вектором повної швидкості **v** і горизонтом в довільний момент часу визначається, як видно з рис. 9, співвідношенням:

$$tg\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gt}{v_0}. \quad (1.20)$$

Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту. При такому русі в початковий момент часу швидкість $\mathbf{v}_0$ має дві відмінні від нуля складові (рис. 10):

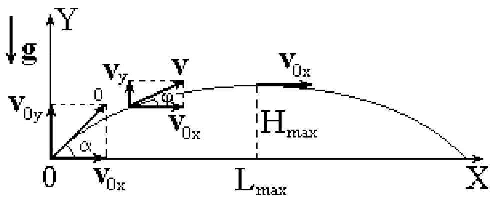

Рис.10.

$$\left.\begin{aligned} v_{0x} &= v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} &= v_0 \sin\alpha \end{aligned}\right\}. \quad (1.21)$$

Поскільки $\mathbf{g} \perp \mathbf{v}_{0x}$, то $\mathbf{v}_{0x}$=const на протязі всього польоту і тому рух вздовж осі оX буде рівномірним. $\mathbf{v}_{0y} \uparrow\downarrow \mathbf{g}$, тому по оY рух буде рівносповільненим з прискоренням **g**, тобто аналогічно до руху тіла, кинутого вертикально. Закони руху і зміни швидкості матимуть з згідно (1.4) і (1.14) вигляд:

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0 \cos\alpha t \\ y &= v_0 \sin\alpha t - \frac{gt^2}{2} \end{aligned}\right\}, \quad (1.22) \qquad \left.\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos\alpha \\ v_y &= v_0 \sin\alpha - gt \end{aligned}\right\}. \quad (1.23)$$

Час підйому до H_{max} знаходиться з умови того, що в найвищій точці траєкторії v_y=0:

$$t_0 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}. \quad (1.24)$$

Якщо в задачі не враховується опір повітря, то час польоту $T=2t_0$, тобто:

$$T = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}. \quad (1.25)$$

Максимальна висота

$$H_{max} = y(t_0) = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}. \quad (1.26)$$

Максимальна дальність польоту

$$L_{max} = x(T) = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (1.27)$$

Рівняння траєкторії $y=f(x)$ отримується з (1.22) шляхом виключення часу t:

$$y = \mathrm{tg}\alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} \cdot x^2. \quad (1.28)$$

Кут між вектором повної швидкості та горизонтом у довільний момент часу можна знайти за формулою:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{v_y}{v_x} = \mathrm{tg}\alpha - \frac{gt}{v_0 \cos\alpha}. \quad (1.29)$$

Модуль вектора повної швидкості як функція від часу має вид:

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 \sin\alpha \cdot gt + g^2 t^2}. \quad (1.30)$$

Методичні вказівки і поради

1. Якщо швидкості складових рухів при прямолінійному русі спрямовані вздовж однієї прямої, їх можна розглядати не як вектори, а як скалярні величини, вважаючи швидкості в одному (довільному) напрямку додатними, а в протилежному -

від'ємними. В цьому випадку величини швидкостей додаються як алгебраїчні.

2. Задачі можна розв'язувати в будь-якій інерціальній системі відліку, але слід пам'ятати, що в залежності від вибору системи змінюється форма запису законів руху і законів зміни швидкості, а відповідно й рівняння траєкторії. Іноді від вибору системи відліку залежить простота розв'язку.

3. При розв'язуванні задач на криволінійний поступальний рух матеріальної точки систему відліку доцільно вибирати так, як це вказано на рис. 9 і 10, оскільки такий вибір приводить до найпростіших за формою рівнянь. Третю координатну вісь можна взагалі не розглядати, тому що рух є плоским.

4. Трапляються випадки, коли траєкторія руху тіла, кинутого під кутом до горизонту, не закінчується в точці перетину з віссю oX, тобто величина (1.27) не є практично дальністю польоту. Слід мати на увазі, що дальший відрізок траєкторії описується тими ж рівняннями (1.22) і (1.28).

5. Записуючи рівняння (1.7) при розв'язуванні задач, треба слідкувати, щоб знаки перед доданком, що містить прискорення були обов'язково однаковими, або обидва "+", або обидва "–". Можна весь час брати "+", тоді у випадку рівносповільненого руху знак прискорення "проявиться" при числовій підстановці.

Приклади розв'язування задач

Матеріальна точка, рухаючись з постійним прискоренням, проходить послідовно два відрізки шляху $s=10$ м кожний. Перший відрізок шляху був пройдений за час $t_1=1{,}05$ с, а другий - за $t_2=2{,}2$ с. Знайти прискорення точки та її швидкість v_1 на початку першого відрізка шляху.

Розв'язання

За умовою задачі відрізки шляху, що розглядаються, рівні між собою, тобто $s_1=s_2=s$. Оскільки другий відрізок шляху пройдено за час $t_2>t_1$, то з цього робимо висновок, що рух рівносповільнений. Вказівка, що прискорення постійне, говорить про те, що рух прямолінійний.

Закони руху на першому і другому відрізках шляху мають вигляд

$$s_1 = v_1 t_1 + \frac{a t_1^2}{2}; \quad s_2 = v_2 t_2 + \frac{a t_2^2}{2},$$

де v_2 - швидкість на початку другого відрізка. Оскільки $v_2 = v_1 + a t_1$, то закон руху на другому відрізку можна записати так:

$$s_2 = (v_1 + a t_1)\, t_2 + \frac{a t_2^2}{2}.$$

З цього рівняння знаходимо значення v_1. Підставляючи його у закон руху s_1, знаходимо прискорення a

$$a = \frac{2s(t_1 - t_2)}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)}.$$

Знаходимо найменування правої частини останнього рівняння

$$a = \frac{м \cdot с}{с^2 \cdot с} = \frac{м}{с^2},$$

тобто це є найменування шуканої величини. Підставивши у формулу прискорення числові значення величин, знаходимо

$$a = \frac{2 \cdot 10 \cdot (1{,}05 - 2{,}2)}{1{,}05 \cdot 2{,}2 \cdot (1{,}05 + 2{,}2)} \approx -3{,}04 (м / с^2).$$

Підставивши одержане прискорення у формулу шляху s_1 та розв'язавши його відносно швидкості v_1, знаходимо

$$v_1 = \frac{s_1}{t_1} - \frac{a t_1}{2} = \frac{10м}{1{,}05с} + \frac{3{,}04 м / с^2 \cdot 1{,}05с}{2} = 11{,}12 м / с.$$

Задачі для самостійного розв'язування

1. Рухоме тіло проходить n однакових проміжків шляху з різною швидкістю. Знайти <v>.

2. Рухоме тіло проходить n проміжків шляху за однакові проміжки часу. Визначити <v>.

3. Тіло рухалось протягом часу τ . При цьому його швидкість змінювалася за законом $v=at^2+bt$; $0\leq t \leq \tau$. Визначити $<v>$.

4. Прискорення рухомого тіла залежить від швидкості v за законом $a=-kv^2$. Знайти закон руху $S=f(t)$.

5. Залежність пройденого тілом шляху від часу задається рівнянням $S=0,25t^4-9t^2$. Знайти екстремальне значення швидкості тіла. Побудувати графік залежності швидкості від часу за перші 5 с руху.

6. Між двома пунктами, розташованими на річці на відстані 100 км один від одного, курсує катер. Катер проходить цю відстань за течією за час $t_1=4$ години, а проти течії за час $t_2=10$ годин. Визначити швидкість течії річки, та швидкість катера відносно води.

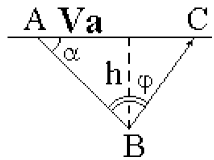

Рис.11.

7. Людина, що знаходиться в точці B на відстані h від прямої ділянки дороги, бачить автобус, який рухається по шосе з постійною швидкістю v_a (рис. 11). Відстань від автобуса до людини в цей момент дорівнює AB. В якому напрямку слід бігти людині, щоб опинитися в точці C з максимальним випередженням за часом по відношенню до автобуса, якщо AB=2h, а відношення швидкостей людини і автобуса $v_л / v_a = 1/\sqrt{2}$?

8. Човен, який пливе через річку на веслах, рухається відносно води з швидкістю 2 м/с в напрямку перпендикулярному до течії. Течія річки має швидкість 1 м/с. Знайти повну швидкість човна та напрямок вектора повної швидкості відносно берега.

9. Дві пристані розташовані одна напроти одної на протилежних берегах річки, швидкість течії якої складає 0,5 м/с. В якому напрямку повинен плисти човен, щоб перетнути річку по прямій від однієї пристані до другої? З якою швидкістю $v_\perp$ повинен плисти човен через річку? Відносно води човен має швидкість 0,8 м/с.

10. На візку, який рівномірно рухається по горизонтальній

площині, встановлена труба. Як повинна бути орієнтована на візку ця труба, щоб краплини дощу, падаючи вертикально, пролітали крізь неї, не торкаючись внутрішніх стінок? Рух крапель вважати рівномірним.

11. Два літаки вилітають одночасно з однієї точки по двох взаємно перпендикулярних курсах. Один з швидкістю v_1=300 км/год, другий з швидкістю v_2=400 км/год. Як зростає з часом відстань між літаками? Якою буде ця відстань в той момент, коли перший літак пролетить S_1=900 км.

12. Фотограф, який знаходиться на відстані l від залізниці, хоче сфотографувати поїзд, що рухається з швидкістю v в той момент, коли промінь зору, проведений від фотографа до поїзда, утворює кут α з полотном залізниці. Яку максимальну експозицію t_{max} повинен встановити фотограф, щоб розмиття зображення на фотоплівці не перевищувало d, а фокусна відстань об'єктива фотокамери дорівнює f?

13. Рибалка пливе човном вверх по річці і, пропливаючи під мостом, загубив рятувальний круг. Через півгодини він це помітив, повернув назад і наздогнав круг на 5 км нижче моста. Яка швидкість течії річки, якщо вверх і вниз по річці рибалка плив з однаковою швидкістю відносно води?

14. Кулька, якій надана горизонтальна швидкість v, падає на горизонтальну площину з висоти h. При кожному ударі об площину вертикальна складова швидкості кульки зменшується так, що відношення вертикальної складової швидкості після удару до її значення до удару постійне і дорівнює α. Визначити, на якій відстані x від місця кидання відскакування кульки припиниться. Вважати, що тертя відсутнє, так що горизонтальна складова швидкості кульки v не змінюється.

15. З артилерійської гармати проведено постріл під кутом φ до горизонту. Початкова швидкість снаряда v_0. Дослідити аналітично рух снаряда, нехтуючи опором повітря та кривизною поверхні Землі. Знайдені залежності зобразити графічно. Знайти: 1) вертикальну і горизонтальну складові вектора швидкості $\mathbf{v}$ і абсолютну величину швидкості як функцію від часу; 2) час T

польоту снаряда від гармати до падіння на землю; 3) залежність від часу кута α між вектором швидкості снаряда і горизонтом; 4) декартові координати (вісь X - горизонтальний напрямок, вісь Y - вертикальний напрямок) снаряду як функції часу; 5) рівняння траєкторії снаряда $y=f(x)$ (побудувати згідно з цим рівнянням траєкторію польоту снаряда); 6) максимальну висоту h_{max} польоту снаряда над землею; 7) горизонтальну дальність l польоту снаряда як функцію його початкової швидкості і кута φ. При якому куті φ^* дальність буде максимальною при заданій початковій швидкості снаряда?

16. З трьох труб, розміщених на землі, з однаковою швидкістю б'ють струмені води: під кутом 60, 45 і 30^0 до горизонту. Знайти відношення найбільших висот h підйому струменів води, що витікають з кожної труби, і відношення дальностей падіння l води на землю. Опором повітря знехтувати.

17. Компоненти швидкості частки змінюються з часом за законами $v_x=a\cos\omega t$; $v_y=a\sin\omega t$; $v_z=0$, де a і ω - сталі. Знайти модулі швидкості **v** та прискорення **w**, а також кут між векторами **v** та **w**. На основі отриманих результатів зробити висновок про характер руху частки.

18. Частка рухається в додатному напрямку осі X так, що її швидкість змінюється за законом $v=\alpha\sqrt{x}$, де α додатна стала. Маючи на увазі, що в момент часу t=0 вона знаходилась в точці x=0, знайти: а) залежність від часу швидкості та прискорення частки; б) середню швидкість частки за час, протягом якого вона пройшла перші S метрів.

19. Залежність координат частки від часу задається рівняннями: $x(t)=2+3t$; $y(t)=15+2t-10t^2$. Визначити: 1) скільки часу частка буде підніматися? 2) на якій відстані від місця кидання вона буде знаходитися в цей момент часу?

20. М'яч кинули з поверхні Землі з початковою швидкістю 10 м/с. Під яким кутом повинна бути направлена початкова швидкість, щоб висота підйому була найбільшою? Чому дорівнює ця висота? Тертям об повітря знехтувати. Прискорення

вільного падіння вважати рівним $g=10$ м/с^2.

21. Дві ракети стартують одночасно з однієї точки поверхні Землі з початковими швидкостями, які дорівнюють нулю. Прискорення ракет $a_1=2t$, $a_2=5t$ напрямлені вертикально вверх. Знайти відстань між ракетами через 2 с.

22. Два кораблі рухаються паралельно один одному в протилежні боки зі швидкостями v_1 і v_2. З одного з них стріляють в другий. Під яким кутом φ до курсу корабля, що обстрілюється, треба направити гармату, щоб влучити в ціль, якщо в момент пострілу кораблі знаходяться на прямій, перпендикулярній до напрямку їх руху? Швидкість снаряду дорівнює v_0.

23. На листку паперу накреслено прямий кут. Лінійка, залишаючись весь час перпендикулярною до бісектриси кута, рухається по паперу з швидкістю 10 см/с. Кінці лінійки перетинають сторони прямого кута. З якою швидкістю рухатимуться по сторонах кута точки їх перетину з лінійкою?

24. Тіло, що рухається з постійним прискоренням, проходить послідовно два однакових відрізки шляху S по 10 м кожний. Знайти прискорення тіла a та швидкість v_0 на початку першого відрізка, якщо перший відрізок пройдений тілом за час $t_1=1{,}06$ с, а другий - за час $t_2=2{,}2$ с.

25. Накреслити графіки залежності від часу швидкості і шляху деяких тіл, якщо графіки залежності прискорень від часу мають вигляд (рис.12) (початкова швидкість усіх тіл у даному випадку дорівнює нулю).

26. Намалювати графіки залежності від часу шляху та прискорення деякого

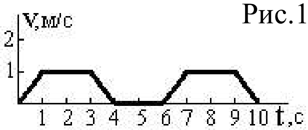

Рис.13.

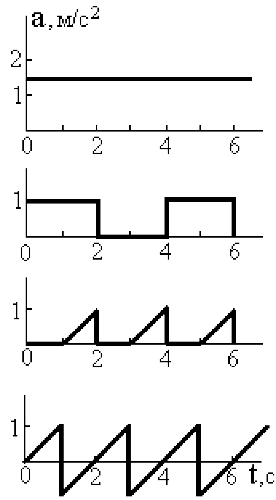

Рис.12.

тіла, якщо його швидкість як функція часу задана графіком (рис.13).

27. Із точки, яка лежить на верхньому кінці вертикального діаметра деякого кола, по жолобах, встановлених вздовж різних хорд цього кола, одночасно починають ковзати без тертя вантажі. Показати, що всі вантажі досягнуть кола одночасно.

28. Вагонетка повинна перевезти вантаж з одного місця на інше за найкоротший час. Вона може прискорюватись чи сповільнюватись тільки з однаковим за величиною прискоренням а і переходити потім у рівномірний рух чи зупинятись. Якої найбільшої швидкості повинна досягти вагонетка, щоб виконати наведену вище умову. Відстань, на яку вагонетка повинна перевезти вантаж, дорівнює L.

29. Човен, що має швидкість v_0, спускає вітрило в момент часу t_0, але продовжує рухатися. Під час цього руху були проведені вимірювання швидкості, які показали гіперболічну залежність швидкості від часу ($v \sim 1/t$). Показати, що прискорення човна буде пропорційне квадрату його швидкості.

30. Користуючись умовою попередньої задачі, знайти залежності: 1) шляху S, що його пройшов човен, від часу t; 2) швидкості човна v від шляху, після того як було спущене вітрило.

31. Яку початкову швидкість повинна мати сигнальна ракета, випущена під кутом 45^0 до горизонту, щоб вона спалахнула в найвищій точці своєї траєкторії, якщо час горіння запалу ракети 6 с? Опором повітря знехтувати.

32. Якою може бути гранична швидкість v приземлення парашутиста, якщо людина може безпечно стрибати з висоти h=2 м?

33. З вежі одночасно кинуто два тіла з однаковою початковою швидкістю v: одне вертикально вверх, друге вертикально вниз. Як з часом буде змінюватись відстань S між тілами? Опором повітря знехтувати.

34. В якій точці траєкторії тіла, кинутого під кутом до горизонту, його нормальне до траєкторії прискорення буде максимальним?

35. Тіло, кинуте вертикально вверх, повернулось на землю через 3 с. Яка була початкова швидкість тіла? На яку висоту піднялось тіло? Опір повітря не враховувати.

36. Камінь кинули вверх на висоту 10 м. 1) Через скільки часу він впаде на землю? 2) На яку висоту підніметься камінь, якщо початкову швидкість кидання збільшити вдвоє? Опір повітря не враховувати.

37. З аеростата, який знаходився на висоті 300 м, впав камінь. Через скільки часу камінь досягне землі, якщо: 1) аеростат піднімається з швидкістю 5 м/с, 2) аеростат опускається з швидкістю 5 м/с, 3) аеростат нерухомий? Опором повітря знехтувати.

38. Накреслити графіки залежності висоти h і швидкості v від часу t для тіла, кинутого вертикально вверх з початковою швидкістю 9,8 м/с. Графік побудувати для інтервалу часу від 0 до 2 с, тобто для $0 \le t \le 2$ с, через кожні 0,2 с. Опір повітря не враховувати.

39. Тіло падає вертикально з висоти 19,6 м з нульовою початковою швидкістю. Який шлях тіло пройде: 1) за першу 0,1 с свого руху, 2) за останню 0,1 с свого руху? Опір повітря не враховувати.

40. Тіло падає вертикально з висоти 19,6 м з нульовою початковою швидкістю. За який час тіло пройде: 1) перший 1 м свого шляху, 2) останній 1 м свого шляху? Опір повітря не враховувати.

41. Тіло, що вільно падає, за останню секунду проходить половину шляху. Знайти: 1) з якої висоти h падає тіло, 2) тривалість падіння. Опір повітря не враховувати.

42. Тіло А кинуте вертикально вверх з початковою швидкістю v_1, тіло В падає з висоти h з початковою швидкістю $v_2=0$. Знайти залежність відстані x між тілами А і В від часу t, коли відомо, що тіла почали рухатися одночасно.

43. Камінь, кинутий горизонтально, впав на землю через 0,5 с на відстані 5 м по горизонталі від місця кидання. 1) З якої висоти h було кинуто камінь? 2) З якою початковою швидкістю

v_0 його було кинуто? 3) З якою швидкістю v він упав на землю? 4) Який кут φ складає траєкторія каменя з горизонтом в точці його падіння на Землю? Опір повітря не враховувати.

44. М'яч, кинутий горизонтально, вдаряється об стінку на відстані 5 м від місця кидання. Висота місця удару м'яча об стінку на 1 м менше висоти кидання. 1) З якою швидкістю v_0 було кинуто м'яч? 2) Під яким кутом φ м'яч підлітає до поверхні стінки? Опір повітря не враховувати.

45. Камінь кинуто горизонтально. Через 0,5 с після початку руху швидкість каменя стала в 1,5 рази більшою за його початкову швидкість. Знайти початкову швидкість каменя. Опір повітря не враховувати.

46. Камінь кинуто горизонтально з початковою швидкістю v_x=15 м/с. Знайти нормальне і тангенційне прискорення каменя через 1 с після початку руху. Опір повітря не враховувати.

47. Камінь кинуто горизонтально з швидкістю 10 м/с. Знайти радіус кривизни траекторії каменя через 3 с після початку руху. Опір повітря не враховувати.

48. М'яч кинули із швидкістю v_0=10 м/с під кутом α=40° до горизонту. 1). На яку висоту підніметься м'яч? 2) На якій відстані від місця кидання він впаде на землю? 3) Скільки часу триватиме політ? 4) Знайти величину вектора повної швидкості через 1 с після кидання. Опір повітря не враховувати.

49. На спортивних змаганнях в Санкт-Петербурзі спортсмен штовхнув ядро на відстань 16 м 20 см. Яку відстань пролетить таке ж ядро в Ташкенті при тих же умовах? (При тій же початковій швидкості, направленій під тим же кутом до горизонту). Прискорення сили тяжіння в Санкт-Петербурзі дорівнює 981,9 см/с^2, в Ташкенті 980,1 см/с^2.

§1.2. Обертальний рух

Обертальний рух характеризується наступними величинами.

Мірою пройденого шляху при обертовому русі є вектор кута повороту φ. Він напрямлений по нормалі до площини обертання

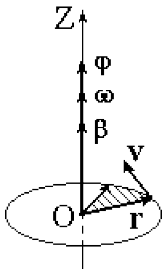

Рис.14.

так, що з його кінця видно, що обертання відбувається проти годинникової стрілки (рис.14). Напрямок вектора φ можна визначити й по-іншому. Якщо правий гвинт обертати в напрямку обертання, то його поступальний рух покаже напрямок кута-вектора. Або вектор φ напрямлений в додатному напрямку осі Z перпендикулярно до площини руху, якщо обертання відбувається проти годинникової стрілки, тобто в додатному напрямку відрахунку кутів у тригонометрії.

Вектор кутової швидкості $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$ колінеарний до φ.

Вектор кутового прискорення $\beta = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$ колінеарний до ω і збігається з ним за напрямком при рівноприскореному обертанні і антипаралельний при рівносповільненому.

Формули кінематики обертального руху можна отримати формальною заміною лінійних величин, що входять у формули кінематики поступального руху, на кутові. Так з формул (1.5)-(1.8) маємо:

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2}\\ \omega &= \omega_0 + \beta t\end{aligned}\right\}, \quad (1.31)$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta\varphi. \quad (1.32)$$

ω_0 - початкова кутова швидкість. У випадку $\omega_0=0$ (1.31) і (1.32) перепишуться:

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \frac{\beta t^2}{2}\\ \omega &= \beta t\end{aligned}\right\}. \quad (1.33)$$

$$\omega^2 = 2\beta\varphi. \quad (1.34)$$

Лінійна швидкість обертання $\mathbf{v} = [\omega, \mathbf{r}]$ і дорівнює за модулем

$$v = \omega r, \quad (1.35)$$

оскільки $\omega \perp \mathbf{r}$. При незмінній швидкості ω закон обертального руху має вигляд:

$$\varphi = \omega t. \quad (1.36)$$

В цьому випадку ω називають круговою або циклічною частотою, яка зв'язана з лінійною частотою ν співвідношенням:

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (1.37)$$

При рівномірному обертальному русі вводиться також поняття періоду обертання:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (1.38)$$

Підставивши (1.37) в (1.36) отримаємо:

$$\varphi = 2\pi n, \quad (1.39)$$

де $n = \nu t$ - число обертів за час t.

При складному криволінійному русі точки вектор її прискорення не колінеарний до вектора швидкості. При рівномірному обертанні завжди присутнє так зване нормальне прискорення (рис. 15), яке впливає на напрямок лінійної швидкості:

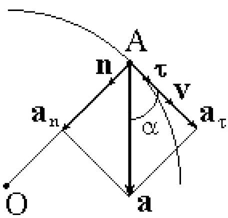

Рис.15.

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{r}\mathbf{n}, \quad (1.40)$$

де $\mathbf{n}$ - вектор нормалі до швидкості, r - радіус кривизни траєкторії в точці А. При нерівномірному обертанні $\beta \neq 0$, тому ω змінюється, і відповідно змінюється $\mathbf{v}$. Прискорення, яке змінює модуль лінійної швидкості обертання, називається тангенційним

$$\mathbf{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}, \quad (1.41)$$

де τ - вектор тангенти (дотичної) до траєкторії руху в даній точці. Тангенційне прискорення зв’язане з кутовим:

$$a_\tau = \beta r . \quad (1.42)$$

Повне прискорення

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}_\tau+\mathbf{a}_n, \quad (1.43)$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} , \quad (1.44)$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a_n}{a_\tau} . \quad (1.45)$$

Методичні вказівки і поради

1. Пам’ятайте, що поняття періоду обертання та циклічної частоти вводиться <u>тільки</u> при рівномірному обертальному русі.

2. В кожній точці траєкторії свій центр та радіус кривизни. Вектор **n** завжди напрямлений до центра кривизни траєкторії, а вектор $\tau\perp\mathbf{n}$.

3. При розв’язуванні задач на кінематику обертального руху тіла буває важко визначити положення осі обертання, особливо коли вона змінює своє положення з часом. В цьому випадку користуються миттєвою віссю обертання, яка проходить через точку тіла, що має в даний момент часу швидкість поступального руху, яка дорівнює нулю. Як правило, це точка дотику тіла і поверхні по якій воно котиться. Останнє твердження справедливе лише у випадку відсутності ковзання.

4. Якщо точка бере участь в складному обертанні одночасно навколо декількох осей, які перетинаються, то вектор результуючої кутової швидкості визначається через вектори кутових швидкостей складових обертань, як їх векторна сума: $\omega=\omega_1+\omega_2+...+\omega_n$.

5. При рівномірному обертальному русі всі точки радіус-вектора мають однакові кутові швидкості, але різні лінійні, які визначаються за формулою (1.35).

Приклади розв'язування задач

Тіло рухається рівноприскорено по колу радіуса R=5м. За час t=8 с воно пройшло шлях s=32 м. Знайти його повне прискорення та напрям прискорення через t_1=5 с після початку руху.

Розв'язання

Повне прискорення знаходимо за формулою $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$;
a_n - ? a_τ - ? Тангенційне прискорення знаходимо з формули шляху рівноприскореного руху

$$s = \frac{a_\tau t^2}{2},$$

звідки

$$a_\tau = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \cdot 32м}{64с^2} = 1м/с^2.$$

Лінійна швидкість тіла наприкінці п'ятої секунди буде

$$v = a_\tau t_1 = 1м/с^2 \cdot 5с = 5м/с,$$

а нормальне прискорення

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{25м^2/с^2}{5м} = 5м/с^2.$$

Повне прискорення дорівнюватиме

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{25м^2/с^4 + 1м^2/с^4} = 5{,}09м/с^2.$$

Напрям вектора повного прискорення визначається кутом α між векторами повного прискорення a та тангенційного прискорення $a\tau$

$$tg\alpha = \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{5м/с^2}{1м/с^2} = 5,$$

звідки α=78^{0}41'.

Задачі для самостійного розв'язування

50. Тіло починає обертатись із сталим кутовим прискоренням β=0,04 c^{-2}. Через який час повне прискорення буде напрямлене під кутом α=76^0 до напрямку швидкості?

51. Тіло оберталось з частотою ν_0=1200 об/хв, а потім почало обертатись рівносповільнено і зупинилось, зробивши n=2100 об. Знайти величину кутового прискорення та час, протягом якого відбулася зупинка тіла.

52. Розмотуючи мотузку та обертаючи без ковзання корбу, відро опускається в колодязь з прискоренням 1м/$с^2$. З яким кутовим прискоренням обертається корба? Як залежить від часу кут її повороту? Радіус корби R=25см.

53. Кінооператор, знімаючи кінокамерою літак, що злітає, обертає свою камеру навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю ω_1 та навколо горизонтальної осі з кутовою швидкість ω_2=0,2ω_1. Обертанню навколо якої однієї миттєвої осі еквівалентні ці два рухи камери? Обертання з якою кутовою швидкістю навколо цієї однієї осі могло б замінити ці два рухи?

54. Відро опускається в колодязь, розкручуючи корбу радіуса 20 см. Скільки обертів зробить корба за 10 с, якщо швидкість відра 1 м/с?

55. Залежність координат частки від часу задається рівняннями: x(t)=2+3t; y(t)=20+4t-10t^2. Визначити нормальне і тангенційне прискорення через 1 с після початку руху. Збільшується чи зменшується величина швидкості частки в цей момент?

56. Точка рухається по колу радіуса R=20 см з постійним тангенційним прискоренням a_τ=5 см/$с^2$. Через який час після початку руху нормальне прискорення a_n буде 1) рівне тангенційному; 2) вдвічі більше тангенційного?

57. Точка рухається по колу радіуса R=10 см з постійним тангенційним прискоренням a_τ. Знайти це прискорення, якщо відомо, що до кінця п'ятого оберту після початку руху лінійна швидкість точки дорівнює v=79,2 см/с.

58. Точка рухається по колу радіуса R=10 см з постійним

тангенційним прискоренням a_τ. Знайти нормальне прискорення a_n точки через 20 с після початку руху, якщо відомо, що до кінця п'ятого оберту після початку руху лінійна швидкість точки рівна v=10 м/с.

59. Колесо радіуса R=10 см обертається з постійним кутовим прискоренням ε=3,14 рад/с^2. Знайти для точок на ободі колеса до кінця першої секунди після початку руху: 1) кутову швидкість; 2) лінійну швидкість; 3) тангенційне прискорення; 4) нормальне прискорення; 5) повне прискорення; 6) кут між повним прискоренням і радіусом колеса.

60. Знайти середню кутову швидкість штучного супутника Землі, якщо період його обертання по орбіті складає 105 хв.

61. Знайти середню лінійну швидкість штучного супутника Землі, якщо період його обертання складає 111 хв, а середня висота польоту 1200 км.

62. Знайти нормальне прискорення точок земної поверхні, викликане добовим обертанням Землі. Знайти значення проекції цього прискорення на напрямок земного радіуса в даній точці. Оцінити значення шуканих величин для широти Москви (55^0 Північної широти). Радіус Землі R=6400 км.

63. Якір електродвигуна обертається з частотою N об/с. Обертаючись після вимкнення струму рівносповільнено, він зупинився, зробивши n обертів. Знайти кутове прискорення якоря після вимкнення струму.

64. Автомобіль, що рухається з швидкістю 40 км/год, проходить заокруглення шосе з радіусом кривизни 200 м. На повороті водій гальмує машину, надаючи їй прискорення –0,3 м/с^2. Знайти нормальне й повне прискорення автомобіля на повороті. Як напрямлений вектор повного прискорення по відношенню до швидкості?

65. Знайти кутове прискорення колеса, якщо відомо, що через 2 с після початку рівноприскореного руху вектор повного прискорення точки, що лежить на ободі, складає кут 60^0 з напрямком лінійної швидкості цієї точки.

66. Колесо обертається з постійним кутовим прискоренням ε=2 рад/с^2. Через t=0,5 с після початку руху повне прискорення

колеса дорівнює $a=13{,}6$ м/с^2. Знайти радіус колеса.

67. Колесо радіуса $R=0{,}1$ м обертається так, що залежність кута повороту від часу описується рівнянням $\varphi=A+Bt+Ct^3$, де $B=2$ рад/с і $C=1$ рад/с^3. Знайти для точок, що лежать на ободі колеса, через 2 с після початку руху такі величини: 1) кутову швидкість; 2) лінійну швидкість; 3) кутове прискорення; 4) тангенційне прискорення; 5) нормальне прискорення.

68. Колесо радіуса $R=10$ см обертається так, що залежність від часу лінійної швидкості точок, що лежать на ободі колеса, описується рівнянням: $v=At+Bt^2$, де $A=3$ см/с^2 і $B=1$ см/с^3. Знайти кут, що складає вектор повного прискорення з радіусом колеса в моменти часу $t=0$, 1, 2, 3, 4 та 5 с після початку руху.

69. Колесо обертається так, що залежність кута повороту радіуса колеса від часу описується рівнянням $\varphi=A+Bt+Ct^2+Dt^3$, де $B=1$ рад/с, $C=1$ рад/с^2 і $D=1$ рад/с^3. Знайти радіус колеса, коли відомо, що до кінця другої секунди після початку руху, нормальне прискорення точок обода цього колеса дорівнює $a_n=3{,}46\cdot10^2$ м/с^2.

70. Знайти радіус колеса, що обертається, коли відомо, що лінійна швидкість v_1 точки на ободі колеса в 2,5 рази більша за лінійну швидкість v_2 точки, що лежить на 5 см ближче до осі колеса.

71. Вал обертається з постійною швидкістю, яка відповідає частоті 180 об/хв. З деякого моменту вал гальмується і обертається рівносповільнено з кутовим прискоренням 3 рад/с^2. 1) Через який час вал зупиниться? 2) Скільки обертів він зробить до зупинки?

72. Вентилятор обертається з швидкістю, яка відповідає частоті 900 об/хв. Після вимкнення струму вентилятор зупинився, зробивши 75 обертів. Скільки часу пройшло з моменту вимкнення струму до повної зупинки вентилятора? Обертання вентилятора вважати рівносповільненим.

73. Махове колесо через 1 хв після початку обертання набуло кутової швидкості, яка відповідає частоті $\nu=720$ об/с. Знайти кутове прискорення колеса і число обертів колеса за цю

хвилину. Рух колеса вважати рівноприскореним.

74. Колесо, обертаючись рівноприскорено, досягло кутової швидкості ω=20 рад/с через N=10 обертів після початку обертання. Знайти кутове прискорення.

75. Колесо, обертаючись рівносповільнено при гальмуванні, зменшило за 1 хв швидкість обертання від 300 об/хв до 180 об/хв. Знайти кутове прискорення колеса і число обертів, які воно зробило за цей час.

76. Колесо радіуса R котитися без ковзання по горизонтальній дорозі з швидкістю v_0. Знайти горизонтальну компоненту v_x лінійної швидкості руху довільної точки на ободі колеса, вертикальну компоненту v_y цієї швидкості та модуль повної швидкості для цієї ж точки. Знайти значення кута α між вектором повної швидкості точки на ободі колеса та напрямком поступального руху його осі. Показати, що напрямок вектора повної швидкості довільної точки А на ободі колеса завжди перпендикулярний до прямої АВ і проходить через вищу точку вертикального діаметра колеса, що котиться. Показати, що для точки А $v_{повн}$=AB·ω. Побудувати графік розподілу швидкостей для всіх точок вертикального діаметра (в даний момент часу) для колеса, що котиться без ковзання.

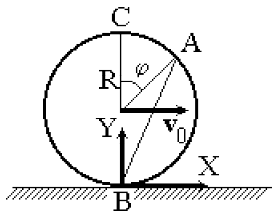

Рис.16.

Виразити шукані величини через v_0, R та кут φ між верхнім вертикальним радіусом колеса та радіусом, проведеним з центра колеса О в досліджувану точку А (рис. 16).

Вказівка. Рух точок обода колеса можна розглядати як результат додавання двох рухів: поступального руху з швидкістю v_0 осі колеса та обертового навколо цієї осі. Для цих точок при відсутності ковзання модулі векторів швидкості поступального та лінійної швидкості обертового рухів рівні між собою.

77. Циліндр радіуса R котиться без ковзання по горизонтальній площині. Знайти радіуси кривизни траєкторії точок А і В (рис. 17).

78. Користуючись загальними результатами, отриманими в задачі 76, знайти величину і напрямок векторів швидкості для двох точок, розміщених в даний момент часу на протилежних кінцях горизонтального діаметра колеса радіуса R, що котиться без ковзання по горизонтальній дорозі з швидкістю v_0. Як будуть напрямлені прискорення цих двох точок?

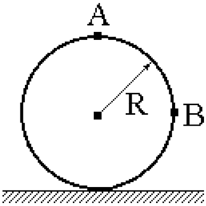

Рис.17.

79. Колесо радіуса R котиться без ковзання по горизонтальній дорозі з швидкістю v. Знайти координати X і Y довільної точки A на ободі колеса (рис. 18). Виразити їх як функцію часу t або кута повороту φ, вважаючи, що при t=0, φ=0, X=0, Y=0. За знайденими виразами для X та Y побудувати графік траєкторії руху точки на ободі колеса.

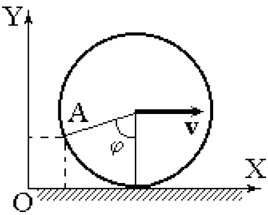

Рис.18.

80. Користуючись виразом для повної швидкості точок, що лежать на ободі колеса, яке котиться без ковзання по горизонтальній площині $v_п = 2v_0 \cos\frac{\varphi}{2}$, знайти довжину шляху кожної точки обода колеса між двома її послідовними дотиками до поверхні площини.

81. Використовуючи умови кочення колеса з задачі 76 та результати її розв'язку, знайти горизонтальну та вертикальну компоненти вектора прискорення довільної точки на ободі колеса. Вказати величину і напрямок вектора повного прискорення точок, що лежать на ободі колеса.

82. Уяву про величину і напрямок вектора повного прискорення при рівноприскореному обертальному русі можна дістати, розглянувши таку задачу. Точка рухається по колу радіуса R з постійним тангенційним прискоренням a_τ, але без початкової швидкості. Знайти нормальне та повне прискорення точки, виразивши їх: 1) як функцію від часу t і прискорення a_τ; 2)

як функцію від кутового прискорення β і кута повороту φ радіус-вектора точки з його початкового положення. Знайти кут α між напрямком вектора повного прискорення точки та її радіус-вектором.

83. Обід колеса розкручується так, що кутова швидкість змінюється за законом $\omega(t)=5t$. Знайти кут між швидкістю та прискоренням для точок обода через 0,5 с після початку руху, якщо вони лежать на віддалі 25 см від осі обертання.

РОЗДІЛ 2. ДИНАМІКА

§2.1. Динаміка поступального прямолінійного руху матеріальної точки

При розв'язуванні задач з динаміки поступального руху треба знати три закони Ньютона.

Перший закон Ньютона***. В інерціальній системі відліку вільна або квазівільна точка не може прискорюватись.*** Тобто вона знаходиться в стані спокою або рівномірно прямолінійно рухається.

Другий закон Ньютона***. Зміна імпульсу з часом чисельно дорівнює силі, що викликала цю зміну і збігається з нею за напрямком***:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}. \quad (2.1)$$

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v}. \quad (2.2)$$

Якщо (2.2) підставити в (2.1) то у випадку сталої маси отримаємо:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}. \quad (2.3)$$

Третій закон Ньютона***. Сили, з якими два тіла діють одне на одне, рівні за величиною і протилежні за напрямком***:

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} \quad (2.4).$$

Якщо на тіло діють декілька сил, то в рівняння (2.1) і (2.3) входить їх рівнодійна, яка шукається за правилом додавання векторів.

Методичні вказівки і поради

При розв'язуванні задач пропонується така послідовність дій:

1. Зробити малюнок і розкласти всі сили, що діють на тіло, причому слід обов'язково пам'ятати, що розкладаються тільки ті сили, які зумовлені дією інших тіл на дане.

Сила тяжіння, позначається $m\mathbf{g}$ - зумовлена Землею і завжди напрямлена вертикально вниз.

Сила натягу, позначається $\mathbf{T}$ - зумовлена ниткою (тросом) і напрямлена вздовж неї від тіла.

Сила реакції опори, позначається $\mathbf{N}$ - зумовлена поверхнею, на якій знаходиться тіло, і нормальна до поверхні.

Сила тертя ковзання. $F_т=\mu N$, де μ - коефіцієнт тертя, який залежить від природи та якості обробки поверхонь, які труться. Сила напрямлена протилежно до напрямку руху.

Пружна сила $F=-kx$, де k - коефіцієнт пружності, x - зміщення точки від положеня рівноваги, знак "–" говорить про те, що сила напрямлена протилежно до зміщення.

Архімедова сила (виштовхувальна) діє на тіло, занурене в рідину або газ

$$F_A=\rho_р g V_т, \quad (2.5)$$

де $\rho_р$ - густина рідини, $V_т$ - об'єм тіла. $\mathbf{F}_A \uparrow\downarrow m\mathbf{g}$.

Сила гравітаційного притягання

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (2.6)$$

$\gamma=6{,}67\cdot10^{-11}$ н·м²/кг² - гравітаційна стала, m_1 і m_2 - маси тіл, що взаємодіють, r - відстань між ними. Сила напрямлена вздовж прямої, що з'єднує центри мас тіл. На рисунку вказуються також сили, які додатково задані в умові задачі. Як правило, в задачах розглядають постійні в часі сили, тому прискорення $\mathbf{a}$=const. Це означає, що поряд з рівнянням руху (2.3) можна використовувати формули кінематики.

2. Записати другий закон Ньютона у векторній формі:

$$m\mathbf{a}=\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2+\mathbf{F}_3+...+\mathbf{F}_\mathbf{n}. \quad (2.7)$$

В правій частині (2.7) сили, що діють на дане тіло, просто перераховуються. Якщо з умови задачі відомо, що рух тіла рівномірний (**v**=const), то це означає рівність нулю лівої частини (2.7).

3. Вибрати систему координат. При цьому треба враховувати, що система сил є плоскою, тобто всі сили діють в одній площині. Тому третю координатну вісь, яка перпендикулярна до площини руху, можна не розглядати. Одну координатну вісь доцільно вибирати в напрямку прискорення або в напрямку руху, якщо прискорення відсутнє, а другу перпендикулярно до неї. Прискоренню іноді приписують довільний напрямок, тому якщо він вибраний неправильно, то відповідь буде від'ємною. Але слід пам'ятати, який напрямок обрано за додатний.

4. Спроектувати (2.7) на осі вибраної системи координат. В результаті цієї дії отримується система алгебраїчних рівнянь.

5. Розв'язати отриману систему рівнянь.

Якщо ми маємо в задачі взаємопов'язаний рух системи тіл, то наведені вище чотири операції треба виконати для кожного тіла окремо. В цьому випадку система буде містити більше ніж два рівняння.

Приклади розв'язування задач

Невагомий блок закріплено на вершині похилої площини, яка утворює з горизонтом кут α. Вантажі m_1 і m_2 з'єднані ниткою, яка перекинута через блок. Знайти: 1) прискорення вантажів, 2) натяг нитки. Розв'язати задачу при умові, що коефіцієнт тертя вантажу m_2 об похилу площину дорівнює k, тертя в блоці відсутнє, а нитка нерозтяжна, невагома і не ковзає по блоку.

Розв'язання

Скористаємось наведеною в §2.1 схемою.

1. Зробимо рисунок (рис. 19) і розкладемо сили. Нехай вантаж m_1 опускається. Тоді сила тертя вантажу m_2 об площину буде напрямлена вздовж похилої площини вниз.

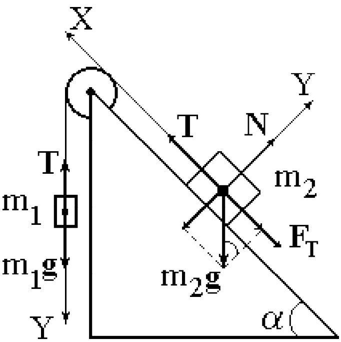

Рис.19.

2. Запишемо другий закон Ньютона у векторній формі для кожного вантажу.

$$\begin{cases} m_1\mathbf{a} = m_1\mathbf{g} + \mathbf{T} \\ m_2\mathbf{a} = m_2\mathbf{g} + \mathbf{T} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_т \end{cases}$$

Поскільки нитка невагома і нерозтяжна, і тертя в блоці немає, то прискорення вантажів будуть рівні за модулем.

3. Системи координат вибираємо для кожного вантажу так, як це показано на рисунку.

4. Проєктуємо сили на вибрані координатні осі й отримуємо:

$$\begin{cases} oY\!: m_1 a = m_1 g - T \\ oX\!: m_2 a = T - F_т - m_2 g \sin\alpha \\ oY\!:0 = N - m_2 g \cos\alpha \end{cases}$$

Маємо три рівняння відносно чотирьох невідомих a, T, N, $F_т$. Але $F_т$=kN. З третього рівняння системи N=$m_2$gcosα, тому $F_т$=k$m_2$gcosα. Підставляючи $F_т$ в друге рівняння, отримуємо систему двох рівнянь з двома невідомими a і T

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T \\ m_2 a = T - (k\cos\alpha + \sin\alpha) m_2 g \end{cases}.$$

5. Розв’яжемо дану систему. Для цього додамо два рівняння, тим самим виключимо T, і отримаємо для прискорення

$$a = \frac{m_1 - m_2(k\cos\alpha + \sin\alpha)}{m_1 + m_2} g .$$

Підставляючи a в будь-яке з рівнянь системи, отримуємо T

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1 + k\cos\alpha + \sin\alpha)g .$$

Задачі для самостійного розв’язування

84. В ліфті встановлено пружинні терези, на яких підвішено тіло масою 1 кг. Що будуть показувати терези, якщо ліфт: 1) рухається вверх з прискоренням 4,9 м/с^2, напрямленим вниз? 2) рухається вниз з прискоренням 4,9 м/с^2, напрямленим вверх? 3) рухається вниз з прискоренням 1 м/с^2, напрямленим вниз?

85. На гладкому горизонтальному столі лежать 6 однакових кубиків масою 1 кг кожний. Постійна сила F=9,8 Н діє на перший кубик в напрямку, вказаному стрілкою (рис. 20). Знайти результуючу силу f, що діє на кожний кубик. Вкажіть на рисунку стрілками сили, які діють на гранях двох кубиків, що дотикаються. З якою силою f_1 четвертий кубик діє на п’ятий?

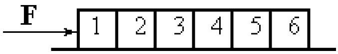

Рис.20.

86. На гладкій горизонтальній поверхні знаходиться тіло масою M. Друга маса m підвішена на нитці, що перекинута через блок і прив’язана до маси M (рис. 21). Знайти прискорення мас M та m і натяг нитки. Тертям маси M об площину, тертям в блоці, а також масами блока і нитки знехтувати.

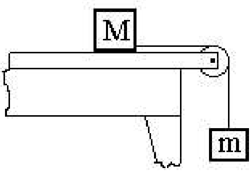

Рис.21.

87. На установці, описаній в попередній задачі, на столі розміщено три маси m_1, m_2, m_3, які зв’язані ниткою між собою та з масою M, прив’язаною до нитки, що перекинута

через блок (рис. 22). Знайти прискорення системи та натяги ниток при тих же умовах, що і в попередній задачі.

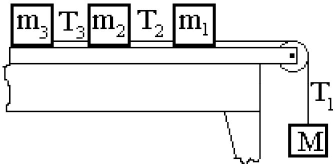

Рис.22.

88. На гладкий горизонтальний стіл покладена пластинка АС масою m і довжиною l (рис. 23). Постійна сила F штовхає правий кінець пластинки. З якою силою F_1 уявно виділений відрізок пластинки АВ=4/5l діє на відрізок ВС цієї ж пластинки?

89. Найпростішу машину, яка служить для перевірки законів рівноприскореного руху, можна уявити так: на нитці, перекинутій через блок А, підвішено дві неоднакові маси m_1 і m_2 (рис. 24). Знайти прискорення мас, натяг нитки Т і силу F, що діє на вісь блока цієї машини. Блок і нитку вважати невагомими, тертя в осі блока не враховувати.

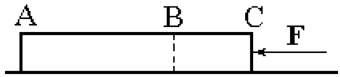

Рис.23.

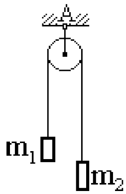

Рис.24.

90. На горизонтальній дошці лежить вантаж. Коефіцієнт тертя між дошкою і вантажем дорівнює k=0,1. Яке прискорення в горизонтальному напрямку треба надати дошці, щоб вантаж міг з неї зісковзнути?

91. На столі лежить дошка масою М=1 кг, а на дошці вантаж вагою 19,6 Н. Яку силу F треба прикласти до дошки, щоб вона вислизнула з-під вантажу? Коефіцієнт тертя між вантажем і дошкою 0,25, а між дошкою і столом 0,5.

92. Повітряна куля масою М опускається з постійною швидкістю. Яку масу баласту ΔМ треба викинути, щоб вона почала підніматися з тією ж швидкістю? Підйомну силу Р кулі вважати постійною в обох випадках.

93. По похилій площині з кутом нахилу α ковзає тіло. Сила тертя між тілом і площиною пропорційна силі нормального тиску на площину і не залежить від швидкості тіла. Коефіцієнт тертя дорівнює k. Знайти прискорення, з яким ковзає тіло.

94. Два однакових тіла зв'язані ниткою і лежать на ідеально гладкому горизонтальному столі так, що нитка являє собою пряму лінію (рис. 25). Нитка може витримувати натяг ≤ 19,6 н. Яку горизонтальну силу F слід прикласти до одного з тіл, щоб нитка розірвалась?

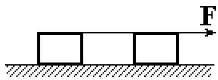

Рис.25.

95. Чи зміниться сила, необхідна для розриву нитки в умові попередньої задачі, якщо між тілами і столом є тертя і коефіцієнт тертя однаковий для обох тіл?

96. На дошці, що лежить горизонтально на двох опорах, стоїть людина. Раптово вона присідає. Що відбудеться в перший момент: збільшиться чи зменшиться прогин дошки? Що відбудеться, якщо людина сиділа навпочіпки і раптово встала?

97. Кінь рівномірно тягне сани. Розглянути взаємодію трьох тіл: коня, саней, поверхні землі. Намалювати вектори сил, що діють на кожне з цих тіл окремо і встановити співвідношення між ними.

98. Знайти прискорення a_1 і a_2 мас m_1 і m_2 та натяг нитки T в системі, зображеній на рис. 26. Масою блоків і ниток знехтувати.

99. Знайти прискорення мас m_1, m_2, m_3 та натяг ниток T_1 і T_2 в системі, зображеній на рисунку 27. Масою блоків та ниток знехтувати, сил тертя не враховувати.

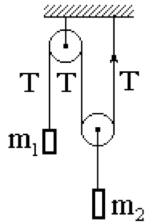

Рис.26.

100. Якою силою треба подіяти на вагон, що стоїть на рейках, щоб він почав рухатися рівноприскорено і за час t=30 с пройшов шлях S=11 м? Маса вагона 16 т. Під час руху на вагон діє сила тертя, яка дорівнює 0,05 ваги вагона.

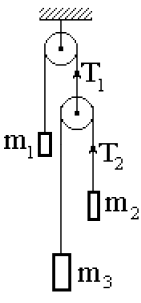

Рис.27.

101. Невагомий блок закріплено на вершині двох похилих площин, які складають з горизонтом кути $\alpha=30^0$ і $\beta=45^0$. Вантажі масами $M_1=M_2=1$ кг зв'язані ниткою, яка перекинута через блок

(рис. 28). Знайти прискорення, з яким рухаються вантажі, та натяг нитки в системі. Тертя вантажів об площину та тертя в блоці відсутнє.

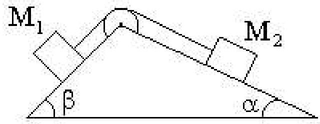

Рис.28.

102. Розв’язати попередню задачу при умові наявності тертя вантажів об площину. Коефіцієнти тертя для мас M_1 та M_2 дорівнюють $k_1=k_2=0,1$. Тертя в блоці відсутнє.

103. Камінь кинуто вертикально вверх. В яких точках траєкторії він буде мати максимальне прискорення? Розглянути два випадки: 1) опору повітря немає; 2) опір повітря зростає із збільшенням швидкості каменя.

104. На вершині ідеально гладкої похилої площини закріплено блок, через який перекинута нитка. До одного її кінця прив’язано вантаж масою m_1, який лежить на похилій площині. На другому кінці висить вантаж масою m_2 (рис. 29).З яким прискоренням рухаються вантажі? Який натяг нитки? Похила площина утворює з горизонтом кут α.

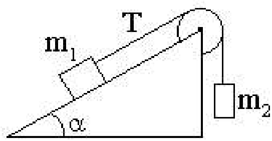

Рис.29.

§2.2. Динаміка обертального руху матеріальної точки

Сила, що діє на матеріальну точку, яка здійснює обертальний рух у певній площині, в кожний момент часу може бути розкладена на дві складові. Одна з них нормальна $\mathbf{F}_n \perp \mathbf{v}$ і напрямлена до центра кривизни траєкторії. Друга $\mathbf{F}_\tau \uparrow\uparrow \mathbf{v}$. Перша зумовлює зміну напрямку швидкості і є неодмінною умовою обертального руху. Оскільки $\mathbf{F}_n$ напрямлена до центра кривизни траєкторії, її називають ***доцентровою силою***. Зумовлене нею прискорення називається доцентровим і чисельно дорівнює

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r, \quad (2.8)$$

де v, ω і r - лінійна і кутова швидкості обертання в деякий момент часу та радіус кривизни траєкторії. Тому за другим законом Ньютона

$$F_n = ma_n = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r. \quad (2.9)$$

До того тіла, яке спричинює обертальний рух даної точки (тобто спричиняє доцентрову силу), згідно з третім законом Ньютона прикладена сила $-\mathbf{F}_n$, яка за величиною дорівнює доцентровій силі і протилежна їй за напрямком. Цю силу називають ***відцентровою.*** **<u>Слід пам'ятати!!!</u>** Відцентрова сила прикладена не до самої точки, що обертається, а до тіл (або зв'язків), які зумовлюють обертальний рух.

Тангенційна складова $\mathbf{F}\tau$ зумовлює зміну швидкості за величиною і, якщо $\mathbf{F}\tau = 0$, то кажуть, що обертальний рух є рівномірним.

Найбільш важливим окремим випадком обертального руху матеріальної точки є рух по колу (r=const).

Методичні вказівки і поради

1.Вивчення обертального руху матеріальної точки, як правило, пов'язане з визначенням доцентрової сили. Слід пам'ятати, що ця сила не є якоюсь новою силою. Вона є рівнодійною всіх реальних сил, що діють на рухому точку. Отже, щоб її відшукати треба користуватись загальною методикою, приведеною в попередньому параграфі, а потім взяти проекцію рівнодійної сили на напрям радіуса кривизни траєкторії.

2.Якщо обертальний рух є рівномірним, то рівнодійна всіх сил, що діють на дану точку, напрямлена вздовж радіуса до центра кривизни траєкторії. Тому при розв'язуванні задач, вибираючи систему координат (п.3, §2.1), одну з осей направляють вздовж радіуса кривизни, тобто в напрямку прискорення, і при виконанні п.4, §2.1 в проекції рівняння (2.7) на цю вісь замість "ma" пишуть $m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r$. Тоді проекція рівняння (2.7) на вибрану вісь (нехай oX) буде:

$$\frac{mv^2}{r} = \sum_i F_{ix}, \quad (2.10)$$

де F_{ix} - проекції сил, що діють на точку, на дану вісь.

Приклади розв'язування задач

Диск обертається навколо вертикальної осі з частотою 30 об/хв. На відстані 20 см від осі обертання лежить тіло. Яким повинен бути коефіцієнт тертя між тілом і диском, щоб тіло залишалось на диску нерухомим?

Розв'язання

На тіло, що лежить на диску, діє доцентрова сила і сила тертя ковзання. Умовою того, що тіло втримається на диску, є рівність цих двох сил

$$\frac{mv^2}{R} = F_т.$$

$F_т$=kmg, v=ωR, ω=2πν, тому вищевказана умова набуває вигляду

$$4m\pi^2\nu^2 R = kmg,$$

звідки

$$k = \frac{4\pi^2\nu^2 R}{g}.$$

Підставляючи числові значення в системі СІ, маємо:

$$k = \frac{4\cdot 3{,}14^2\cdot(0{,}5с^{-1})^2\cdot 0{,}2м}{9{,}81м/с^2} = 0{,}2.$$

Задачі для самостійного розв'язування

105. По гладкій внутрішній поверхні чаші, яка має форму параболоїда обертання з вертикальною віссю Z, з висоти h ковзає кулька масою m. Рівняння параболоїда має вигляд $Z=k(X^2+Y^2)$. Знайти прискорення a кульки та силу її тиску F на дно чаші в її нижній точці.

106. Візок масою m скочується без тертя по рейках, зігнутих у формі "мертвої петлі" (рис. 30). 1) З якої мінімальної висоти h повинен скотитися візок, щоб не впасти з рейок по всій їх довжині? 2) Які сили діють на візок в точці B? 3) Яким буде рух візка, якщо він скотиться з висоти меншої за h? При розв'язуванні задачі вважати колеса візка малого розміру і малої маси і їх обертального руху не враховувати.

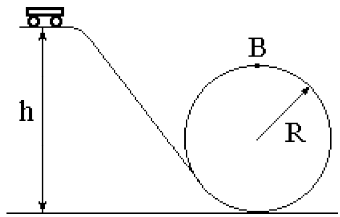

Рис.30.

107. На внутрішній поверхні конічної воронки з кутом 2α при вершині на висоті h від вершини знаходиться в стані спокою мале тіло (рис. 31). Коефіцієнт тертя між тілом і поверхнею воронки дорівнює k. Знайти мінімальну кутову швидкість обертання конуса навколо вертикальної осі, при якій тіло буде у воронці нерухомим.

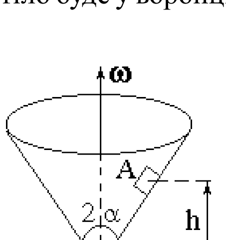

Рис.31.

108. Невелике тіло ковзає з вершини сфери вниз. На якій висоті h від вершини тіло відірветься від поверхні сфери і впаде вниз? Тертя немає.

109. На яку висоту піднімуться кульки центробіжного регулятора, якщо він робить n=100 об/хв (рис. 32)? Довжина підвісу кульок рівна l=0,5 м.

110. Автомобіль масою 1000 кг рівномірно рухається по рівній дорозі в формі кола радіуса R=50 м. Швидкість руху автомобіля 50 км/год. Чи зможе автомобіль

виконати поворот, якщо: а) дорога суха і коефіцієнт тертя ковзання дорівнює 0,6; б) дорога мокра і коефіцієнт тертя ковзання дорівнює 0,2?

111. Знайти кут нахилу профільованої дороги, при якому автомобіль зможе рухатися з швидкістю v по заокругленню радіуса R при умові відсутності тертя. Чому дорівнює цей кут для заокруглення радіуса 50 м при швидкості 50 км/год?

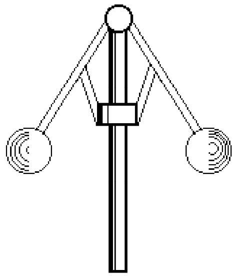

Рис.32.

112. Знайти силу F, з якою візок маси m, що рухається з швидкістю v (рис. 33), давить на міст в наступних випадках: 1) горизонтальний міст; 2) опуклий міст; 3) вгнутий міст. Радіус кривизни дорівнює R. Для випадків 2) і 3) силу F визначити для найвищої та найнижчої точок моста.

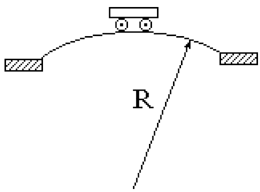

Рис.33.

113. Тіло рухається рівномірно з постійною швидкістю v_0 по горизонтальній поверхні стола, яка має заокруглений край з постійним радіусом заокруглення R (рис. 34). Яким повинно бути найменше значення швидкості v_0, щоб тіло, падаючи, не торкалось заокруглення?

114. З якою початковою швидкістю v_0 повинен вилетіти снаряд з жерла гармати в горизонтальному напрямку, щоб рухатися навколо Землі, не падаючи на неї? Яке прискорення буде мати снаряд при цьому? (Радіус Землі $R_з$=6400 км)

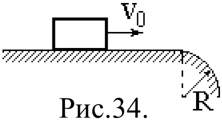

Рис.34.

115. Яким повинен бути мінімальний коефіцієнт тертя ковзання між шинами автомобіля та асфальтом, щоб автомобіль зміг пройти заокруглення з радіусом кривизни R=200 м при швидкості v=100 км/год?

116. Літак робить “мертву петлю” радіусом R=100 м зі швидкістю v=280 км/год. З якою силою тіло пілота маси 80 кг

буде давити на сидіння у верхній та нижній точках петлі?

117. У вагоні поїзда, що їде по заокругленню залізниці, зробленому з нахилом всередину, на пружинних терезах підвішене тіло. Терези показують збільшення ваги тіла на n% в порівнянні з вагою того самого тіла, виміряною в поїзді, який рухається прямолінійно з постійною швидкістю. Терези можуть вільно обертатись відносно точки підвісу і на заокругленні залишаються перпендикулярними до підлоги вагона. Знайти радіус кривизни заокруглення R, якщо поїзд їде з швидкістю v.

118. Водій автомобіля, що їде в тумані по горизонтальній дорозі, раптово помітив попереду себе стіну, перпендикулярну до напрямку руху. Що вигідніше: загальмувати, чи повернути в вбік, щоб запобігти аварії?

119. При виконанні "мертвої петлі" сила, що діє на крила літака, змінюється в порівнянні з їх навантаженням в горизонтальному польоті. Нехай літак масою 3/4 т робить "мертву петлю" радіусом R=125 м на швидкості 120 км/год. Знайти максимальне навантаження на крила літака. Вказати, в якій точці траєкторії це навантаження буде максимальним.

120. На літаку, що виконує "мертву петлю", підвішено висок. Вказати напрям виска в довільних точках "мертвої петлі" при різних значеннях швидкості v та радіуса петлі R.

121. Літак виконує віраж, рухаючись по колу з постійною швидкістю v на одній і тій самій висоті. Знайти радіус цього кола R, якщо площина крил літака нахилена до горизонту під постійним кутом α.

§2.3. Динаміка руху твердого тіла

Рух абсолютно твердого тіла завжди можна розкласти на складові - поступальний і обертальний. Згідно з теоремою про рух центра мас, поступальний рух твердого тіла можна описувати тими ж рівняннями, що й рух матеріальної точки, і при розв’язуванні задач користуватись тою ж методикою і формулами, що наведені в §2.1. При розгляді обертального руху твердого тіла слід мати на увазі, що обертання спричиняє не сила, а момент сили, який призводить до зміни не імпульсу, а момента імпульсу. Моментом сили **M** називається векторний добуток радіус-вектора **r** на силу **F**:

$$\mathbf{M} = \left[\mathbf{r}, \mathbf{F}\right], \quad (2.11)$$

де **r** - вектор проведений з центра обертання в точку прикладання сили. Центр обертання - це точка перетину осі обертання з площиною обертання. Модуль момента сили:

$$M = rF\sin\alpha, \quad (2.12)$$

де $\alpha = (\vec{r} \,\hat{}\, \vec{F})$. Напрямок момента сили шукається за загальними правилами знаходження напрямку результату векторного добутку. Величина $d=r\cdot\sin\alpha$ – це найкоротша віддаль від осі обертання до ***лінії прикладання сили*** і називається ***плечем сили***.

Моментом імпульсу називається величина, що визначається співвідношенням:

$$\mathbf{N} = \left[\mathbf{r}, \mathbf{P}\right], \quad (2.13)$$

де **P** - імпульс. Для твердого тіла момент імпульсу є сумою моментів імпульсу матеріальних точок, з яких це тіло складається:

$$\mathbf{N} = \sum_i \mathbf{N}_i\,. \quad (2.14)$$

Для отримання формул динаміки обертального руху твердого тіла досить в рівняннях динаміки поступального руху зробити формальну заміну “поступальних” динамічних величин на “обертальні”: **P**$\leftrightarrow$**N; F**$\leftrightarrow$**M; v**$\leftrightarrow\omega$**;** m$\leftrightarrow$I; **a**$\leftrightarrow\beta$**.**

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad (2.15)$$

- момент інерції твердого тіла. Аналогічно масі при поступальному русі, він характе-ризує інертність тіла при обертанні. Тоді одержимо:

$$\mathbf{P}=m\mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{N}=I\omega. \quad (2.16)$$

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \Rightarrow \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{N}}{dt}; \ \mathbf{M} = I\beta \text{ при } I=const. \quad (2.17)$$

Кінетична енергія обертального руху

$$W_k = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow W_k = \frac{I\omega^2}{2}. \quad (2.18)$$

Методичні вказівки і поради

1. Для найпростіших тіл, які часто доводиться розглядати, доцільно використовувати моменти інерції, які відомі:

а) для точки масою m, яка знаходиться на відстані r від осі обертання:

$$I=mr^2; \quad (2.19)$$

б) для тонкого стержня довжиною l і масою m відносно осі, яка проходить через його кінець перпендикулярно до нього:

$$I = \frac{1}{3}ml^2; \quad (2.20)$$

в) для суцільного однорідного циліндра (або диска) з радіусом основи R і масою m відносно осі, що паралельна твірній і проходить через центр основи:

$$I = \frac{1}{2}mR^2; \quad (2.21)$$

г) для пустотілого циліндра (або труби) масою m відносно осі циліндра (труби):

$$I = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2); \quad (2.22)$$

де R_1 та R_2 - внутрішній і зовнішній радіуси відповідно. У випадку тонкостінного циліндра чи труби $R_1 \approx R_2 = R$ і

$$I=mR^2; \quad (2.23)$$

д) для суцільної однорідної кулі масою m і радіуса R відносно осі, що проходить через її геометричний центр:

$$I = \frac{2}{5}mR^2; \quad (2.24)$$

е) для суцільного однорідного конуса масою m і радіусом основи R відносно осі, що проходить через центр основи перпендикулярно до неї:

$$I = \frac{3}{10}mR^2. \quad (2.25)$$

2. Якщо момент інерції тіла невідомий, то його обчислюють за формулою:

$$I = \int r^2 dm, \quad (2.26)$$

де r - відстань від елемента тіла маси dm до осі обертання.

3. Якщо вісь обертання не проходить через центр інерції, то для обчислення моменту інерції відносно такої осі користуються теоремою Гюйгенса-Штейнера:

$$I=I_0+ma^2, \quad (2.27)$$

де I_0 - момент інерції тіла відносно осі, яка проходить через центр інерції і паралельна заданій осі, m - маса тіла, a - віддаль між осями.

4. При розв'язуванні задач з динаміки обертального руху слід користуватись такою схемою:

а) зробити рисунок і розкласти всі сили, які діють на дане тіло;

б) записати рівняння поступального руху (другий закон Ньютона) у векторній формі;

в) записати рівняння обертального руху (2.17) у вигляді:

$$I\beta=\mathbf{M}_1+\mathbf{M}_2+...+\mathbf{M}_n, \quad (2.28)$$

де $\mathbf{M}_i$ - моменти сил, що діють на тіло. Слід пам'ятати, що моменти сил, лінія дії яких перетинає вісь обертання, дорівнюють нулю;

г) вибрати систему відліку. Дві осі будуть лежати в площині рисунка. Одна з них паралельна до лінійного прискорення, друга перпендикулярна до неї. Третя вісь буде нормальною до площини малюнка. Моменти сил будуть напрямлені вздовж цієї третьої осі;

д) спроектувати рівняння поступального руху (п.б) на осі координат, що лежать в площині рисунка;

е) спроектувати (2.28) на вісь, перпендикулярну до площини рисунка. Для зручності можна вважати додатними моменти сил, які призводять до обертання проти годинникової стрілки, і від'ємними ті, які призводять до обертання за годинниковою стрілкою. Треба уважно слідкувати за напрямком кутового прискорення β. Воно завжди напрямлене в бік більшого за модулем моменту сил;

є) розв'язати отриману систему рівнянь, використовуючи, якщо потрібно, формули для моментів інерції простих тіл (2.19)-(2.25), теорему Гюйгенса-Штейнера (2.27) та зв'язок модулей лінійного та кутового прискорення $a=\beta r$.

5. Іноді, коли це можливо, поступальний і обертальний рух твердого тіла можна розглядати як тільки обертальний навколо миттєвої осі. Тоді досить записати тільки рівняння (2.28) і для знаходження моменту інерції відносно миттєвої осі скористатись теоремою Гюйгенса-Штейнера. В цьому випадку в кожний фіксований момент часу справедливі ті ж самі формули, що й при нерухомій осі.

6. При розв'язуванні задач, в яких фігурують тіла, що котяться без ковзання, треба обов'язково враховувати силу тертя, навіть якщо в умові задачі про неї нічого не сказано, оскільки такий рух можливий тільки завдяки її наявності. Ця сила завжди прикладена в точці дотику тіла і площини, по якій воно котиться і має напрямок протилежний до швидкості поступального руху.

Приклади розв'язування задач

Циліндр масою m_1=10 кг укріплено на горизонтальній осі. На циліндр намотано нитку, до вільного кінця якої підвішено тягарець вагою P=19,6 Н. З яким прискоренням опускатиметься тягарець, якщо його відпустити?

Розв'язання

Лінійне прискорення тягарця дорівнює тангенційному прискоренню a точок поверхні циліндра, а останнє дорівнює добуткові кутового прискорення β на радіус циліндра r, тобто $a=\beta r$. Кутове прискорення знаходимо з основного закону обертального руху: $\beta = \frac{M}{I}$, де $I = \frac{m_1 r^2}{2}$ - момент інерції суцільного однорідного циліндра, а M=Tr - обертальний момент, що діє на циліндр. Силу натягу нитки T можна виразити як різницю ваги тягарця P та прискорюючої сили ma, тобто T=P–ma. Після підстановки виразів для I та M у формулу для тангенційного прискорення знаходимо

$$a = \frac{2(P - ma)}{m_1}.$$

Розв'язуючи одержане рівняння відносно прискорення a та підставляючи числові значення P, m та m_1, взяті в одиницях системи СІ, дістанемо

$$a = \frac{2P}{m + m_1} = \frac{2 \cdot 19{,}6\text{Н}}{10\text{кг} + 4\text{кг}} = 2{,}8\text{м}/\text{с}^2.$$

Задачі для самостійного розв'язування

122. Знайти прискорення вантажів та натяг ниток в системі, зображеній на рисунку 35, враховуючи момент інерції блока I, при умові, що нитка не ковзає по блоку. Визначити силу, що діє в точці A, якщо маса блока дорівнює M.

123. На ступінчатий циліндричний блок намотані в протилежних напрямках дві легкі нитки, до яких підвішено вантажі масами m_1 і m_2 (рис. 36). Знайти кутове прискорення

блока та натяги ниток T_1 і T_2, враховуючи момент інерції блока I.

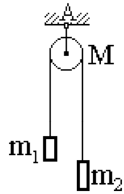

Рис.35.

124. До обода однорідного диска прикладена постійна тангенційна сила F=98,1 Н. При обертанні на диск діє момент сили тертя $M_т$=5 Н·м.

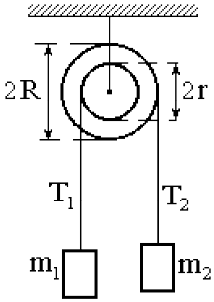

Рис.36.

Знайти вагу диска P, коли відомо, що диск обертається з постійним кутовим прискоренням ε=100 рад/с^2.

125. На барабан радіусом R=0,5 м намотано шнур, до якого прив'язаний вантаж P=100 н. Знайти момент інерції барабана, коли відомо, що вантаж опускається з лінійним прискоренням a=2,04 м/с^2.

126. Дві частки, масами 5 та 7 кг закріплені на легкому стержні, масою якого можна знехтувати, на відстані 4 м одна від одної.Обчислити момент інерції системи при її обертанні а) відносно осі, що проходить посередині між частками; б) відносно осі, що розміщена на 0,5 м лівіше від частки масою 5 кг.

127. Якою частиною шаблі треба рубати лозу, щоб рука не відчувала удару?

128. По похилій площині, що утворює кут α з горизонтом, котиться без ковзання суцільний однорідній циліндр. Знайти лінійне прискорення центра циліндра.

129. Однорідний диск радіуса R має круглий виріз (рис. 37). Маса тієї частини диска, що залишилась (на рисунку заштрихована) дорівнює m. Знайти момент інерції такого диска відносно осі, що проходить через точку O перпендикулярно до нього.

130. На горизонтальній поверхні лежить котушка ниток. З яким прискоренням a буде рухатися котушка, якщо тягнути за нитку з силою F (рис. 38)? Яким чином треба тягнути за нитку для того, щоб котушка рухалася в сторону натягнутої нитки?

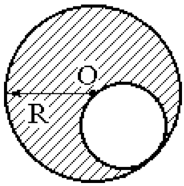

Рис.37.

Котушка рухається по поверхні стола без ковзання. Знайти силу тертя між котушкою і столом.

131. На рисунку 39 зображено маятник Максвелла. На валик радіуса r щільно насаджений диск радіуса R і масою M. Валик і диск виготовлені з однакового матеріалу, причому частини валика, що виступають з диска, мають масу m. До валика прикріплено дві нитки однакової довжини, при допомозі яких прилад підвішується до штатива. Якщо нитки симетрично намотати в один ряд на валик, то маятник підніметься. Якщо після цього його відпустити, то він буде опускатися, при цьому диск буде обертатися. Знайти прискорення, з яким буде опускатися диск.

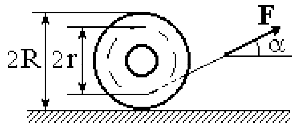

Рис.38.

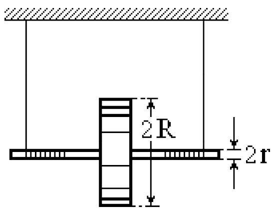

Рис.39.

132. До шківа маятника Обербека прикріплено нитку, до якої підвішено вантаж масою M=1 кг (рис. 40). Вантаж опускається з висоти h=1 м до нижнього положення, а потім починає підніматися вверх. В цей час відбувається “ривок”, тобто збільшення натягу нитки. Знайти натяг нитки при підніманні та опусканні вантажу, а також оцінити наближено $T_{рив}$. Радіус шківа r=3 см. На хрестовині закріплено вантажі з масами m=250 г кожний на відстані R=30 см від осі обертання. Моментом інерції самої хрестовини та шківа можна знехтувати в порівнянні з моментом інерції вантажів. Розтяг нитки в момент ривка не враховувати.

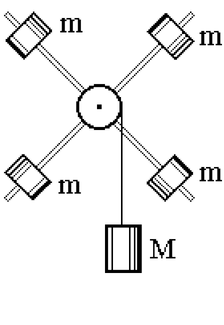

Рис.40.

133. Однорідний циліндр масою M і радіуса R обертається без тертя навколо горизонтальної осі під дією ваги вантажу P,

прикріпленого до легкої нитки, намотаної на циліндр (рис. 41). Знайти кут φ повороту циліндра як функцію від часу, якщо при $t=0$; $\varphi=0$.

134. На горизонтальну вісь насаджено блок, який являє собою суцільний однорідний циліндр маси M. Через нього перекинута невагома мотузка, на кінцях якої висять дві мавпи масою m кожна. Перша мавпа починає підніматися з прискоренням a відносно мотузки. Визначити, з яким прискоренням відносно нерухомої системи координат буде рухатися друга мавпа.

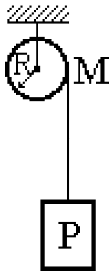

Рис.41.

135. По похилій площині, яка утворює кут $\alpha=30^0$ з горизонтом, скочується без ковзання суцільний однорідний циліндр, маса якого 300 г. Знайти величину сили тертя циліндра об площину.

136. Якою повинна бути величина коефіцієнта тертя k, щоб однорідний циліндр скочувався без ковзання з похилої площини, яка утворює кут α з горизонтом?

137. З одного рівня похилої площини одночасно починають котитися суцільні однорідні циліндр і куля однакових радіусів. 1) Яке тіло буде мати більшу швидкість на даному рівні? 2) У скільки разів? 3) У скільки разів швидкість одного буде більша від швидкості другого в даний момент часу?

138. Знайти лінійні прискорення центрів тяжіння 1) кулі, 2) диска і 3) обруча, які скочуються з похилої площини. Кут нахилу площини становить 30^O, початкова швидкість всіх тіл дорівнює нулю. 4) Порівняти знайдені прискорення з прискоренням тіла, яке зісковзує з цієї похилої площини без тертя.

§2.4. Рух у полі тяжіння

У цій темі найважливішим є закон Всесвітнього тяжіння, згідно з яким, ***дві точкові маси притягуються з силою, яка пропорційна добутку мас і обернено пропорційна квадрату відстані між ними***

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2.29)$$

де γ=6,67·10^{-11}м^3/кг·с^2 - гравітаційна стала. Тіла можна вважати точковими, якщо їх розміри малі в порівнянні з відстанями між ними. Однорідні тіла з сферичною симетрією (куля, кульовий шар) притягують завнішню матеріальну точку так, ніби їх маса зосереджена в геометричному центрі. На точкову масу, що міститься всередині сферично-симетричного тіла, діє сила притягання тільки з боку внутрішньої відносно неї частини тіла.

Розв'язування задач полегшується завдяки закону збереження енергії. Потенціальна енергія в полі тяжіння:

$$U = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (2.30)$$

Ця енергія від'ємна, що відповідає притяганню тіл, і при $r \to \infty$ $U \to 0$.

Рух планет навколо Сонця або супутників навколо планет підпорядковується законам Кеплера. Найважливішим з них при роз'язуванні задач є третій закон: ***квадрати періодів обертання планет навколо Сонця відносяться як куби радіусів їх орбіт***:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}. \quad (2.31)$$

Методичні вказівки і поради

1. Вага тіл P=mg може бути визначена як сила притягання тіла до Землі:

$$P = mg = \gamma \frac{mM_3}{R_3^2}, \quad (2.32)$$

де $M_З$ - маса Землі, m - маса тіла, $R_З \approx 6400$ км - радіус Землі. Звідси можемо отримати

$$g = \gamma \frac{M_З}{R_З^2}. \quad (2.33)$$

Така формула справедлива і для будь-якої іншої планети і залишається вірною, коли тіло перебуває на поверхні планети або поблизу неї, тобто $h \ll R$, де h - висота над поверхнею планети. Якщо h досить велика, то необхідно враховувати залежність прискорення вільного падіння від висоти. Це можна зробити за формулою

$$g = \gamma \frac{M}{(R+h)^2}, \quad (2.34)$$

де $R+h$ - відстань до центра планети.

2. При розв'язуванні задач про взаємодію тіла з планетою при невеликих $h \ll R$, зручно нормувати потенціальну енергію так, щоб вона була дорівнювала нулю не при $r \to \infty$, а на поверхні планети. Тоді

$$W(h)=mgh, \quad (2.35)$$

де g - визначається за формулою (2.33).

Приклади розв'язування задач

Дві мідні кульки діаметрами d_1=4 см і d_2=6 см дотикаються одна до одної. Знайти гравітаційну потенціальну енергію цієї системи.

Розв'язання

За визначенням гравітаційна потенціальна енергія взаємодії

$$W = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r},$$

де m_1 і m_2 - маси кульок, r - відстань між їх центрами, γ - гравітаційна стала. Маси кульок знайдемо через їх об'єм і густину:

$$m_1 = \rho_{Cu}\frac{\pi d_1^3}{6}; \quad m_2 = \rho_{Cu}\frac{\pi d_2^3}{6}.$$

$$r = \frac{d_1 + d_2}{2}.$$

Тоді

$$W = -\gamma\frac{\rho_{Cu}^2\pi^2}{18}\frac{d_1^3 d_2^3}{d_1 + d_2}.$$

Проведемо аналіз розмірностей. Для цього підставимо в отриману формулу розмірності величин, що в неї входять.

$$[W] = \frac{Нм^2}{кг^2}\frac{кг^2}{м^6}\frac{м^3 м^3}{м} = Н \cdot м = Дж,$$

тобто це є найменування шуканої величини. Підставивши в формулу для W числові значення величин в системі СІ, знаходимо:

$$W = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{3{,}14^2 \cdot 8600^2}{18} \cdot \frac{0{,}04^3 \cdot 0{,}06^3}{0{,}04 + 0{,}06} = 3{,}82 \cdot 10^{-13} Дж.$$

Космічна ракета летить на Місяць. В якій точці прямої, що сполучає центри Землі і Місяця, ракета буде притягуватись ними з однаковою силою?

Розв’язання

Сила, з якою Земля притягує ракету,

$$F_1 = \gamma\frac{mM_з}{R_1^2}.$$

Сила, з якою Місяць притягує ракету,

$$F_2 = \gamma \frac{mM_м}{R_2^2}.$$

Тут γ - гравітаційна стала, m - маса ракети, $M_з$ та $M_м$ - маси Землі та Місяця відповідно. R_1 і R_2 - відстані від ракети до Землі та від ракети до Місяця. Очевидно, що $R_2=R-R_1$, де R - відстань між центрами Землі і Місяця. По умові задачі $F_1=F_2$, і враховуючи вираз для R_2, отримуємо:

$$\frac{M_з}{R_1^2} = \frac{M_м}{(R - R_1)^2}.$$

Звідси знаходимо R_1 - тобто віддаль від ракети до центра Землі, на якій Земля та Місяць будуть притягувати ракету однаково:

$$R_1 = R\frac{\sqrt{M_з}}{\sqrt{M_з} + \sqrt{M_м}}.$$

Підставляючи значення фізичних величин, взяті з таблиць, отримуємо

$$R_1 = 3{,}84 \cdot 10^8\,м \cdot \frac{\sqrt{5{,}96 \cdot 10^{24}\,кг}}{\sqrt{5{,}96 \cdot 10^{24}\,кг} + \sqrt{7{,}3 \cdot 10^{22}\,кг}} = 3{,}4 \cdot 10^8\,м.$$

Задачі для самостійного розв’язування

139. Тіло на екваторі зважується на пружинних терезах опівдні, коли гравітаційні сили Землі і Сонця тягнуть його в різні боки. Одночасно таке ж тіло зважується опівночі в діаметрально протилежній точці земної кулі, коли обидві ці сили напрямлені в один бік. Вага якого тіла буде більшою? Неоднорідністю гравітаційного поля Сонця в околі Землі знехтувати.

140. Розв’язати попередню задачу з врахуванням неоднорідності поля Сонця, вважаючи, що крім Землі і Сонця ніяких небесних тіл немає.

141. Знайти різницю між вагою двох однакових тіл в

діаметрально протилежних точках земної кулі, зумовлену неоднорідністю гравітаційного поля Місяця. Вважати, що центри Землі, Місяця та точки 1 і 2, що розглядаються, знаходяться на одній прямій. Гравітаційним полем Сонця та інших небесних тіл знехтувати.

142. Кулька масою m_1 знаходиться на відстані a від кінця тонкого однорідного стержня маси m_2 та довжини l. а) Визначити силу притягання кульки і стержня. б) Взявши довжину стержня l=2a, обчислити, як зміниться сила притягання, якщо стержень замінити кулькою маси m_2, розміщеною в точці, де знаходиться центр інерції стержня.

143. Обчислити лінійну швидкість штучного супутника Землі на висоті 300 км. Орбіту супутника вважати коловою.

144. Маємо кільце з тонкого дроту, радіус якого дорівнює r. Знайти силу, з якою це кільце притягує матеріальну точку маси m, яка знаходиться на осі кільця на віддалі L від його центра. Радіус кільця дорівнює R, густина матеріалу дротини - ρ.

145. З якою швидкістю впаде на поверхню Місяця метеорит, якщо швидкість його в точці, з якої він починає падати, мала? Атмосфера на Місяці відсутня.

146. На яку відстань від поверхні Землі віддалилося б тіло, кинуте вертикально вверх з швидкістю 5 км/с, якщо б у Землі не було атмосфери?

147. Визначити прискорення вільного падіння g на поверхні Землі за такими даними: середній радіус Землі R=6400 км, середня густина Землі $\rho=5{,}4$ г/см^3, гравітаційна стала $\gamma=6{,}7\cdot10^{-8}$ дин·см^2/г^2.

148. Визначити прискорення вільного падіння g на висоті 20 км над Землею, вважаючи, що прискорення вільного падіння на поверхні Землі дорівнює $g_0=981$ см/с^2, а радіус Землі R=6400 км.

149. Знайти прискорення вільного падіння $g_м$ на поверхні Місяця, якщо його радіус дорівнює 1738 км, а середня густина складає 0,6 від густини Землі.

150. Знайти прискорення вільного падіння на поверхні

Сонця, коли відомі $R=150\cdot10^6$ км - радіус земної орбіти, $r=7\cdot10^5$ км - радіус Сонця і T - час обертання Землі навколо Сонця.

151. Яке прискорення a надає Сонце тілам, що знаходяться на Землі?

152. Маятник, який робить в Санкт-Петербурзі 3601,4 коливань за годину, за той самий час і при тій же температурі робить в Москві 3600,0 коливань. Чому дорівнює відношення прискорень вільного падіння для цих двох міст?

153. Як зміниться хід маятникового годинника на Місяці в порівнянні з його ходом на Землі?

154. Час обертання Юпітера навколо Сонця в 12 разів більший від часу обертання Землі. Скільки кілометрів становить відстань від Юпітера до Сонця, якщо відстань від Землі до Сонця дорівнює $150\cdot10^6$ км. Орбіти планет вважати колами.

155. Визначити відношення маси Сонця M до маси Землі m, якщо середня відстань R від Землі до Сонця в 390 разів більша ніж відстань r від Землі до Місяця, а час обертання T Землі навколо Сонця більший від часу обертання Місяця навколо Землі в 13,4 рази.

156. Знайти відстань d від планети до Сонця, якщо відомо: маса Сонця M, період обертання планети навколо Сонця T і гравітаційна стала γ.

§2.5. Неінерціальні системи відліку

Неінерціальною системою відліку (далі н.с.в.) називається система відліку, яка рухається з прискоренням. Розглянемо таку систему K′, яка має поступальне прискорення $\mathbf{a}'$ відносно деякої інерціальної системи K (рис.42). Нехай $\mathbf{a}$ - прискорення деякої точки A відносно системи K′. Тоді прискорення $\mathbf{a}_0$ цієї точки відносно системи K буде:

$$\mathbf{a}_0=\mathbf{a}+\mathbf{a}'. \quad (2.36)$$

Запишемо для точки A другий закон Ньютона в системі K:

$$\mathbf{F}=m\mathbf{a}_0=m(\mathbf{a}+\mathbf{a}'), \quad (2.37)$$

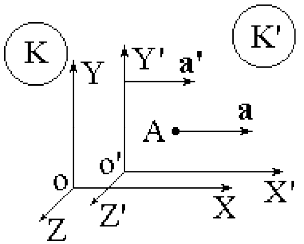

Рис.42.

де **F**- рівнодійна всіх сил, що діють на точку А. Вираз (2.37) можна переписати інакше, якщо позначити

$$-m\mathbf{a}'=\mathbf{F}_i, \quad (2.38)$$

$$\mathbf{F}+\mathbf{F}_i=m\mathbf{a}. \quad (2.39)$$

В правій частині (2.39) стоїть прискорення точки в системі К′, тому цю формулу можна розуміти як другий закон Ньютона, записаний в цій системі. В лівій частині даної рівності в порівнянні з випадком інерціальної системи, з'являється доданок $\mathbf{F}_i$. Тому відносно системи К′ тіло рухається так, ніби на нього крім реальної сили **F**, діє ще одна сила $\mathbf{F}_i$. Вона називається силою інерції. Ця сила є фіктивною в тому розумінні, що вона не зумовлена дією на дане тіло якихось інших тіл. Її дія пов'язана тільки з прискореним рухом системи відліку. Як видно з (2.38) вона чисельно дорівнює добутку маси тіла на прискорення системи відліку і напрямлена протилежно до цього прискорення.

Методичні вказівки і поради

1. Якщо тіло обертається рівномірно по колу з кутовою швидкістю ω, то система відліку, яка з ним зв'язана, буде неінерціальною, оскільки при такому русі завжди присутнє доцентрове прискорення. Сила інерції в цьому випадку

$$F_i=m\omega^2R \quad (2.40)$$

і називається відцентровою, оскільки вона напрямлена вздовж радіуса від центра обертання, тобто протилежно до прискорення.

2. Якщо тіло рухається відносно н.с.в., яка обертається з кутовою швидкістю ω, з постійною швидкістю **v**, то на нього діє сила інерції Коріоліса

$$\mathbf{F}_k=2m[\mathbf{v}\times\omega]. \quad (2.41)$$

$\mathbf{F}_k\perp\mathbf{v}$, $\mathbf{F}_k\perp\omega$**,** а чисельно вона дорівнює

$$F_k=2mv\omega\cdot\sin\varphi, \quad (2.42)$$

де φ - кут між векторами **v** і ω**.**

3. Якщо прискорення **a** відносно н.с.в. дорівнює нулю, тобто в цій системі тіло перебуває в стані спокою або рівномірно прямолінійно рухається, то сума всіх сил, що діють на дане тіло, включаючи,звичайно, силу інерції, також дорівнює нулю. Це означає, що введення сили інерції в н.с.в. дозволяє звести задачу динаміки до задачі статики. Звичайно, якщо напрямки дії сил різні, треба використовувати загальну методику розв'язування задач з динаміки матеріальної точки.

4. В тому випадку, коли нас не цікавить закон руху відносно н.с.в., сили інерції вводити необов'язково, бо задачу можна розв'язати в інерціальній системі відліку.

Приклади розв'язування задач

Гирка масою 50 г прив'язана до нитки довжиною 25 см і описує в горизонтальній площині коло. Швидкість гирьки відповідає частоті 2 об/с. Знайти натяг нитки.

Розв'язання

Розв'яжемо задачу в системі відліку, зв'язаній з гирькою. Ця система відліку буде неінерціальною, оскільки вона рухається по колу з доцентровим прискоренням

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

Гирка у вибраній системі - нерухома. Вона утримується на коловій траєкторії силою натягу нитки. Рівняння руху для неї згідно (2.39) має вигляд:

$$0=\mathbf{T}+\mathbf{F}_i,$$

де $\mathbf{T}$ - сила натягу нитки, $\mathbf{F}_i$ - сила інерції. За модулем вона дорівнює $F_i = \frac{mv^2}{R}$ і має напрямок, протилежний до прискорення системи. Якщо вибрати вісь координат, напрямлену до центра кола, то проекція рівняння руху на цю вісь матиме вигляд:

$$0 = T - \frac{mv^2}{R}.$$

Звідси маємо $T = \frac{mv^2}{R}$. Враховуючи, що $v=\omega R$, $\omega=2\pi\nu$, остаточно отримуємо:

$$T=4\pi^2\nu^2 mR.$$

Підставляючи дані з умови задачі, отримуємо числовий результат

$$T=4\cdot 3,14^2\cdot 2^2\cdot 50\cdot 10{-}3\cdot 25\cdot 10{-}2=2\ (H).$$

Задачі для самостійного розв'язування

157. Дошка гойдалки разом з людьми, що на ній сидять важить Р. Який найбільший натяг Т будуть мати мотузки гойдалки, якщо її відхилити на кут 45^0 від положення рівноваги і надати можливість гойдатися?

158. Добове обертання Землі призводить до відхилення артилерійських снарядів та куль, що випущені з рушниці, від початкового напрямку пострілу, заданого в горизонтальній площині по земних орієнтирах. Розрахувати величину поперечного зміщення x кулі, що випущена в площині меридіану в горизонтальному напрямку, за першу секунду її польоту. Постріл зроблено на широті Москви ($55^045'$), початкова швидкість кулі 1000 м/с. Вказати, в якому напрямку відхилиться куля, якщо в момент пострілу рушниця була напрямлена на південь. Опір повітря не враховувати. Розв'язати задачу в системі відліку, яка зв'язана з Землею.

159. На 60^0 північної широти поїзд масою 100 т їде з півдня на північ з швидкістю 72 км/год вздовж меридіану. Знайти величину і напрям сили, з якою поїзд діє на рейки в напрямку, перпендикулярному до ходу поїзда.

160. На 60^0 північної широти поїзд масою 100 т їде із заходу на схід з швидкістю 72 км/год вздовж географічної паралелі даної місцевості. Знайти величину і напрямок вертикальної та

горизонтальної складових сили Коріоліса, що діють на поїзд.

161. Пароплав рухається на схід вздовж паралелі з географічною широтою $\varphi=60^0$. Швидкість пароплава $v=10$ м/с. Знайти вагу тіла P на пароплаві, якщо воно зважується на пружинних терезах. Вага того ж тіла, нерухомого відносно Землі, в тій же точці земної поверхні дорівнює P_0.

162. Як будуть відрізнятися кінцеві швидкості розбігу літака, якщо літак злітає на екваторі, причому один раз він злітає з заходу на схід, а другий раз зі сходу на захід. Підйомна сила, що діє на крила літака, пропорційна квадрату його швидкості відносно Землі. Необхідна кінцева швидкість розбігу при зльоті вздовж меридіану дорівнює v_0.

163. З рушниці зроблено постріл строго вверх (тобто паралельно лінії виска). Початкова швидкість кулі $v_0=100$ м/с, географічна широта місцевості $\varphi=60^0$. Враховуючи осьове обертання Землі, наближено визначити, на скільки західніше чи східніше від місця пострілу впаде куля. Опір повітря не враховувати.

164. Під яким кутом α до вертикалі треба зробити постріл, щоби куля впала в ту ж точку, з якої була випущена? Використати дані попередньої задачі.

165. До Г- подібної підставки, що встановлена на осі відцетрової машини, прив'язана нитка довжиною l з вантажем маси m на кінці (рис. 43). 1) На який кут відхилиться від вертикалі нитка, якщо відцентрова машина обертається з кутовою швидкістю ω? 2) Який буде при цьому натяг нитки T? 3) Чи буде на нитці злам при обертанні машини, якщо до її середини прикріпити невелику масу? Розгляд питань 1) і 2) провести для двох випадків: а) для малих кутів відхилення нитки від

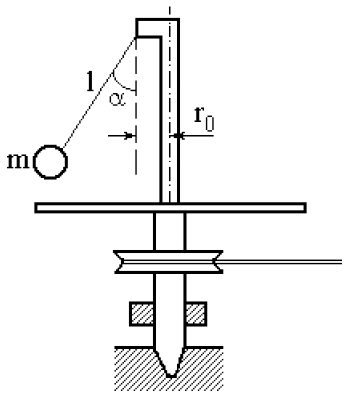

Рис.43.

вертикалі, що відповідає малій кутовій швидкості обертання машини; б) для довільної кутової швидкості. Розв’язок тригонометричного рівняння для кута α, що отримується у випадку б), провести графічним методом.

РОЗДІЛ 3. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ

Багато задач можна розв’язати за допомогою законів збереження, тому розглянемо найважливіші з них.

§3.1 Робота, потужність, енергія

Робота певної сили **F** на відрізку поступального переміщення **S** дорівнює:

$$A=(\mathbf{F},\mathbf{S})=|\mathbf{F}|\cdot|\mathbf{S}|\cos\alpha, \quad (3.1)$$

де α - кут між напрямками сили і переміщення. Якщо сила діє в напрямку руху тіла, то $\alpha=0$, $\cos\alpha=1$ і робота

$$A=F\cdot S. \quad (3.2)$$

Якщо сила діє в напрямку, протилежному до напрямку руху, то $\alpha=\pi$, $\cos\alpha=-1$ і робота

$$A=-F\cdot S. \quad (3.3)$$

Якщо кут між силою і переміщенням змінюється вздовж траєкторії руху, то для отримання роботи треба обчислити відповідний інтеграл. У випадку $\alpha=90^0$ $\cos\alpha=0$, тобто сила, перпендикулярна до напрямку руху, роботи не виконує. Прикладами таких сил є доцентрова сила при русі по колу, сила Лоренца.

Робота, виконана за одиницю часу називається потужністю:

$$N=\frac{A}{t}. \quad (3.4)$$

Якщо напрям сили і переміщення співпадають, то підставивши (3.2) в (3.4), отримаємо:

$$N=\frac{F\cdot S}{t}=F\cdot v, \quad (3.5)$$

де v - середня швидкість руху тіла.

При обертальному русі роботу виконує не сила, а момент сили, тому для обертального руху по аналогії з (3.2) можна записати:

$$A=M\cdot\varphi, \quad (3.6)$$

де M - постійний момент сили, що діє на тіло, φ - кут, на який повернулось тіло під дією цього моменту. Потужність

$$N=\frac{M\cdot\varphi}{t}=M\cdot\omega\,, \quad (3.7)$$

де ω - середня кутова швидкість. Якщо зовнішні сили виконують над системою роботу A, то повна енергія системи змінюється на величину цієї роботи

$$E_2=E_1+A. \quad (3.8)$$

E_1 і E_2 - повна енергія системи в початковому і кінцевому станах відповідно.

Методичні вказівки і поради

1. Треба пам’ятати, що потенціальна енергія в полі сил тяжіння, строго кажучи, є взаємною потенціальною енергією системи “тіло + Земля”. Відносно цієї системи сила тяжіння є внутрішньою силою. Тому при обчисленні роботи A зовнішніх сил, яка зумовлює, згідно з (3.8), зміну енергії даної системи, силу тяжіння враховувати не потрібно, якщо наявність поля тяжіння вже врахована введенням потенціальної енергії mgh. Інакше той самий ефект буде врахований двічі.

2. Треба розрізняти роботу зовнішніх сил над даною системою A і роботу самої системи на подолання цих сил A'. Ці дві роботи однакові за величиною і протилежні за знаком, тобто $A=-A'$. Це випливає з третього закону Ньютона, згідно з яким сила, що діє з боку певного тіла на систему, чисельно дорівнює і протилежно напрямлена силі, з якою система діє на дане тіло.

3. Іноді треба обчислити роботу такого переміщення системи, коли різні її частини переміщуються на різні відстані. Наприклад, відкачування води з колодязя тощо. В таких

випадках розбивають систему на елементи, обчислюють роботу по переміщенню кожного елемента, а потім підсумовують. Іншими словами, обчислюють відповідний інтеграл. Але в більшості випадків, з якими доводиться зустрічатись, має місце пряма пропорційна залежність роботи від пройденого елементом тіла шляху. Тому замість обчислення інтегралу можна обчислювати роботу по переміщенню лише однієї точки - центра ваги тіла, маса якого дорівнює масі всього тіла.

4. Якщо тіло рухається рівномірно (поступально чи обертально) середні лінійна та кутова швидкості v і ω, що входять у формули (3.5) і (3.7), збігаються з відповідними миттєвими швидкостями, які є сталими. В цьому випадку вказані формули задають не лише середні, але й миттєві значення потужностей.

§3.2. Закон збереження імпульсу

У замкнутій системі векторна сума імпульсів всіх тіл, що утворюють систему, є величина стала. Позначимо через $\mathbf{P}_i = m_i \mathbf{v}_i$ імпульс i-того тіла. Тоді математичне формулювання закону збереження імпульсу матиме вид:

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i = \mathrm{const}. \quad (3.9)$$

Наявність внутрішніх сил не впливає на збереження імпульсу системи як цілого. При наявності зовнішніх сил зберігаються тільки проекції вектора **P** на напрямки, перпендикулярні рівнодійній силі.

Методичні вказівки і поради

При розв'язуванні задач на закон збереження імпульсу доцільно користуватись такою схемою.

1. Зробити два рисунки і на них схематично стрілками позначити імпульси всіх тіл системи "до" та "після" взаємодії.

2. Записати закон збереження імпульсу у векторній формі:

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i = \sum_{j=1}^{m}\mathbf{P}_j\,, \quad (3.10)$$

де $\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i$ - векторна сума імпульсів тіл системи "до" взаємодії, а $\sum_{j=1}^{m}\mathbf{P}_j$ - векторна сума імпульсів тіл "після" взаємодії. $m \neq n$, тому що кількість тіл в системі "до" взаємодії не обов'язково дорівнює їх кількості "після" взаємодії.

3. Вибрати систему координат і спроектувати рівняння (3.10) на координатні осі.

4. Розв'язати отримане скалярне рівняння або систему рівнянь.

5. При розв'язуванні задач на пружні зіткнення тіл, коли треба знайти швидкості тіл після зіткнення, кількість невідомих в скалярних рівняннях, отриманих із закону збереження імпульса, перевищує число рівнянь. В цьому випадку, щоб замкнути систему, використовують закон збереження кінетичної енергії:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i'^2\,. \quad (3.11)$$

Потенціальну енергію в законі збереження можна не розглядати, бо рух тіл можна розглядати як рух в площині, і в цьому випадку потенціальна енергія лишається незмінною.

§3.3. Закон збереження моменту імпульсу

Момент кількості руху (момент імпульсу) для однієї частинки:

$$\mathbf{N}_i=[r_i,\mathbf{P}_i]=[\mathbf{r}_i,m_i\mathbf{v}_i]. \quad (3.12)$$

В замкнутій системі при відсутності дії зовнішніх моментів сил сумарний момент кількості руху є величина

стала:

$$\mathbf{N} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{N}_i = \text{const}\,. \quad (3.13)$$

Методичні вказівки і поради

1. При розв'язуванні задач на закон збереження моменту імпульсу слід звернути увагу на вільне обертання тіла навколо нерухомої осі. В цьому випадку

$$\mathbf{N}=I\omega \quad (3.14)$$

і формулу (3.13) можна записати у вигляді:

$$I\omega=\text{const}. \quad (3.15)$$

Отже при зменшенні момента інерції тіла у стільки ж разів зростає кутова швидкість обертання.

§3.4. Закон збереження енергії

У замкнутій системі при відсутності дисипативних сил сума кінетичної та потенціальної енергії всіх тіл системи є величина стала:

$$W_k+W_п=\text{const}. \quad (3.16)$$

Систему називають замкнутою, якщо на неї не діють зовнішні сили. Дисипативні сили - це сили які виконують в системі від'ємну роботу і перетворюють механічну енергію в інші види енергії. Наприклад, сили тертя. Від тертя тіла нагріваються і механічна енергія переходить в теплову. Механічна енергія зберігається фактично і при наявності зовнішніх сил, якщо робота цих сил над тілами системи дорівнює нулю.

Кінетична енергія системи являє собою суму кінетичних енергій всіх часток, що утворюють систему:

$$W_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}\,. \quad (3.17)$$

Потенціальна енергія тіл є взаємною енергією в тому розумінні, що вона залежить від взаємного розташування тіл.

Якщо позначити потенціальну енергію взаємодії двох тіл W_{ij}, то загальна потенціальна енергія системи буде:

$$W_п = \sum_{i<j} W_{ij} \,. \quad (3.18)$$

Сума ведеться по всіх парах тіл i та j, при умові i<j, оскільки $W_{ij}=W_{ji}$ і при не виконанні умови сумування енергія взаємодії кожної пари тіл увійшла б до суми (3.18) двічі.

Методичні вказівки і поради

1. Найважливішим окремим випадком є потенціальна енергія взаємодії тіла з Землею. При малих (порівняно з радіусом Землі) відстанях від її поверхні можна вважати, що вона дорівнює mgh, де m - маса тіла, h - його відстань від поверхні Землі. Оскільки маса Землі дуже велика, то рух тіла не впливає на стан Землі. Тому закон збереження енергії можна записати у вигляді:

$$\frac{mv^2}{2} + mgh = const \,. \quad (3.19)$$

Практично це означає, що при переході тіла із стану 1 в стан 2 сума кінетичної і потенціальної енергії не змінюється, тобто:

$$\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 \,. \quad (3.20)$$

Це співвідношення справедливе в будь-яких областях простору, де немає інших видів потенціальної енергії. Якщо система складається з декількох тіл, то воно виконується для кожного з них.

Застосовуючи закон збереження енергії, потрібно пам'ятати, що потенціальну енергію тіл не обов'язково відраховувати від її значення на поверхні Землі. Замість цього можна вибрати довільний рівень відліку. Зміна рівня відліку призводить лише до появи в обох частинках рівняння (3.20) однакового сталого доданка, який все одно випадає.

Приклади розв'язування задач

Якою буде середня витрата води Братської ГЕС за 1 с, якщо відомо, що її потужність N_1=4500 МВт при різниці рівнів води H=96 м; к.к.д. генератора η=98,1% та к.к.д турбіни η_1=93%?

Розв'язання

Витрата води за 1 с повинна забезпечити не лише корисну потужність, але й потужність, що витрачається в турбінах та генераторах. Тому для визначення повної витрати води за 1 с необхідно знайти потужність, що створює падаюча вода, а за цією потужністю – і витрату води. Потужність, створена падаючою водою, дорівнює

$$N = \frac{\rho g V H}{t},$$

де ρ - густина води; V - об'єм води, що протікає через турбіни за час t; H - висота падіння. Корисна потужність, що віддається гідротурбінам, дорівнює $N_1' = \eta_1 N$. Її можна розглядати як повну потужність, необхідну для обертання роторів генераторів, тоді корисна потужність, тобто потужність, що її віддають генератори, буде

$$N_1 = \eta N_1' = \eta\eta_1 N,$$

звідки

$$N = \frac{N_1}{\eta\eta_1}.$$

Порівнюючи праві частини двох рівнянь повної потужності та розв'язуючи одержане рівняння відносно шуканого об'єму води, дістанемо

$$V = \frac{N_1 t}{g\rho\eta\eta_1 H}.$$

Підставляючи до останньої формули числові значення величин, взятих в одиницях системи СІ, знаходимо

$$V = \frac{4{,}5 \cdot 10^9 \text{ Вт} \cdot 1\text{с}}{9{,}8\text{м} / \text{с}^2 \cdot 10^3 \text{кг} / \text{м}^3 \cdot 0{,}93 \cdot 0{,}981 \cdot 96\text{м}} = 5{,}2 \cdot 10^3 \text{м}^3 .$$

Паровий молот масою m=2 т падає з висоти h=2 м, створюючи під час удару силу $F=14{,}7 \cdot 10^5$ Н. Визначити тривалість удару, якщо удар непружний.

Розв'язання

Для визначення тривалості удару скористаємося другим законом Ньютона $\Delta(mv)=F\Delta t$. Оскільки перед ударом молот мав кількість руху mv, а після удару вона дорівнює нулю, зміна кількості руху $\Delta(mv)=mv$. Таким чином $mv=F\Delta t$; v=? Кінцева швидкість падіння молота дорівнює $v = \sqrt{2gh}$, тоді

$$\Delta t = \frac{mv}{F} = \frac{m\sqrt{2gh}}{F} .$$

Задачу розв'язуємо в системі одиниць СІ. Оскільки формула загального розв'язку задачі складна, спочатку перевіримо, чи відповідає найменування правої частини формули найменуванню її лівої частини,

$$[t] = \frac{\text{кг} \cdot \sqrt{\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м}}}{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}} = \text{с} .$$

Як бачимо, найменування правої та лівої частини формули однакові. Підставивши числові значення величин, дістанемо

$$\Delta t = \frac{2000\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 9{,}8}}{14{,}7 \cdot 10^5} = 0{,}009(\text{с}) .$$

Сталеві кульки масами m_1=100 г та m_2=200 г підвішені на нитках довжиною по l=50 см так, що нитки паралельні, а кульки дотикаються одна до одної. Менша кулька відхилена на кут $\alpha=90^o$, після чого відпущена. Яку швидкість матиме більша кулька після удару?

Розв'язання

Менша кулька, після того як її відхилили на кут α, а потім відпустили, матиме кількість руху m_1v. Друга кулька, яка до удару була нерухома, мала кількість руху, що дорівнювала нулю. Таким чином, кількість руху даної замкненої системи до удару дорівнювала m_1v. Кількість руху кульок після удару буде $m_1u_1+m_2u_2$, де u_1 та u_2 - швидкості більшої та меншої кульок після удару.

Для визначення швидкості u_2 скористаємось законом збереження кількості руху $m_1v=m_1u_1+m_2u_2$. Оскільки до останнього рівняння входить двоє невідомих - u_1 та u_2, для їх визначення потрібно мати ще одне рівняння, яке можна одержати на основі закону збереження кінетичної енергії для абсолютно пружного удару,

$$\frac{m_1v^2}{2}=\frac{m_1u_1^2}{2}+\frac{m_2u_2^2}{2}.$$

Отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} m_1v=m_1u_1+m_2u_2 \\ m_1v^2=m_1u_1^2+m_2u_2^2 \end{cases}.$$

Якщо в обох рівняннях системи перенести вліво доданки, що містять m_1, а потім розділити друге рівняння на перше, то отримаємо $v+u_1=u_2$, звідки $u_1=u_2-v$. Підставивши цей вираз в перше рівняння системи і провівши нескладні математичні перетворення, для швидкості другої кульки після удару отримаємо вираз

$$u_2 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2}.$$

Швидкість меншої кульки знаходимо з формули $v = \sqrt{2gl}$, де l - висота падіння, що дорівнює довжині нитки. Підставляючи цей вираз в останню формулу, остаточно одержимо

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{2gl} = \frac{2 \cdot 0{,}1кг}{0{,}1кг + 0{,}2кг}\sqrt{2 \cdot 9{,}8м/с^2 \cdot 0{,}5м} \approx 2м/с.$$

Людина знаходиться в центрі горизонтальної круглої платформи, що обертається біля осі, що проходить через центр ваги людини та центр платформи. Людина тримає в руках штангу довжиною l=2 м та масою m=18 кг. Платформа при цьому робить ν=30 обертів за хвилину. Людина повертає штангу у вертикальній площині на кут φ=60°. Визначити кутову швидкість платформи після повороту штанги та роботу, яку виконала людина при цьому. Момент інерції людини вважати еквівалентним масі m_0=50 кг, що знаходиться на відстані r_0=4 см від осі обертання. Момент інерції платформи не враховувати.

Розв'язання

Розглядаючи платформу, що обертається з людиною, як замкнуту систему, можемо вважати, що момент кількості руху системи залишається сталим.

Закон збереження кількості руху для даної системи запишеться у вигляді

$$(I_0 + I_1)\omega_1 = (I_0 + I_2)\omega_2,$$

де момент інерції людини

$$I_0 = m_0 r_0 = 50кг \cdot 0{,}0016м^2 = 0{,}08кг \cdot м^2;$$

момент інерції горизонтальної штанги

$$I_1 = \frac{{}^{2}ml^2}{12} = \frac{18кг \cdot 4м^2}{12} = 6кг \cdot м^2;$$

момент інерції штанги, нахиленої на кут $\varphi=60^o$

$$I_2 = \frac{1}{12}m(l\cos\varphi)^2 = \frac{1}{12} \cdot 18кг \cdot 4м^2 \cdot 0{,}25 = 1{,}5кг \cdot м^2.$$

Кутова швидкість після нахилу штанги, що визначається із закону збереження моменту кількості руху,

$$\omega_2 = \frac{I_0 + I_1}{I_0 + I_2}\omega_1 = \frac{I_0 + I_1}{I_0 + I_2}2\pi\nu.$$

Числове значення кутової швидкості

$$\omega_2 = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 30 \cdot 6{,}08кг \cdot м^2}{60с \cdot 1{,}58кг \cdot м^2} = 12{,}1с^{-1}.$$

Робота, виконана людиною при нахилі штанги, дорівнює зміні кінетичної енергії системи, що змінила число обертів,

$$A = \frac{(I_0 + I_2)\omega_2^2}{2} - \frac{(I_0 + I_1)\omega_1^2}{2}.$$

Підставивши в цю формулу числові значення величин, дістанемо

$$A = \frac{1{,}58кг \cdot м^2 \cdot 12{,}1^2 с^{-2}}{2} - \frac{6{,}08кг \cdot м^2 \cdot 3{,}14^2 с^{-2}}{2} = 85{,}7Дж.$$

На яку відстань по дорозі під гору може вкотитися обруч за рахунок своєї кінетичної енергії, якщо перед цим він мав швидкість v=7,2 км/год, а ухил гори становить h=10 м на кожні s=100 м шляху? Тертя не враховувати.

Розв'язання

Відстань s, яку проходить обруч по дорозі, можна визначити, якщо буде відома висота h, на яку підніметься обруч, оскільки

$s = \frac{h}{\sin\alpha}$, де α - кут нахилу дороги до горизонту.

Висота, на яку підніметься обруч, буде залежати від його повної кінетичної енергії перед початком підйому. Повна кінетична енергія W дорівнює сумі його кінетичної енергії W_1 поступального та W_2 обертального рухів, тобто

$$W = W_1 + W_2 = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

але $I=mR^2$, а $\omega R=v$, тому

$$W = \frac{mv^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = mv^2.$$

Ця кінетична енергія обруча при підйомі перетвориться на потенціальну енергію

$$W_п = mgh = mgs \cdot \sin\alpha.$$

Прирівнявши вирази кінетичної і потенціальної енергій та розв'язавши одержане рівняння відносно відстані s, знаходимо

$$s = \frac{v^2}{g\sin\alpha}.$$

Підставляючи в останню формулу числові значення величин, взятих в одиницях системи СІ, знаходимо

$$s = \frac{2^2 м^2 / с^2}{9{,}8 м / с^2 \cdot 0{,}1} = 4{,}08 м.$$

Момент інерції маховика $I=10^6$ г·см^2. Через який час маховик матиме частоту обертання ν=1800 об/хв, якщо корисна потужність двигуна N=100 Вт?

Розв'язання

Час, протягом якого маховик набере частоту обертання ν, можна визначити, якщо буде відома робота, що її виконає двигун на розкручування маховика. За рахунок роботи двигуна маховик дістає кінетичну енергію. Визначивши кінетичну енергію маховика після його розкручування і знаючи потужність двигуна, можна знайти час розкручування.

Роботу A, витрачену на розкручування маховика, знаходимо за формулою A=Nt. На підставі вищезазначеного маємо

$Nt = \frac{I\omega^2}{2}$, звідки

$$t = \frac{I\omega^2}{2N}.$$

Підставляючи в останню формулу числові значення величин в одиницях системи СІ, одержимо

$$t = \frac{0{,}1\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 2^2 \cdot 3{,}14^2 \cdot 1800^2}{60^2 \text{с}^2 \cdot 2 \cdot 100\text{Вт}} = 17{,}7\text{с}.$$

Задачі для самостійного розв’язування

166. З похилої площини висотою 1м і довжиною схилу 10 м ковзає тіло масою 1 кг. Знайти кінетичну енергію біля підніжжя площини, швидкість тіла біля підніжжя площини та відстань, яку тіло пройде по горизонтальній ділянці шляху до зупинки. Коефіцієнт тертя на всьому шляху вважати однаковим і таким, що дорівнює 0,05.

167. Із залитого водою підвала, площа підлоги якого становить 50 м^2, треба відкачати воду на бруківку. Глибина води в підвалі 1,5 м, а відстань від рівня води в підвалі до рівня бруківки 5 м. Знайти роботу, яку треба виконати, щоб відкачати воду.

168. Визначити потенціальну енергію U стиснутої пружини як функцію її деформації, якщо сила деформації пропорційна третьому степеню деформації з коефіцієнтом пропорційності β.

169. Визначити відношення потенціальних енергій деформації U_1 і U_2 двох пружин з коефіцієнтами жорсткості k_1 і k_2 в двох випадках (рис. 44): 1) пружини з'єднані послідовно і розтягуються грузом P; 2) пружини висять паралельно, причому груз P підвішено в такій точці, що обидві пружини розтягуються на однакову довжину. Деформацією пружин під дією власної ваги знехтувати.

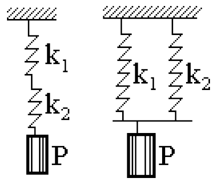

Рис.44.

170. Вантаж вагою 9,8 Н, що висить на нитці, відхиляють на кут $\alpha=30^0$ і відпускають. Знайти натяг нитки в момент проходження вантажем положення рівноваги.

171. На поверхню Землі з дуже великої віддалі падає метеорит. З якою швидкістю метеорит впав би на Землю, якщо б атмосфера не гальмувала його руху? Початкову швидкість метеорита вважати рівною нулю.

172. Знайти, яку потужність розвиває двигун автомобіля масою 1т, коли відомо, що автомобіль їде з швидкістю 36 км/год: 1) по горизонтальній дорозі; 2) по схилу гори з нахилом 5 м на кожні 100 м шляху вверх; 3) вниз по схилу гори з тим же нахилом. Коефіцієнт тертя дорівнює 0,07.

173. Вантаж масою 10 кг піднімають на висоту 10 м, діючи на нього силою 196 Н. Яка при цьому виконується робота? Яку потенціальну енергію буде мати вантаж?

174. Яку роботу треба виконати, щоб втягти тіло маси m на площину з довжиною основи l і висотою h. Коефіцієнт тертя між тілом і площиною дорівнює k, а кут нахилу площини може змінюватися вздовж площини, але його знак залишається постійним?

175. Віконна штора масою 1 кг і довжиною 2 м накручується на тонкий валик над вікном. Яка при цьому виконується робота? Тертям знехтувати.

176. Гірська річка з перерізом потоку S $м^2$ утворює водоспад висотою h м. Швидкість течії води в річці v м/с. Знайти потужність потоку водоспаду.

177. Визначити середню корисну потужність при пострілі з гладкоствольної рушниці, якщо відомо, що куля масою m вилітає із ствола з швидкістю v_0, а довжина ствола l. Тиск порохових газів під час знаходження кулі в каналі ствола вважати постійним.

178. Визначити силу, з якою гвинтівка діє на плече стрільця при пострілі, якщо вважати, що з боку гвинтівки діє постійна сила, яка зміщує плече на S=1,5 см, а куля вилітає із ствола миттєво. Маса гвинтівки 5 кг, маса кулі 10 г, швидкість кулі v=500 м/с.

179. Із артилерійської гармати, яка вільно ковзає по похилій площині і пройшла вже шлях l, робиться постріл в горизонтальному напрямку. Якою повинна бути швидкість снаряду v для того, щоб гармата зупинилась після пострілу? Виразити шукану швидкість v снаряду через його масу m, масу гармати M і кут нахилу площини до горизонту α. Врахувати, що $m \ll M$.

180. В кулю масою m_1, яка рухається з швидкістю v_1, вдаряється друга куля масою m_2, яка наздоганяє першу з швидкістю v_2. Вважаючи удар абсолютно непружним, знайти швидкість куль після удару та їх кінетичну енергію.

181. Кусок однорідного каната висить вертикально, причому його нижній кінець торкається горизонтального стола. Довести, що якщо верхній кінець каната відпустити, то в будь-який момент падіння каната сила його тиску на стіл буде втричі більшою від ваги тої частини каната, яка вже лежить на столі.

182. Який максимальний кут θ розсіювання α - частки і дейтрона при пружному розсіянні на атомі водню?

183. Дерев'яна кулька падає з висоти 2 м вертикально вниз без початкової швидкості. Коефіцієнт відновлення при ударі кульки об підлогу дорівнює 0,5. Знайти: 1) на яку висоту підніметься кулька після удару об підлогу; 2) кількість тепла, яка виділиться при ударі. Маса кульки 100 г.

184. Куля масою m_1=5 г, яка летить горизонтально з швидкістю v_1=500 м/с, попадає в тіло кулястої форми масою

m_2=0,5 кг, підвішене на легкому однорідному стержні, і застряває в ньому. При якій граничній довжині стержня (відстані від точки підвісу до центра тіла) воно від удару кулі підніметься до верхньої точки кола?

185. Два тіла рухаються назустріч одне одному і непружно стикаються. Швидкість першого тіла до удару дорівнює v_1=2 м/с, другого - v_2=4 м/с. Загальна швидкість тіл після удару збігається за напрямком з швидкістю v_1 і дорівнює v=1 м/с. У скільки разів кінетична енергія першого тіла була більша за кінетичну енергію другого?

186. З якою швидкістю v після горизонтального пострілу з гвинтівки почне рухатися стрілець, який стоїть на ковзанах на дуже гладкому льоду? Маса стрільця з гвинтівкою і спорядженням складає 70 кг, а маса кулі 10 г і її початкова швидкість 700 м/с.

187. Три човни однакової маси m пливуть один за одним з однаковою швидкістю v. Із середнього човна одночасно в передній і задній кидають із швидкістю u відносно човна вантажі масою m_1. Якими будуть швидкості човнів після перекиданя вантажів?

188. Два човни пливуть назустріч паралельними курсами. Коли човни знаходяться один напроти одного, з кожного човна в зустрічний перекидають вантаж масою 50 кг. В результаті цього перший човен зупиняється, а другий пливе з швидкістю 8,5 м/с в тому самому напрямку. Знайти швидкості човнів до перекидання вантажів, якщо їх маси з вантажами дорівнюють відповідно 500 і 1000 кг.

189. З якою швидкістю v повинен летіти снаряд масою m=10 кг, щоб при ударі об корабель маси M=100 т останній одержав швидкість v_1=0,1 м/с? Удар вважати абсолютно непружним.

190. Криголам, вдаряючись об крижину масою M, відкидає її, надавши швидкість v м/с. Нехай тиск криголама на крижину з часом рівномірно зростає при наближенні криголама до неї, а потім рівномірно спадає, коли вони віддаляються. Знайти при

цих умовах максимальну силу, з якою крижина діє на борт корабля, якщо тривалість удару τ с.

191. Тіло вагою 19,6 Н рухається з швидкістю 3 м/с і наздоганяє друге тіло вагою 29,4 Н, яке рухається з швидкістю 1 м/с. Знайти швидкість тіл після удару, якщо: 1) удар пружний; 2) удар непружний. Тіла рухаються по одній прямій, удар центральний.

192. Дві кульки різної маси m_1 і m_2 вільно підвішені на нитках різної довжини l_1 і l_2 так, що вони дотикаються (рис. 45). Першу кульку відхиляють у площині ниток на кут α і відпускають. Відбувається абсолютно пружний центральний удар. На які кути α_1 і α_2 відхиляться кульки?

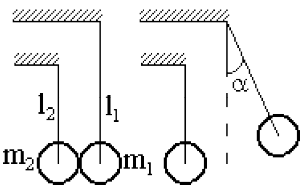

Рис.45.

193. Куля масою m=1 кг, що котиться без ковзання, вдаряється об стіну і відкочується від неї. Швидкість кулі до удару об стіну v_1=10 м/с, після удару v_2=8 м/с. Знайти кількість тепла, яка виділилася при ударі.

194. На барабан радіусом R=0,5 м намотано шнур, до кінця якого прив'язаний вантаж вагою P=100 Н. Знайти момент інерції барабана, якщо вантаж опускається з прискоренням a=2,04 м/с^2.

195. Маятник Максвелла являє собою масивний диск, вісь якого підвішена на двох накручених на неї нитках. Якщо маятник відпустити, то він буде виконувати зворотно-поступальний рух у вертикальній площині з одночасним обертанням диска навколо осі. Визначити прискорення поступального руху маятника, вважаючи, що момент інерції осі дорівнює нулю.

196. Тіло бере участь одночасно у двох рухах – поступальному та обертальному. Повна кінетична енергія $E_к=E_{пост}+E_{об}$. Довести, що повна кінетична енергія дорівнює кінетичній енергії обертання відносно миттєвої осі обертання.

197. Однорідний сосновий брус масою M і розмірами l=300

см; b=25см; h=10 см може вільно обертатись навколо осі AB (рис. 46). В точку O попадає ядро масою m=10 кг, яке летить горизотально. Якою була швидкість ядра v, якщо брус відхилився на кут $\varphi=28^0$, а ядро впало на місці удару?

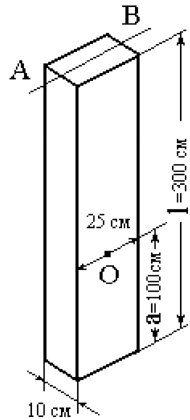

Рис.46.

198. Знайти кінетичну енергію обруча масою M, що котиться без ковзання по горизонтальній дорозі з швидкістю v. Товщину обруча вважати малою в порівнянні з його радіусом.

199. Пульсарами називаються небесні об'єкти, які посилають імпульси радіовипромінювання, які слідують один за одним з високостабільними періодами. Для відомих на теперішній час пульсарів ці періоди становлять $\sim 3\cdot 10^{-2} \div 4$ с. Згідно з сучасними уявленнями, пульсари являють собою нейтронні зірки, які обертаються і які утворилися в результаті гравітаційного стискування. Нейтронні зірки подібні до велетенських атомних ядер, що складаються з самих нейтронів. Густина речовини в нейтронній зірці неоднорідна, але при наближених оцінках її можна вважати однорідною і по порядку величини такою, що дорівнює 10^{14} г/см^3. Оцінити період обертання T, з яким би стало обертатись Сонце, якщо б воно перетворилось на нейтронну зірку. Густина Сонця зростає до його центру і різні шари обертаються з різними швидкостями. При оцінці цими обставинами знехтувати і вважати, що середня густина сонячної речовини $\rho_0=1{,}41$ г/см^3, а період обертання Сонця $T_0=2{,}2\cdot 10^6$ с.

200. Диск вагою 10 Н і діаметром 60 см обертається навколо осі, що проходить через його ценр перпендикулярно до його площини, з частотою 20 об/с. Яку роботу треба виконати, щоб зупинити диск?

201. Горизонтальна платформа масою 100 кг обертається навколо вертикальної осі, що проходить через її центр, з частотою 10 об/хв. Людина вагою 600 Н стоїть при цьому біля

краю платформи. З якою швидкістю почне обертатися платформа, якщо людина перейде від краю платформи до її центра? Вважати платформу однорідним диском, а людину - точковою масою.

202. Дерев'яний стержень масою m=1000 г і довжиною l=40 см може обертатися навколо осі, що проходить через його середину перпендикулярно до стержня. В кінець стержня попадає куля масою m_1=10 г, яка летить перпендикулярно до осі і до стержня з швидкістю v=200 м/с. Визначити: 1) кутову швидкість, якої набуде стержень, якщо куля застряває в ньому; 2) як змінилась при попаданні кулі в стержень сума їх кінетичних енергій.

203. Знайти лінійні швидкості центрів тяжіння 1) кулі, 2) диска і 3) обруча, які скочуються з похилої площини. Висота похилої площини h=0,5 м, початкова швидкість всіх тіл дорівнює нулю. 4) Порівняти знайдені швидкості з швидкістю тіла, яке зісковзує з цієї похилої площини без тертя.

204. Є два циліндри: алюмінієвий (суцільний) та свинцевий (пустотілий) - однакових радіусів R=6 см та однакової ваги P=4,9 Н. Поверхні циліндрів пофарбовані однаково. 1) Як, спостерігаючи їх поступальні швидкості біля підніжжя похилої площини можна їх розрізнити? 2) Знайти моменти інерції циліндрів. 3) За який час кожний циліндр скотиться без ковзання з похилої площини? Висота похилої площини h=0,5 м, а кут нахилу площини становить 30°. Початкові швидкості циліндрів дорівнюють нулю.

205. Хлопчик котить обруч по горизонтальній дорозі з швидкістю 7,2 км/год. На яку відстань може вкотитися обруч на гору за рахунок своєї кінетичної енергії? Ухил гори становить 10 м на кожні 100 м шляху.

206. З якої найменшої висоти h повинен з'їхати велосипедист, щоб по інерції (без тертя) проїхати доріжку, яка має форму "мертвої петлі" радіуса R=3 м, і не відірватись від неї у верхній точці петлі? Маса велосипедиста разом з велосипедом m=75 кг, причому на масу коліс припадає m_1=3

кг. Колеса велосипеда вважати обручами.

207. Мідна куля радіуса R=10 см обертається з частотою ν=2 об/с навколо осі, яка проходить через її центр. Яку роботу треба виконати, щоб збільшити частоту обертання кулі вдвоє?

208. Диск радіуса 0,2 м і масою 100 кг, обертаючись рівносповільнено при гальмуванні, зменшив за 1 хв швидкість обертання від 300 об/хв до 180 об/хв. Знайти: 1) кутове прискорення диска; 2) гальмуючий момент; 3) роботу гальмування; 4) число обертів, яке зробив диск за цю хвилину.

209. Яку роботу треба виконати, щоб примусити рухоме тіло масою 2 кг збільшити свою швидкість від 2 м/с до 5 м/с?, зупинитися при початковій швидкості 8 м/с?

210. Камінь, пущений по поверхні льоду з швидкістю 2 м/с, пройшов до повної зупинки відстань 20,4 м. Знайти коефіцієнт тертя каменя по льоду, вважаючи його постійним.

211. Вагон вагою в $2\cdot10^5$ Н, який рухається рівносповільнено під дією сили тертя 6000 Н, через деякий час зупиняється. Початкова швидкість вагона 54 км/год. Знайти: 1) роботу сили тертя; 2) відстань, яку вагон пройде до зупинки.

212. З башти висотою 25 м горизонтально кинуто камінь масою 0,2 кг з швидкістю 15 м/с. Знайти кінетичну і потенціальну енергію каменя через 1 с після початку руху. Опір повітря не враховувати.

213. Камінь масою 0,2 кг кинули під кутом $\alpha=60^o$ до горизонту з швидкістю v=15 м/с. Знайти кінетичну і потенціальну енергію каменя 1) через 1 с після початку руху; 2) в найвищій точці траєкторії. Опором повітря знехтувати.

214. Камінь вагою 20 Н впав з деякої висоти. Падіння тривало 1,43 с. Знайти кінетичну і потенціальну енергію каменя в середній точці шляху. Опором повітря знехтувати.

215. Людина вагою 600 Н, яка біжить з швидкістю 8 км/год, наздоганяє візок вагою 800 Н, який рухається з швидкістю 2,9 км/год і заскакує на нього. 1) З якою швидкістю почне рухатись візок? 2) З якою швидкістю буде рухатися візок, якщо людина бігла йому назустріч?

216. Снаряд вагою 980 Н, який летить горизонтально з

швидкістю 500 м/с вздовж залізниці, попадає в вагон з піском вагою 10^5 Н і застряває в ньому. Яку швидкість дістане вагон, якщо: 1) вагон стояв нерухомо, 2) рухається з швидкістю 36 км/год в тому ж напрямку, що і снаряд, 3) рухається з швидкістю 36 км/год назустріч снаряду?

217. Вагон вагою $19{,}6\cdot10^5$ Н рухається з швидкістю 54 км/год. Визначити середню силу, яка діє на вагон, якщо відомо, що вагон зупиняється через 1) 1 хв 40 с; 2) 10 с; 3) 1с.

РОЗДІЛ 4. КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ

§4.1. Коливання

Коливання - це процес, який періодично повторюється. Найпростішим випадком коливного руху є гармонічні коливання. Вони виникають під дією пружної, або квазіпружної сили. Квазіпружна сила - це сила не пружна по своїй природі, але по характеру залежності від зміщення подібна до пружної сили, яка має вид:

$$F=-kx, \quad (4.1)$$

де k - коефіцієнт пропорційності, або пружна стала. Згідно з другим законом Ньютона рівнянням такого руху є:

$$m\ddot{x} = -kx \cdot \quad (4.2)$$

Розв'язком такого рівняння є закон руху, який має вигляд:

$$x=A\sin(\omega_0 t+\varphi), \quad (4.3)$$

або

$$x=A\cos(\omega_0 t+\varphi). \quad (4.4)$$

Інших лінійно незалежних розв'язків рівняння (4.2) не існує. В рівняннях (4.3) та (4.4) А -амплітуда коливань, тобто максимальне відхилення від положення рівноваги; $\omega_0 t+\varphi$ - фаза коливань; φ - початкова фаза, ω_0 - циклічна частота, яка зв'язана з лінійною ν_0 співвідношенням:

$$\omega_0=2\pi\nu_0. \quad (4.5)$$

Частота - це кількість коливань за одиницю часу. Період коливань - час одного повного коливання, пов'язаний з частотою співвідношенням:

$$T = \frac{1}{\nu_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (4.6)$$

Швидкість і прискорення частки при гармонічному коливанні можна отримати, продиференціювавши, наприклад (4.3):

$$v = \dot{x} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$
$$a = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x. \quad (4.7)$$

Порівнюючи (4.7) та (4.2), одержуємо:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (4.8)$$

Коливання, які відбуваються під дією тільки пружної, або квазіпружної сили називаються власними. Їх амплітуда не залежить від часу і вони можуть тривати як завгодно довго.

Окремим випадком власних гармонічних коливань є малі коливання математичного маятника - матеріальної точки, що підвішена на ідеальній нитці довжиною l. Період таких коливань можна знайти за формулою:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (4.9)$$

Період коливань фізичного маятника - довільного твердого тіла, яке підвішене вище від центра мас в полі тяжіння, можна також звести до виду (4.9), якщо замість l ввести величину

$$L_0 = \frac{I}{ma}, \quad (4.10)$$

де I - момент інерції тіла відносно осі коливань, m - маса тіла, a - відстань від центра мас до осі обертання.

Тіло, яке змістилось з положення рівноваги на величину x, має потенціальну енергію

$$U = \frac{kx^2}{2}. \quad (4.11)$$

В реальних умовах завжди відбувається затухання коливань, яке проявляється в тому, що амплітуда коливань з часом зменшується. При наявності затухання рівняння руху має вигляд:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (4.12)$$

де $\delta = \dfrac{\gamma}{2m}$ - декремент затухання, γ - коефіцієнт пропорційності в силі опору $F_{оп} = -\gamma\dot{x}$. Розв'язком рівняння (4.12) буде

$$x=A_0e^{-\delta t}\sin(\omega_0 t+\varphi), \quad \text{або} \quad x=A_0e^{-\delta t}\cos(\omega_0 t+\varphi), \quad (4.13)$$

де A_0 - амплітуда при t=0, причому цей розв'язок є наближено вірним, якщо виконується умова

$\Theta=\delta t \ll 1$, (4.14)

де Θ - визначає зменшення амплітуди затухаючих коливань за період і називається логарифмічним декрементом затухання.

Важливим є випадок вимушених коливань, що відбуваються під дією зовнішньої перідичної сили F:

$$F=F_0\sin\omega t. \quad (4.15)$$

Рівняння руху має вид:

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = F_0 \sin\omega t, \quad (4.16)$$

а його розв'язок шукається у вигляді:

$$x=B\sin(\omega t+\alpha). \quad (4.17)$$

При цьому амплітудою і фазою вимушених коливань є:

$$B = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega_0^2\gamma^2}}; \ \alpha = \mathrm{arctg}\frac{\gamma\omega}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}. \quad (4.18)$$

Частота власних коливань ω_0 задається формулою (4.8). Якщо $\omega \approx \omega_0$, то апмлітуда досягає максимуму. Це явище називається резонансом.

Методичні вказівки і поради

Більшість задач на коливний рух, які розглядаються в курсі загальної фізики, є досить простими і розв'язуються порівнянням даних в умові задачі з загальними формулами. Зокрема це стосується кінематики коливного руху, тому для таких задач ніяких вказівок не потрібно.

Приклади розв'язування задач

Закон руху точки дано у вигляді $x = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$ см. Знайти: 1) період коливань; 2) максимальну швидкість точки; 3) максимальне прискорення.

Розв'язання

Загальний вираз для закону гармонійних коливань має вигляд (4.3). Порівнюючи його із законом руху в умові задачі, маємо $\omega = \frac{\pi}{2}$. Далі, використовуючи (4.6), для періоду дістаємо

$$T = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4c.$$

Швидкість $v = \frac{dx}{dt}$. Диференціюючи закон руху по часу, отримуємо

$$v = \pi\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ см/с.}$$

Отже, амплітудне значення швидкості $v_{max}=\pi\cdot10^{-2}$ м/с.

Прискорення $a = \frac{dv}{dt}$. Продиференціювавши швидкість по часу, дістанемо

$$a = -\frac{\pi^2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ см/с}^2,$$

звідки амплітудне значення прискорення

$$a_{max} = -\frac{\pi^2}{2} \cdot 10^{-2} \text{ м / с}^2 .$$

Задачі для самостійного розв’язування

218. Два однакових вантажі масою m зв’язані пружиною (рис. 47). Як зміниться частота власних коливань системи, якщо один з вантажів закріпити?

219. Ареометр з циліндричною трубкою діаметра D (рис. 48), який плаває в рідині, густина якої ρ, отримує невеликий вертикальний поштовх. Знайти період коливань T ареометра, якщо його маса m - відома. Рух рідини та її опір рухові ареометра не враховувати.

220. Уявіть собі шахту, що пронизує земну кулю по одному з її діаметрів. Знайти закон руху тіла, яке впало в цю шахту, враховуючи зміну значення прискорення вільного падіння всередині Землі. Тертя об стінки шахти та опір повітря не враховувати.

Рис.47.

221. Тіло обертання радіуса a з моментом інерції I (відносно геометричної осі) та масою m катається без ковзання по внутрішній поверхні циліндра радіуса R, виконуючи малі коливання відносно положення рівноваги (рис. 49). Знайти період цих коливань.

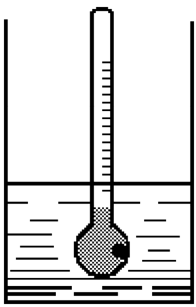
Рис.48.

222. Чому дорівнює відношення кінетичної енергії точки, що гармонічно коливається, до її потенціальної енергії для моментів часу: t=T/12 с, t=T/8 с, t=T/6 с?

223. Куля радіуса 5 см підвішена на нитці довжиною 10 см (рис. 50). Знайти похибку, яку ми робимо, прийнявши її за математичний маятник з довжиною 15 см.

224. Відомо, що енергія коливань камертона протягом часу t'=18 с зменшилась в $n=10^5$ разів. Знайти логарифмічний

декремент затухання камертона θ, якщо частота його коливань ν_0=500 Гц.

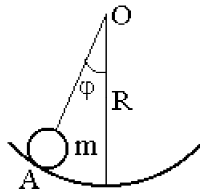

Рис.49.

225. Написати рівняння гармонічних коливань з амплітудою 5 см, якщо за 1 хв відбувається 150 коливань і початкова фаза дорівнює 45^0. Накреслити графік цього руху.

226. Амплітуда гармонічних коливань дорівнює 50 мм, період 4 с і початкова фаза 45^0. 1) Написати рівняння цих коливань. 2) Знайти зміщення від положення рівноваги точки, що коливається, при t=0 і при t=1,5 с. 3) Накреслити графік цього руху.

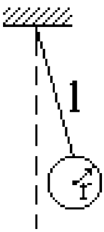

Рис.50.

227. Накреслити на одному графіку два гармонічних коливання з однаковими амплітудами ($A_1=A_2$=2 см) і однаковими періодами ($T_1=T_2$=8 с), але які мають різницю фаз: 1) $\pi/4$, 2) $\pi/2$, 3) π, 4) 2π.

228. Через який час після початку руху точка, що виконує гармонічні коливання, зміститься від положеня рівноваги на половину амплітуди? Період коливань дорівнює 24 с, початкова фаза дорівнює нулю.

229. Початкова фаза гармонічного коливання дорівнює нулю. Через яку долю періоду швидкість точки дорівнюватиме половині її максимальної швидкості?

230. Через який час після початку руху точка, що виконує гармонічні коливання за законом $x=7\sin 0{,}5\pi t$, проходить шлях від положення рівноваги до максимального зміщення?

231. Закон руху точки задано у вигляді $x=2\sin\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{4}\right)$ см. Знайти: 1) період коливань; 2) максимальну швидкість точки; 3) її максимальне прискорення.

232. Написати закон гармонічного коливання, якщо максимальне прискорення точки дорівнює 49,3 см/$с^2$, період коливань 2 с та зміщення від положення рівноваги в початковий момент часу дорівнює 25 мм.

233. Закон руху матеріальної точки масою $m=1{,}6\cdot 10^{-2}$ кг має

вигляд: $x=0{,}1\sin\left(\frac{\pi}{8}t+\frac{\pi}{4}\right)$ м. Побудувати графік залежності від часу t (в межах одного періоду) сили F, що діє на точку. Знайти значення максимальної сили.

234. Розв'язок рівняння затухаючих коливань має вигляд $x = 5e^{-0,25t}\sin\frac{\pi}{2}t$ м.Знайти швидкість точки, що коливається, для моментів часу : 0, T, 2T, 3T, 4T.

235. Математичний маятник довжиною 0,5 м був виведений з положення рівноваги. При першому коливанні він відхилився на 5 см, а при другому (в той же бік) - на 4 см. Знайти час релаксації, тобто час протягом якого амплітуда коливань зменшиться в e разів. (e - основа натуральних логарифмів).

236. Логарифмічний декремент затухання математичного маятника дорівнює 0,2. Знайти в скільки разів зменшиться амплітуда коливань за одне повне коливання маятника.

237. По грунтовій дорозі проїхав трактор і залишив сліди у вигляді ряду заглиблень, які знаходяться на віддалі 30 см одне від одного. По цій же дорозі покотили дитячий візок, який має дві ресори, кожна з яких прогинається на 2 см під дією вантажу 10 Н. З якою швидкістю треба котити візок, щоб від поштовхів на заглибленнях він попав у резонанс і почав сильно розгойдуватися? Вага візка 100 Н.

238. Побудувати графіки залежності від часу зміщення, швидкості та прискорення при простому гармонічному коливанні. Побудувати графіки залежності швидкості та прискорення від зміщення. Знайти співвідношення між амплітудами зміщення, швидкості та прискорення.

239. Знайти вирази для потенціальної, кінетичної та повної енергії матеріальної точки маси m, що коливається за законом $A\cos\omega t$.

240. Через нерухомий блок радіуса R з моментом інерції I перекинута нитка, до одного кінця якої прив'язаний вантаж масою m. Другий кінець нитки прив'язано до пружини з

закріпленим нижнім кінцем (рис. 51). Обчислити період коливань вантажу, якщо коефіцієнт жорсткості пружини дорівнює k, а нитка не може ковзати по поверхні блока.

241. До пружини прикріплено нитку, на якій висить вантаж масою m=1 кг (рис. 52). Відтягуючи вантаж вниз і відпускаючи, приводять його в коливний рух. На яку відстань x можна відтягнути вниз вантаж, щоб при коливаннях нитка весь час була натягнута? Коефіцієнт жорсткості пружини дорівнює k=50 Н/м.

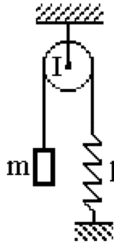

Рис.51.

242. Система виконує гармонічні коливання під дією зовнішньої сили, яка змінюється за гармонічним законом. Показати, що при резонансі робота зовнішньої сили за період буде найбільшою.

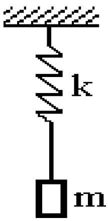

Рис.52.

243. На горизонтальній пружині закріплено тіло масою M=10 кг, що лежить на столі, по якому воно ковзає без тертя. В це тіло попадає і застряває в ньому куля масою m=10 г, яка летить горизонтально з швидкістю v=500 м/с в напрямку осі пружини (рис. 53). Тіло разом з кулею відхиляється від положення рівноваги і починає коливатися відносно нього з амплітудою A=10 см. Знайти період коливань тіла.

§4.2. Хвилі

Процес поширення коливань в пружному середовищі називається хвилею. Рівняння найпростішої хвилі можна записати у вигляді:

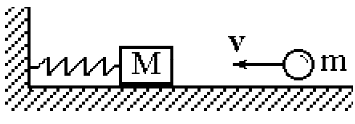

Рис.53.

$$\varepsilon(x,t) = A\sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right), \quad (4.19)$$

A - амплітуда; ω - частота коливань; v - швидкість поширення хвилі; ε(x,t) - величина зміщення від положення рівноваги точки середовища з координатою x в момент часу t.

(4.19) описує плоску хвилю, яка розповсюджується вздовж осі оX. Довжина хвилі λ - це відстань, яку пройде хвиля з швидкістю v за один період коливання частки середовища T.

$$\lambda = vT = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{v}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{v}{\lambda}. \quad (4.20).$$

Якщо в середовищі поширюється кілька когерентних хвиль, то вони інтерферують. Накладання двох когерентних хвиль з протилежними напрямками поширення і однаковими амплітудами призводить до утворення стоячої хвилі. У такій хвилі амплітуда коливань різна в різних її точках. Ті місця, де вона максимальна - називають пучностями, а де дорівнює нулю - вузлами.

Важливим окремим випадком є стоячі хвилі в обмежених трубах і стержнях. Частоти і довжини можливих стоячих хвиль можуть набувати тут лише цілком певних значень, які можна визначити, використовуючи умови на кінцях труби.

Якщо труба довжиною L закрита з обох боків, то на її кінцях будуть вузли зміщення. У такій трубі можливі стоячі хвилі з частотами ν_k і довжинами λ_k, які набувають тільки таких значень:

$$\lambda_k = \frac{2L}{k};\ \nu_k = \frac{kv}{2L};\ k = 1,2,3\ldots, (4.21)$$

де v - швидкість поширення хвилі в трубі.

Якщо труба відкрита з одного, а закрита з другого кінця, то на відкритому кінці буде пучність зміщення, а на закритому - вузол, і

$$\lambda_k = \frac{4L}{2k-1};\ \nu_k = \frac{(2k-1)v}{4L};\ k = 1,2,3\ldots, (4.22)$$

Якщо труба відкрита з обох кінців, то на її кінцях будуть пучності зміщення, а довжини і частоти стоячих хвиль, що можуть в ній утворитися, визначаються формулами (4.21).

Натягнута струна, що коливається, також має множину частот

$$\nu_k = \frac{k}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}, \text{ k=1,2,3...} \quad (4.23)$$

де L - довжина струни, T - її натяг, $\rho = M/L$ - лінійна густина, M - маса струни. Найнижча частота з k=1 називається основним тоном. Більш високі частоти називаються обертонами, або гармоніками (k=2 - другий обертон; k=3 - третій і т.д.).

Хвиля зміщень, зумовлена поширенням звуку, супроводжується хвилею тиску, причому амплітуда останньої визначється за формулою:

$$\Delta P=\rho_0 A\omega v, \quad (4.24)$$

де ρ_0 - густина середовища до приходу хвилі.

Середня в часі густина енергії хвилі, тобто середня енергія, що припадає на одиницю об’єму, зайнятого хвилею, дорівнює:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\rho_0 A^2\omega^2. \quad (4.25)$$

Середня густина потоку енергії, тобто середня в часі енергія, що проходить за одиницю часу через одиничну площадку, перпендикулярну до напрямку руху енергії, має вигляд:

$$I = \frac{1}{2}\rho_0 A^2\omega^2 v. \quad (4.26)$$

Швидкість розповсюдження акустичних коливань в деякому пружному ізотропному середовищі визначається за формулою:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (4.27)$$

де E - модуль Юнга для даного середовища, ρ - його густина.

Якщо джерело звуку або його приймач, або обидва одночасно рухаються, то частота звукових хвиль, що їх реєструє приймач, змінюється. Це явище називається ефектом Доплера. Замість частоти ν, яка відповідає нерухомому джерелу і приймачу, матимемо:

$$\nu' = \frac{v + V}{v - U}\nu . \quad (4.28)$$

v - швидкість звуку в даному середовищі; V і U - складові швидкості руху приймача та джерела вздовж лінії, яка їх з'єднує, відповідно. Складові швидкостей, перпендикулярні до цієї лінії, розглядати не треба. При цьому величину V вважають додатною, якщо приймач рухається назустріч джерелу, а U буде додатною, якщо джерело рухається до приймача. В протилежному випадку ці величини слід вважати від'ємними.

Методичні вказівки і поради

1. При переході хвилі з одного середовища в інше змінюється її швидкість поширення і довжина, а частота лишається незмінною.

2. Швидкість звуку в повітрі, якщо немає спеціальних зауважень, слід вважати відомою величиною і рівною v=330 м/с.

3. У задачах на ефект Доплера трапляються випадки, коли нема руху джерела, а є тільки рух приймача, або навпаки. В цьому випадку доцільно користуватись спрощеними формулами, які можна отримати з (4.28), а саме:

а) приймач нерухомий, джерело рухається, V=0, U≠0:

$$\nu' = \frac{\nu}{1 - \frac{U}{v}} . \quad (4.29)$$

б) джерело нерухоме, приймач рухається V≠0, U=0:

$$\nu' = (1 + \frac{V}{v})\nu . \quad (4.30)$$

При користуванні цими формулами треба обов'язково враховувати знаки V і U, тобто те, як рухаються джерело або приймач один відносно одного.

Приклади розв'язування задач

Незатухаючі коливання відбуваються за законом $x = 4\sin 600\pi t$ см. Знайти зміщення від положення рівноваги точки, що знаходиться на відстані 75 см від джерела коливання через 0,01 с після початку коливань. Швидкість розповсюдження коливань 300 м/с.

Розв'язання

Рівняння хвилі в нашому випадку

$$\varepsilon(x, t) = 4\sin 600\pi\left(t - \frac{x}{v}\right),$$

де $\varepsilon(x,\ t)$ - це зміщення точки, яка лежить на промені в залежності від часу t і відстані x від джерела, v - швидкість хвилі. Підставляючи в цей вираз дані задачі, маємо

$$\varepsilon(0{,}75;0{,}01) = 4\sin 600\pi\left(0{,}01 - \frac{0{,}75}{300}\right) = 4\text{см}.$$

Задачі для самостійного розв'язування

244. Знайти довжину хвилі коливань з періодом 10^{-14} с. Швидкість розповсюдження коливань $3\cdot10^8$ м/с.

245. Звукові коливання, що мають частоту ν=500 Гц та амплітуду A=0,25 мм, розповсюджуються в повітрі. Довжина хвилі λ=70 см. Знайти: 1) швидкість розповсюдження коливань; 2) максимальну швидкість частинок повітря.

246. Закон незатухаючих коливань має вигляд: $x=10\sin 0{,}5\pi t$ см. 1) Знайти рівняння хвилі, якщо швидкість її поширення 300 м/с. 2) Написати і зобразити графічно закон коливань для точки, яка знаходиться на відстані 600 м від джерела коливань. 3) Написати і зобразити графічно закон коливання для точок хвилі в момент t=4 с після початку коливань.

247. Закон незатухаючих коливань має вигляд $x=\sin 2{,}5\pi t$ см. Знайти зміщення від положення рівноваги, швидкість та

прискорення точки, що знаходиться на відстані 20 м від джерела коливань, для момента часу t=1 с після початку коливань. Швидкість поширення коливань дорівнює 100 м/с.

248. Зміщення від положення рівноваги точки, що знаходиться на відстані 4 см від джерела коливань, для момента t=T/6 дорівнює половині амплітуди. Знайти довжину біжучої хвилі.

249. Визначити довжину хвилі коливань, якщо відстань між першою і четвертою пучностями стоячої хвилі дорівнює 15 см.

250. Стальна струна довжиною l=100 см і діаметром d=0,05 мм дає основний тон частотою ν=256 Гц. Знайти силу її натягу.

251. Довжина струни дорівнює L=40 см. Після вкорочення струни при незмінному натязі на величину l, частота її основного тону зросла в 2 рази. Визначити l.

252. Є дві труби однакової довжини. Одна закрита з обох боків, друга - з одного кінця. Перша наповнена світильним газом, а друга – повітрям. Знайти швидкість звуку в світильному газі, коли відомо, що частота коливань, які відповідають 3-їй гармоніці першої труби збігається з частотою 4-ї гармоніки другої.

253. Знайти швидкість поширення звуку в сталі.

254. Яку довжину повинна мати стальна струна радіусом 0,05 см, щоб при натязі 980 Н вона видавала тон частотою 320 Гц.

255. Знаючи межу міцності сталі, знайти найбільшу частоту, на яку можна настроїти струну довжиною 1 м.

256. Знайти частоту основного тону струни, яка натягнута з силою F=6 кН. Довжина струни l=0,8 м, вага P=0,3 Н.

257. Летюча миша летить перпендикулярно до стіни з швидкістю v=6 м/с, випромінюючи ультразвук частотою $\nu_0=4{,}5\cdot10^4$ Гц. Звук яких двох частот чує летюча миша? $v_{зв}$=340 м/с.

258. При допомозі ехолоту вимірювалась глибина моря. Якою була ця глибина, якщо проміжки часу між випромінюванням звуку і його прийомом дорівнює 2,5 с. Коефіцієнт стиснення води $4{,}6\cdot10^{-10}$ м^2/Н, а густина морської

води 1030 кг/м^3.

259. Два поїзди їдуть назустріч один одному з швидкостями 72 км/год та 54 км/год. Перший поїзд дає свисток з частотою 600 Гц. Знайти частоту звуку, який чує пасажир другого поїзда: 1) до зустрічі поїздів; 2) після зустрічі поїздів. Швидкість звуку дорівнює 340 м/с.

260. Куля летить з швидкістю v=200 м/с. Знайти, у скільки разів зміниться висота тону її свисту для нерухомого спостерігача, повз якого пролітає куля. Швидкість звуку вважати такою, що дорівнює 333 м/с.

261. Два поїзди рухаються назустріч один одному з однаковою швидкістю. Якою повинна бути ця швидкість, щоб висота тону свистка одного з них, яку чують на другому, змінювалась в 9/8 разу? Швидкість звуку 335 м/с.

РОЗДІЛ 5. СПЕЦІАЛЬНА ТЕОРІЯ ВІДНОСНОСТІ

В спеціальній теорії відносності (СТВ) під ***подією*** розуміють все те, що відбувається в даній точці простору в даний момент часу. В СТВ розглядають тільки ***інерціальні системи відліку***, які визначаються як системи відліку, в яких справджуються три закони Ньютона. Всі інерціальні системи відліку рухаються відносно одна одної прямолінійно і поступально (з різними швидкостями). В задачах прийнято, що у всіх системах відліку осі y,y' та z,z' відповідно паралельні одна одній, а відносна швидкість двох будь-яких систем відліку напрямлена вздовж спільної осі x, x'. Швидкість системи K' відносно K позначається через V (швидкість системи K відносно K' дорівнює $-V$). Система відліку завжди зв'язана з матеріальними тілами, і тому її швидкість V завжди менша c. Тут і далі через c позначена швидкість електромагнітних хвиль (світла) у вакуумі. В кожній системі відліку можна визначити координати довільної події (в "координати" включається також час, коли відбувається подія). Перетворення Лоренца - це перетворення координат події при переході від однієї системи до іншої. Ці перетворення при переході від K до K' і від K' до K мають вигляд:

$$x' = \Gamma(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \Gamma(t - \frac{V}{c^2}x), \quad (5.1)$$

$$x = \Gamma(x' + Vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \Gamma(t' + \frac{V}{c^2}x'), \quad (5.2)$$

де

$$\Gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2} \ . \quad (5.3)$$

У (5.3) входить постійна швидкість відносного руху двох систем відліку, тому Γ - постійна величина. Перетворення Лоренца (5.1) та (5.2) припускають, що годинники, які знаходяться в обох системах відліку в стані спокою, синхронізовані за Ейнштейном, а в момент співпаданні початків відліку O та O' годинники систем відліку K і K', що знаходяться в точці O O', показують відповідно $t=0$ і $t'=0$.

Якщо розглянути дві події з координатами (x_1, y_1, z_1, t_1) і (x_2, y_2, z_2, t_2), то, записавши різниці $x'_2 - x'_1 = \Delta x', y'_2 - y'_1 = \Delta y', z'_2 - z'_1 = \Delta z', t'_2 - t'_1 = \Delta t', x_2 - x_1 = \Delta x$ і т. д. ми отримаємо зручні формули для перетворення просторових відстаней та проміжків часу між подіями:

$$\Delta x' = \Gamma(\Delta x - V\Delta t), \quad \Delta y' = \Delta y, \quad \Delta z' = \Delta z,$$

$$\Delta t' = \Gamma\left(\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x\right), \quad (5.4)$$

$$\Delta x = \Gamma(\Delta x' + V\Delta t'), \quad \Delta y = \Delta y', \quad \Delta z = \Delta z',$$

$$\Delta t = \Gamma\left(\Delta t' + \frac{V}{c^2}\Delta x'\right), \quad (5.5)$$

Проміжком ***власного часу*** між двома подіями називається проміжок часу, який відраховується в тій системі відліку, в якій ці дві події відбуваються в одній точці; проміжок власного часу відраховується одним годинником і позначається через $\Delta\tau$. Проміжок власного часу для двох даних подій можна відраховувати тільки в одній системі відліку. У всіх інших системах ці події відбуваються вже в різних точках, і проміжок часу між ними вже відраховується двома годинниками, що знаходяться в точках, де відбуваються події. Відрахований проміжок часу буде проміжком координатного часу Δt. Проміжки координатного і власного часу будуть пропорційні один одному:

$$\Delta t = \Gamma\Delta\tau . \quad (5.6)$$

При переході від однієї системи відліку до іншої компоненти швидкості перетворюються так: для переходу від K' до K

$$v_x = \frac{v_x' + V}{1 + \frac{V}{c^2}v_x'}, \quad v_y = \frac{v_y'\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{V}{c^2}v_x'}, \quad v_z = \frac{v_z'\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{V}{c^2}v_x'},$$

(5.7)

для переходу від K до K'

$$v_x' = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2}v_x}, \quad v_y' = \frac{v_y\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - \frac{V}{c^2}v_x}, \quad v_z' = \frac{v_z\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - \frac{V}{c^2}v_x}.$$

(5.8)

Сигналом в СТВ називається будь-який спосіб передачі енергії та імпульсу з однієї точки простору в іншу так, що передавши сигнал, можна ініціювати (припинити) деяке явище або увімкнути (вимкнути) деякий прилад. СТВ учить, що всяка передача енергії пов'язана з передачею імпульсу. Швидкість передачі сигналу не може перевищувати c.

Інтервалом між подіями 1 і 2 називається вираз

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}\,, \tag{5.9}$$

де (x_1, y_1, z_1, t_1) і (x_2, y_2, z_2, t_2) - координати першої та другої події.Зручно ввести позначення

$$t_{12} = t_2 - t_1 \equiv \Delta t$$

$$l_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2. \tag{5.10}$$

Тоді

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2\,. \tag{5.11}$$

Основна властивість інтервалу - його інваріантність по відношенню до перетворень Лоренца:

$$s_{12}^2 \equiv c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = s_{12}^{'2} \equiv c^2 t_{12}^{'2} - l_{12}^{'2}\,. \tag{5.12}$$

Релятивістське рівняння руху частки має вигляд

$$\frac{d}{dt}(m\gamma\mathbf{v}) = \mathbf{F}\,, \tag{5.13}$$

де

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2(t)/c^2}}\,. \tag{5.14}$$

$v = v(t)$ - швидкість частки.

Повна енергія частки

$$E = m_0 c^2 \gamma = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2(t)/c^2}}. \quad (5.15)$$

Кінетична енергія в релятивістській механіці T визначається як різниця

$$T = E - E_0 = m_0 c^2 (\gamma - 1), \quad (5.16)$$

де $E_0 = m_0 c^2$ - енергія спокою частки. У формулах (5.13) - (5.16) через m_0 позначена маса спокою. Жодна інша маса ні в формулюваннях задач, ні в розв'язках - не зустрічається.

Приклади розв'язування задач

Маючи на увазі, що положення частки в даний момент часу є подією, записати інтервал між двома такими подіями в системі K, відносно якої вона рухається, і в системі K′, відносно якої вона знаходиться в стані спокою. Через інваріантність інтервалу отримати зв'язок між проміжком власного часу між двома подіями та проміжком координатного часу між цими ж подіями.

Розв'язання

З означення інтервалу, можна записати: в системі K

$$-ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

в системі K′

$$-ds'^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2$$

Через інваріантність $ds^2 = ds'^2$. Тоді:

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2$$

Оскільки в системі K′ частка нерухома, $dx' = dy' = dz' = 0$, а $dt' = d\tau$ - власний час. Тоді будемо мати:

$$c^2\left(1-\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{c^2dt^2}\right)dt^2=c^2d\tau^2$$

$$c^2\left(1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}\right)\right)dt^2=c^2d\tau^2$$

$$c^2\left(1-\frac{1}{c^2}\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)\right)dt^2=c^2d\tau^2$$

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)dt^2=d\tau^2$$

$$d\tau=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dt$$

Знайти шлях l релятивістської зарядженої частки з зарядом e і масою m при початковій повній енергії E_0 в гальмуючому однорідному електричному полі напруженістю E, паралельному початковій швидкості частки.

Розв'язання

Повна енергія частки є сумою кінетичної енергії та енергії спокою:

$$E_0=E_k+m_0c^2$$

Гальмуюча сила, що діє на частку в даному полі

$$F_г=eE,$$

а її робота на шляху l дорівнює

$$A=F_гl=eEl.$$

Із закону збереження енергії кінетична енергія частки повністю використовується на роботу проти сил поля, тобто

$E_к = A$,

$$E_0 - m_0c^2 = Eel \cdot$$

Звідси

$$l = \frac{1}{Ee}\left(E_0 - m_0c^2\right).$$

Задачі для самостійного розв'язування

262. Вздовж осі X інерціальної системи відліку К рухається ракета з швидкістю V=0,9c (c - швидкість світла) і проходить початок координат O в момент часу t=0. В момент t_1=9 с навздогін ракеті посилається світловий сигнал з точки O, а з ракети - світловий сигнал в точку O. Вважаючи, що ракета рухається у вакуумі, знайти: 1) момент часу t_2, коли світловий сигнал, надісланий з точки O, наздожене ракету; 2) момент часу t_3, коли сигнал, надісланий з ракети, досягне точки O; 3) на якій відстані x_2 від точки O буде ракета, коли до неї прийде сигнал з точки O; 4) коли повернеться в точку O світловий промінь, відбитий від дзеркала, що встановлено на ракеті (момент часу t_4)?

263. Космічний корабель рухається з постійною швидкістю V=(24/25)c до центра Землі. Яку відстань в системі відліку, зв'язаній з Землею, пройде корабель за час $\Delta t'$=7 с, відрахований по корабельному годиннику? Обертання Землі та її орбітальний рух не враховувати.

264. Стержень, власна довжина якого дорівнює l_0, перебуває в стані спокою в системі K′. Він розміщений так, що утворює кут φ′ з віссю X′. Який кут складатиме цей стержень з віссю X іншої системи К, відносно якої рухається K′? Чому дорівнює довжина цього стержня в системі К?

265. Нехай в системі К рух частки задано рівняннями x=x(t), y=y(t), z=z(t). Визначаючи швидкість звичайними формулами, наприклад, $v_x = dx/dt$ і т. д., та застосовуючи перетворення

Лоренца, знайти формули перетворення швидкостей при переході від системи відліку К до системи К′, де відповідно $v'_x = dx'/dt'$ і т. д.

266. З допомогою формул перетворення швидкостей отримати результати досліду Фізо. В цьому досліді в лабораторній системі відліку визначалась швидкість світла у воді, яка текла з швидкістю V. В результаті досліду Фізо отримав для швидкості світла значення $v = \frac{c}{n} + V\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, де n - показник заломлення води. Якого порядку члени відносно V/c відкинуті при виводі теоретичної формули?

267. Знайти умову того, що можна підібрати таку систему К′, в якій дві події, що відбуваються в системі відліку К в різних точках простору і в різні моменти часу, відбувались би: 1) в одній точці системи К′; 2) одночасно в системі К′; 3) відбувались би в системі К′ в одній точці і в один і той же момент часу.

268. Порівняти величину релятивістського і класичного імпульсів електрона при швидкості v=(24/25)c=0,96c.

269. На 1 м^2 поверхні, яка перпендикулярна до напрямку сонячних променів, біля Землі, поза її атмосферою приходить приблизно 1,4 кВт світлової енергії Сонця. (Значення 1,4 кВт/м^2 називається сонячною постійною). Яку масу втрачає Сонце за одну секунду випромінювання? На який час вистачить 0,1 маси Сонця, щоб підтримувати його випромінювання? Відстань від Сонця до Землі складає $150\cdot10^6$ км. Маса Сонця $2\cdot10^{30}$ кг.

270. Виразити релятивістський імпульс частки масою m через її релятивістську кінетичну енергію.

271. На частку масою m_1, що знаходиться в стані спокою, налітає частка масою m_2, кінетична енергія якої дорівнює T_2. Після зіткнення частки злипаються і рухаються як одне ціле. Знайти масу частки, що утворилася. При якій умові ця маса дорівнює сумі мас вихідних часток? Знайти швидкість частки, що утворилась.

272. Електрон летить зі швидкістю $v=0{,}9c$. Визначити кінетичну енергію та імпульс електрона в мегаелектронвольтах.

273. Іон, вилетівши з прискорювача, випромінив фотон в напрямку свого руху. Визначити швидкість фотона відносно прискорювача, якщо швидкість іона відносно прискорювача 0,8с.

274. На скільки процентів релятивістська маса частки більша від маси спокою при швидкості $v=30\cdot10^6$ м/с?

275. При якій швидкості v кінетична енергія частки дорівнює її енергії спокою?

276. Власний час життя τ_0 μ - мезона дорівнює 2мкс. Від точки народження до точки розпаду в лабораторній системі відліку μ - мезон пролетів відстань $l=6$ км. З якою швидкістю в долях швидкості світла рухався мезон?

277. При непружному зіткненні частки, що мала імпульс $p=m_0c$, з такою ж нерухомою часткою, утворюється складна частка. Знайти: 1) швидкість v частки (в долях c) до зіткнення; 2) релятивістську масу частки, що утворилася (в долях m_0); 3) швидкість частки, що утворилася; 4) масу спокою частки, що утворилася (в одиницях m_0); 5) кінетичну енергію частки до зіткнення і кінетичну енергію частки, що утворилася (в одиницях m_0c^2).

Відповіді

Розділ 1

1. $n\Big/\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{v_i}$. **2.** $\sum\limits_{i=1}^{n}v_i\Big/n$. **3.** $<v>=\tau\left(\dfrac{a\tau^3}{3}+\dfrac{b}{2}\right)$.

4. $S=S_0+\frac{1}{k}\ln(1+v_0kt)$.

6. $v_к=17{,}5$ км/год, $v_т=7{,}5$ км/год.

7. $\varphi=105^o$, кут між прямими АВ і ВС.

8. $|v|=\sqrt{5}$ м/с, вектор швидкості складає з берегом річки, від якого віддаляється човен, кут α=63°30′.

9. Курс човна повинен складати кут α=39° з прямою, яка з'єднує пристані; v=0,62 м/с.

10. Труба повинна бути нахилена від вертикалі вперед, по ходу візка, на кут $\alpha=\mathrm{arctg}(v_{В/}v_К)$.

11. S=500t, S(3)=1500 км. **12.** $t_{max} = ld/(fv\sin^2\alpha)$.

13. v=5 км/год. **14.** $x = v\sqrt{\frac{2h}{g}\frac{(1+\alpha)}{(1-\alpha)}}$.

15. 1) $v_x = v_0\cos\varphi$; $v_y = v_0\sin\varphi - gt$;

$v=\sqrt{v_0^2+g^2t^2-2v_0\sin\varphi\cdot gt}$, 2) $T=\frac{2v_0\sin\varphi}{g}$,

3) $\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}\varphi - \frac{gt}{v_0\cos\varphi}$, 4) $x = v_0 t\cos\varphi$,

$y = v_0 t\sin\varphi - \frac{gt^2}{2}$, 5) $y = x\,\mathrm{tg}\varphi - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\varphi}$,

6) $h_{max} = \frac{v_0^2\sin^2\varphi}{2g}$, 7) $l = \frac{v_0^2\sin 2\varphi}{g}$, φ^*=45°.

16. $h_1:h_2:h_3=3:2:1$; $l_1:l_2:l_3=\sqrt{3}:2:\sqrt{3}$.

17. $|\mathbf{v}|$=a; $|\mathbf{w}|$=aω; $\mathbf{v}\perp\mathbf{w}$; рух по колу радіуса $R=\frac{a}{\omega}$.

18. $v=\frac{\alpha^2}{2}t$; $a=\frac{\alpha^2}{2}$; $<v>=\frac{\alpha\sqrt{S}}{2}$. **19.** 1) 0,1 с; 2) 0,3 м.

20. 90°, 5 м. **21.** 4 м. **22.** $\varphi = \arccos\left[(v_1+v_2)/v_0\right]$.

23. 14,1 см/с. **24.** $a \cong -3$ м/с^2; $v_0 \cong 11,4$ м/с. **28.** $v = \sqrt{La}$.

31. $v_0=82$ м/с. **32.** 6,2 м/с. **33.** $S = 2v_0 t$. **34.** В найвищій.

35. 1) $v_0=14,7$ м/с, 2) $h=11$ м. **36** 1) $t=2,9$ с, 2) $h_1=4h=40$ м..
37. 1) 8,4 с, 2) 7,3 с, 3) 7,8 с. **39.** 1) 0,049 м, 2) 1,9 м.
40. 1) 0,45 с, 2) 0,05 с. **41.** 1) $h=57$ м, 2) $t=3,4$ с
42. $x=h-v_1 t$.
43. 1) $h=1,22$ м, 2) $v_0=10$ м/с, 3) $v=11,1$ м/с, 4) $\varphi=26^{\circ}12'$.
44. 1) $v_0=11,1$ м/с, 2) $\varphi=68^{\circ}12'$. **45.** $v_0=4,4$ м/с.
46. $a_\tau=5,4$ м/с^2, $a_n=8,2$ м/с^2. **47.** $R=305$ м.
48. 1) 2,1 м, 2) 10 м, 3) 1,3 с, 4) 8,37 м/с. **49.** 16,23 м.
50. 10 с. **51.** 3,5 хв. **52.** 4 с$^{-2}$; $\varphi=2t^2$. **53.** Шукана вісь складає з горизонтом кут $\alpha=\mathrm{arctg}0,2$; $\omega = \omega_1\sqrt{1,04}$. **54.** $\cong 8$ обертів.

55. $a_\tau=19,6$ м/с^2, $a_n=3,7$ м/с^2. Швидкість збільшується, оскільки $a_\tau>0$. **56.** 1) 2 с, 2) 2,8 с. **57.** 0,1 м/с^2. **58.** 0,01 м/с^2.
59. 1) 3,14 рад/с, 2) 0,314 м/с, 3) 0,314 м/с^2, 4) 0,986 м/с^2, 5) 1,03 м/с^2, 6) $\alpha=17^0 46'$. **60.** 0,00093 с$^{-1}$. **61.** 72 км/с.
62. $a_n=0,03\cos\varphi$ м/с^2 і $a_R=0,03\cos^2\varphi$ м/с^2, де φ - географічна широта. Для Москви $a_n=0,017$ м/с^2 і $a_R=0,01$ м/с^2.

63. $\beta = \dfrac{\pi N^2}{n}$. **64.** $a_n=0,6$ м/с^2, $a_{повне}=0,67$ м/с^2, $\mathbf{a}_{повне}$^$\mathbf{R}=153^0$.

65. 0,43 рад/с^2. **66.** 6,1 м. **67.** 1) $\omega=14$ рад/с; 2) $v=1,4$ м/с; 3) $\beta=12$ рад/с^2; 4) $a_\tau=1,2$ м/с^2; $a_n=19,6$ м/с^2. **68.** 1) по дотичній, 2) $\alpha=72^0 17'$, 3) $\alpha=35^0$, 4) $\alpha=15^0 32'$, 5) $\alpha=7^0 58'$, 6) $\alpha=4^0 38'$.
69. 1,2 м. **70.** 8,33 см. **71.** 1) Через 6,3 с, 2) 9,4 об. **72.** 10 с.
73. 1,26 рад/с^2; $N=360$ об. **74.** 3,2 рад/с^2. **75.** $-0,21$ рад/с^2; $N=240$ об.

76.

$$v_x = 2v_0\cos^2 \varphi/2;\ v_y = -v_0\sin\varphi;\ v = 2v_0\cos\varphi/2;\ \alpha = -\varphi/2.$$

77. $R_A = 4r;\ R_B = 2r$. **78.** $|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}|\sqrt{2}$, де $\mathbf{v}$ - швидкість кочення колеса.

79. $x = R(\varphi - \sin\varphi) = R(\omega t - \sin\omega t);\ y = R(1-\cos\varphi) = R(1-\cos\omega t)$.

80. 8R. **81.** $a_{гориз} = \frac{v^2}{R}\sin\varphi$; $a_{верт} = \frac{v^2}{R}\cos\varphi$. При рівномірному обертанні повне прискорення завжди напрямлене до центра колеса.

82. $a_n = \frac{a_\tau^2 t^2}{R} = 2\alpha R\varphi;\ a_{повне} = \frac{a_\tau}{R}\sqrt{R^2 + a_\tau^2 t^4} = \alpha R\sqrt{1+4\varphi^2}$;

$$tg\beta = -\frac{R}{a_\tau t^2} = -\frac{1}{2\varphi}$$

83. $tg\alpha=1,25$.

Розділ 2

84. 1) 4,9 Н, 2) 14,7 Н, 3) 8,8 Н. **85.** $f=1,63$ Н, $f_1=3,26$ Н.

86. $a = \frac{m}{m+M}g;\ T = \frac{mM}{m+M}g$.

87. $a = \frac{M}{M+m_1+m_2+m_3}g;\ T_1 = (m_1+m_2+m_3)a$;

$T_2 = (m_2+m_3)a;\ T_3 = m_3 a$.

88. $F_1=4/5F$. **89.** $a = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g;\ T = \frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}g;\ F = 2T$.

90. $a \geq 0,98$ м/с^2. **91.** $F \geq 22,5$ Н. **92.** $\Delta M = 2\left(M - P/g\right)$.

93. $a = g(\sin\alpha - k\cos\alpha)$. **94.** $F \geq 39,2$ Н. **95.** Не зміниться.

98. $a_1 = \frac{2(2m_1-m_2)}{4m_1+m_2}g;\ a_2 = -\frac{a_1}{2};\ T = \frac{3m_1m_2}{4m_1+m_2}g$.

99. $a_1 = \dfrac{m_1(m_2+m_3)-4m_2m_3}{m_1(m_2+m_3)+4m_2m_3}g;$

$T_1 = \dfrac{8m_1m_2m_3}{4m_2m_3+m_1(m_2+m_3)}g;$

$T_2 = {}^{T_1}\!/_{2};\ a_2+a_3+2a_1=0.$

100. 8200 Н. **101.** a=1,02 м/с^2, T=5,9 Н. **102.** 0,244 м/с^2; 6 Н.

104. $a = \dfrac{m_1\sin\alpha - m_2}{m_1+m_2}g;\ \ T = \dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}(1+\sin\alpha)g.$

105. $F=(1+4kh)mg;\ a=4kgh$. **106.** 1) h=2,5R; 2) на візок діє сила тяжіння mg і сила тиску рейок $\dfrac{mv^2}{R}-mg$, де v - швидкість візка в даній точці; 3) не доходячи до верхньої точки візок відокремиться від рейок і буде рухатися по параболі до зустрічі з рейками в нижній точці петлі.

107. $\omega^2 = \dfrac{g(\cos\alpha - k\sin\alpha)}{h\cdot tg\alpha(\cos\alpha + k\sin\alpha)}$. **108.** $h = {}^{R}\!/_{3}$. **109.** 0,41 м.

111. $tg\alpha = \dfrac{v^2}{Rg}$**;** α=22^0.

112. $1)F=mg;\ 2)F=mg-\dfrac{mv^2}{R};\ 3)F=mg+\dfrac{mv^2}{R}.$

113. $v_{0\min}=\sqrt{Rg}$. **114.** 8 км/с. **115.** k≅0,4.

116. В нижній ≅5,63 кН; в верхній ≅4,03 кН.

117. $R=\dfrac{10v^2}{g\sqrt{n(2+0{,}01n)}}$. **118.** Загальмувати. **119.** 1,92mg.

121. $R = v^2 / (g \cdot \mathrm{tg}\alpha)$.

122. $a_2 = -a_1 = \dfrac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + \dfrac{I}{r^2}} g$; $T_1 = \dfrac{2m_1 m_2 g + m_1 g \, I/r^2}{m_1 + m_2 + I/r^2}$;

$T_2 = \dfrac{2m_1 m_2 g + m_2 g \, I/r^2}{m_1 + m_2 + I/r^2}$. **123.** $\beta = \dfrac{m_2 R - m_1 r}{I + m_2 R^2 + m_1 r^2} g$;

$T_1 = m_1(g + r\beta)$; $T_2 = m_2(g - R\beta)$. **124.** P=72 Н.

125. I=9,5 кг·м^2. **126.** а) 48 кг·м^2, б) 143 кг·м^2. **127.** Лозу слід рубати ділянкою шаблі, що знаходиться на 2/3 довжини від ручки. **128.** $a = \dfrac{2}{3} g \sin\alpha$. **129.** $I_0 = \dfrac{13}{24} mR^2$.

130. $a = \dfrac{F(R\cos\alpha - r)}{I + mR^2}$, де I та m - момент інерції та маса котушки відповідно; a>0, якщо $\cos\alpha > r/R$; сила тертя $f = F\cos\alpha - ma$.

131. $a = \dfrac{2(M + m)r^2}{mr^2 + MR^2 + 2(M + m)r^2} g$.

132. $T = \dfrac{Mg}{1 + Mr^2/(4mR^2)}$; $T_{рив} = Mg + \dfrac{Mhr}{\pi m R^2} T$.

133. $\varphi = \dfrac{gt^2}{2R\left(1 + \dfrac{Mg}{2P}\right)}$. **134.** $a_2 = \dfrac{2ma}{M + 4m}$. **135.** 0,5 Н.

136. $k \geq \dfrac{1}{3} \mathrm{tg}\alpha$. **137.** 1) куля, 2) в $\sqrt{15/14}$ раз на даному рівні,

3) в 15/14 раз. **138.** 1) 3,5 м/с^2; 2) 3,27 м/с^2; 3) 2,44 м/с^2; 4) 4,9 м/с^2. **139.** Вага обох тіл однакова.

140. $(P_2-P_1)/P \cong 6{,}5\cdot10^{-12}$. **141.** $(P_2-P_1)/P \cong 8\cdot10^{-10}$.

142. $F = \gamma\dfrac{m_1 m_2}{a(1+a)}$. **143.** **7,**8·10^3 м/с. **144.** $F = \dfrac{2\pi^2\gamma m\rho r^2 RL}{(R^2+L^2)^{3/2}}$.

145. 2,38 км/с. **146.** 1600 км. **147.** 974 см/с^2. **148.** 975 см/с^2.

149. 162 см/с^2. **150.** a=28g. **151.** 0,62 см/с^2.

152. $g_{С\text{-}П}=g_{М}(1+0{,}0008)$.

153. Годинник йшов би повільніше в ≈2,5 рази.

154. $R \cong 785\cdot10^6$ км. **155.** $M/m=3{,}3\cdot10^5$. **156.** $d = \sqrt[3]{M\gamma T^2 / 4\pi^2}$.

157. $T \cong 1{,}6P$. **158.** 5,8 см. **159.** F=250 Н.

160. $F_{\perp}=149$ Н, $F_{||}=253$ Н.

161. $P = P_0\left[1-\dfrac{2\omega v\cos\varphi + v^2/R}{g}\right]$.

162. $\Delta v = 2\omega_0 v_0^2/(g-\omega_0^2 R)$. **163.** $x_{зах}=51$ см. **164.** $\alpha \cong 51''$.

165. 1) $\sin\alpha = \omega^2 r_0/(g-\omega^2 l)$, 2) треба графічно розв'язати рівняння $\omega^2 l\sin\alpha + \omega^2 r_0 = g\cdot \mathrm{tg}\alpha$.

Розділ 3

166. $W_k=4{,}9$ Дж; v=3,1 м/с; S=10 м. **167.** 4,3 МДж.

168. $U = \dfrac{\beta x^4}{4}$. **169.** 1) $\dfrac{U_1}{U_2} = \dfrac{k_2}{k_1}$; 2) $\dfrac{U_1}{U_2} = \dfrac{k_1}{k_2}$. **170.** 12,4 Н.

171. 11,2 км/с. **172.** 1) 6,9 кВт; 2) 11,8 кВт; 3) 1,98 кВт.

173. 2 кДж; 1кДж. **174.** $A = mg(H+kl)$. **175.** 10 Дж.

176. $N = \frac{1000}{75} Svh$ к. с. **177.** $N = {mv_0^3}/{41}$. **178.** 170 Н.

179. $v = \frac{M}{m} \frac{\sqrt{2gl\sin\alpha}}{\cos\alpha}$. **180.** $v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$;

$K = \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$. **182.** Для α - частки $\theta=14^0 30'$, для дейтрона $\theta=30^0$. **183.** 1) 0,5 м; 2) 1,48 Дж. **184.** 0,64 м.

185. В 1,25 рази. **186.** 10 см/с. **187.** $v_1 = \frac{m_1(v+u)+mv}{m+m_1}$; $v_2=v$;

$v_3 = \frac{m_1(v-u)+mv}{m+m_1}$. **188.** 9 м/с і 1 м/с. **189.** 1000 м/с.

190. $F = 2Mv/\tau$. **191.** 1) $v_1=v_2=1{,}8$ м/с; 2) $v_1=0{,}6$ м/с.

192. $\sin\frac{\alpha_1}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$; $\sin\frac{\alpha_1}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{\frac{l_1}{l_2}}$.

193. $2{,}51\cdot10^{-3}$ Дж. **194.** $I=9{,}5$ кг·м^2. **195.** $a=2/3g$. **197.** 6 м/с.
198. $K=mv^2$. **199.** $T=1{,}3\cdot10^{-3}$ с. **200.** 355 Дж. **201.** 22 об/хв.

202. $3\cdot10^3$ с$^{-1}$; $E_K^{(C)}/E_K^{(K)} \approx 3\%$. **203.** 1) 2,65 м/с; 2) 2,56 м/с; 3) 3,21 м/с; 4) 3,13 м/с. **204.** Розрізнити циліндри можна по часу скочування. Для алюмінієвого цей час становить 0,78 с, для свинцевого - 0,88 с. **205.** 4,1 м. **206.** 7,56 м. **207.** 34,1 Дж.
208. $\varepsilon=-0{,}21$ рад/с^2; $M_Г=0{,}42$ н·м; A=630 Дж; N=240 об.
209. 1) 21 Дж; 2) 64 Дж. **210.** k=0,01. **211.** 1) $2{,}25\cdot10^6$ Дж; 2) 375 м. **212.** $E_К=32{,}2$ Дж, $E_П=39{,}4$ Дж.
213. 1) $E_К=6{,}6$ Дж, $E_П=15{,}9$ Дж; 2) $E_К=5{,}7$ Дж, $E_П=16{,}8$ Дж.
214. $E_К=E_П=98{,}1$ Дж. **215.** 1) 5,14 км/год; 2) 1,71 км/год.
216. 1) 17,8 км/год; 2) 53,5 км/год; 3) −17,8 км/год. **217.** 1) 3 кН; 2) 30 кН; 3) 0,3 МН.

Розділ 4

218. Зменшиться в 1,41 рази.

219. $T=\frac{4}{D}\sqrt{\frac{\pi m}{\rho g}}$. **220.** Гармонійні коливання з періодом

$T=2\pi\sqrt{R_0/g_0}$. **221.** $T=2\pi\sqrt{\frac{7}{5}\frac{R-a}{g}}$. **222.** 1/3; 1; 3.

223. Відносна похибка становить 0,02. **224.** $\theta=6{,}4\cdot10^{-4}$.
228. 2 с. **229.** 1/6T. **230.** Через 1 с. **231.** 1) 4с, 2) $3{,}14\cdot10^{-2}$ м/с, 3) $4{,}93\cdot10^{-2}$ м/с^2. **233.** $24{,}6\cdot10^{-5}$ Н. **234.** v_1=7,85 м/с, v_2=2,88 м/с, v_3=1,06 м/с, v_4=0,39 м/с, v_5=0,14 м/с. **235.** 6,4 с.

236. В 1,22 рази. **237.** 1,7 км/год. **240.** $T=2\pi\sqrt{\left(I/r^2+m\right)/k}$.

241. $x\leq mg/k$=20 см. **243.** 1,26 с. **244.** $3\cdot10^{-6}$ м. **245.** 1) 350 м/с, 2) 0,785 м/с. **247.** x=0; $v=7{,}85\cdot10^{-2}$ м/с; a=0. **248.** 0,48 м.
249. 0,1 м. **250.** 0,4 кН. **251.** 20 см. **252.** 385 м/с. **253.** 5300 м/с.
254. 0,63 м. **255.** 158 Гц. **256.** 250 Гц. **257.** $4{,}5\cdot10^4$ Гц і $4{,}66\cdot10^4$ Гц. **258.** 1810 м. **259.** 1) 666 Гц, 2) 542 Гц.
260. В 4 рази. **261.** 71 км/год.

Розділ 5

262. t_2=10 с, t_3=9,9 с, t_4=11 с.

263. S=24 сτ. **264.** $l=l_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}\cos^2\varphi'}$, $tg\varphi=\Gamma tg\varphi'$.

267. 1) Якщо $l'_{12}=0$, то $s^2_{12}=c^2t'^2_{12}\geq0$, 2) якщо $t'_{12}=0$, $s^2_{12}=-l'^2_{12}\leq0$, 3) якщо $l'_{12}=0$, $t'_{12}=0$, то це означає $l_{12}=0$, $t_{12}=0$ (за вийнятком випадку, коли розповсюджується світловий сигнал).

268. Так як $\mathbf{p}_r = m\gamma\mathbf{v}$, а $\mathbf{p}_0 = m\mathbf{v}$, то їх відмінність визначається множником $\gamma = 25/7$. **269.** $4 \cdot 10^6$ кг/с, $\approx 10^{15}$ років.

270. $pc = \sqrt{T(T + 2mc^2)}$.

271. $V = \dfrac{c^2}{E} P = \dfrac{\sqrt{T_2(T_2 + 2m_2c^2)}}{(m_1 + m_2)c^2 + T_2^2}$.

272. $p = 5{,}6 \cdot 10^{-2}$ кг·м/с, T=0,66 Мев. **273.** с. **274.** 0,5%.
275. 260 Мм/с. **276.** 0,995.
277. 1) 0,707c, 2) $2{,}4142m_0$, 3) 0,414c, 4) $2{,}1976m_0$, 5) $0{,}414m_0c^2$.

Додаток

Таблиця 1. **Фундаментальні фізичні константи**

Константа	Позначення	Числове значення
Швидкість світла	c	$3\cdot10^{8}$ м/с
Гравітаційна стала	γ	$6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м²·кг$^{-2}$
Стала Авогадро	N_A	$6{,}022\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$
Стала Лошмідта	L	$2{,}69\cdot10^{25}$ м$^{-3}$
Універсальна газова стала	R	8,314 Дж/(моль·К)
Стандартний об'єм газу	V_m	$22{,}42\cdot10^{-3}$ м^{3}/моль
Елементарний заряд	e	$1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл
Маса спокою електрона	m_e	$9{,}11\cdot10^{-31}$ кг
Питомий заряд електрона	e/m_e	$1{,}76\cdot10^{11}$ Кл/кг
Стала Фарадея	F	$9{,}65\cdot10^{4}$ Кл/моль
Атомна одиниця маси	а.о.м.	$1{,}66\cdot10^{-27}$ кг
Електрична стала	ε_0	$8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м
Магнітна стала	μ_0	$4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м
Стала Планка	h	$6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с

Таблиця 2. **Густина речовин ρ, кг/м^3**

Гази при нормальних умовах (T=273,15 K, P=$1{,}01\cdot10^{5}$ Па)

Азот	1,250	Кисень	1,429
Водень	0,089	Метан	0,717
Вуглекислий газ	1,977	Неон	0,900
Гелій	0,178	Повітря	1,293

Рідини

Бензол (t=20°C)	879	Скипидар (t=16°C)	858
Вода (t=4°C)	1000	Спирт етиловий (t=0°C)	789
Вода (t=100°C)	958	Спирт метиловий (t=0°C)	792
Гас (t=0°C)	800	Толуол (t=18°C)	870
Гліцерин (t=0°C)	1260	Ртуть (t=0°C)	13596

Тверді тіла при 293 К ($\rho \times 10^{-3}$)

Алюміній	2,69	Олово лите	7,23
Залізо	7,86	Сталь лита	7,7 - 8,0
Латунь	8,3 - 8,7	Свинець	11,22 - 11,44
Лід ($t=0^oC$)	0,91	Срібло	10,42 - 10,57
Мідь	8,88 - 8,96	Цинк	6,86 - 7,24
Нікель	8,4 - 9,2	Чавун	6,6 - 7,3

Таблиця 3. **Пружні властивості твердих тіл**

Модуль Юнга E, Па; модуль зсуву G, Па; коефіцієнт Пуассона μ; границя міцності σ_μ, Па.

Матеріал	$E \cdot 10^{-10}$	$G \cdot 10^{-10}$	μ	$\sigma_\mu \cdot 10^{-8}$
Алюміній	6,1 - 7,4	2,2 - 2,6	0,33	0,98 - 3,90
Залізо	20 - 22	6,9 - 8,3	0,28	3,90 - 5,90
Сталь	20 - 22	7,8 - 8,1	0,28	4,9 - 15,7
Чавун	7,4 - 17,6	4,9	0,23 - 0,27	1,17 - 1,27
Латунь	7,8 - 9,8	2,6 - 3,6	0,3 - 0,4	0,98 - 4,90
Мідь	10 - 13	3,8 - 4,7	0,31 - 0,40	1,56 - 4,41
Свинець	1,5 - 1,7	0,54	0,44	0,0196

Таблиця 4. **Швидкість звуку v, м/с**

Середовище	v	Середовище	v
Гази при ($t=0^0C$)		*Тверді тіла (поздовжні хвилі)*	
Азот	333,63	Алюміній (25^0C)	6400
Водень	1286	Залізо ($t=17^0C$)	5930
Вуглекислий газ	260,3	Латунь ($t=25^0C$)	4280 - 4700
Гелій	970	Мідь ($t=18^0C$)	4720
Кисень	314,84	Нікель ($t=18^0C$)	4900
Повітря (сухе)	331,46	Свинець ($t=20^0C$)	2400
Рідини		Срібло ($t=20^0C$)	3700
Бензол ($t=25^0C$)	1295	Скло ($t=18^0C$)	5000 - 6000

Вода ($t=0^0C$)	1407	Цинк ($t=20^0C$)	4170
Вода ($t=20^0C$)	1482	Ебоніт ($t=17^0C$)	2700

Таблиця 5. **Деякі астрономічні сталі**

Середній радіус Землі	6370 км
Середня густина Землі	5500 кг/м^3
Маса Землі	$5{,}96 \cdot 10^{24}$ кг
Радіус Сонця	$6{,}95 \cdot 10^8$ м
Маса Сонця	$1{,}97 \cdot 10^{30}$ кг
Радіус Місяця	$1{,}74 \cdot 10^6$ м
Маса Місяця	$7{,}3 \cdot 10^{22}$ кг
Середня відстань між центрами Місяця і Землі	$3{,}84 \cdot 10^8$ м
Середня відстань між центрами Сонця і Землі	$1{,}5 \cdot 10^{11}$ м
Період обертання Місяця навколо Землі	27 діб 7 год 43 хв
Середня густина Сонця	1400 кг/м^3

Список використаних джерел

1. Беликов Б.С. Решение задач по физике. Общие методы. – М:Высшая школа, 1986. – 256 с.
2. Остроухов А.А., Стрижевський В.Л., Цвелих М.Г., Цященко Ю.П. Розв’язування задач з курсу загальної фізики. Практикум. – К: Радянська школа, 1966. – 504 с.
3. Чепуренко В.Г., Богданович А.С.. Практичні заняття з фізики.– Вид. КДУ, 1967. – 152 с.
4. Стрелков С.П., Сивухин Д.В., Угаров В.А., Яковлев И.А. Сборник задач по общей физике. Механика.– М: Наука, 1977. –288 с.
5. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики.– М: Наука, 1969. – 464 с.

Зміст

Вступ 3
Математичні доповнення 5
Розділ 1. Кінематика 11
Розділ 2. Динаміка 35
Розділ 3. Закони збереження 66
Розділ 4. Коливання і хвилі 86
Розділ 5. Спеціальна теорія відносності 100
Відповіді 108
Додаток 117
Список використаних джерел 119