Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Ю. Федьковича

ЗАДАЧІ ДЛЯ ІНЖЕНЕРІВ
(механіка і молекулярна фізика)

Чернівці

2022

ББК 22.3я73 – 4
З – 153
УДК 53(076.3)

Рекомендовано навчально-методичною радою навчально-наукового Інституту фізико-технічних та комп'ютерних наук Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, протокол №3 від 5 січня 2022 р.

З – 153

Задачі для інженерів (механіка і молекулярна фізика) / укл.: Курек І. Г., Курек Є. І., Олійнич–Лисюк А. В., Ткач О. О. – Чернівці : 2022. – 100 с.

Даний посібник – це збірник задач з двох розділів загальної фізики (механіки та молекулярної фізики). Він містить методику та приклади розв'язування типових задач з детальним аналізом кожного розв'язку. Всі задачі для самостійного роз'язування мають відповіді, що дозволить студентам самостійно провести аналіз правильності отриманих результатів. Для студентів інженерних спеціальностей, які вивчають два розділи загальної фізики протягом одного семестру і тому змушені багато працювати самостійно.

ББК 22.3я73 – 4

ВСТУП

Добре відомо, що ґрунтовне засвоєння фізики неможливе без застосування теоретичного матеріалу на практиці при розв'язуванні задач або при виконанні лабораторних робіт. Уміння правильно розв'язати та провести аналіз задачі є основним критерієм при оцінюванні глибини засвоєння матеріалу у фізиці.

Метою даного посібника є стимулювання студентів не тільки (і не стільки) до отримання правильної відповіді при розв'язуванні задачі, але й до детального аналізу процесів, які розглядаються в ній, бо отримання правильної відповіді зовсім не гарантує повного розуміння отриманих результатів.

Приступаючи до розрахунку запропонованих у задачі величин, потрібно виконати кілька стандартних кроків, які, як показує досвід, суттєво спрощують отримання кількісних результатів.

По-перше, проаналізуйте умову задачі, коротко її запишіть, зведіть усі відомі величини до однієї системи одиниць (наприклад, до SI) і намалюйте схему або рисунок, які допоможуть розібратися в суті досліджуваного явища.

По-друге, певним фізичним процесам поставте у відповідність математичні вирази, які кількісно їх описують: запишіть систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих фізичних величин.

По-третє, розв'яжіть отриману систему рівнянь.Треба завжди прагнути розв'язати задачу не тільки правильно, але й раціонально, тобто розв'язок повинен містити мінімальну кількість кроків.

І, *по-четверте*, перевірте розмірність отриманої фізичної величини, проведіть числовий розрахунок і проаналізуйте отримані результати (не всі розв'язки алгебраїчних рівнянь можуть мати фізичний зміст тощо).

Варто також пам'ятати, що у складних, нестандартних задачах часом не вистачає даних, або є зайві. Треба мати мужність розв'язувати задачу до кінця, бо завжди є надія, що невідомі врешті решт скоротяться. Взагалі правило таке: все, що не заборонено умовою задачі - дозволено, а будь-яка невизначеність трактується на свою користь.

Аналіз фізичних явищ і пошук математичних рівнянь, які відображають дане фізичне явище, зазвичай, є чи не основною проблемою при розв'язуванні фізичних задач, оскільки цей процес потребує розуміння не тільки суті фізичних процесів, але й достатнього рівня знань елементарної алгебри, геометрії, тригонометрії, а також основ математичного та векторного аналізу.

Тому, перш ніж приступити до розв'язування задач, пригадаємо деякі елементи необхідного математичного апарату.

МАТЕМАТИЧНІ ДОПОВНЕННЯ

СПЕЦІАЛЬНІ ЗНАКИ

$\sim$ – пропорційно ($y \sim x$ – y пропорційно x);

const (*constanta*) – постійна величина;

∞ – нескінченно велика величина $(const/\infty = 0)$;

$\Rightarrow$ – знак слідування ($A \Rightarrow B$ – з A випливає B).

Δ (дельта) – знак зміни чи приросту величини; $dx = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x$ – нескінченно малий приріст.

$\vec{a}, \mathbf{a}$ – вектор. ($\vec{a} = const$ – модуль і напрямок вектора постійні).

$\sum$ (сигма) – знак суми. $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + ... + \mathbf{F}_n$;

i – індекс сумування, i=1,2,3,...,n.

$\int$ – інтеграл; $\iint\limits_S$ – інтеграл по поверхні; $\oiint\limits_S$ – інтеграл по замкнутій поверхні.

$\overline{\upsilon}, <\upsilon>$ – середнє значення.

$||$, $\uparrow\uparrow$ – паралельно; $\uparrow\downarrow$ – антипаралельно.

$\perp$ – перпендикулярно (нормально).

$|x|$ – модуль (абсолютне значення):

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

ВЕКТОРИ

Вектор – це напрямлений відрізок. Векторна рівність $\vec{a} = \vec{b}$ означає, що:

1. Модулі векторів дорівнюють один одному: $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

2. Напрямки векторів збігаються: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

Вектори називаються колінеарними, якщо вони лежать на одній або на паралельних прямих. Вектори називаються ортогональними або нормальними, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих (кут між векторами становить 90°). Кут між векторами – це кут між напрямками.

Додавання векторів $\vec{a} + \vec{b}$

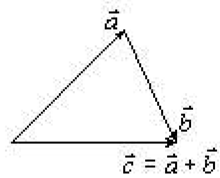

Рис. 1

Спосіб трикутника. Сумістити початок вектора $\vec{b}$ з кінцем вектора $\vec{a}$. Вектор суми $\vec{c}$ сполучає початок вектора $\vec{a}$ і кінець вектора $\vec{b}$ (рис. 1). У такий спосіб можна додавати довільну кількість векторів.

Спосіб паралелограма. Сумістити початки векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та добудувати на них паралелограм. Вектор суми $\vec{c}$ буде діагональлю паралелограма, яка проходить через спільний початок векторів-доданків (рис. 2).

Векторна сума, як і звичайна, володіє переставною $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ та комутативною $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ властивостями.

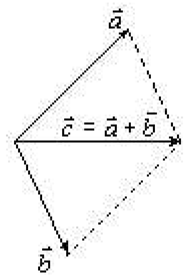

Рис. 2

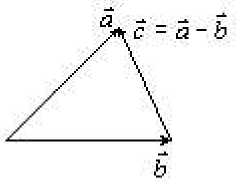

Рис. 3

Віднімання векторів $\vec{a} - \vec{b}$

Сумістити початки векторів. Вектор різниці сполучає кінці векторів і напрямлений до зменшуваного (рис. 3).

Множення вектора на число

Добутком $\lambda\vec{a}$ числа λ на вектор $\vec{a}$ у випадку $\vec{a} \neq 0, \lambda \neq 0$, називається вектор, колінеарний вектору $\vec{a}$, модуль якого дорівнює $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ і який напрямлений у той самий бік, що й вектор $\vec{a}$, якщо $\lambda > 0$, і в протилежний, якщо $\lambda < 0$. Якщо ж $\lambda = 0$ або $\vec{a} = 0$, то за визначенням $\lambda\vec{a} = 0$.

Проекція вектора на осі декартової ситеми координат

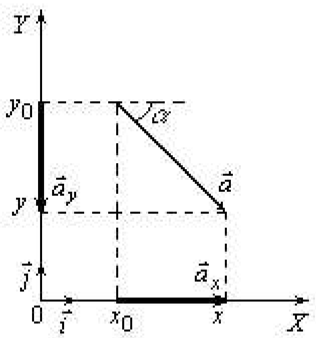

Рис. 4

З початку і кінця вектора $\vec{a}$ опускаємо перпендикуляри на осі координат (рис. 4). Вектори $\vec{a}_x$, $\vec{a}_y$, $\vec{a}_z$ – називають складовими вектора $\vec{a}$ за напрямками координатних осей, а числа $a_x = |\vec{a}_x|$, $a_y = |\vec{a}_y|$ та $a_z = |\vec{a}_z|$ – проекціями вектора $\vec{a}$ на координатні осі: $a_x = x - x_0 > 0$; $a_y = y - y_0 < 0$.

Це означає, що $\vec{a}_x$ збігається за напрямком з віссю *oX*, а $\vec{a}_y$ – не збігається з *oY*. На рис. 4 складові і проекції вектора $\vec{a}$ на вісь *oZ* не вказані. Якщо ввести одиничні вектори (орти): $\vec{i}$, який збігається з додатним напрямком осі *oX*, $\vec{j}$ – з додатним напрямком осі *oY* та $\vec{k}$ – осі *oZ*, тобто $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$; $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$, то складові вектора $\vec{a}$ можна записати у вигляді: $\vec{a}_x = a_x\vec{i}$; $\vec{a}_y = a_y\vec{j}$; $\vec{a}_z = a_z\vec{k}$, а сам вектор через складові: $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$.При цьому слід пам'ятати, що модуль вектора $|\vec{a}| \equiv a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. Якщо вектор лежить у площині XoY, як це вказано на рис. 4, то

$$a_x = a\cos\alpha\,;\; a_y = a\sin\alpha\,;\; \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a_y}{a_x}\,,$$

де α – кут між віссю oX і вектором $\vec{a}$.

Розклад вектора на складові вздовж довільних двох напрямків oX_1 та oX_2

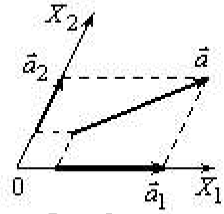

Рис. 5

Через кінець і початок вектора $\vec{a}$ проводять прямі паралельні oX_1 та oX_2 до перетину з осями і отримують складові $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$, $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$, (рис. 5).

Скалярний добуток

Позначається $(\vec{a},\vec{b}) \equiv \vec{a}\cdot\vec{b}$. Результатом є число – скаляр. $c = (\vec{a},\vec{b}) = ab\cos\alpha$, $\angle\alpha = \vec{a}\,{}^\wedge\vec{b}$. Скалярний добуток має такі властивості: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$; $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$; $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a},\vec{b})$; $(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2 = a^2 \geq 0$; $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

У декартових координатах, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задано через їх проекції $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$; $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, то $c = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$. Кут між двома векторами визначається зі співвідношення:

$$\cos\alpha = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{ab}\,,$$

де

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,,\; b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}\,.$$

Векторний добуток

Позначається $[\vec{a},\vec{b}] = \vec{a}\times\vec{b}$. Результатом векторного добутку є вектор $\vec{c}$, нормальний до площини в якій лежать вектори-множники (рис. 6). Модуль векторного добутку

$c = ab\sin\alpha$, $\angle\alpha = \vec{a}\,^\wedge\vec{b}$. Векторний добуток має наступні властивості: $[\vec{a},\vec{b}] = -[\vec{b},\vec{a}]$; $[\vec{a},(\vec{b}+\vec{c})] = [\vec{a},\vec{b}] + [\vec{a},\vec{c}]$; $[(\lambda\vec{a}),\vec{b}] = \lambda[\vec{a},\vec{b}]$; $[\vec{a},\vec{a}] = 0$; $\vec{a}\cdot[\vec{a},\vec{b}] = \vec{b}\cdot[\vec{a},\vec{b}] = 0$. Подвійний векторний добуток $[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a},\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a},\vec{b})$. У декартових координатах $[\vec{i},\vec{i}] = [\vec{j},\vec{j}] = [\vec{k},\vec{k}] = 0$; $[\vec{i},\vec{j}] = \vec{k}$; $[\vec{j},\vec{k}] = \vec{i}$; $[\vec{k},\vec{i}] = \vec{j}$. Тоді:

$$[\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k} \; .$$

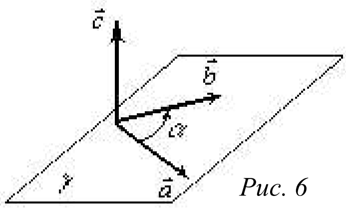

Рис. 6

Напрямок векторного добутку визначається за *правилом правого гвинта.* Якщо обертати гвинт з правою різьбою в напрямку від першого множника у векторному добутку до другого за найменшим кутом, то напрямок його поступального руху буде збігатися з напрямком результуючого вектора.

ПОХІДНА

Похідна від функції $y = f(x)$ позначається $y' = f'(x)$ або $\dfrac{dy}{dx}$. Це границя відношення приросту функції $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$ до приросту аргумента Δx при $\Delta x \to 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \; .$$

Властивості похідної

1. Похідна від суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) похідних:

$$y(x)=u(x)\pm\upsilon(x)\,; \qquad y'(x)=u'(x)\pm\upsilon'(x)\,.$$

2. Похідна від сталої величини дорівнює нулеві: $(const)'=0$.

3. Похідна від добутку двох функцій:

$$y(x)=u(x)\cdot\upsilon(x)\,; \qquad y'=u'\upsilon+u\upsilon'\,.$$

4. Похідна від частки:

$$y(x)=\frac{u(x)}{\upsilon(x)}\,; \qquad y'=\frac{u'\upsilon-u\upsilon'}{\upsilon^2}\,.$$

5. Стала виноситься за знак похідної:

$$y(x)=Cu(x)\,; \qquad y'=(Cu)'=Cu'\,.$$

6. Похідна від складної функції:

$$y(x)=u(\upsilon(x))\,; \qquad y'=u'_\upsilon\cdot\upsilon'_x=\frac{du}{d\upsilon}\cdot\frac{d\upsilon}{dx}\,.$$

Наведемо похідні від деяких простих фукцій:

$(x^a)'=ax^{a-1}$; $\quad(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$; $\quad(a^x)'=a^x\ln a$; $\quad(\ln x)'=1/x$;

$(\log_a x)'=1/(x\ln a)$; $\quad(\sin x)'=\cos x$; $\quad(\cos x)'=-\sin x$;

$(\mathrm{tg}\,x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$; $(\mathrm{ctg}\,x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

ІНТЕГРАЛ

$\int f(x)dx=F(x)+const$. Функція $F(x)$ називається первісною функції $f(x)$, або невизначеним інтегралом. Невизначений інтеграл – це функція, похідна від якої дає нам підінтегральну, тобто $\left(F(x)+const\right)'=f(x)$. Отже для отримання невизначеного інтегралу треба “вгадати” таку функцію $F(x)$, похідна від якої дає $f(x)$. Невизначений інтеграл береться з точністю до *const*, оскільки похідна від константи дорівнює нулеві.

Визначений інтеграл, тобто інтеграл з визначеними межами інтегрування, є уже не функцією, а числом. Для його обчислення існує формула Ньютона–Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Наведемо первісні для деяких простих функцій:

$\int dx = x + const$; $\int x^a dx = x^{a+1}/(a+1) + const$;

$\int \mathrm{e}^x dx = \mathrm{e}^x + const$; $\int a^x dx = a^x/\ln a + const$;

$\int 1/x\, dx = \ln x + const$; $\int \sin x dx = -\cos x + const$;

$\int \cos x dx = \sin x + const$; $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg}\, x + const$;

$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{ctg}\, x + const$;

$\int (kx+b)^n dx = (kx+b)^{n+1}/(k(n+1)) + const$;

$\int 1/(x-a)\, dx = \ln(x-a) + const$.

ВЛАСТИВОСТІ ЛОГАРИФМІВ

$a^{\log_a M} = M$; $\log_a a = 1$ $(a > 0, a \neq 1)$;

$\log_a\left(a^k\right) = k$ $(a > 0, a \neq 1)$;

$\log_a(M_1 \cdot M_2) = \log_a M_1 + \log_a M_2$, $(M_1 > 0, M_2 > 0)$;

$\log_a(M_1 / M_2) = \log_a M_1 - \log_a M_2$, $(M_1 > 0, M_2 > 0)$;

$\log_a\left(b^c\right) = c \log_a b$; $\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$; $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$.

РОЗДІЛ 1. МЕХАНІКА

1. КІНЕМАТИКА

Основні співвідношення

Механіка вивчає найпростішу форму руху матерії – механічний рух, тобто зміну положення тіла (або частин тіла) в просторі відносно інших тіл з плином часу. Класична механіка виходить з того, що властивості простору і часу не залежать від того, які матеріальні тіла беруть участь у русі, а також від того, як вони рухаються. Для того, щоб однозначно задати положення тіла в просторі потрібно мати *систему відліку*, яка складається з *тіла відліку*, пов'язаної з ним *системи координат* і *годинника*. Для опису руху тіл, в залежності від конкретних умов задачі, часто використовують різні спрощення – фізичні моделі – *матеріальна точка*, *абсолютно тверде тіло*, *абсолютно пружне тіло* тощо. Найпростішою фізичною моделлю тіла є матеріальна точка – тіло, розмірами і формою якого можна знехтувати порівняно з відстанями, які воно проходить.

Положення матеріальної точки в просторі задається *радіус-вектором* $\vec{r}$:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z\,, \tag{1.1}$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти координатних осей, а x, y, z – координати точки.

Закон руху (залежність координат від часу) для матеріальної точки в координатній формі записується так:

$$x = x(t);\ \ y = y(t);\ \ z = z(t), \tag{1.2}$$

а у векторній формі

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \tag{1.3}$$

Середня швидкість руху:

$$<\vec{\upsilon}> = \Delta\vec{r} \,/\, \Delta t\,, \tag{1.4}$$

де $\Delta\vec{r}$ – переміщення за час Δt.

Середньошляхова швидкість:

$$\upsilon = \Delta S \,/\, \Delta t\,, \tag{1.5}$$

де ΔS – шлях, пройдений тілом за час Δt.

Миттєва швидкість $\vec{\upsilon}$:

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}\,\frac{dx}{dt} + \vec{j}\,\frac{dy}{dt} + \vec{k}\,\frac{dz}{dt}. \qquad (1.6)$$

Модуль миттєвої швидкості можна знайти за формулою:

$$|\vec{\upsilon}| = \sqrt{\left(\upsilon_x^2\right) + \left(\upsilon_y^2\right) + \left(\upsilon_z^2\right)} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \qquad (1.7)$$

Миттєве прискорення $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{i}\,\frac{d\upsilon_x}{dt} + \vec{j}\,\frac{d\upsilon_y}{dt} + \vec{k}\,\frac{d\upsilon_z}{dt}. \qquad (1.8)$$

Повне прискорення при криволінійному русі можна представити як суму *нормального* $\vec{a}_n$ і *тангенційного* прискорень $\vec{a}_\tau$:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau. \qquad (1.9)$$

Модулі цих прискорень визначаються зі співвідношень:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R},\ a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt},\ a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}, \qquad (1.10)$$

де R – радіус кривизни траєкторії в даній точці.

Закон рівномірного руху матеріальної точки вздовж осі *oX*:

$$x = x_0 + \upsilon t, \qquad (1.11)$$

де x_0 – початкова координата, t – час.

При рівномірному русі

$$\upsilon = const \ \text{ і } \ a = 0. \qquad (1.12)$$

Закон рівноприскореного руху ($a = const$) вдовж осі *oX*:

$$x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2}, \qquad (1.13)$$

де υ_0 – початкова швидкість.

Швидкість точки при рівноприскореному русі:

$$\upsilon = \upsilon_0 + at. \qquad (1.14)$$

Положення твердого тіла, при заданому положенні осі обертання, визначається кутом повороту (або кутовим переміщенням) φ. *Закон обертального руху*:

$$\varphi = \varphi(t). \tag{1.15}$$

Середня кутова швидкість:

$$<\omega> = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \tag{1.16}$$

де $\Delta\varphi$ – зміна кута повороту за час Δt.

Миттєва кутова швидкість:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{1.17}$$

Кутове прискорення:

$$\beta = \frac{d\omega}{dt}. \tag{1.18}$$

Закон рівномірного обертального руху:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \tag{1.19}$$

де φ_0 – початкове кутове переміщення. При рівномірному обертанні

$$\omega = const, \quad \beta = 0 . \tag{1.20}$$

Частота обертання:

$$\nu = N/t; \qquad \nu = 1/T, \tag{1.21}$$

де N – кількість обертів, які тіло здійснює за час t; T – період обертання (час одного повного оберту).

Закон рівноприскореного обертального руху ($\beta = const$)

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2}, \tag{1.22}$$

де ω_0 – початкова кутова швидкість.

Кутова швидкість тіла при рівноприскореному обертанні змінюється за законом:

$$\omega = \omega_0 + \beta t. \tag{1.23}$$

Зв’язок між лінійними та кутовими величинами для матеріальної точки:

– шлях, пройдений точкою по дузі кола радіусом R: $S = \varphi R$, (φ – кут на який повернувся радіус-вектор точки, виражений у радіанах);

– лінійна швидкість точки: $\upsilon = \omega R$, $\vec{\upsilon} = [\vec{\omega}, \vec{R}]$;

– тангенційне прискорення: $a_\tau = \varepsilon R$, $\vec{a}_\tau = [\vec{\beta}, \vec{R}]$;

– нормальне прискорення: $a_n = \omega^2 R$, $\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{R}$.

Методичні поради

1. Розв'язування задач з кінематики можна значно спростити, якщо дотримуватись наступних правил:
– проаналізуйте умову задачі і створіть фізичну модель процесів, розглядуваних у задачі;
– за умовою задачі виберіть систему відліку в якій буде розглядатися рух тіла. Визначте початкові умови руху тіла в цій системі відліку (початкові координати, швидкості, прискорення);
– вияснiть, як рухається тіло, описане в задачі. Визначте характер руху (рівномірний, рівноприскорений, зі змінним прискоренням) та його траєкторію (пряма чи крива лінія). Такий аналіз допоможе перевірити правильність вибору фізичної моделі, зобразити модель у вигляді графіка чи схеми, а також вірно вибрати відповідні рівняння (закони) руху. Наприклад, якщо рух тіла рівноприскорений, то закон зміни швидкості можна знайти зі співвідношення:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = const \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\upsilon = adt \Rightarrow \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\upsilon' = \int_0^t adt' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon - \upsilon_0 = at \Rightarrow \upsilon = \upsilon_0 + at,$$

а закон руху зі співвідношення:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = \upsilon dt \Rightarrow \int\limits_{x_0}^{x} dx = \int\limits_{0}^{t} (\upsilon_0 + at)dt \; .$$

Проінтегрувавши цей вираз, отримаємо:

$$x - x_0 = \upsilon_0 t + a\frac{t^2}{2} \Rightarrow x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2} \; .$$

2. Схематично зобразіть рух тіла в обраній системі координат. Вкажіть відомі з умови задачі напрямки переміщень, швидкостей, прискорень, а також відповідні величини, які необхідно знайти. Оскільки практично всі величини, які характеризують рух тіла (окрім часу і шляху), є векторними, необхідно спроектувати всі відомі вектори на координатні осі.

Запишіть відповідні закони руху спочатку у векторній формі, а потім у скалярній (координатній) (див. формули (1.2) – (1.10)). Не забувайте, що для однозначного розв'язку задачі кількість рівнянь повинна дорівнювати кількості невідомих величин.

3. Для знаходження значення швидкості чи прискорення при складному русі слід скористатись правилом додавання (чи віднімання) векторів, а для визначення модуля результуючого вектора застосувати теорему косинусів.

4. Розв'яжіть отриману систему рівнянь у загальному вигляді, перевірте розмірність отриманих величин, обчисліть їх числові значення. Проаналізуйте фізичний зміст отриманих результатів.

Приклади розв'язування задач

1. Тіло кинуто під кутом α до горизонту. Знайти величину цього кута, якщо горизонтальна дальність польоту тіла S в чотири рази більша за максимальну висоту траєкторії H. Опір повітря не враховувати.

Розв'язання

Відомо, що тіло, яке кинули під кутом до горизонту, перебуває у складному русі. Через відсутність опору повітря вздовж осі oX воно рухається за інерцією – рівномірно зі

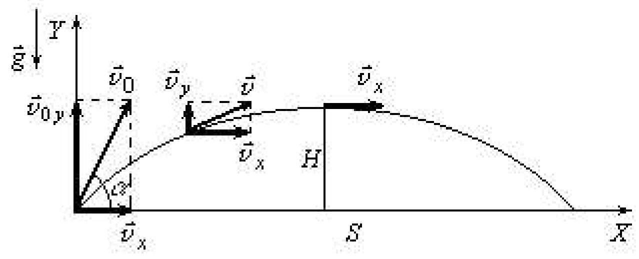

Рис. 7

швидкістю

$$v_x = v_0 \cos\alpha \,. \qquad (1)$$

По вертикалі рух рівнозмінний і відбувається під дією сили тяжіння з прискоренням вільного падіння *g*, яке напрямлене вертикально вниз (рис. 7). Тому у вертикальному напрямку рух тіла спочатку рівносповільнений (до найвищої точки траєкторії), а потім – рівноприскорений.

Час *T*, протягом якого тіло знаходилось у польоті можна визначити з основних параметрів рівномірного руху: горизонтальної дальності польоту *S* і горизонтальної складової швидкості v_x – весь шлях тіло пролетить за час

$$T = S/v_x \,. \qquad (2)$$

Знайдемо закон зміни швидкості у вертикальному напрямку. Для цього спроектуємо вектор початкової швидкості v_0 на вісь oY (див. рис. 7):

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt \,. \qquad (3)$$

Тобто в напрямку осі oY тіло рухатиметься рівносповільнено з початковою швидкістю $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$ і у найвищій точці траєкторії зупиниться. Оскільки в даній задачі ми не враховуємо опір повітря, то першу половину часу тіло буде підніматися, а другу – опускатися. Підставивши у (3) $v_y = 0$, знайдемо час польоту:

$$v_0 \sin\alpha - g\frac{T}{2} = 0 \Rightarrow \frac{T}{2} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \Rightarrow T = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \,. \qquad (4)$$

Підставимо (1) і (4) в (2) і отримаємо:

$$\frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g} = \frac{S}{\upsilon_0 \cos\alpha}. \qquad (5)$$

Запишемо систему рівнянь для визначення кута:

$$\begin{cases} \dfrac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g} = \dfrac{S}{\upsilon_0 \cos\alpha} \\ 4H = S \\ H = \dfrac{\upsilon_{0y}^2}{2g} \\ \upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha \end{cases}. \qquad (6)$$

Із даної системи, підставивши четверте і третє рівняння у друге, визначимо S:

$$S = \frac{4\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Далі, підставляємо отриманий вираз у перше рівняння системи (6) і отримуємо:

$$\frac{2\upsilon_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{4\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g}. \qquad (7)$$

З рівняння (7) випливає, що $\cos\alpha = \sin\alpha$ або $tg\alpha = 1$. З отриманого тригонометричного рівняння кут $\alpha = arctg1 = 45^{\circ}$.
Відповідь: 45°.

2. Прискорення тіла змінюється за законом $a(t) = A + Dt$. Знайти закон руху, якщо тіло рухається прямолінійно вздовж осі oX.

Розв'язання

За визначенням, прискорення – це перша похідна від швидкості за часом $a = \frac{d\upsilon}{dt}$, тому:

$$\frac{d\upsilon}{dt} = A + Dt\,. \qquad (1)$$

Ми одержали диференційне рівняння зі змінними, що розділяються. Перепишемо його у вигляді $d\upsilon = Adt + Dtdt$ і проінтегруємо отримане рівняння, важаючи, що при $t = 0$ швидкість дорівнює υ_0. Перепозначимо змінні інтегрування, щоб не плутати їх з межами інтегрування:

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\upsilon' = \int_0^t \left(Adt' + Dt'dt'\right) = \int_0^t Adt' + \int_0^t Dt'dt'\,;$$

$$\upsilon - \upsilon_0 = At + Dt^2/2\,.$$

Отже швидкість тіла змінюється за законом:

$$\upsilon = \upsilon_0 + At + D\frac{t^2}{2}\,. \qquad (2)$$

Миттєва швидкість за визначенням є першою похідною від координати за часом $\upsilon = \frac{dx}{dt}$, тому

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon_0 + At + D\frac{t^2}{2} \Rightarrow dx = \upsilon_0 dt + Atdt + \frac{D}{2}t^2 dt\,. \qquad (3)$$

Проінтегруємо отримане рівняння, важаючи, що при $t = 0$ координата тіла дорівнює x_0:

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t \upsilon_0 dt' + \int_0^t At'dt' + \int_0^t \frac{D}{2}t'^2 dt'\,;$$

$$x - x_0 = \upsilon_0 t + \frac{A}{2}t^2 + \frac{D}{6}t^3\,. \qquad (4)$$

Отже, залежність координати тіла від часу має вигляд:

$$x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{A}{2}t^2 + \frac{D}{6}t^3\,.$$

Відповідь: $x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{A}{2}t^2 + \frac{D}{6}t^3$.

Задачі для самостійного розв'язування

1.1. Дві прямі дороги перетинаються під кутом $\alpha = 60^\circ$. Від перехрестя по них віддаляються автомобілі зі швидкостями $\upsilon_1 = 60\ км/год$ і $\upsilon_2 = 80\ км/год$. Визначити швидкості υ' і υ'', з якими автомобілі віддаляються один від одного. Перехрестя автомобілі проїхали одночасно.

1.2. Три чверті свого шляху автомобіль проїхав зі швидкістю $\upsilon_1 = 60\ км/год$, а решту шляху – зі швидкістю $\upsilon_2 = 80\ км/год$. Знайти середню швидкість $<\upsilon>$ автомобіля.

1.3. Тіло пройшло першу половину шляху за час $t_1 = 2\ с$, а другу – за час $t_2 = 8\ с$. Визначити середньошляхову швидкість тіла, якщо довжина шляху $S = 20\ м$.

1.4. Закон прямолінійного руху має вигляд $x = At + Bt^2$, де $A = 3\ м/с$; $B = -0{,}25\ м/с^2$. Побудувати графік залежності координати від часу.

1.5. Закон прямолінійного руху має вигляд $x = A + Bt^3$. $A = 5\ м$, $B = -0{,}125\ м/с^3$. Побудувати графіки залежності шляху, швидкості та прискорення від часу.

1.6. Рух матеріальної точки відбувається за законом $x = At + Bt^2$, де $A = 4\ м/с$; $B = -0{,}05\ м/с^2$. Визначити момент часу, в який швидкість точки υ дорівнюватиме нулеві. Знайти кординату і прискорення в цей момент. Побудувати графіки залежності координати, шляху, швидкості та прискорення від часу.

1.7. Два тіла, рухаючись рівноприскорено, проходять деяку точку, причому друге через 2 *с* після першого. В момент проходження початку відліку перше тіло мало швидкість $\upsilon_1 = 1\ м/с$ і прискорення $a_1 = 2\ м/с^2$, а друге – швидкість $\upsilon_2 = 10\ м/с$ і прискорення $a_2 = 1\ м/с^2$. Через який час і на якій відстані від початкового положення друге тіло наздожене перше?

1.8. Рух двох матеріальних точок відбувається за законами $x_1 = A_1 + B_1 t + C_1 t^2$ і $x_2 = A_2 + B_2 t + C_2 t^2$, де $A_1 = 20\ м$; $A_2 = 2\ м$; $B_1 = B_2 = 2\ м/с$; $C_1 = -4\ м/с^2$; $C_2 = 0{,}5\ м/с^2$. У який момент часу *t* швидкості точок будуть однаковими? Знайти швидкості і прискорення точок у цей момент.

1.9. Дві матеріальні точки рухаються за законами $x_1 = A_1 t + B_1 t^2 + C_1 t^3$ і $x_2 = A_2 t + B_2 t^2 + C_2 t^3$, де $A_1 = 4\,м/с$; $A_2 = 2\,м/с$; $B_1 = 8\,м/с^2$; $B_2 = -4\,м/с^2$; $C_1 = -16\,м/с^3$; $C_2 = 1\,м/с^3$. У який момент часу t прискорення точок будуть однаковими? Знайти швидкості точок у цей момент.

1.10. З якої висоти H впало тіло, якщо останній метр свого шляху воно пройшло за час $t = 0{,}1\,с$?

1.11. Рух матеріальної точки відбувається за законом $x = At + Bt^2$, де $A = 2\,м/с$; $B = -0{,}5\,м/с^2$. Знайти середню швидкість $<\upsilon>$ точки в інтервалі часу від $t_1 = 1\,с$ до $t_2 = 3\,с$.

1.12. Рух матеріальної точки відбувається за законом $x = At + Bt^3$, де $A = 6\,м/с$; $B = -0{,}125\,м/с^3$. Знайти середню швидкість $<\upsilon>$ точки в інтервалі часу від $t_1 = 2\,с$ до $t_2 = 6\,с$.

1.13. Закон прямолінійного руху має вигляд $x = A + Bt^2$, де $A = 3\,м$, $B = -0{,}25\,м/с^2$. Визначити середньошляхову швидкість $<\upsilon>$ між другою і шостою секундами.

1.14. Закон руху матеріальної точки в площині xOy має вигляд: $x = At$, $y = At(1 + Bt)$, де A і B – додатні сталі. Визначити: 1) рівняння траєкторії матеріальної точки $y(x)$; 2) залежність радіус-вектора $\vec{r}$ точки від часу; 3) модуль вектора швидкості $\vec{\upsilon}$ точки, як функцію часу; 4) модуль вектора прискорення $\vec{a}$ точки, як функцію часу.

1.15. Матеріальна точка рухається вздовж прямої так, що її прискорення змінюється з часом за законом $a = kt$ і за перші 10 *с* набуває значення 5 $м/с^2$. Визначити наприкінці десятої секунди: 1) швидкість точки; 2) шлях, який пройшла точка.

1.16. Прискорення тіла змінюється за законом $a(t) = A + Dt$. Записати закон, за яким змінюється з часом швидкість та координата цього тіла.

1.17. Швидкість тіла змінюється за законом $\upsilon(t) = A + Dt^2$. Знайти залежність координати від часу. Описати рух цього тіла, якщо відомо, що $A = 0{,}5\,м/с$, а $D = -0{,}5\,м/с^3$.

1.18. Тіло рухається прямолінійно вздовж осі Ox і його прискорення змінюється за законом $a(t) = At + Dt^2$. Знайти закон руху тіла.

1.19. Рухоме тіло проходить n однакових проміжків шляху з різною швидкістю. Знайти $<\upsilon>$.

1.20. Рухоме тіло проходить n проміжків шляху за однакові проміжки часу. Визначити $<\upsilon>$.

1.21. Тіло рухалось протягом часу τ. При цьому його швидкість змінювалася за законом $\upsilon = at^2 + bt; 0 \le t \le \tau$. Визначити $<\upsilon>$.

1.22. Прискорення рухомого тіла залежить від швидкості υ за законом $a = -k\upsilon^2$. Знайти закон руху $S = S(t)$.

1.23. Залежність пройденого тілом шляху від часу задається рівнянням $S = 0{,}25t^4 - 9t^2$. Знайти екстремальне значення швидкості тіла.

1.24. Між двома пунктами, розташованими на річці на відстані 100 *км* один від одного, курсує катер. Катер проходить цю відстань за течією за час $t_1 = 4$ *год*, а проти течії за час $t_2 = 10$ *год*. Визначити швидкість течії річки, та швидкість катера відносно води.

1.25. Людина, що знаходиться в точці В на відстані h від прямої ділянки дороги, бачить автобус, який рухається по шосе з постійною швидкістю $\vec{\upsilon}_a$ (рис. 8). Відстань від автобуса до людини в цей момент дорівнює АВ. В якому напрямку потрібно бігти людині, щоб опинитися в точці С з максимальним випередженням за часом по відношенню до автобуса, якщо АВ=2h, а відношення швидкостей людини і автобуса $\upsilon_л / \upsilon_a = 1/\sqrt{2}$?

1.26. Човен, який пливе через річку на веслах, рухається відносно води зі швидкістю 2 *м/с* в напрямку перпендикулярному до течії. Течія річки має швидкість 1 *м/с*. Знайти повну швидкість човна та напрямок вектора повної швидкості відносно берега.

1.27. Дві пристані розташовані одна навпроти одної на протилежних берегах річки, швидкість течії якої складає 0,5 *м/с*. У якому напрямку повинен плисти човен, щоб перетнути річку по прямій від однієї пристані до другої? З якою швидкістю $\upsilon_\perp$ повинен плисти човен через річку? Відносно води човен має швидкість 0,8 *м/с*.

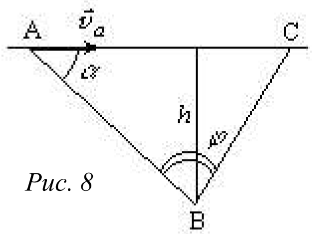

Рис. 8

1.28. Крапля дощу при швидкості вітру $\upsilon_1 = 11\,м/с$ падає під кутом $\alpha = 30^{\circ}$ до вертикалі. Визначити, при якій швидкості вітру υ_2 крапля води буде падати під кутом $\beta = 45^{\circ}$.

1.29. Два літаки вилітають одночасно з однієї точки двома взаємно перпендикулярними курсами. Один зі швидкістю $\upsilon_1 = 300\,км/год$, другий зі швидкістю $\upsilon_2 = 400\,км/год$. Як зростає з часом відстань між літаками? Якою буде ця відстань у той момент, коли перший літак пролетить $S_1 = 900\,км$?

1.30. Рибалка пливе човном вверх по річці і, пропливаючи під мостом, загубив рятувальний круг. Через півгодини він це помітив, повернув назад і наздогнав круг на 5 *км* нижче моста. Яка швидкість течії річки, якщо вверх і вниз по річці рибалка плив з однаковою швидкістю відносно води?

1.31. Чи може спортсмен на водних лижах рухатися швидше катера?

1.32. Камінь кинули в колодязь. Звук від його удару по воді виходить на поверхню через $t = 5\,с$ з моменту кидання. Вважаючи швидкість звуку $\upsilon = 330\,м/с$, визначити глибину колодязя.

1.33. Дві ракети стартують одночасно з однієї точки поверхні Землі з початковими швидкостями, які дорівнюють нулеві. Прискорення ракет $a_1 = 2t, a_2 = 5t$ напрямлені вертикально вгору. Знайти відстань між ракетами через 2 *с*.

1.34. Човен, що має швидкість υ_0, спускає вітрило в момент часу t_0, але продовжує рухатися. Під час цього руху були проведені вимірювання швидкості, які показали гіперболічну залежність швидкості від часу $(\upsilon \sim 1/t)$. Показати, що прискорення човна буде пропорційне квадрату його швидкості.

1.35. Користуючись умовою попередньої задачі, знайти залежності: 1) шляху *S*, що його пройшов човен, від часу *t*; 2) швидкості човна υ від шляху, після того як було спущене вітрило.

1.36. З вежі одночасно кинуто два тіла з однаковою початковою швидкістю υ: одне вертикально вгору, друге вертикально вниз. Як з часом буде змінюватись відстань *S* між тілами? Опором повітря знехтувати.

1.37. З аеростата, який знаходився на висоті 300 *м*, впав камінь. Через скільки часу камінь досягне землі, якщо:

1) аеростат піднімається зі швидкістю 5 *м/с*, 2) аеростат опускається зі швидкістю 5 *м/с*, 3) аеростат нерухомий? Опором повітря знехтувати.

1.38. Тіло кинуто вертикально вверх з початковою швидкістю $\upsilon_0 = 3{,}13\ м/с$. Коли воно досягло верхньої “мертвої” точки, з того ж початкового пункту, з такою ж початковою швидкістю вертикально вверх кинули друге тіло. Визначити, на якій відстані h від точки кидання вони зустрінуться? Опір повітря не враховувати.

1.39. Тіло падає вертикально з висоти 19,6 *м* з нульовою початковою швидкістю. Який шлях тіло пройде: 1) за першу 0,1 *с* свого руху, 2) за останню 0,1 *с* свого руху? Опір повітря не враховувати.

1.40. Тіло падає вертикально з висоти 19,6 *м* з нульовою початковою швидкістю. За який час тіло пройде: 1) перший 1 *м* свого шляху, 2) останній 1 *м* свого шляху? Опір повітря не враховувати.

1.41. Тіло, що вільно падає, за останню секунду проходить половину шляху. Знайти: 1) з якої висоти h падає тіло, 2) тривалість падіння. Опір повітря не враховувати.

1.42. Перше тіло кинуте вертикально вверх з початковою $\upsilon_0 = 5\ м/с$. Одночасно вертикально вниз з тією ж початковою швидкістю з точки, яка відповідає максимальній висоті піднімання $h_{\max}$ першого тіла, кинуте друге тіло. Визначити: 1) в який момент часу t тіла зустрінуться; 2) на якій висоті h від поверхні Землі відбудеться зустріч; 3) швидкість υ_1 першого тіла в момент зустрічі; 4) швидкість υ_2 другого тіла в момент зустрічі

1.43. Тіло, кинуте горизонтально з деякої висоти з початковою швидкістю $\upsilon_0 = 20\ м/с$, впало від місця кидання на відстані S, яка вдвічі більша за висоту. Знайти висоту H з якої кинули тіло.

1.44. Снаряд, випущений під кутом 30° до горизонту на висоті h побував двічі: через 10 *с* і 50 *с* після пострілу. Визначити початкову швидкість снаряда υ_0 і висоту h.

1.45. Тіло кинуте під кутом до горизонту. Виявилося, що максимальна висота піднімання $h = S/4$, де S – дальність польоту. Визначити кут під яким тіло було кинуто. Опір повітря не враховувати.

1.46. З трьох труб, розміщених на землі, з однаковою швидкістю б'ють струмені води під кутом 60, 45 і 30° до горизонту. Знайти відношення найбільших висот *h* підйому струменів води, що витікають з кожної труби, і відношення дальностей падіння *l* води на землю. Опором повітря знехтувати.

1.47. Залежність координат частки від часу задається рівняннями: $x(t) = 2 + 3t$; $y(t) = 15 + 2t - 10t^2$. Визначити: 1) скільки часу частка буде підніматися? 2) на якій відстані від місця кидання вона буде знаходитися в цей момент часу?

1.48. Яку початкову швидкість повинна мати сигнальна ракета, випущена під кутом 45° до горизонту, щоб вона спалахнула в найвищій точці своєї траєкторії, якщо час горіння запалу ракети 6 *с*? Опором повітря знехтувати.

1.49. Камінь, кинутий горизонтально, впав на землю через 0,5 *с* на відстані 5 *м* по горизонталі від місця кидання. 1) З якої висоти *h* було кинуто камінь? 2) З якою початковою швидкістю υ_0 його було кинуто? 3) З якою швидкістю υ він упав на землю? 4) Який кут φ складає траєкторія каменя з горизонтом в точці його падіння на Землю? Опір повітря не враховувати.

1.50. М'яч, кинутий горизонтально, вдаряється об стінку на відстані 5 *м* від місця кидання. Висота місця удару м'яча об стінку на 1 *м* менша за висоту кидання. 1) З якою швидкістю υ_0 було кинуто м'яч? 2) Під яким кутом φ м'яч підлітає до поверхні стінки? Опір повітря не враховувати.

1.51. Камінь кинуто горизонтально. Через 0,5 *с* після початку руху швидкість каменя стала в 1,5 рази більшою за його початкову швидкість. Знайти початкову швидкість каменя. Опір повітря не враховувати.

1.52. Камінь кинуто горизонтально з початковою швидкістю $\upsilon_x = 15\,м/с$. Знайти нормальне і тангенційне прискорення каменя через 1 *с* після початку руху. Опір повітря не враховувати.

1.53. Камінь кинуто горизонтально з швидкістю 10 *м/с*. Знайти радіус кривизни траекторії каменя через 3 *с* після початку руху. Опір повітря не враховувати.

1.54. М'яч кинули зі швидкістю $\upsilon_0 = 10\,м/с$ під кутом $\alpha = 40^\circ$ до горизонту. 1). На яку висоту підніметься м'яч?

2) На якій відстані від місця кидання він впаде на землю? 3) Скільки часу триватиме політ? 4) Знайти величину вектора повної швидкості м'яча через 1 *с* після кидання. Опір повітря не враховувати.

1.55. На спортивних змаганнях у Санкт-Петербурзі спортсмен штовхнув ядро на відстань 16 *м* 20 *см*. Яку відстань пролетить таке ж ядро в Ташкенті при тих же умовах? (При тій же початковій швидкості, направленій під тим же кутом до горизонту). Прискорення сили тяжіння в Санкт-Петербурзі дорівнює 981,9 $см/с^2$, в Ташкенті 980,1 $см/с^2$.

1.56. Компоненти швидкості частки змінюються з часом за законами $\upsilon_x = a\cos\omega t$; $\upsilon_y = a\sin\omega t$; $\upsilon_z = 0$, де a і ω - сталі. Знайти модулі швидкості $\boldsymbol{\upsilon}$ та прискорення $\boldsymbol{w}$, а також кут між векторами $\boldsymbol{\upsilon}$ та $\boldsymbol{w}$. На основі отриманих результатів зробити висновок про характер руху частки.

1.57. Залежність шляху від часу при русі точки по колу радіусом $R = 4\,м$ задається рівнянням $S = A + Bt + Ct^3$, де $A = 10\,м$; $B = -2\,м/с$; $C = 1\,м/с^3$. Визначити тангенційне a_τ , нормальне a_n і повне a прискорення точки в момент часу $t = 2\,с$.

1.58. Точка рухається по колу радіусом $R = 2\,м$. Залежність шляху від часу задається рівнянням $S = At^3$, де $A = 2\,м/с^3$. Знайти момент часу t_0 у який нормальне прискорення a_n точки дорівнюватиме тангенційному a_τ . Знайти повне прискорення a в цей момент.

1.59. Диск обертається навколо нерухомої осі так, що залежність кута повороту радіуса диска від часу описується рівнянням $\varphi = At^2$ ($A = 0{,}1\,рад/с^2$). Визначити повне прискорення a точки на ободі диска через 2 *с* після початку руху, якщо її лінійна швидкість в цей момент часу дорівнює 0,4 *м/с*.

1.60. Диск радіусом $r = 20\,см$ обертається за законом $\varphi = A + Bt + Ct^3$, де $A = 3\,рад$; $B = -1\,рад/с$; $C = 0{,}1\,рад/с^3$. Визначити тангенційне a_τ , нормальне a_n і повне a прискорення точок на ободі диска для моментa часу $t = 10\,с$.

1.61. Нормальне прискорення точки, яка рухається по колу радіусом 4 *м*, описується рівнянням $a_n = A + Bt + Ct^2$ ($A = 1\,м/с^2$, $B = 6\,м/с^3$, $C = 9\,м/с^4$). Визначити: 1) тангенційне прискорення точки; 2) шлях, який пройшла точка за час $t_1 = 5\,с$ після початку руху; 3) повне прискорення в момент часу $t_2 = 1\,с$.

1.62. Тіло оберталось з частотою $\nu_0 = 1200\, об/хв$, а потім почало обертатись рівносповільнено і зупинилось, зробивши n=2100 *об*. Знайти величину кутового прискорення та час, протягом якого відбулася зупинка тіла.

1.63. Відро опускається в колодязь, розкручуючи корбу радіуса 20 *см*. Скільки обертів зробить корба за 10 *с*, якщо швидкість відра 1 *м/с*?

1.64. Залежність координат частки від часу задається рівняннями: $x(t) = 2 + 3t$; $y(t) = 20 + 4t - 10t^2$. Визначити нормальне і тангенційне прискорення через 1 *с* після початку руху. Збільшується чи зменшується величина швидкості частки в цей момент?

1.65. Точка рухається по колу радіусом $R = 20\, см$ з постійним тангенційним прискоренням $a_\tau = 5\, см/с^2$. Через який час після початку руху нормальне прискорення a_n буде 1) дорівнювати тангенційному; 2) вдвічі більше тангенційного?

1.66. Диск радіусом $R = 10\, см$ обертається так, що залежність кута повороту радіуса диска від часу описується рівнянням $\varphi = A + Bt^3$ ($A = 2\, рад$, $B = 4\, рад/с^3$). Визначити для точок на ободі колеса: 1) нормальне прискорення a_n в момент часу $t = 2\, с$; 2) тангенційне прискорення для цього ж моменту часу; 3) кут повороту φ, при якому повне прискорення складає з радіусом колеса кут $\alpha = 45^\circ$.

1.67. Точка рухається по колу радіусом $R = 10\, см$ з постійним тангенційним прискоренням a_τ. Знайти нормальне прискорення a_n точки через 20 *с* після початку руху, якщо відомо, що до кінця п'ятого оберту після початку руху лінійна швидкість точки дорівнює $\upsilon = 10\, см/с$.

1.68. Колесо радіусом $R = 10\, см$ обертається з постійним кутовим прискоренням $\beta = 3{,}14\, рад/с^2$. Знайти для точок на ободі колеса до кінця першої секунди після початку руху: 1) кутову швидкість; 2) лінійну швидкість; 3) тангенційне прискорення; 4) нормальне прискорення; 5) повне прискорення; 6) кут між повним прискоренням і радіусом колеса.

1.69. Колесо автомашини обертається рівносповільнено. За час $t = 2\, хв$ воно змінило частоту обертання від 240 до 60 $хв^{-1}$. Визначити: 1) кутове прискорення колеса; 2) кількість повних обертів, зроблених колесом за цей час.

1.70. Знайти середню лінійну швидкість штучного супутника Землі, якщо період його обертання складає 111 *хв*, а середня висота польоту 1200 *км*.

1.71. Знайти нормальне прискорення точок земної поверхні, викликане добовим обертанням Землі. Знайти значення проекції цього прискорення на напрямок земного радіуса в даній точці. Оцінити значення шуканих величин для широти Москви (55° Північної широти). Радіус Землі R=6400 *км*.

1.72. Якір електродвигуна обертається з частотою N *об/с*. Обертаючись після вимкнення струму рівносповільнено, він зупинився, зробивши n обертів. Знайти кутове прискорення якоря після вимкнення струму.

1.73. Автомобіль, що рухається зі швидкістю 40 *км/год*, проходить заокруглення шосе з радіусом кривизни 200 *м*. На повороті водій гальмує машину, надаючи їй прискорення –0,3 *м/с*^{2}. Знайти нормальне й повне прискорення автомобіля на повороті. Як напрямлений вектор повного прискорення по відношенню до швидкості?

1.74. Знайти кутове прискорення колеса, якщо відомо, що через 2 *с* після початку рівноприскореного руху вектор повного прискорення точки, що лежить на ободі, складає кут 60° з напрямком лінійної швидкості цієї точки.

1.75. Колесо обертається з постійним кутовим прискоренням $\beta = 2\ рад/с^2$. Через $t = 0{,}5\,с$ після початку руху повне прискорення колеса дорівнює $a = 13{,}6\ м/с^2$. Знайти радіус колеса.

2. ДИНАМІКА

Основні співвідношення

Перший закон Ньютона. В інерціальній системі відліку вільне або квазівільне тіло не може прискорюватися. Тобто, воно або знаходиться в стані спокою, або рівномірно і прямолінійно рухається.

Другий закон Ньютона. Швидкість змін імпульса дорівнює силі, яка викликала цю зміну і напрямлена у той самий бік. У векторній формі другий закон Ньютона має вигляд:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \text{ або } m\vec{a} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i , \qquad (1.24)$$

де $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$ – геометрична сума сил, які діють на матеріальну точку масою m; $\vec{a}$ – прискорення, $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ – імпульс. (1.24) називають рівнянням поступалльного руху матеріальної точки. У *координатній формі* рівняня руху має вид:

$$ma_x = \sum_{i=1}^{N} F_{ix} , \; ma_y = \sum_{i=1}^{N} F_{iy} , ma_z = \sum_{i=1}^{N} F_{iz} . \qquad (1.25)$$

Третій закон Ньютона. Два тіла діють одне на одне з силами, рівними за модулем і напрямленими в протилежні боки вздовж однієї прямої:

$$\vec{F}_{21} = \vec{F}_{12} . \qquad (1.26)$$

Сила пружності (закон Гука):

$$F_{np} = -kx , \qquad (1.27)$$

де k – коефіцієнт пружності (жорсткості у випадку пружини), x – абсолютна деформація.

Сила гравітаційної взаємодії:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} . \qquad (1.28)$$

Сила тертя ковзання:

$$F_{mp} = \mu N , \qquad (1.29)$$

де μ – коефіцієнт тертя ковзання; N – сила нормального тиску.

Методичні поради

Динаміка розглядає причини виникнення руху і причини змін у ньому. Основне завдання динаміки полягає у встановленні рівняння руху. У динаміці зустрічаються як прямі (за відомими силами визначити місцеположення тіла), так і зворотні (за відомим законом руху визначити, під дією яких сил рухалось тіло) задачі.

В обох цих випадках розв'язок неможливий без вибору системи відліку. Якщо вибрана система відліку буде інерціальною, рівняння руху записують у вигляді (1.24). (Нагадаємо, що система називається інерціальною, якщо в ній виконується перший закон Ньютона. Будь-яка інша система відліку, яка рухається рівномірно і прямолінійно відносно даної інерціальної системи відліку, також буде інерціальною). У неінерціальній системі відліку слід ураховувати дію сил інерції.

З урахуванням вказаних особливостей розв'язування задач з динаміки слід розбити на декілька етапів.

1. За умовою задачі визначте характер і напрямок руху тіла. Проаналізуйте, які сили діють на це тіло (вияснiть природу цих сил, змінюються ці сили в часі, чи ні). Якщо в задачі розглядаються постійні сили, то тіло рухатиметься з постійним прискоренням, і для визначення його положення в просторі та часі можна скористатись другим законом Ньютона і відповідними законами кінематики для рівноприскореного руху.

Якщо сили, що діють на тіло (рівнодійна всіх сил), змінюються в часі, то рівняння руху слід записати у вигляді диференційного рівняння першого порядку $m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i(t)$, і розв'язати його відповідним математичним методом (див. приклади розв'язування задач).

2. Виберіть систему відліку. Зробіть рисунок, вкажіть напрямки сил, які діють на тіло, і спроектуйте ці сили на осі координат.

3. Запишіть рівняння руху у векторній формі. (В інерціальних системах відліку – це рівняння (1.24)). Спроектуйте на осі координат також всі швидкості і прискорення, з якими рухається тіло.

4. Запишіть рівняння руху в координатній формі (рівняння (1.25)), ураховуючи знаки проекцій векторів та розв'яжіть отриману систему рівнянь одним із відомих методів (метод Гаусса, метод Крамера). Перевірте розмірність отриманих величин, визначте числові значення, проаналізуйте їх фізичний зміст.

Приклади розв'язування задач

1. Невагомий блок закріплено на вершині похилої площини, яка утворює з горизонтом кут α. Вантажі m_1 і m_2 з'єднані ниткою, яка перекинута через блок. Знайти: 1) прискорення вантажів, 2) натяг нитки. Розв'язати задачу за умови, що коефіцієнт тертя вантажу m_2 об похилу площину дорівнює k, тертя в блоці відсутнє, а нитка нерозтяжна, невагома і не ковзає по блоку.

Розв'язання

Зробимо рисунок (рис. 9) і розкладемо сили. Нехай вантаж m_1 опускається. Тоді сила тертя вантажу m_2 об площину буде напрямлена вздовж похилої площини вниз. Запишемо рівняння руху для кожного вантажу у векторній формі:

$$\begin{cases} m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{T} \\ m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_\text{т} \end{cases}.$$

Поскільки нитка невагома і нерозтяжна, і тертя в блоці немає, то прискорення вантажів будуть рівні за модулем.

Системи координат вибираємо для кожного вантажу так, як це показано на рисунку.

Спроектуємо сили на вибрані координатні осі й отримаємо три рівняння відносно чотирьох невідомих $a, T, N, F_\text{т}$:

$$\begin{cases} oY: m_1 a = m_1 g - T \\ oX: m_2 a = T - F_\text{т} - m_2 g \sin\alpha \\ oY: 0 = N - m_2 g \cos\alpha \end{cases}.$$

Але $F_\text{т} = kN$. З третього рівняння системи $N = m_2 g \cos\alpha$, тому $F_\text{т} = k m_2 g \cos\alpha$. Підставляючи $F_\text{т}$ в друге рівняння, отримуємо систему двох рівнянь з двома невідомими a і T:

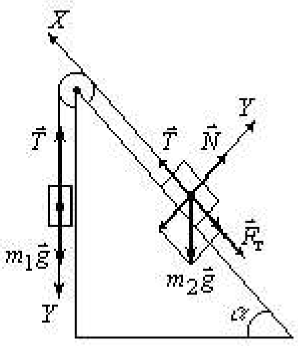

Рис. 9

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T \\ m_2 a = T - (k\cos\alpha + \sin\alpha) m_2 g \end{cases}.$$

Розв'яжемо дану систему. Для цього додамо два рівняння, тим самим виключимо T, і отримаємо для прискорення

$$a = \frac{m_1 - m_2(k\cos\alpha + \sin\alpha)}{m_1 + m_2} g.$$

Підставляючи a в будь-яке з рівнянь системи, отримуємо T

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1 + k\cos\alpha + \sin\alpha) g.$$

Відповідь: $a = \dfrac{m_1 - m_2(k\cos\alpha + \sin\alpha)}{m_1 + m_2} g$;

$T = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1 + k\cos\alpha + \sin\alpha) g$.

2. При падінні тіла з великої висоти його швидкість при русі, що встановився, досягла $\upsilon_{вст} = 80\ м/с$. Визначити час τ від початку падіння, до того моменту, коли швидкість тіла становила $0{,}75\upsilon_{вст}$. Силу опору середовища прийняти пропорційною швидкості тіла.

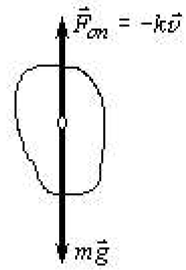

Рис. 10

Розв'язання

За умовою задачі на тіло діють дві сили, сила тяжіння $m\vec{g}$, напрямлена вертикально вниз, і сила опору повітря: $\vec{F}_{оп} = -k\vec{\upsilon}$, де k – коефіцієнт пропорційності, який залежить від розмірів і форми тіла та властивостей середовища, а сама сила напрямлена у бік, протилежний до напрямку руху (тобто вертикально вгору) (див. рис. 10).

Згідно з другим законом Ньютона рівняння руху такого тіла можна записати у вигляді;

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m\vec{g} + \vec{F}_{оп},$$

або в проекції на вертикальний напрямок:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = mg - k\upsilon. \qquad (1)$$

Рівняння (1) – це диференційне рівняння першого порядку, яке можна розв'язати методом розділення змінних:

$$\frac{d\upsilon}{mg - k\upsilon} = \frac{dt}{m}. \qquad (2)$$

Проінтегруємо (2), враховуючи, що за час τ швидкість тіла змінилась від 0 до $0{,}75\upsilon_{вст}$:

$$\int_0^{0{,}75\upsilon_{вст}} \frac{d\upsilon}{mg - k\upsilon} = \int_0^{\tau} \frac{dt}{m}; \qquad (3)$$

$$-\frac{1}{k}\ln\left(\frac{mg - 0{,}75k\upsilon_{вст}}{mg}\right) = \frac{\tau}{m}, \qquad (4)$$

звідки

$$\tau = \frac{m}{k}\ln\left(\frac{mg}{mg - 0{,}75k\upsilon_{вст}}\right). \qquad (5)$$

Невідомий коефіцієнт k знайдемо з наступних міркувань: у момент часу, коли швидкість руху тіла стане постійною $\upsilon_{вст}$, прискорення тіла дорівнюватиме нулеві. З цього моменту часу рівняння руху тіла матиме вигляд:

$$mg - k\upsilon_{вст} = 0 \Rightarrow k = \frac{mg}{\upsilon_{вст}}. \qquad (6)$$

Підставимо (6) в (5):

$$\tau = \frac{\upsilon_{вст}}{g}\ln\frac{mg}{mg - 0{,}75mg} = \frac{\upsilon_{вст}}{g}\ln 4 = 11{,}09\ (c).$$

Відповідь: 11,09 *с*.

Задачі для самостійного розв'язування

1.76. На столі стоїть візок масою $m_1 = 4\,кг$. До візка прив'язаний один кінець мотузки перекинутої через блок. З яким прискоренням рухатиметься візок, якщо до другого кінця мотузки прив'язати вантаж масою $m_2 = 1\,кг$?

1.77. Два бруски масами $m_1 = 1\,кг$ і $m_2 = 4\,кг$ лежать на столі і з'єднані мотузкою. З яким прискоренням *a* рухатимуться бруски, якщо до одного них прикласти силу $F = 10\,H$, напрямлену горизонтально? Якою буде сила натягу мотузки *T*, якщо цю силу прикласти до першого? до другого бруска? Тертям знехтувати.

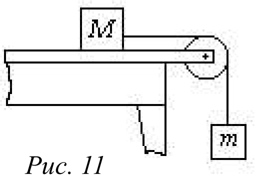

Рис. 11

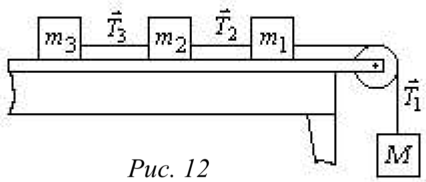

Рис. 12

1.78. На гладкій горизонтальній поверхні знаходиться тіло масою *M*. Друге тіло масою *m* підвішене на нитці, що перекинута через блок і прив'язана до маси *M* (рис. 11). Знайти прискорення мас *M* та *m* і натяг нитки. Тертям маси *M* об площину, тертям в блоці, а також масами блока і нитки знехтувати.

1.79. На установці, описаній у попередній задачі, на столі розміщено три маси m_1, m_2, m_3, які зв'язані ниткою між собою та з масою *M*, прив'язаною до нитки, що перекинута через блок (рис. 12). Знайти прискорення системи та натяги ниток за тих же умов, що й у попередній задачі.

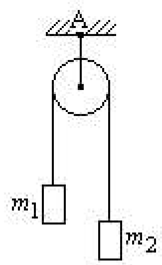

Рис. 13

1.80. Найпростішу машину, яка служить для перевірки законів рівноприскореного руху, можна уявити так: на нитці, перекинутій через блок, підвішено дві неоднакові маси m_1 і m_2 (рис. 13). Знайти прискорення мас, натяг нитки *T* і силу *F*, що діє на вісь блока цієї машини. Блок і нитку вважати невагомими, тертя в осі блока не враховувати.

1.81. На горизонтальній дошці лежить вантаж. Коефіцієнт тертя між дошкою і вантажем дорівнює $k = 0{,}1$. Яке прискорення в горизонтальному напрямку треба надати дошці, щоб вантаж міг з неї зісковзнути?

1.82. На столі лежить дошка масою $M = 1\,кг$, а на дошці вантаж вагою 19,6 *Н*. Яку силу *F* треба прикласти до дошки, щоб вона вислизнула з-під вантажу? Коефіцієнт тертя між вантажем і дошкою 0,25, а між дошкою і столом 0,5.

1.83. Повітряна куля масою *M* опускається з постійною швидкістю. Яку масу баласту *ΔM* треба викинути, щоб вона почала підніматися з тією ж швидкістю? Підйомну силу *P* кулі вважати постійною в обох випадках.

1.84. Два однакових тіла зв'язані ниткою і лежать на ідеально гладкому горизонтальному столі так, що нитка являє собою пряму лінію (рис. 14). Нитка може витримувати натяг ≤ 19,6 *Н*. Яку горизонтальну силу *F* потрібно прикласти до одного з тіл, щоб нитка розірвалась?

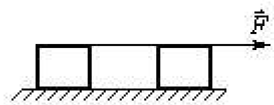

Рис. 14

1.85. Чи зміниться сила, необхідна для розриву нитки в умові попередньої задачі, якщо між тілами і столом є тертя і коефіцієнт тертя однаковий для обох тіл?

1.86. Невагомий блок закріплено на вершині двох похилих площин, які складають з горизонтом кути $\alpha = 30^\circ$ і $\beta = 45^\circ$. Вантажі масами $M_1 = M_2 = 1\,кг$ зв'язані ниткою, яка перекинута через блок (рис. 15). Знайти прискорення, з яким рухаються вантажі, та натяг нитки в системі. Тертя вантажів об площину та тертя в блоці відсутнє.

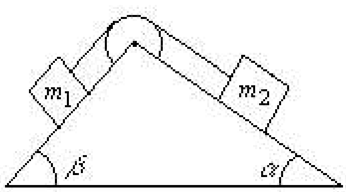

Рис. 15

1.87. Розв'язати попередню задачу за умови наявності тертя вантажів об площину. Коефіцієнти тертя для мас M_1 та M_2 дорівнюють $k_1 = k_2 = 0{,}1$. Тертя в блоці відсутнє.

1.88. Камінь кинуто вертикально вгору. В яких точках траєкторії він буде мати максимальне прискорення? Розглянути

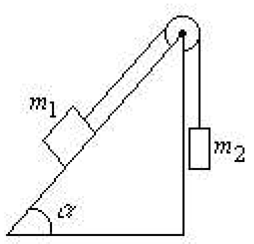

Рис. 16

два випадки: 1) опору повітря немає; 2) опір повітря зростає зі збільшенням швидкості.

1.89. На вершині ідеально гладкої похилої площини закріплено блок, через який перекинута нитка. До одного її кінця прив'язано вантаж масою m_1, який лежить на похилій площині. На другому кінці висить вантаж масою m_2 (рис. 16). З яким прискоренням рухаються вантажі? Який натяг нитки? Похила площина утворює з горизонтом кут α.

1.90. Людина, для того щоб не підковзнутися на гірці покритій льодом, збігає з неї. Чому це доцільно робити?

1.91. Гантеля довжиною l стоїть в кутку, утвореному гладкими площинами. Нижню кульку гантелі зміщують горизонтально на дуже малу відстань, і гантеля починає рухатися. Знайти швидкість нижньої кульки гантелі в той момент, коли верхня кулька відірветься від вертикальної площини.

1.92. Дуже тонку нитку, зібрану у клубок, починають витягувати вверх за один кінець з постійною швидкістю υ. Маса одиниці довжини нитки дорівнює μ. З якою силою доводиться тягнути за нитку в той момент, коли довжина витягнутого кінця l?

1.93*. Моторний човен масою $m = 400\,кг$ починає рухатися озером. Сила тяги двигуна $F = 0{,}2\,кН$. Уважаючи силу опору пропорційною швидкості, визначити швидкість υ човна через $\Delta t = 20\,с$ після початку руху. Коефіцієнт опору $k = 20\,кг/с$.

1.94*. Катер масою $M = 2\,т$ рушає з місця і протягом $\tau = 10\,с$ розвиває у стоячій воді швидкість $\upsilon = 4\,м/с$. Визначити силу тяги мотора, вважаючи її постійною. Сила опору пропорційна швидкості з коефіцієнтом $k = 100\,кг/с$.

1.95*. Початкова швидкість кулі $\upsilon_0 = 800\,м/с$. Рухаючись у повітрі, за час $t = 0{,}8\,с$ куля зменшила свою швидкість до $\upsilon = 200\,м/с$. Маса кулі $m = 10\,г$. Вважаючи силу опору повітря пропорційною квадрату швидкості, визначити коефіцієнт опору k. Дією сили тяжіння знехтувати.

1.96*. Парашутист масою $m = 80\,кг$ виконує затяжний стрибок. Вважаючи силу опору повітря пропорційною швидкості, визначити через який час Δt швидкість парашутиста дорівнюватиме 0,9 від швидкості, яка повинна встановитися. Коефіцієнт опору $k = 10\, кг/с$. Початкова швидкість парашутиста дорівнювала нулеві.

1.97. Обчислити радіус орбіти стаціонарного супутника Землі, який нерухомий відносно її поверхні. Чому дорівнюють його швидкість і прискорення відносно інерціальної системи відліку, яка зв'язана в даний момент з центром Землі?

1.98. Кулька масою m_1 знаходиться на відстані a від кінця тонкого однорідного стержня масою m_2 та довжиною l. а) Визначити силу притягання кульки і стержня. б) Узявши довжину стержня $l = 2a$, обчислити, як зміниться сила притягання, якщо стержень замінити кулькою маси m_2, розміщеною в точці, де знаходиться центр мас стержня.

1.99. Обчислити лінійну швидкість штучного супутника Землі на висоті 300 *км*. Орбіту супутника вважати коловою.

1.100. Маємо кільце з тонкого дроту, радіус якого дорівнює r. Знайти силу, з якою це кільце притягує матеріальну точку масою m, яка знаходиться на осі кільця на віддалі L від його центра. Радіус кільця дорівнює R, густина матеріалу дротини – ρ.

1.101. На яку відстань від поверхні Землі віддалилося б тіло, кинуте вертикально вгору зі швидкістю 5 *км/с*, якщо б у Землі не було атмосфери?

1.102. Визначити прискорення вільного падіння g на поверхні Землі за такими даними: середній радіус Землі $R = 6400\, км$, середня густина Землі $\rho = 5{,}4\, г/см^3$.

1.103. Визначити прискорення вільного падіння g на висоті 20 *км* над Землею, вважаючи, що прискорення вільного падіння на поверхні Землі дорівнює $g_0 = 9{,}81\, м/с^2$.

1.104. Знайти прискорення вільного падіння $g_м$ на поверхні Місяця, якщо його радіус дорівнює 1738 *км*, а середня густина складає 0,6 від густини Землі.

1.105. Знайти прискорення вільного падіння на поверхні Сонця, коли відомі $R = 150 \cdot 10^6\ км$ – радіус земної орбіти, $r = 7 \cdot 10^5\ км$ – радіус Сонця і T – час обертання Землі навколо Сонця.

1.106. Яке прискорення a надає Сонце тілам, що знаходяться на Землі?

1.107. Маятник, який робить в Санкт-Петербурзі 3601,4 коливань за годину, за той самий час і при тій же температурі робить в Москві 3600,0 коливань. Чому дорівнює відношення прискорень вільного падіння для цих двох міст?

1.108. Як зміниться хід маятникового годинника на Місяці в порівнянні з його ходом на Землі?

1.109. Час обертання Юпітера навколо Сонця в 12 разів більший за час обертання Землі. Скільки кілометрів становить відстань від Юпітера до Сонця, якщо відстань від Землі до Сонця дорівнює $150 \cdot 10^6$ *км*. Орбіти планет вважати колами.

1.110. Визначити відношення маси Сонця M до маси Землі m, якщо середня відстань R від Землі до Сонця в 390 разів більша ніж відстань r від Землі до Місяця, а час обертання T Землі навколо Сонця більший від часу обертання Місяця навколо Землі в 13,4 рази.

1.111. Знайти відстань d від планети до Сонця, якщо відомо: маса Сонця M, період обертання планети навколо Сонця T і гравітаційна стала G.

1.112. Знайти залежність прискорення вільного падіння g від відстані r, відрахованої від центра планети густиною ρ, яку можна вважати однаковою для всіх точок. Побудувати графік залежності $g(r)$. Радіус планети R вважати відомим.

1.113. Визначити роботу A, яку виконають сили гравітаційного поля Землі, якщо тіло масою $m = 1\,кг$ впаде на поверхню Землі: 1) з висоти h, що дорівнює радіусу Землі; 2) із нескінченності. Радіус Землі R і прискорення вільного падіння g на її поверхні вважати відомими.

1.114. Визначити значення потенціала гравітаційного поля φ на поверхнях Землі і Сонця.

1.115. Верхній кінець свинцевої дротини діаметром $d = 2\,мм$ і довжиною $l = 60\,м$ закріплений нерухомо. До нижнього кінця підвішено вантаж масою $m = 100\,кг$. Знайти напругу матеріалу дротини σ: 1) біля нижнього кінця; 2) на середині довжини; 3) біля верхнього кінця дротини.

1.116. Однорідний стержень завдовжки $l = 1{,}2\,м$, площею поперечного перерізу $S = 2\,см^2$ і масою $m = 10\,кг$ обертається з частотою $n = 2\,с^{-1}$ навколо осі, що проходить через один з кінців стержня, ковзаючи при цьому без тертя по горизонтальній поверхні. Знайти найбільшу напругу σ_{max} матеріалу стержня при заданій частоті обертання.

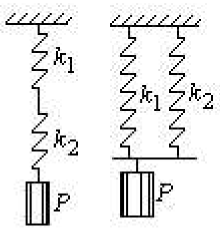

Рис. 17

1.117. Дві пружини жорсткістю $k_1 = 0{,}3\,кН/м$ і $k_2 = 0{,}8\,кН/м$ з'єднані послідовно. Визначити абсолютну деформацію x_1 першої пружини, якщо друга деформована на $x_2 = 1{,}5\,см$.

1.118. Визначити жорсткість k системи двох пружин при послідовному і паралельному з'єднанні (рис. 17). Жорсткість пружин $k_1 = 2\,кН/м$ і $k_2 = 6\,кН/м$.

3. РОБОТА І ЕНЕРГІЯ. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ

Основні співвідношення

Робота, яку здійснює постійна сила, дорівнює скалярному добутку сили на переміщення:

$$A = (\vec{F}, \Delta\vec{r}) = F\Delta r\cos\alpha, \qquad (1.30)$$

де α – кут між напрямком дії сили $\vec{F}$ і переміщення $\Delta\vec{r}$.

Робота, яка здійснюється змінною силою між точками, заданими радіус – векторами $\vec{r}_1$ і $\vec{r}_2$:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F(r)\cos\alpha dr. \qquad (1.31)$$

Середня потужність за час Δt:

$$< N >= A/\Delta t \qquad (1.32)$$

або

$$< N >= F\upsilon\cos\alpha. \qquad (1.33)$$

Миттєва потужність:

$$dN = dA/dt. \qquad (1.34)$$

Кінетична енергія точки або тіла, які рухаються поступально:

$$K = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{p^2}{2m}. \qquad (1.35)$$

Потенціальна енергія тіла і сила, яка діє на тіло в даній точці поля, пов'язані співвідношенням:

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} U \text{ або } \vec{F} = -\left(\vec{i}\,\frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial U}{\partial z}\right), \qquad (1.36)$$

У випадку, коли силове поле володіє сферичною симетрією:

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r}. \qquad (1.37)$$

Потенціальна енергія пружно деформованого тіла:

$$U = \frac{1}{2}kx^2. \qquad (1.38)$$

Потенціальна енергія гравітаційної взаємодії двох точкових мас m_1 і m_2:

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{r}. \qquad (1.39)$$

Потенціальна енергія тіла, яке знаходиться в однорідному полі сили тяжіння:

$$U = mgh, \qquad (1.40)$$

де h – висота над рівнем, умовно прийнятим за нульовий для відліку потенціальної енергії.

Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі:

$$M = I\varepsilon, \qquad (1.41)$$

де M – момент сили, який діє на тіло, I – момент інерції тіла відносно даної осі; ε – кутове прискорення тіла

Момент імпульсу тіла, яке обертається відносно осі:

$$N = I\omega. \qquad (1.42)$$

Момент інерції матеріальної точки:

$$I = mr^2, \qquad (1.43)$$

де m – маса точки; r – відстань від точки до осі обертання.

Момент інерції *твердого тіла* відносно нерухомої осі:

$$I = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2 \,, \qquad (1.44)$$

де Δm_i – елемент маси, який знаходиться на відстані r_i від осі обертання. В інтегральній формі:

$$I = \int r^2 dm \,. \qquad (1.45)$$

Якщо тіло однорідне, тобто його густина ρ однакова по всьому об'єму, $dm = \rho dV$ і

$$I = \rho \int r^2 dV \,. \qquad (1.46)$$

Теорема Гюйгенса – Штейнера. Момент інерції тіла відносно довільної осі дорівнює моменту інерції I_0 цього тіла, відносно осі, яка проходить через його центр мас і паралельна даній, складеному з добутком його маси на квадрат відстані a між осями.

$$I = I_0 + ma^2 \,. \qquad (1.47)$$

Робота постійного моменту сили:

$$A = M\varphi \,, \qquad (1.48)$$

де φ – кут повороту тіла.

Миттєва потужність, яка виникає при обертанні тіла:

$$N = M\omega \,. \qquad (1.49)$$

Кінетична енергія тіла, яке обертається:

$$K_{об} = \frac{1}{2} I\omega^2 \,. \qquad (1.50)$$

Кінетична енергія тіла, яке одночасно пербуває в поступальному і обертальному рухах:

$$K_{повн} = \frac{1}{2} m\upsilon^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 \,. \qquad (1.51)$$

Закон збереження імпульсу. В ізольованій системі геометрична сума імпульсів усіх тіл, що утворюють систему, є величина стала:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = const \quad , \qquad (1.52)$$

де n – кількість матеріальних точок (або тіл), які входять до системи.

Закон збереження енергії в механіці виконується в ізольованій системі, в якій діють тільки консервативні сили, і записується у вигляді:

$$K + U = const \, , \qquad (1.53)$$

K– кінетична енергія, U – потенціальна енергія.

Закон збереження моменту імпульсу. В ізольованій системі геометрична сума моментів імпульсів усіх тіл, що утворюють систему, є величина стала

$$\sum_{i=1}^{n} I_i \omega_i = const \, . \qquad (1.54)$$

Методичні поради

Досить часто застосування законів збереження значно спрощує розв'язування задачі, а іноді таке застосування – це єдиний шлях розв'язку, як, наприклад, при розгляді зіткнення куль, які котяться горизонтальною поверхнею.

При пружному зіткненні куль виконуються і закон збереження імпульсу, і закон збереження механічної енергії. При непружному зіткненні частина механічної енергії перетворюється у теплову енергію, тому в цьому випадку виконується закон збереження імпульсу і закон збереження повної енергії системи.

При використанні закону збереження імпульсу слід пам'ятати, що у замкнутій системі зберігається векторна сума імпульсів всіх тіл. Тому перед початком розв'язування необхідно вибрати систему відліку, спроектувати в ній всі імпульси системи до взаємодії і після. Сума проекцій імпульсів до взаємодії повинна дорівнювати сумі цих же проекцій після взаємодії. Якщо система частково ізольована, тобто сили діють лише в певному напрямку, то зберігатимуться тільки ті проекції імпульсів, які перпендикулярні до напрямку дії сили.

Це зауваження стосується також закону збереження моменту кількості руху відносно осі обертання з тією лише різницею, що момент кількості руху направлений вздовж осі обертання, тому систему відліку треба зв'язувати саме з віссю обертання. У випадку частково ізольованої системи зберігатимуться тільки ті проекції момента імпульсу, які перпендикулярні до осі вздовж якої діють моменти сил. Наприклад, якщо $M_x \neq 0$; $M_y \equiv 0$; $M_z \equiv 0$, то $N_x \neq const$; $N_y = const$; $N_z = const$.

Приклади розв'язування задач

1. Сталеві кульки масами m_1=100 *г* та m_2=200 *г* підвішені на нитках довжиною l = 50 *см* так, що нитки паралельні, а кульки дотикаються одна до одної. Меншу кульку відхилили на кут $\alpha = 90^{\circ}$ і відпустили. Яку швидкість матиме більша кулька після удару?

Розв'язання

Менша кулька, після того як її відхилили на кут α, а потім відпустили, в момент удару матиме кількість руху $m_1 \upsilon$. Друга кулька, яка до удару була нерухома, мала кількість руху, що дорівнювала нулеві. Таким чином, кількість руху даної замкнутої системи до удару дорівнювала $m_1 \upsilon$. Кількість руху кульок після удару буде $m_1 u_1 + m_2 u_2$, де u_1 та u_2 – швидкості більшої та меншої кульок після удару.

Для визначення швидкості u_2 скористаємось законом збереження імпульсу $m_1 \upsilon = m_1 u_1 + m_2 u_2$. Оскільки до останнього рівняння входить двоє невідомих – u_1 та u_2, для їх визначення потрібно мати ще одне рівняння, яке можна одержати на основі закону збереження кінетичної енергії для абсолютно пружного удару,

$$\frac{m_1 \upsilon^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

Отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} m_1\upsilon = m_1u_1 + m_2u_2 \\ m_1\upsilon^2 = m_1u_1^2 + m_2u_2^2 \end{cases}.$$

Якщо в обох рівняннях системи перенести вліво доданки, що містять m_1, а потім розділити друге рівняння на перше, то отримаємо $\upsilon + u_1 = u_2$, звідки $u_1 = u_2 - \upsilon$. Підставивши цей вираз в перше рівняння системи і провівши нескладні математичні перетворення, для швидкості другої кульки після удару отримаємо вираз

$$u_2 = \frac{2m_1\upsilon}{m_1 + m_2}.$$

Швидкість меншої кульки знаходимо з формули $\upsilon = \sqrt{2gl}$, де l – висота падіння, що дорівнює довжині нитки. Підставляючи цей вираз в останню формулу, остаточно одержимо

$$u_2 = \frac{2m_1\sqrt{2gl}}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 0{,}1\sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5}}{0{,}1 + 0{,}2} \approx 2\,(м/с)$$

Відповідь: $2\,м/с$.

2. Людина знаходиться в центрі горизонтальної круглої платформи, що обертається навколо осі, що проходить через центр мас людини та центр платформи. Людина горизонтально тримає в руках штангу завдовжки $l = 2$ *м* та масою $m = 18$ *кг*. Платформа при цьому робить $\nu = 30$ обертів за хвилину. Людина повертає штангу у вертикальній площині на кут $\varphi = 60°$. Визначити кутову швидкість платформи після повороту штанги та роботу, яку виконала людина при цьому. Момент інерції людини вважати еквівалентним масі $m_0 = 50$ *кг*, що знаходиться на відстані $r_0 = 4$ *см* від осі обертання. Момент інерції платформи не враховувати.

Розв'язання

Розглядаючи платформу, що обертається з людиною, як замкнуту систему, можемо вважати її момент кількості руху незмінним.

Закон збереження моменту імпульса для даної системи запишеться у вигляді:

$$(I_0 + I_1)\omega_1 = (I_0 + I_2)\omega_2,$$

де момент інерції людини

$$I_0 = m_0 r_0^2 = 50 \cdot 0{,}0016 = 0{,}08\,(кг \cdot м^2);$$

момент інерції горизонтальної штанги

$$I_1 = \frac{ml^2}{12} = \frac{18 \cdot 4}{12} = 6\,(кг \cdot м^2);$$

момент інерції штанги, нахиленої на кут $\varphi = 60°$

$$I_2 = \frac{1}{12} m(l\cos\varphi)^2 = \frac{1}{12} \cdot 18 \cdot 4 \cdot 0{,}25 = 1{,}5\,(кг \cdot м^2).$$

Кутова швидкість після нахилу штанги, що визначається із закону збереження моменту кількості руху:

$$\omega_2 = \frac{I_0 + I_1}{I_0 + I_2}\omega_1 = \frac{I_0 + I_1}{I_0 + I_2} 2\pi\nu.$$

Числове значення кутової швидкості

$$\omega_2 = \frac{0{,}08 + 6}{0{,}08 + 1{,}5} \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}5 = 12{,}1\,(c^{-1}).$$

Робота, виконана людиною при нахилі штанги, дорівнює зміні кінетичної енергії системи, внаслідок зміни кількості обертів,

$$A = \frac{(I_0 + I_2)\omega_2^2}{2} - \frac{(I_0 + I_1)\omega_1^2}{2} = 85{,}7\,(Дж).$$

Відповідь: $12{,}1\,c^{-1}$; $85{,}7$ *Дж*.

3. На яку відстань по дорозі під гору може вкотитися обруч за рахунок своєї кінетичної енергії, якщо перед цим він мав швидкість $\upsilon = 7{,}2\,км/год$, а ухил гори становить $h = 10$ *м* на кожні $s = 100$ *м* шляху? Тертя не враховувати.

Розв'язання

Відстань S, яку проходить обруч по дорозі, можна визначити, якщо буде відома висота H, на яку підніметься обруч, оскільки $S = H/\sin\alpha$, де α – кут нахилу дороги до горизонту. За умовою задачі $\sin\alpha = h/s$.

Висота, на яку підніметься обруч, буде залежати від його повної кінетичної енергії перед початком підйому. Повна кінетична енергія K дорівнює сумі його кінетичної енергії K_1 поступального та K_2 обертального рухів, тобто

$$K_1 + K_2 = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

але $I = mR^2$, а $\upsilon = \omega R$, тому

$$K = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{m\upsilon^2}{2} = m\upsilon^2.$$

Ця кінетична енергія обруча при підніманні перетвориться на потенціальну енергію

$$U = mgH = mgS\sin\alpha \ .$$

Прирівнявши вирази для кінетичної та потенціальної енергій і розв'язавши одержане рівняння відносно відстані S, знаходимо, що

$$S = \frac{\upsilon^2}{g\sin\alpha}.$$

Урахувавши вираз для $\sin\alpha$, остаточно отримуємо:

$$S = \frac{\upsilon^2 s}{gh}.$$

Підставляючи в останню формулу числові значення величин, узятих в одиницях SI, знаходимо

$$S = \frac{2^2 \cdot 100}{9{,}8 \cdot 10} = 4{,}08\ \text{м} \ .$$

Відповідь: 4,08 *м*.

4. Момент інерції маховика $I = 10^6$ *г·см*^{2}. Через який час маховик матиме частоту обертання $\nu = 1800$ *об/хв*, якщо корисна потужність двигуна $N = 100$ *Вт*?

Розв'язання

Час, протягом якого маховик набере частоту обертання ν, можна визначити, якщо буде відома робота, що її виконає двигун при розкручуванні маховика. За рахунок роботи двигуна маховик одержує кінетичну енергію. Визначивши кінетичну енергію маховика після його розкручування і знаючи потужність двигуна, можна знайти час розкручування.

Роботу A, витрачену на розкручування маховика, знаходимо за формулою $A = Nt$. На підставі вищезазначеного маємо $Nt = \frac{I\omega^2}{2}$, звідки

$$t = \frac{I\omega^2}{2N} = \frac{I(2\pi\nu)^2}{2N}.$$

Підставляючи в останню формулу числові значення величин в одиницях SI, одержимо

$$t = \frac{0{,}1 \cdot (2 \cdot 3{,}14 \cdot 30)^2}{2 \cdot 100} = 17{,}7\ c.$$

Відповідь: 17,7 *с*.

Задачі для самостійного розв'язування

1.119. З похилої площини висотою 1*м* і довжиною схилу 10 *м* ковзає тіло масою 1 *кг*. Знайти кінетичну енергію біля підніжжя площини, швидкість тіла біля підніжжя площини та відстань, яку тіло пройде по горизонтальній ділянці шляху до зупинки. Коефіцієнт тертя на всьому шляху вважати однаковим і таким, що дорівнює 0,05.

1.120. Із залитого водою підвала, площа підлоги якого становить 50 $м^2$, треба відкачати воду на бруківку. Глибина води в підвалі 1,5 *м*, а відстань від рівня води в підвалі до рівня бруківки 5 *м*. Знайти роботу, яку треба виконати, щоб відкачати воду.

1.121. Яку роботу A потрібно виконати, щоб розтягнути на $x = 1\,мм$ сталевий стержень завдовжки $l = 1\,м$ і площею поперечного перерізу $S = 1\,см^2$?

1.122. Дві пружини жорсткістю $k_1 = 0{,}3\,кН/м$ і $k_2 = 0{,}5\,кН/м$ з'єднані послідовно і розтягнуті так, що абсолютна деформація другої пружини $x_2 = 3\,см$. Обчислити роботу A розтягу пружин.

1.123. З якою швидкістю υ вилетить з пружинного пістолета кулька масою $m = 10\,г$, якщо пружина була стиснута на $x = 5\,см$? Жорсткість пружини $k = 0{,}2\,кН/м$.

1.124. У пружинній рушниці пружина стиснута на $x_1 = 20\,см$. При зведенні її стиснули ще на $x_2 = 30\,см$. З якою швидкістю вилетить з рушниці стріла масою $m = 50\,г$, якщо жорсткість пружини $k = 120\,Н/м$?

1.125. Визначити потенціальну енергію U стиснутої пружини як функцію її деформації, якщо сила деформації пропорційна третьому степеню деформації з коефіцієнтом пропорційності β.

1.126. Визначити відношення потенціальних енергій деформації U_1 і U_2 двох пружин з коефіцієнтами жорсткості k_1 і k_2 в двох випадках (рис. 17): 1) пружини з'єднані послідовно і розтягуються грузом P; 2) пружини висять паралельно, причому груз P підвішено в такій точці, що обидві пружини розтягуються на однакову довжину. Деформацією пружин під дією власної ваги знехтувати.

1.127. Вантаж вагою 9,8 $Н$, що висить на нитці, відхиляють на кут $\alpha = 30^\circ$ і відпускають. Знайти натяг нитки в момент проходження вантажем положення рівноваги.

1.128. На поверхню Землі з дуже великої віддалі падає метеорит. З якою швидкістю метеорит впав би на Землю, якщо б атмосфера не гальмувала його руху? Початкову швидкість метеорита вважати рівною нулеві.

1.129. Знайти, яку потужність розвиває двигун автомобіля масою 1*т*, коли відомо, що автомобіль їде зі швидкістю 36 *км/год*: 1) по горизонтальній дорозі; 2) вгору по схилу гори з нахилом 5 *м* на кожні 100 *м* шляху; 3) вниз по схилу гори з тим же нахилом. Коефіцієнт тертя дорівнює 0,07.

1.130. Вантаж масою 10 *кг* піднімають на висоту 10 *м*, діючи на нього силою 196 *Н*. Яка при цьому виконується робота? Яку потенціальну енергію буде мати вантаж?

1.131. Яку роботу треба виконати, щоб втягти тіло масою m на площину з довжиною основи l і висотою h. Коефіцієнт тертя між тілом і площиною дорівнює k, а кут нахилу площини може змінюватися вздовж площини, але його знак залишається постійним?

1.132. У кулю масою m_1, яка рухається зі швидкістю υ_1, вдаряється друга куля масою m_2, яка наздоганяє першу зі швидкістю υ_2. Вважаючи удар абсолютно непружним, знайти швидкість куль після удару та їх кінетичну енергію.

1.133. Дерев'яна кулька падає з висоти 2 *м* вертикально вниз без початкової швидкості. Коефіцієнт відновлення при ударі кульки об підлогу дорівнює 0,5. Знайти: 1) на яку висоту підніметься кулька після удару об підлогу; 2) кількість тепла, яка виділиться при ударі. Маса кульки 100 *г*.

1.134. Куля масою $m_1 = 5\,г$, яка летить горизонтально зі швидкістю $\upsilon_1 = 500\,м/с$, попадає в тіло кулястої форми масою $m_2 = 0{,}5\,кг$, підвішене на легкому однорідному стержні, і застрягає в ньому. При якій граничній довжині стержня (відстані від точки підвісу до центра тіла) воно від удару кулі підніметься до верхньої точки кола?

1.135. Два тіла рухаються назустріч одне одному і непружно стикаються. Швидкість першого тіла до удару дорівнює $\upsilon_1 = 2\,м/с$, другого – $\upsilon_2 = 4\,м/с$. Загальна швидкість тіл після удару збігається за напрямком зі швидкістю υ_1 і дорівнює $\upsilon = 1\,м/с$. У скільки разів кінетична енергія першого тіла була більша за кінетичну енергію другого?

1.136. З якою швидкістю υ після горизонтального пострілу з гвинтівки почне рухатися стрілець, що стоїть на ковзанах на дуже гладкому льоду? Маса стрільця з гвинтівкою і спорядженням складає 70 *кг*, а маса кулі 10 *г* і її початкова швидкість 700 *м/с*.

1.137. Дві кульки різної маси m_1 і m_2 вільно підвішені на нитках різної довжини l_1 і l_2 так, що вони дотикаються (див. рис. 18). Першу кульку відхиляють у площині ниток на кут α і відпускають. Відбувається абсолютно пружний центральний удар. На які кути α_1 і α_2 відхиляться кульки?

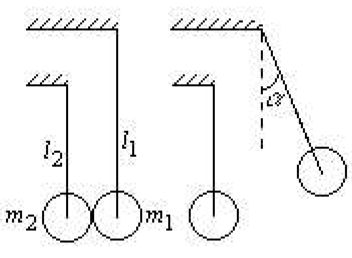

Рис. 18

1.138. Куля масою $m = 1\,кг$, що котиться без ковзання, вдаряється об стіну і відкочується від неї. Швидкість кулі до удару об стіну $\upsilon_1 = 10\,м/с$, після удару $\upsilon_2 = 8\,м/с$. Знайти кількість тепла, яка виділилася при ударі.

1.139. Хокейна шайба, пущена по поверхні льоду з початковою швидкістю $\upsilon_0 = 20\,м/с$, зупинилася через $t = 40\,с$. Знайти коефіцієнт тертя шайби по льоду.

1.140. Кулька масою $m = 300\,г$ вдарилася об стінку і відскочила від неї. Визначити імпульс p_1, отриманий стінкою, якщо в момент удару кулька мала швидкість $\upsilon_0 = 10\,м/с$ напрямлену під кутом $\alpha = 30^о$ до поверхні стінки. Удар вважати абсолютно пружним.

1.141. Куля масою $m_1 = 10\,кг$ рухається зі швидкістю $\upsilon_1 = 4\,м/с$ і вдаряється об другу кулю масою $m_2 = 4\,кг$, що має швидкість $\upsilon_2 = 2\,м/с$. Вважаючи удар абсолютно непружним і центральним, знайти швидкість u куль після удару в двох випадках: 1) мала куля наздоганяє велику; 2) кулі рухаються назустріч одна одній.

1.142. На залізничній платформі встановлена гармата. Маса платформи з гарматою $M = 15\,т$. Гармата стріляє вверх під кутом $\varphi = 60^о$ до горизонту. З якою швидкістю υ_1 покотиться платформа внаслідок віддачі, якщо снаряд масою $m = 20\,кг$ вилітає зі швидкістю $\upsilon_2 = 600\,м/с$?

1.143. Під дією постійної сили *F* візок пройшов шлях $S = 5\,м$ і набув швидкості $\upsilon = 2\,м/с$. Визначити роботу *A* сили, якщо маса візка $m = 400\,кг$ і коефіцієнт тертя $\mu = 0{,}01$.

1.144. Визначити роботу *A*, при рівноприскореному підніманні вантажу масою масою $m = 100\,кг$ на висоту $h = 4\,м$ за час $t = 2\,с$.

1.145. Визначити роботу *A*, що виконується на переміщенні $S = 12\,м$ силою, яка рівномірно зростає. Початкове значення сили $F_1 = 10\,Н$, а кінцеве – $F_2 = 46\,Н$.

1.146. Санчата масою $m = 5\,кг$ з'їжджають з гори, яка утворює з горизонтом кут $\alpha = 30^о$. Пройшовши відстань $l = 50\,м$, вони розвинули швидкість $\upsilon = 4{,}1\,м/с$. Визначити кількість тепла, яке виділилося при терті полозів по снігу.

1.147. З гармати, яка жорстко закріплена на платформі, робиться постріл у горизонтальному напрямку. Маса снаряда $m = 10\,кг$ і його швидкість $\upsilon = 1\,км/с$. Маса платформи з гарматою $M = 20\,т$. На яку відстань *l* відкотиться платформа після пострілу, якщо коефіцієнт опору $\mu = 0{,}002$.

1.148. Куля масою $m = 10\,г$, що летіла зі швидкістю $\upsilon = 600\,м/с$, попала в балістичний маятник (рис. 19) масою $M = 5\,кг$ і застрягла у ньому. На яку висоту *h* підніметься маятник?

1.149. Два вантажі масами $m_1 = 10\,кг$ і $m_2 = 15\,кг$ підвішені на нитках довжиною $l = 2\,м$ так, що дотикаються один до одного. Менший вантаж відхилили на кут $\varphi = 60^o$ і відпустили. Вважаючи удар вантажів абсолютно непружним, визначити висоту *h*, на яку піднімуться вантажі після удару.

1.150. Горизонтальна платформа масою 100 *кг* обертається навколо вертикальної осі, що проходить через її центр, з частотою 10 *об/хв*. Людина вагою 600 *Н* стоїть при цьому біля краю платформи. З якою швидкістю почне обертатися платформа, якщо людина перейде від краю платформи до її центра? Вважати платформу однорідним диском, а людину – точковою масою.

1.151. Дерев'яний стержень масою $m = 1\,кг$ і довжиною $l = 40\,см$ може обертатися навколо осі, що проходить через його середину перпендикулярно до стержня. В кінець стержня попадає куля масою $m_1 = 10\,г$, яка летить перпендикулярно до осі і до стержня зі швидкістю $\upsilon = 200\,м/с$. Визначити: 1) кутову швидкість, якої набуде стержень, якщо куля застряває в ньому; 2) як змінилась при попаданні кулі в стержень сума їх кінетичних енергій.

1.152. Знайти лінійні швидкості центрів тяжіння 1) кулі, 2) диска і 3) обруча, які скочуються без ковзання з похилої площини висотою $h = 0{,}5\,м$, початкова швидкість всіх тіл дорівнює нулю. 4) Порівняти знайдені швидкості зі швидкістю тіла, яке зісковзує з цієї похилої площини без тертя.

1.153. З якої найменшої висоти *h* повинен з'їхати велосипедист, щоб за інерцією (без тертя) проїхати доріжку, яка має форму "мертвої петлі" радіусом $R = 3\,м$, і не відірватись від неї у верхній точці? Маса велосипедиста разом з велосипедом $m = 75\,кг$, причому на масу коліс припадає $m_1 = 3\,кг$. Колеса велосипеда вважати обручами.

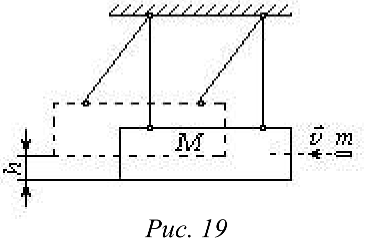

Рис. 19

1.154. Мідна куля радіусом $R = 10\,см$ обертається з частотою $\nu = 2\,об/с$ навколо осі, яка проходить через її центр. Яку роботу треба виконати, щоб збільшити частоту обертання кулі вдвоє?

1.155. Диск радіусом 0,2 *м* і масою 100 *кг*, обертаючись рівносповільнено, зменшив за 1 *хв* швидкість обертання від 300 *об/хв* до 180 *об/хв*. Знайти: 1) кутове прискорення диска; 2) гальмуючий момент; 3) роботу гальмування; 4) кількість обертів диска за цю хвилину.

1.156. Яку роботу треба виконати, щоб примусити рухоме тіло масою 2 *кг* збільшити свою швидкість від 2 *м/с* до 5 *м/с*?; зупинитися при початковій швидкості 8 *м/с*?

1.157. Камінь, пущений по поверхні льоду зі швидкістю 2 *м/с* , пройшов до повної зупинки відстань 20,4 *м*. Знайти коефіцієнт тертя каменя по льоду, вважаючи його постійним.

1.158. Вагон вагою $2 \cdot 10^5$ *Н*, який рухається рівносповільнено під дією сили тертя 6000 *Н*, через деякий час зупиняється. Початкова швидкість вагона 54 *км/год*. Знайти: 1) роботу сили тертя; 2) відстань, яку вагон пройде до зупинки.

1.159. З башти висотою 25 *м* горизонтально кинуто камінь масою 0,2 *кг* зі швидкістю 15 *м/с*. Знайти кінетичну і потенціальну енергію каменя через 1 *с* після початку руху. Опір повітря не враховувати.

1.160. Камінь масою 0,2 *кг* кинули під кутом $\alpha = 60^o$ до горизонту зі швидкістю $\upsilon = 15$ *м/с* . Знайти кінетичну і потенціальну енергію каменя 1) через 1 *с* після початку руху; 2) у найвищій точці траєкторії. Опором повітря знехтувати.

1.161. Камінь вагою 20 *Н* впав з деякої висоти. Падіння тривало 1,43 *с*. Знайти кінетичну і потенціальну енергію каменя в середній точці шляху. Опором повітря знехтувати.

1.162. Людина вагою 600 *Н*, яка біжить зі швидкістю 8 *км/год*, наздоганяє візок вагою 800 *Н*, який рухається зі швидкістю 2,9 *км/год* і заскакує на нього. 1) З якою швидкістю почне рухатись візок? 2) З якою швидкістю буде рухатися візок, якщо людина бігла йому назустріч?

1.163. Снаряд вагою 980 *Н*, який летить горизонтально зі швидкістю 500 *м/с* вздовж залізниці, попадає в вагон з піском вагою 10^5 *Н* і застряває в ньому. З якою швидкістю почне рухатися вагон, якщо він: 1) стояв нерухомо, 2) рухався зі швидкістю 36 *км/год* в тому ж напрямку, що і снаряд, 3) рухався зі швидкістю 36 *км/год* назустріч снаряду?

1.164. Вагон вагою $19{,}6 \cdot 10^5$ *Н* рухається зі швидкістю 54 *км/год*. Визначити середню силу, яка діє на вагон, якщо відомо, що вагон зупиняється через 1) 1 *хв* 40 *с*; 2) 10 *с*; 3) 1*с*.

1.165. Човен довжиною l і масою M знаходиться в стані спокою у стоячій воді. На носі та кормі човна сидять двоє рибалок, маси яких дорівнюють m_1 та m_2. На скільки зміститься човен, якщо рибалки пройдуть по човну та поміняються місцями? Опір води не враховувати.

1.166. Платформа у формі суцільного однорідного диска, може обертатися за інерцією навколо нерухомої вертикальної осі. На краю платформи стоїть людина, маса якої в 3 рази менша маси платформи. Визначити, як і у скільки разів зміниться кутова швидкість обертання платформи, якщо людина перейде ближче до центру на відстань, що дорівнює половині радіуса платформи.

1.167. Кінетична енергія частинки, яка рухається по колу радіусом R, залежить від пройденого шляху S за законом $K = aS^2$, де a – деяка стала. Знайти силу, що діє на частинку, як функцію пройденого шляху S.

1.168. Горизонтальна платформа масою $m = 25\,кг$ і радіусом $R = 0{,}8\,м$ обертається з частотою $\nu_1 = 18\,хв^{-1}$. У центрі платформи стоїть людина і тримає в розставлених руках гирі. Вважаючи платформу диском, визначити частоту обертання платформи, якщо людина, опустивши руки, зменшить свій момент інерції від $I_1 = 3{,}5\,кг \cdot м^2$ до $I_2 = 1\,кг \cdot м^2$.

1.169. Ракета, маса M якої в початковий момент часу становила 2 *кг*, випущена вертикально вверх. Швидкість продуктів згоряння палива відносно ракети $u = 150\,м/с$ витрата палива $\mu = 0{,}2\,кг/с$. Визначити прискорення ракети а через $t = 3\,с$ після початку її руху. Опір повітря не враховувати. Поле сили тяжіння вважати однорідним.

1.170. Вагонетку масою 3 тони піднімають по рейках, які утворюють з горизонтом кут $\beta = 30^{\circ}$. Яку роботу здійснить сила тяги на шляху $S = 50\,м$, якщо відомо, що вагонетка рухається з прискоренням $a = 0{,}2\,м/с^2$?

Коефіцієнт тертя $\mu = 0,1$; $g = 10\, м/с^2$.

1.171. Визначити момент інерції I тонкого однорідного стержня довжиною $l = 60\, см$ і масою $m = 100\, г$ відносно осі, яка перпендикулярна до стержня і проходить через точку стержня, що знаходиться на відстані $a = 20\, см$ від одного з його кінців.

1.172. Обчислити момен інерції I тонкої прямокутної пластини зі сторонами $a = 10\, см$ і $b = 20\, см$ відносно осі, яка проходить через центр мас пластини паралельно довшій стороні. Маса пластини рівномірно розподілена її поверхнею з поверхневою густиною $\sigma = 1,2\, кг/м^2$.

1.173. Тонкий однорідний стержень може вільно обертатися навколо горизонтальної осі, яка проходить через точку O на стержні (рис. 20). Стержень відхилили на кут α від вертикалі й відпустили. Визначити для точки B на стержні кутове ε і тангенційне a_τ прискорення у початковий момент часу. Обчислення виконати для наступних випадків: 1) $a = 0$, $b = 2/3l$, $\alpha = \pi/2$; 2) $a = l/3$, $b = l$, $\alpha = \pi/3$; 3) $a = l/4$, $b = l/2$, $\alpha = 2/3\pi$.

1.174. Однорідний диск радіусом $R = 10\, см$ може обертатися навколо горизонтальної осі, яка перпендикулярна до площини диска і проходить через точку O на ньому (рис. 21). Диск відхилили на кут α й відпустили. Визначити для точки B на диску кутове ε і тангенційне a_τ прискорення у початковий момент часу. Обчислення виконати для наступних випадків: 1) $a = R$, $b = R/2$, $\alpha = \pi/2$; 2) $a = R/2$, $b = R$, $\alpha = \pi/6$; 3) $a = 2/3R$, $b = 2/3R$, $\alpha = 2/3\pi$.

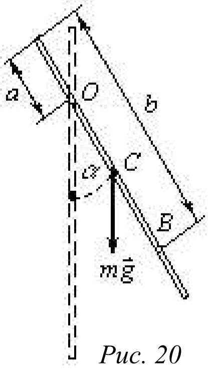

Рис. 20

1.175. На суцільний однорідний циліндричний вал радіусом $R = 20\, см$, момент інерції якого $I = 0,15\, кг \cdot м^2$, намотана легка мотузка, до кінця якої прикріплений вантаж масою $m = 0,5\, кг$. До початку обертання валу висота h вантажу над підлогою дорівнювала 2,3 *м*. Визначити: 1) час, за який вантаж опуститься на підлогу; 2) силу натягу нитки; 3) кінетичну енергію вантажу в момент удару об підлогу.

1.176. Однорідний стержень масою $m_1 = 0,2\, кг$ і довжиною $l = 1\, м$ може вільно обертатися навколо горизонтальної осі, яка проходить через точку O (рис. 22). У точку A на стержні попадає пластилінова кулька масою $m_2 = 10\ г$, яка летіла горизонтально зі швидкістю $\upsilon = 10\ м/с$, і прилипає до стержня. Визначити кутову швидкість ω стержня та лінійну швидкість u кінця стержня у початковий момент часу. Обчислення виконати для наступних значень відстані між точками A і O: 1) $l/2$; 2) $l/3$; 3) $l/4$.

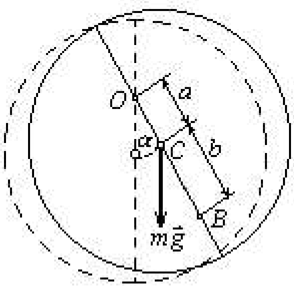

Рис. 21

1.177. Однорідний диск масою $m_1 = 0{,}2\ кг$ і радіусом $R = 20\ см$ може обертатися навколо горизонтальної осі, яка перпендикулярна до площини диска і проходить через точку C (рис. 23). У точку А на ободі диска попадає пластилінова кулька масою $m_2 = 10\ г$, яка летіла горизонтально зі швидкістю $\upsilon = 10\ м/с$, і прилипає до нього. Визначити кутову швидкість ω диска та лінійну швидкість u точки O на диску у початковий момент часу. Обчислення виконати для наступних значень відстаней a і b: 1) $a = b = R$; 2) $a = R/2$, $b = R$; 3) $a = R/3$, $b = 2R/3$.

1.178. Людина стоїть на лаві Жуковського і ловить рукою м’яч масою $m_1 = 0{,}4\ кг$, який летів горизонтально зі швидкістю $\upsilon = 20\ м/с$. Траєкторія м’яча проходить на відстані $r = 0{,}8\ м$ від вертикальної осі обертання лави. З якою кутовою швидкістю ω почне обертатися лава Жуковського з людиною, що впіймала м’яч, якщо їх сумарний момент інерції I становить $6\ кг \cdot м^2$?

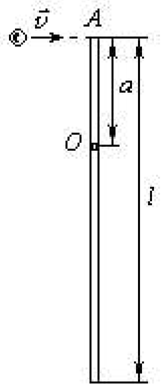

Рис. 22

1.179. На краю горизонтальної платформи, що має форму диска радіусом $R = 2\ м$, стоїть людина масою $m_1 = 80\ кг$. Маса платформи $m_2 = 240\ кг$. Платформа може обертатися навколо вертикальної осі, яка проходить через її центр. Нехтуючи тертям, знайти, з якою кутовою швидкістю ω буде обертатися платформа, якщо людина буде йти її краєм зі швидкістю $\upsilon = 2\ м/с$ відносно платформи.

1.180. Платформа у формі диска може

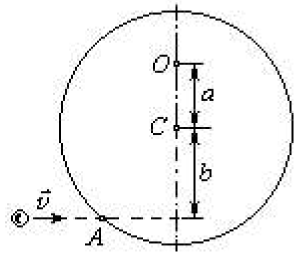

Рис. 23

обертатися навколо вертикальної осі. На краю платформи стоїть людина масою $m_1 = 60\,кг$. На який кут φ повернеться платформа, якщо людина піде краєм платформи і, обійшовши її, повернеться у вихідну точку? Маса платформи $m_2 = 240\,кг$. Момент інерції *I* людини розраховувати як для матеріальної точки.

1.181. Літак масою $m = 3\,тони$ для зльоту повинен набрати швидкість $\upsilon = 100\,м/с$ при довжині розбігу $S = 600\,м$. Якою повинна бути мінімальна потужність двигуна, щоб при цих умовах літак зміг злетіти? Силу опору рухові вважати пропорційною силі нормального тиску, середній коефіцієнт опору $\mu = 0{,}2$. Рух літака вважати рівноприскореним.

1.182. Поїзд масою $m = 784\,тони$ починає рухатися під ухил і за час $t = 50\,с$ набуває швидкості $\upsilon = 18\,км/год$. Коефіцієнт опору дорівнює $\mu = 0{,}005$, кут нахилу площини руху до горизонту $\alpha = 0{,}005^{o}$. Визначити середню потужність потяга, вважаючи силу опору пропорційною силі нормального тиску.

1.183. Кінетична енергія *T* маховика, що обертається, дорівнює 1 *кДж*. Під дією постійного гальмуючого моменту маховик почав обертатися рівносповільнено і зупинився, зробивши $N = 80\,об$. Визначити гальмуючий момент.

1.184. Куля масою $m = 10\,г$ летить зі швидкістю $\upsilon = 800\,м/с$ і обертається навколо поздовжньої осі з частотою $n = 3000\,с^{-1}$. Вважаючи кулю циліндриком з діаметром $d = 8\,мм$, визначити її повну кінетичну енергію.

1.185. Суцільний циліндр масою $m = 4\,кг$ котиться без ковзання горизонтальною поверхнею. Лінійна швидкість осі циліндра $\upsilon = 1\,м/с$. Визначити повну кінетичну енергію циліндра.

Розділ 2. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА

1. ГАЗОВІ ЗАКОНИ. ОСНОВИ МОЛЕКУЛЯРНО – КІНЕТИЧНОЇ ТЕОРІЇ

Основні співвідношення

Молекулярна фізика вивчає властивості тіл в залежності від їх внутрішньої (молекулярної) будови. Найпростішою моделлю, яка для цього застосовується, є модель ідеального газу.

Ідеальним називають газ, в якому нехтують потенціальною енергією взаємодії між молекулами, а самі молекули вважають матеріальними точками. Для такої моделі справедливе рівняння Клапейрона – Менделєєва, яке називається *рівнянням стану*:

$$PV = \frac{m}{\mu} RT \quad \text{або} \quad PV = \nu RT\,, \tag{2.1}$$

де m – маса газу μ – його молярна маса, $R = 8{,}31\ Дж/(моль \cdot K)$ – універсальна газова стала, T – абсолютна температура, P – тиск , V – об’єм, $\nu = m/\mu$ – кількість речовини.

Відмітимо, що співвідношення (2.1) справедливе для розріджених газів і для газів, температура яких значно вище критичної. З рівняння Клапейрона – Менделєєва можна отримати всі відомі закони ідеального газу (закони Бойля – Маріотта, Шарля, Гей-Люссака, Дальтона, Авогадро).

Молярну масу суміші газів можна знайти зі співвідношення:

$$\mu = \frac{(m_1 + m_2 + ... + m_n)}{(\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_n)}\,. \tag{2.2}$$

Концентрація частинок (молекул чи атомів) однорідної системи:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{N_A \rho}{\mu}\,, \tag{2.3}$$

де N – кількість частинок в системі, V – об’єм системи, $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{-23}\ моль^{-1}$ – число Авогадро, ρ – густина речовини.

Основне рівняння молекулярно – кінетичної теорії газів має вигляд:

$$P = \frac{2}{3} n < \varepsilon >, \qquad (2.4)$$

де $< \varepsilon >$ – середня кінетична енергія поступального руху молекул.

Середня кінетична енергія, яка припадає на одну ступінь вільності молекули:

$$< \varepsilon_1 >= \frac{1}{2} kT, \qquad (2.5)$$

а на i ступеней вільності

$$< \varepsilon >= \frac{i}{2} kT, \qquad (2.6)$$

де $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ *Дж / К* – стала Больцмана,

i = 3 – для одноатомного газу;
i = 5 – для двоатомного газу;
i = 6 – для трьох- і багатоатомного газу.

Характеристичні швидкості молекул:

середня квадратична $$< \upsilon_{кв} >= \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}; \qquad (2.7)$$

середня арифметична $$< \upsilon >= \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}; \qquad (2.8)$$

найбільш ймовірна $$< \upsilon_{йм} >= \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}. \qquad (2.9)$$

Розподіл Больцмана (розподіл частинок у силовому полі)

$$n = n_0 \, e^{-\frac{U}{kT}}, \qquad (2.10)$$

де n – концентрація частинок з потенціальною енергією U; n_0 – концентрація частинок з потенціальною енергією U = 0; T– абсолютна температура, e – основа натурального логарифма.

Барометрична формула (розподіл тиску в однорідному полі сили тяжіння)

$$P = P_0 \, e^{-\frac{m_0 gh}{kT}} \text{ або } P = P_0 \, e^{-\frac{\mu gh}{RT}}, \qquad (2.11)$$

де P – тиск газу на висоті h; m_0 – маса молекули; μ – молярна маса; P_0 – тиск на рівні моря (при $h = 0$); g – прискорення вільного падіння; R – універсальна газова стала.

Розподіл Максвелла (розподіл молекул за швидкостями) визначає кількість молекул, відносні швидкості яких знаходяться в межах від u до $u + du$, і записується у вигляді:

$$dN(u) = Nf(u)du = \frac{4}{\sqrt{\pi}} Ne^{-u^2} u^2 du, \qquad (2.12)$$

де $u = \upsilon/\upsilon_{йм}$ – відносна швидкість,

$$f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2$$

– функція розподілу за відносними швидкостями.

Методичні поради

1. При розв’язуванні задач з ідеальними газами слід пам’ятати, що для даної маси газу рівняння Менделєєва – Клапейрона справедливе при будь-яких ізопроцесах (ізотермічних, ізобарних, ізохорних). Якщо стан системи змінюється, то рівняння Менделєєва – Клапейрона записують для кожного стану і розв’язують отриману систему рівнянь відносно невідомих величин.

2. При розв’язуванні задач на розподіли Больцмана і Максвелла варто пам’ятати, що фізичний зміст функції розподілу даної фізичної величини – це густина ймовірності деякого значення цієї величини. Для знаходження ймовірності того, що розглядувана величина набуде значення з наперед заданого скінченного інтервалу її можливих значень, необхідно помножити функцію розподілу на ширину нескінченно малого інтервалу і проінтегрувати цей добуток в заданих межах.

Так, наприклад, для знаходження ймовірності того, що швидкість молекул набуде значення з інтервалу $[\upsilon_1, \upsilon_2]$ (або відносної кількості молекул, швидкості яких за даних умов набувають значень з інтервалу $[\upsilon_1, \upsilon_2]$), необхідно функцію розподілу Максвелла за швидкостями

$$f(\upsilon)=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m_0}{2kT}\right)^{3/2} e^{-m_0\upsilon^2/(2kT)}\,\upsilon^2$$ помножити на $d\upsilon$ і проінтегрувати в межах від υ_1 до υ_2.

Приклади розв'язування задач

1. Визначити густину суміші $m_1 = 4\cdot 10^{-3}$ *кг* водню ($\mu_1 = 2$ *г/моль*) і $m_2 = 32\cdot 10^{-3}$ *кг* кисню ($\mu_2 = 32$ *г/моль*) при температурі $T = 280\,K$ і загальному тиску $P = 0{,}93\cdot 10^5$ *Па*.

Розв'язання

Згідно з законом Дальтона, тиск суміші газів дорівнює сумі парціальних тисків її складових:

$$P = P_1 + P_2. \tag{1}$$

Запишемо рівняння стану для суміші та для кожного газу і знайдемо з них тиски:

$$PV = \frac{m}{\mu}RT \Rightarrow P = \frac{m}{V}\frac{RT}{\mu} \text{ – для суміші;} \tag{2}$$

$$P_1V = \frac{m_1}{\mu_1}RT \Rightarrow P_1 = \frac{m_1}{V}\frac{RT}{\mu_1} \text{ – для водню;} \tag{3}$$

$$P_2V = \frac{m_2}{\mu_2}RT \Rightarrow P_2 = \frac{m_2}{V}\frac{RT}{\mu_2} \text{ – для кисню;} \tag{4}$$

Підставимо (2) – (4) в (1) і отримаємо вираз для молярної маси суміші:

$$\frac{m}{V}\frac{RT}{\mu} = \frac{m_1}{V}\frac{RT}{\mu_1} + \frac{m_2}{V}\frac{RT}{\mu_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m}{\mu} = \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \Rightarrow \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m}\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right) \Rightarrow$$

$$\mu = \frac{m}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{m_1 + m_2}{\nu_1 + \nu_2}, \qquad (5)$$

де $\nu_1 = m_1/\mu_1$ і $\nu_2 = m_2/\mu_2$ кількості молів водню і кисню відповідно.

Густина за визначенням $\rho = m/V$. Урахувавши це в рівнянні (2), перепишемо його у вигляді:

$$P = \rho \frac{RT}{\mu},$$

звідки шукана густина

$$\rho = \frac{P\mu}{RT}. \qquad (6)$$

Підставивши (5) в (6), отримаємо остаточну формулу для густини:

$$\rho = \frac{P}{RT} \frac{m_1 + m_2}{\nu_1 + \nu_2}. \qquad (7)$$

Після підстановки числових значень величин в одиницях SI одержимо $\rho = 0{,}48\, кг/м^3$.

Відповідь: $0{,}48\, кг/м^3$.

2. Припускаючи, що температура і прискорення вільного падіння не залежить від висоти, знайти на якій висоті *h* густина кисню зменшиться на 1%? Температура кисню 300 *K*, молярна маса – $\mu = 32\, г/моль$.

Розв'язання

Запишемо барометричну формулу

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{m_0 g h}{kT}\right), \qquad (1)$$

де P_0 – тиск на рівні моря. Врахуємо той факт, що тиск зв'язаний з густиною співвідношенням $P = \rho \frac{RT}{\mu}$ і перепишемо (1) у вигляді:

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{m_0 gh}{kT}\right). \qquad (2)$$

Зменшення густини на 1% означає, що $\rho = 0{,}99\rho_0$. Маса молекули кисню $m_0 = \frac{\mu}{N_A}$. З урахуванням цього (2) перепишеться:

$$0{,}99\rho_0 = \rho_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{kN_A T}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}99 = \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right), \qquad (3)$$

де враховано, що $kN_A = R$.

Прологарифмуємо (3) і одержимо:

$$\ln 0{,}99 = \ln\left(\exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right)\right) \Rightarrow \ln 0{,}99 = -\frac{\mu gh}{RT} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = -\frac{\ln 0{,}99 RT}{\mu g} = -\frac{-0{,}01 \cdot 8{,}31 \cdot 300}{32 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8} = 80\ м.$$

Відповідь: 80 *м*.

Задачі для самостійного розв'язування

2.1. Манометр у вигляді скляної U – подібної трубки з внутрішнім діаметром $d = 5\ мм$ (рис. 24а) заповнений ртуттю так, що повітря в запаяній частині трубки займає при нормальному атмосферному тиску об'єм $V_1 = 10\ мм^3$. При цьому різниця рівнів ртуті в обох колінах манометра Δh_1 становить 10 *см*. При під'єднанні відкритого кінця трубки до більшої посудини (рис. 24б) різниця Δh_2 зменшилася до 1 *см*. Визначити тиск *P* в посудині.

2.2. При нагріванні ідеального газу на $\Delta T = 1K$ при постійному тиску, його об'єм збільшився на 1/350 початкового об'єму. Знайти початкову температуру T газу.

2.3. Оболонка повітряної кулі об'ємом $V = 800\ м^3$ повністю заповнена воднем при температурі $T_1 = 273\,K$. На скільки зміниться піднімальна сила кулі при збільшенні температури до $T_2 = 293\,K$? Вважати об'єм V оболонки незмінним і зовнішній тиск нормальним. У нижній частині оболонки є отвір, через який водень може витікати в навколишнє середовище.

2.4. Для занурення та підняття підводного човна в ньому є два сполучених між собою резервуари. В зануреному стані один з резервуарів об'ємом V заповнений водою, в іншому, місткістю V_1, знаходиться стиснуте повітря. Яким повинен бути мінімальний тиск стиснутого повітря, щоб при підняті човна з глибини H воно повністю витіснило би воду з баластної цистерни? Атмосферний тиск нормальний, зміною температури повітря при розширенні знехтувати.

2.5. Газовий термометр складається з кулі і припаяної до неї скляної трубки. Крапелька ртуті, поміщена в трубку, відокремлює об'єм кулі від навколишнього середовища (рис. 25). Площа поперечного перерізу трубки $S = 0{,}1\,см^2$. При температурі $T_1 = 273\,K$ крапелька знаходилася на відстані $l_1 = 30\,см$ від поверхні кулі, при температурі $T_2 = 278\,K$ – на відстані $l_2 = 50\,см$. Знайти об'єм V кулі.

2.6. У велику посудину з водою було перекинуто циліндричну посудину. Рівні води всередині і поза посудиною – однакові. Відстань l від рівня води до дна перекинутої посудини дорівнює 40 *см*. На яку висоту h підніметься вода в циліндричній посудині при зменшенні температури від $T_1 = 310\,K$ до $T_2 = 273\,K$? Атмосферний тиск нормальний.

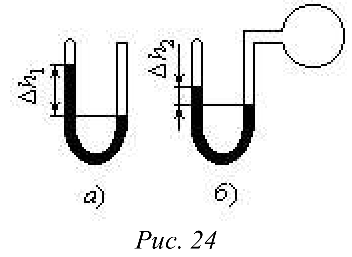

Рис. 24

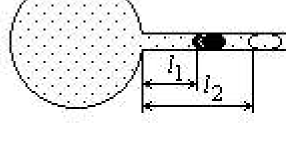

Рис. 25

2.7. Скільки гелію знадобиться для заповнення повітряної кулі діаметром $d = 10\ м$, щоб куля змогла підняти вантаж вагою $P = 9{,}8\ кН$ за нормального атмосферного тиску та температури $T = 290\ K$? Об'ємом вантажу знехтувати.

2.8. Який об'єм V займає суміш газів – азоту масою $m_1 = 1\ кг$ і гелію масою $m_2 = 1\ кг$ – за нормальних умов?

2.9. В 1 *кг* сухого повітря міститься $m_1 = 232\ г$ кисню і $m_2 = 768\ г$ азоту (масами інших газів нехтуємо). Визначити відносну молекулярну масу M_r повітря.

2.10. 10 *г* кисню знаходяться під тиском 3 *атм* при температурі 10 ^{O}C. Після розширення внаслідок нагрівання при постійному тиску кисень зайняв об'єм 10 *л*. Знайти: а) об'єм газу до розширення; б) температуру газу після розширення; в) густину газу до розширення; г) густину газу після розширення.

2.11. Компресор захоплює при кожному качанні 4 *л* повітря при нормальному атмосферному тиску і температурі –3 ^{O}C і нагнітає його в резервуар місткістю 1,5 $м^3$, причому температура повітря в резервуарі підтримується близько 45 ^{O}C. Скільки качань повинен зробити компресор, щоб тиск у резервуарі збільшився на $2 \cdot 10^5\ Н/м^2$?

2.12. Із балона зі стиснутим воднем місткістю 10 *л* внаслідок несправності вентиля витікає газ. При температурі 7 ^{O}C манометр показує $4{,}9 \cdot 10^6\ Н/м^2$. Через деякий час при температурі 17 ^{O}C манометр показав такий самий тиск. Скільки газу витекло?

2.13. Топочний газ має такий склад по масі: CO_2–21,4 %; H_2O –6,8 %; N_2–71,8 %. Визначити питомий об'єм такого газу при тиску $10^5\ Па$ і температурі 500 *К*.

2.14. Три балони місткістю 3, 7, і 5 *л* наповнені, відповідно, киснем (2 *атм*), азотом (3 *атм*) і вуглекислим газом (0,6 *атм*) при однаковій температурі. Балони з'єднують між собою, причому утворюється суміш тієї ж температури. Який буде тиск цієї суміші?

2.15. У посудині об'ємом 20 *л* знаходиться 10 *г* азоту і 20 *г* вуглекислого газу при температурі 300 *К*. Визначити: 1) молярну масу суміші; 2) тиск у посудині; 3) тиск у посудині після нагрівання до 400 *К*.

2.16. Балон місткістю 20 *л* заповнений стиснутим повітрям.

При температурі 20 ^{O}C манометр показує тиск $1{,}2 \cdot 10^7$ $Н/м^2$. Який об'єм води можна витіснити із цистерни підводного човна повітрям цього балона, якщо витіснення проводиться на глибині 30 *м* при температурі 5 ^{O}C? Вважати, що тиск стовпа води висотою 10 *м* дорівнює 10^5 $Н/м^2$, тиск атмосфери – 10^5 $Н/м^2$.

2.17. 12 *г* газу займають об'єм $4 \cdot 10^{-3}$ $м^3$ при температурі 7 ^{O}C. Після нагрівання при постійному тиску густина газу стала $6 \cdot 10^{-4}$ $г/см^3$. До якої температури нагріли газ?

2.18. Посередині відкачаної і запаяної з обох кінців горизонтальної трубки довжиною $L = 1$ *м* знаходиться стовпчик ртуті завжовжки $h = 20$ *см*. Якщо трубку поставити вертикально, стовпчик ртуті зміститься на $l = 10$ *см*. До якого тиску була відкачана трубка?

2.19. Горизонтальна запаяна з обох кінців скляна трубка розділена стовпчиком ртуті на дві рівні частини. Довжина кожного стовпчика повітря 20 *см*. Тиск 750 *мм рт. ст.* Якщо трубку поставити вертикально, ртутний стовпчик опускається на 2 *см*. Визначити довжину стовпчика ртуті.

2.20. У скільки разів збільшиться об'єм повітряної кулі, якщо її внести з вулиці у тепле приміщення? Температура на вулиці –3 ^{O}C, у приміщенні – +27 ^{O}C.

2.21. Усередині закритого з обох боків горизонтального циліндра знаходиться тонкий поршень, який може рухатися без тертя. З одного боку від поршня міститься водень масою $m_1 = 3$ *г*, з другого – азот масою $m_2 = 23$ *г*. Яку частину об'єму циліндра займає водень?

2.22. Дві посудини, які містять однакові маси одного і того самого газу з'єднані трубкою з краном. У першій посудині тиск $P_1 = 10^5$ *Па*, і в другій $P_2 = 3 \cdot 10^5$ *Па*. Температура однакова. Який встановиться тиск після відкриття крана?

2.23. Газовий термометр (рис. 26) складається з двох однакових посудин з газом, що мають об'єм V_0 кожна, які з'єднані трубкою

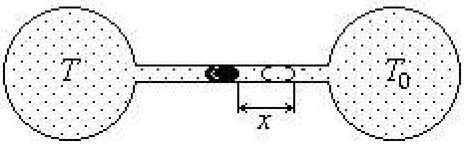

Рис. 26

довжиною l з поперечним перерізом S. Трубку перекриває крапля ртуті. Якщо температури газів у об'ємах однакові, ртуть знаходиться посередині трубки. Правий об'єм поміщають у термостат з температурою T_0. Проградуюйте термометр, знайшовши залежність температури газу в лівому об'ємі від зміщення x ртуті від положення рівноваги.

2.24. Загальновідоме жартівливе запитання:"Що важче: тонна свинцю чи тонна корку?" Підрахувати, на скільки істинна вага корку, який у повітрі важить 1 *кН*, більша за істинну вагу свинцю, який у повітрі також важить 1 *кН*. Температура повітря 17 ^{O}C, тиск 760 *мм рт. ст.*

2.25. Якою повинна бути вага оболонки дитячої повітряної кулі діаметром 25 *см*, заповненої воднем, щоб результуюча піднімальна сила кульки у повітрі дорівнювала нулеві. Повітря і водень знаходяться за нормальних умов. Тиск усередині кульки дорівнює зовнішньому.

2.26. Компресор захоплює при кожному качанні $V_0 = 1\,л$ повітря за нормальних умов і нагнітає його в автомобільний балон, об'ємом $V = 0{,}5\,м^3$. Температура повітря в балоні 290 *К*. Скільки качань повинен зробити компресор, щоб площа дотику колеса з дорогою зменшилася на $S = 100\,см^2$, якщо до цього дорівнювала $S = 450\,см^2$ і на колесо припадало навантаження $F = 4{,}9\,кН$?

2.27. Знайти кількість молекул азоту, що містяться за нормальних умов у 1 $см^3$ і володіють швидкістю: а) між 99 і 101 *м/с*; б) між 499 і 501 *м/с*.

2.28. При якій температурі кількість молекул азоту, що володіють швидкостями в інтервалі 299 – 301 *м/с*, дорівнює кількості молекул, що мають швидкості в інтервалі 599 – 601 *м/с*?

2.29. При якій температурі середня квадратична швидкість молекул кисню більша за їх найбільш ймовірну швидкість на 100 *м/с*.

2.30. Визначити тиск, який чинить газ на стінки посудини, якщо його густина дорівнює $0{,}01\,кг/м^3$, а середня квадратична швидкість його молекул складає 480 *м/с*.

2.31. Знайти кінетичну енергію теплового руху молекул, що знаходяться в 1 *г* повітря при температурі 15 ^{O}C. Повітря вважати однорідним газом, маса одного кіломоля якого 29 *кг/кмоль*.

2.32. Чому дорівнює енергія теплового руху молекул двохатомного газу, що міститься в посудині об'ємом 2 *л* під тиском $1{,}5\cdot 10^5$ *Н/м*^{2}?

2.33. У посудині місткістю 2 *л* знаходиться 10 *г* кисню під тиском 680 *мм рт. ст.* Знайти: 1) середню квадратичну швидкість молекул газу; 2) кількість молекул у посудині; 3) густину газу.

2.34. На якій висоті *h* над поверхнею Землі атмосферний тиск удвічі менший, ніж на її поверхні? Вважати температуру *T* незалежною від висоти і такою, що дорівнює 290 *К*.

2.35. Барометр у кабіні гелікоптера, що летить, показує $P = 90\,кПа$. На якій висоті *h* летить гелікоптер, якщо на злітній смузі барометр показував тиск $P_0 = 100\,кПа$? Вважати, що температура *T* дорівнює 290 *К* і не змінюється з висотою.

2.36. Знайти зміну висоти Δh, що відповідає зміні тиску на $\Delta P = 100\,Па$, у двох випадках: 1) біля поверхні Землі, де температура $T_1 = 290\,K$ і тиск $P_1 = 100\,кПа$; 2) на деякій висоті, де температура $T_2 = 220\,K$ і тиск $P_2 = 25\,кПа$.

2.37. Який тиск повітря в шахті на глибині 1 *км*, якщо температура не залежить від глибиии шахти і дорівнює 22 °*С*. Прискорення вільного падіння вважати сталим. Тиск повітря на поверхні Землі дорівнює P_0.

2.38. На якій висоті тиск повітря складає 75 % від тиску на рівні моря? Температуру вважати постійною і такою, що дорівнює 0 °*С*.

2.39. Пасажирський літак виконує політ на висоті 8000 *м*. Щоб не забезпечувати пасажирів кисневими масками, у салоні за допомогою компресора підтримується постійний тиск, що відповідає висоті 2700 *м*. Знайти різницю тисків всередині і зовні кабіни. Середню температуру зовнішнього повітря вважати такою, що дорівнює 0 °*С*.

2.40. Визначити відношення тиску повітря на висоті 1 *км* до тиску на дні свердловини глибиною 1 *км*. Повітря на поверхні Землі знаходиться за нормальних умов і його температура не залежить від висоти.

2.41. На якій висоті густина газу складає 50 % від її густини на рівні моря? Температуру вважати постійною і такою, що дорівнює 0 ^{O}C. Задачу розв'язати для: 1) повітря і 2) водню.

2. ОСНОВИ ТЕРМОДИНАМІКИ. ЕНТРОПІЯ

Основні співвідношення

Рівняння Майєра

$$C_p - C_V = R, \tag{2.13}$$

де $C_P = \frac{i+2}{2}R$ і $C_V = \frac{i}{2}R$ – молярні теплоємності при постійному тиску та постійному об'ємі, відповідно.

Внутрішня енергія ідеального газу:

$$U = \frac{m}{\mu}C_V T. \tag{2.14}$$

Кількість теплоти, що отримує система в процесі теплообміну:

$$\Delta Q = \frac{m}{\mu}C(T_2 - T_1), \tag{2.15}$$

де C – молярна теплоємність процесу.

Робота газу, пов'язана зі зміною об'єму, в загальному випадку визначається за співвідношенням:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} PdV, \tag{2.16}$$

де V_1 – початковий об'єм газу, V_2 – кінцевий. При ізобаричному процесі:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} PdV = P(V_2 - V_1); \tag{2.17}$$

при ізотермічному процесі;

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \frac{m}{\mu}RT\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right); \tag{2.18}$$

при адіабатичному процесі:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \frac{m}{\mu} C_V (T_1 - T_2). \qquad (2.19)$$

Рівняння Пуассона (рівняння адіабатичного процесу)

$$PV^{\gamma} = const, \qquad (2.20)$$

де $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ – показник адіабати.

Перше начало термодинаміки:

$$\Delta Q = \Delta U + A; \qquad (2.21)$$

де ΔQ – кількість теплоти, яку надали газові; ΔU – зміна його внутрішньої енергії; A – робота, яку здійснює газ проти зовнішніх сил.

Термодинамічний *коефіцієнт корисної дії* (к. к. д.) циклу в загальному випадку:

$$\eta = \frac{|Q_1| - |Q_2|}{|Q_1|}, \qquad (2.22)$$

де Q_1 – кількість теплоти, яку отримало робоче тіло (газ) від нагрівника; $|Q_2|$ – абсолютне значення кількості теплоти, яку робоче тіло передало охолоджувачу.

К. к. д. циклу Карно (циклу, за яким працює ідеальна теплова машина) можна визначити за формулою (2.22) або через температури нагрівника (T_1) і охолоджувача (T_2):

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \qquad (2.23)$$

Зміна ентропії

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}, \qquad (2.24)$$

де умовні межі інтегрування відповідають початковому і кінцевому станам системи.

Формула Больцмана для ентропії системи в певному стані:

$$S = k \ln W, \qquad (2.25)$$

де S – ентропія системи; W – термодинамічна ймовірність її стану; k – стала Больцмана.

Методичні поради

1. Перед розв'язуванням задач на основи термодинаміки, в яких розглядається зміна станів системи з різними термодинамічними параметрами, доцільно зобразити процес на відповідній діаграмі (у координатах PV, PT, VT, ST т.п.) і записати відомі та невідомі параметри системи для кожного стану. Наприклад, стан 1 (P_1, V_1, T_1, m_1).

2. Слід також пам'ятати , що графічне зображення процесів в яких бере участь газ, значно полегшує знаходження невідомих величин. Так представлення процесу в координатах PV допоможе знайти роботу, яку виконує газ, за площею під кривою графіка функції $P(V)$.

Приклади розв'язування задач

1. Яка зовнішня робота буде виконана, якщо 200 *г* азоту нагріти від 20 до 100 ^{O}C при сталому тиску?

Розв'язання

При ізобаричному нагріванні газу кількість теплоти ΔQ, яку він отримує, йде на збільшення його внутрішньої енергії ΔU та на виконання роботи A проти зовнішніх сил. На основі першого начала термодинаміки маємо:

$$\Delta Q = \Delta U + A, \qquad (1)$$

звідки

$$A = \Delta Q - \Delta U. \qquad (2)$$

Теплоту передану газу, можна обчислити за формулою

$$\Delta Q = \frac{m}{\mu} C_P \Delta T, \qquad (3)$$

а зміну внутрішньої енергії – за формулою

$$\Delta U = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T, \qquad (4)$$

тоді робота, виконана проти зовнішніх сил, буде

$$A = \frac{m}{\mu} C_P \Delta T - \frac{m}{\mu} C_V \Delta T = \frac{m}{\mu} R \Delta T =$$

$$= \frac{200\ г}{28\frac{г}{моль}} \cdot 8{,}31\frac{Дж}{моль \cdot К} \cdot 80\ К = 4754\ Дж$$

Відповідь: 4,754 *кДж*.

2. Ідеальний газ здійснює цикл, який складається з ізотерми (1→2), політропи (2→3) та адіабати (3→1). Ізотермічний процес відбувається при максимальній температурі циклу. Знайти к.к.д. циклу, якщо температура в його межах зменшується в *k* разів.

Розв'язання

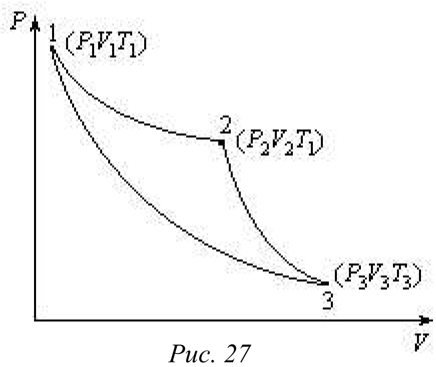

Рис. 27

На рис. 27 зображено *PV* – діаграму циклу, яка містить три характерні точки, в яких вказані значення параметрів стану і задано напрям обходу циклу. Вважатимемо, що як робоче тіло використано 1 *моль* ідеального газу. Знайдемо кількості теплоти, які газ поглинає і віддає у даному циклі.

При ізотермічному розширенні газ отримує кількість теплоти

$$Q_{12} = A_{12} = RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} > 0 .$$

При політропному процесі кількість теплоти

$$Q_{23} = C(T_3 - T_1) = -C(T_1 - T_3) < 0 ,$$

тому що $T_1 > T_3$ за умовою задачі, отже, газ теплоту виділяє. $Q_{31} = 0$, оскільки процес адіабатний. Тоді згідно зі співвідношенням (2.22)

$$\eta = \frac{RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} - C(T_1 - T_3)}{RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}}. \qquad (1)$$

Тепер потрібно виразити к.к.д. через величини, відомі за умовою задачі. Вважаємо, що показник політропи *n*. Виразимо молярну теплоємність політропічного процесу через *n* та показник адіабати *γ*. $n = \frac{C - C_P}{C - C_V}$, звідки випливає, що

$$C = \frac{nC_V - C_P}{n-1}. \qquad (2)$$

Оскільки $C_P = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$, а $C_V = \frac{R}{\gamma - 1}$, то

$$C = \frac{R(n-\gamma)}{(\gamma-1)(n-1)}. \qquad (3)$$

За умовою задачі об'єми газу невідомі. Виразимо їх відношення через відношення температур у відповідних станах, скориставшись рівняннями адіабати $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1}$, та політропи $T_1 V_2^{n-1} = T_3 V_3^{n-1}$. Одержуємо:

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{n-1} = \left(\frac{T_1}{T_3}\right)^{\frac{n-\gamma}{\gamma-1}},$$

або

$$\ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{n-\gamma}{(n-1)(\gamma-1)} \ln k. \qquad (4)$$

Підставляючи (3) і (4) в (1), отримаємо к.к.д. циклу

$$\eta = \frac{T_1 \ln k - (T_1 - T_3)}{T_1 \ln k} = 1 - \frac{k-1}{k \ln k}.$$

Відповідь: $\eta = 1 - \frac{k-1}{k \ln k}$.

3. Обчислити зміну ентропії 14 *г* азоту, що охолоджується від температури T_1=300*К* до T_2=273*К* при сталому об'ємі.

Розв'язання

Процес охолодження азоту при сталому об'ємі оборотний, тому можна скористатися формулою:

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} C_V \ln \frac{T_2}{T_1} .$$

Молярна теплоємність азоту при сталому об'ємі, оскільки азот двоатомний газ, дорівнює

$$C_V = \frac{5}{2} R = 20{,}775 \frac{Дж}{моль \cdot К} .$$

Тоді

$$\Delta S = \frac{14 г}{28 г/моль} 20{,}775 \frac{Дж}{моль \cdot К} \cdot \ln \frac{273 К}{300 К} = -1{,}03 \frac{Дж}{К} .$$

Відповідь: $-1{,}03\ Дж/К$.

4. Знайти зміну ентропії ΔS при нагріванні води масою $m = 100\ г$ від температури $t_1 = 0\,°C$ до температури $t_2 = 100\,°C$ з подальшим перетворенням її у пару такої ж температури.

Розв'язання

Знайдемо окремо зміну ентропії ΔS_1 при нагріванні води до температури кипіння і зміну ентропії ΔS_2 при перетворенні її в пару. Тоді повна зміна ентропії $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$.

У загальному випадку зміна ентропії визначається за співвідношенням:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} . \qquad (1)$$

При нескінченно малій зміні температури dT тіла, яке нагрівається, затрачується кількість теплоти $dQ = cmdT$,

m – маса тіла, c – питома теплоємність. Підставивши вираз для теплоти в (1), знайдемо формулу для визначення зміни ентропії при нагріванні води до температури кипіння:

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{cmdT}{T} = cm\ln(T_2 / T_1) = 132\ Дж / К \quad . \qquad (2)$$

При розрахунку зміни ентропії при перетворенні води в пару такої ж температури, врахуємо у формулі (1) той факт, що температура у цьому процесі постійна. Тому винесемо її за знак інтеграла:

$$\Delta S_2 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\int_1^2 dQ = \frac{Q}{T} = \frac{\lambda m}{T}, \qquad (3)$$

де λ – питома теплота пароутворення. Підставивши у (3) числові значення величин, що у неї входять, одержимо $\Delta S_2 = 605\ Дж / К$.

Сумарна зміна ентропії дорівнюватиме $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 737\ Дж / К$.

Відповідь: 735 *Дж/К*.

Задачі для самостійного розв'язування

2.42. Азот масою $m = 5\ кг$ нагрівають на $\Delta T = 150\ K$ при постійному об'ємі. Знайти: 1) отриману кількість теплоти ΔQ; 2) зміну ΔU внутрішньої енергії; 3) виконану газом роботу *A*.

2.43. Кисень нагрівається при постійному тиску $P = 80\ кПа$. Його об'єм збільшується від $V_1 = 1\ м^3$ до $V_2 = 3\ м^3$. Визначити: 1) зміну внутрішньої енергії; 2) роботу *A*, виконану при розширенні; 3) кількість теплоти ΔQ, що була надана газу.

2.44. Кисень масою $m = 2\ кг$ займає об'єм $V_1 = 1\ м^3$ і перебуває під тиском $P_1 = 0{,}2\ МПа$. Газ нагрівають спочатку при постійному тиску до об'єму $V_2 = 3\ м^3$, а потім при постійному об'ємі до тиску $P_2 = 0{,}5\ МПа$. Знайти: 1) зміну внутрішньої енергії ΔU; 2) виконану газом роботу *A*; 3) кількість теплоти ΔQ, що була надана газу. Побудувати графік процесу.

2.45. На нагрівання кисню масою $m = 160\ г$ на $\Delta T = 12\ K$ була затрачена кількість теплоти $\Delta Q = 1{,}76\ кДж$. Як відбувалося нагрівання: при постійному тиску чи при постійному об'ємі?

2.46. У циліндрі під поршнем знаходиться водень масою $m = 0{,}02\ кг$ при температрі $T_1 = 300\ K$. Водень спочатку розширюється адіабатично, при цьому його об'єм зростає у п'ять разів, а потім стискується ізотермічно так, що його об'єм зменшується у п'ять разів. Знайти температуру T_2 після адіабатичного розширення, а також повну роботу A виконану газом. Зобразити процес графічно.

2.47. Паливо в дизельному двигуні спалахує при температурі $T_2 = 1100\ K$. Початкова температура повітря, яке стискується в циліндрі двигуна $T_1 = 350\ K$. У скільки разів потрібно зменшити об'єм повітря при стискуванні, щоб паливо спалахнуло? Стискування вважати адіабатичним. Показник адіабати для повітря $\gamma = 1{,}4$.

2.48. При адіабатичному розширенні двох молів кисню, який знаходився за нормальних умов, його об'єм збільшився в $n = 3$ рази. Визначити: 1) зміну внутрішньої енергії газу; 2) роботу, яку виконав газ при розщиренні.

2.49. У закритій посудині міститься 14 *г* азоту під тиском 10^5 *Па* при температурі 27 ^{O}C. Після нагрівання тиск у посудині збільшився у 5 разів. Знайти: 1) до якої температури нагріли газ; 2) об'єм посудини; 3) яку кількість теплоти надано газу?

2.50. Гелій знаходиться в закритій посудині місткістю 2 *л* при температурі 20 ^{O}C и тиску 10^5 *Па*. 1) Яку кількість теплоти потрібно надати гелію, щоб нагріти його на 100 ^{O}C? 2) Якою буде середня квадратична швидкість його молекул при новій температурі? 3) Який встановиться тиск? 4) Яка буде густина гелію? 5) Якою буде енергія теплового руху молекул?

2.51. У закритій посудині об'ємом 2 *л* знаходиться 12 *г* азоту при температурі 10 ^{O}C. Після нагрівання тиск у посудині став 10^4 *мм рт. ст.* Яку кількість тепла було надано газу при нагріванні?

2.52. При нагріванні 40 *г* кисню від 16 ^{O}C до 40 ^{O}C затрачено 150 *кал* тепла. Ізобарно чи ізохорно нагрівався газ?

2.53. Азот міститься в закритій посудині об'ємом 3 *л* при температурі 27 ^{O}C і тиску 3 *атм*. Після нагрівання тиск у посудині збільшився до 25 *атм*. Визначити: 1) температуру азоту після нагрівання; 2) кількість теплоти, надану азоту.

2.54. Азот, який знаходився при температурі 400 *К*, зазнає адіабатичного розширення, в результаті якого його об'єм збільшився в n=5 разів, а внутрішня енергія зменшилася на 4 *кДж*. Визначити масу азоту.

2.55. 2 *л* азоту знаходяться під тиском 10^5 *Па*. Яку кількість теплоти потрібно надати азоту, щоб 1) при $P = const$ збільшити об'єм удвоє; 2) при $V = const$ збільшити тиск удвоє?

2.56. 2 *кмолі* вуглекислого газу нагріваються при постійному тиску на 50 ^{O}C. Знайти: 1) зміну його внутрішньої енергії; 2) роботу розширення; 3) кількість теплоти, яку отримав газ.

2.57. 10,5 *г* азоту ізотермічно розширюються при температурі –23 ^{O}C від тиску P_1 = 2,5 *атм* до тиску P_2 = 1 *атм*. Знайти роботу, яку виконує газ при розширенні.

2.58. У циліндрі з площею основи $S = 100\,см^2$ міститься повітря при температурі $T = 290\,K$. На висоті $H = 0{,}6\,м$ від основи циліндра знаходиться легкий поршень, на якому лежить гиря масою $m = 100\,кг$. Яку роботу здійснить газ при розширенні, якщо його нагріти на $\Delta T = 50\,K$? Атмосферний тиск $P_а = 10^5\,Па$.

2.59. Робота ізотермічного розширення 10 *г* деякого газу від об'єму V_1 до об'єму $V_2 = 2V_1$ дорівнює 575 *Дж*. Знайти середню квадратичну швидкість молекул газу при температурі розширення.

2.60. Цикл, у якому робочим тілом є водень, складається з двох ізохор та двох ізобар. Зобразити цикл на PV– діаграмі, знайти роботу A та к.к.д. даного циклу. Відомо, що в межах циклу максимальні значення об'єму і тиску газу в два рази більші за свої мінімальні значення, що дорівнюють $V_{min} = 0{,}5\,м^3$, $P_{min} = 10^5$ *Па.*

2.61. 14 *г* азоту адіабатично розширюються так, що тиск зменшується в 5 разів, а потім ізотермічно стискуються до початкового тиску. Початкова температура азоту T_1 = 420 *К*. Зообразити процес на PV – діаграмі. Знайти: а) температуру газу T_2 в кінці процесу; б) кількість тепла, що віддав газ ΔQ; в) приріст внутрішньої енергії газу ΔU; г) виконану газом роботу A.

2.62. 1 *кмоль* ідеального одноатомного газу розширюється політропічно з показником політропи n = 1,5, причому його температура зменшується на 1°. Обчислити: а) молярну теплоємність газу в цьому процесі; б) кількість теплоти, отриману газом; в) роботу, виконану газом. За рахунок яких джерел енергії виконується дана робота?

2.63. Один кубометр повітря стискують так, що його об'єм зменшується у 5 разів, а тиск збільшується у 10 разів. Початковий тиск 100 *кПа*. Вважаючи процес стискування політропічним, обчислити: а) показник політропи; б) приріст внутрішньої енергії; в) кількість теплоти, отриману газом; г) роботу, затрачену на стискування.

2.64. Азот масою 28 *г* адіабатично розширили в n=2 рази, а потім ізобарно стиснули до початкового об'єму. Знайдіть зміну ентропії газу в ході вказаних процесів.

2.65. 1 *кмоль* кисню винонує цикл Карно в інтервалі температур від 27 $^{\circ}C$ до 327 $^{\circ}C$. Відомо,що відношення максимального за цикл тиску P_{max} до мінімального тиску P_{min} дорівнює 20. Обчислити: а) к.к.д. циклу; б) кількість тепла Q_1, отриманого від нагрівника за цикл; в) кількість тепла Q_2, відданого холодильнику за цикл; г) роботу A газу за цикл.

2.66. Знайти к.к.д. циклу, що складається з двох ізохор та двох адіабат. Робочим тілом є азот. Відомо, що у межах циклу об'єм газу змінюється у 10 разів.

2.67. Цикл, що виконується двома кіломолями ідеального двоатомного газу, складається з ізотерми, ізобари та ізохори. Ізотермічний процес відбувається при максимальній температурі циклу, яка дорівнює T = 400 *К*. Відомо також, що в межах циклу об'єм газу змінюється у два рази, тобто $a = V_{max}/V_{min} = 2$. 1) Обчислити роботу A газу за цикл та к.к.д. циклу η . 2) Порівняти отримане значення η з к.к.д. циклу Карно η_0 , що здійснюється в інтервалі температур від T_{min} до T_{max} даного циклу.

2.68. 1 моль двоатомного ідеального газу виконує цикл, який складається з двох ізохор і двох ізобар. Найменший об'єм $V_{min} = 10\,л$, найбільший – $V_{max} = 20\,л$, найменший тиск $P_{min} = 246\,кПа$, найбільший – $P_{max} = 410\,кПа$. Побудувати графік циклу. Визначити температуру T для характерних точок циклу та його к. к. д.

2.69. Ідеальний багатоатомний газ виконує цикл, який складається з двох ізохор і двох ізобар. Найбільший тиск газу в два рази більший за найменший, а найбільший об'єм у чотири рази більший за найменший. Визначити к. к. д

2.70. Ідеальна теплова машина, яка працює за циклом Карно, отримує за один цикл від нагрівника 600 *кал* тепла. Температура нагрівника 400 *К*, температура охолоджувача 300 *К*. Знайти роботу, яку виконує газ за один цикл, та кількість теплоти, яку він віддає охолоджувачу.

2.71. Ідеальна теплова машина працює за циклом Карно. Визначити к.к.д. циклу, якщо відомо, що за один цикл виконується робота 3 *кДж*, а охолоджувач отримує 3,2 *ккал* тепла.

2.72. Ідеальна теплова машина, яка працює за циклом Карно виконує за один цикл роботу $7{,}35\cdot10^4$ *Дж*. Температура нагрівника 100 $^{\circ}C$, температура охолоджувача 0 $^{\circ}C$. Знайти: 1) к.к.д. машини; 2) кількість теплоти, отриману машиною за один цикл; 3) кількість теплоти віддану охолоджувачу.

2.73. Ідеальна теплова машина працює за циклом Карно. При цьому 80 % тепла, отриманого від нагрівника передається охолоджувачу. Кількість тепла, отримана від нагрівника становить 1,5 *ккал*. Знайти: 1) к.к.д. циклу; 2) роботу, що виконує газ за один цикл.

2.74. Ідеальна теплова машина працює за циклом Карно з нагрітим повітрям як робочим тілом. Початкова температура повітря 127 $^{\circ}C$, початковий тиск 7 *атм*, початковий об'єм $2\cdot10^{-3}$ $м^3$. Після першого ізотермічного розширення повітря зайняло об'єм 5 *л*; після адіабатичного розширення об'єм став таким, що дорівнює 8 *л*. Знайти: 1) координати перетину ізотерм та адіабат; 2) роботу на кожній ділянці циклу; 3) повну роботу за цикл; 4) к.к.д. циклу; 5) кількість теплоти, отриману за один цикл від нагрівника; 6) кількість теплоти, віддану охолоджувачу.

2.75. 1 *кмоль* ідеального газу здійснює цикл, що складається з двох ізохор і двох ізобар. При цьому об'єм газу змінюється від $V_1 = 25$ $м^3$ до $V_2 = 50$ $м^3$, а тиск від $P_1 = 1$ *атм* до $P_2 = 2$ *атм*. У скільки разів робота, що виконується в даному циклі, менша за роботу, яка виконується у циклі Карно, ізотерми якого відповідають найбільшій та найменшій температурам циклу, що розглядається, якщо при ізотермічному розширенні об'єм газу збільшується удвічі?

2.76. Ідеальна холодильна машина, яка працює за зворотним циклом Карно, виконує за один цикл роботу $3{,}7\cdot10^4$ *Дж*. При цьому вона забирає тепло від тіла з температурою –10 ^{O}C і передає його тілу з температурою +17 ^{O}C. Знайти: 1) к.к.д. циклу; 2) кількість теплоти, що відбирається за один цикл від холодного тіла; 3) кількість теплоти, яка передається гарячому тілу.

2.77. Ідеальна холодильна машина, яка працює за зворотним циклом Карно, передає тепло від холодильника з водою при температурі $0^{O}C$ кип'ятильнику з водою при температурі $100^{O}C$. Яку кількість води потрібно заморозити у холодильнику, щоб перетворити у пару 1 *кг* води у кип'ятильнику?

2.78. Знайти приріст ентропії при перетворенні 1 *г* води при 0 ^{O}C в пару при 100 ^{O}C.

2.79. Лід масою $m_1 = 2\,кг$ при температурі $t_1 = 0^o\ C$ був перетворений у воду тієї ж температури за допомогою пари, що мала температуру $t_2 = 100^o\ C$. Визначити масу m_2 використаної пари. Яка зміна ентропії системи лід – пара?

2.80. Знайти зміну ентропії при переході 8 *г* кисню від об'єму 10 *л* при температурі 80 ^{O}C до об'єму 40 *л* при температурі 300 ^{O}C.

2.81. 10,5 *г* азоту ізотермічно розширюються від об'єму $V_1 = 2$ *л* до об'єму $V_2 = 5$ *л*. Знайти зміну ентропії у цьому процесі.

2.82. 10 *г* кисню нагріваються від температури t_1=50 ^{O}C до t_2 = 150 ^{O}C. Знайти зміну ентропії, якщо нагрівання проходить: а) при $V = const$; б) при $P = const$.

2.83. При нагріванні одного кіломоля двоатомного газу його абсолютна температура збільшується у 1,5 рази. Знайти зміну ентропії, якщо нагрівання відбувається: а) ізохорно; б) ізобарно.

2.84. У результаті нагрівання 22 *г* азоту його абсолютна температура збільшилася у 1,2 рази, а ентропія зросла на 4,19 *Дж/К*. За яких умов проводилося нагрівання (при постійному об'ємі чи при постійному тиску)?

2.85. 10 $м^3$ повітря знаходяться за нормальних умов. Його переводять у стан з температурою 400 ^{O}C а) ізохорно; б) ізобарно; в) адіабатно; г) політропно з показником політропи n = 2,2. Вважаючи повітря однорідним двоатомним газом, знайти приріст ентропії у кожному процесі.

2.86. Брусок міді масою $m_1 = 300$ *г* при температурі $t_1 = 97\ ^{O}C$ помістили у калориметр, де міститься вода масою $m_2 = 100$ *г* при температурі $t_2 = 7\ ^{O}C$. Знайти зміну ентропії такої системи до моменту встановлення теплової рівноваги.

2.87. Знайти приріст ентропії алюмінієвого бруска масою $m = 3$ *кг* при нагріванні його від температури $T_1 = 300$ *К* до температури $T_2 = 600$ *К*, якщо в цьому інтервалі температур питома теплоємність алюмінію $C = a + bT$, де $a = 0{,}77$ *Дж/(г·К)*, $b = 0{,}46$ *мДж/(г·К*^{2}*)*.

2.88. Знайти зміну ентропії ΔS при ізобарному розширенні азоту масою $m = 4\ г$ від об'єму $V_1 = 5\ л$ до об'єму $V_2 = 9\ л$.

3. РЕАЛЬНІ ГАЗИ, РІДИНИ, ТВЕРДІ ТІЛА

Основні співвідношення

У реальних газах, на відміну від ідеальних, молекули мають скінченні розміри і між ними існують сили взаємодії. Урахування цих двох факторів вимагає введення певних поправок у рівняння стану ідеального газу. Одним із рівнянь, яке досить добре якісно описує поведінку реального газу, є *рівняння Ван-дер-Ваальса*. Для одного моля реального газу воно має вигляд:

$$\left(P + \frac{a}{V_0^2}\right)(V_0 - b) = RT\ . \qquad (2.26)$$

Тут a і b – поправки Ван-дер-Ваальса, які сталі для даного газу, але різні для різних газів; V_0 – молярний об'єм.

Поправка b враховує сили відштовхування і чисельно дорівнює об'єму, який займає один моль реального газу при нескінченно високому тиску; поправка a/V_0^2 – ураховує сили притягання і по суті є внутрішнім тиском, зумовленим цими силами.

Для довільної кількості реального газу рівняння (2.26) матиме вигляд:

$$\left(P + \frac{m^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V - \frac{m}{\mu}b\right) = \frac{m}{\mu}RT\ , \qquad (2.27)$$

де $V = \frac{m}{\mu} V_0$ – об'єм ν молів реального газу.

Критичні параметрим $P_к$, $V_{0к}$, $T_к$ зв'язані з поправками Ван-дер-Ваальса a і b співвідношеннями:

$$P_к = \frac{a}{27b^2}; \; V_к = 3b; \; T_к = \frac{8a}{27bR}, \tag{2.28}$$

звідки

$$\frac{P_к V_к}{T_к} = \frac{3}{8} R. \tag{2.29}$$

Зауважимо, що для певної маси m реального газу критичний стан при $P_к$ і $T_к$ можливий тільки в об'ємі

$$V_к = \frac{m}{\mu} V_{0к}. \tag{2.30}$$

Внутрішня енергія реального газу залежить не тільки від температури, але й від об'єму, оскільки складається з кінетичної енергії теплового руху його молекул та потенціальної енергії притягання. Для ν молів реального газу вираз для внутрішньої енергії має вид:

$$U = \nu \left(C_V T - \frac{\nu a}{V} \right). \tag{2.31}$$

Молярна теплоємність газу Ван-дер Ваальса при сталому об'ємі така ж сама, як і для ідеального газу

$$C_V = \left(\frac{dU}{dT} \right)_V = \frac{i}{2} R, \tag{2.32}$$

проте молярна теплоємність при сталому тиску C_P залежить від параметрів стану, і ця залежність іноді буває дуже складною.

Рідкий стан речовини є проміжним станом між газоподібним і твердим. Поверхня рідини подібна до натягнутої плівки, яка прагне зробити свою поверхню якомога меншою. Це явище називається поверхневим натягом. Сили поверхневого натягу напрямлені по дотичній до поверхні і діють нормально до будь-якої лінії, проведеної на цій поверхні. Фізична величина σ, яка чисельно дорівнює відношенню сили F, яка діє на лінію довжиною L, до цієї довжини називається коефіцієнтом поверхневого натягу

$$\sigma = \frac{F}{L}. \tag{2.33}$$

З термодинамічної точки зору коефіцієнт поверхневого натягу чисельно дорівнює роботі, яку треба виконати, щоби при постійній температурі збільшити площу поверхні рідини на одиницю

$$\sigma = \frac{dA}{dS}. \tag{2.34}$$

Робота dA іде на збільшення вільної енергії поверхневого шару, тому σ має зміст вільної енергії одиниці площі поверхні.

Поверхневий натяг призводить до того, що над викривленою поверхнею існує додатковий тиск (тиск Лапласа), який дорівнює:

$$\Delta P = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \tag{2.35}$$

Тут R_1 і R_2 – головні радіуси кривизни для даного елемента поверхні рідини. Додатковий тиск у будь-якій точці поверхні завжди напрямлений уздовж радіуса кривизни в бік центра кривизни.

Висота підняття (опускання) стовпчика рідини у капілярі визначається за формулою

$$h = \frac{\Delta P}{\rho g}, \tag{2.36}$$

де ρ – густина рідини.

Довільне тверде тіло являє собою систему сконденсованих частинок атомів, іонів, молекул, які при будь-яких температурах знаходяться у безперервному коливному русі біля певних положень рівноваги. Найбільш характерною особливістю твердих тіл є збереження своєї форми та об'єму, чого не спостерігається для інших агрегатних станів. Підвищення температури твердого тіла приводить до зміни його розмірів, яку можна кількісно оцінити. При невеликій зміні температури кожна одиниця довжини твердого тіла змінюється прямопропорційно до зміни температури:

$$\frac{\Delta l}{l\Delta t} = \alpha = const\,, \qquad (2.37)$$

де Δl – приріст l одиниць довжини при підвищенні температури на Δt градусів, α – лінійний коефіцієнт теплового розширення, який вказує на яку величину зміниться одиниця довжини твердого тіла при нагріванні його на 1 *К*. Для твердих тіл величини α досить малі і складають 10^{-5} – 10^{-6} *град*$^{-1}$.

Якщо початкову довжину твердого тіла при 0 °*C* позначити через l_0, то $\Delta l = l_t - l_0$, де l_t – його довжина при *t* °*C*, а $\Delta t = t - 0 = t$, то з (2.37) отримаємо:

$$l_t = l_0(1 + \alpha t). \qquad (2.38)$$

Унаслідок теплового розширення буде збільшуватися й об'єм твердого тіла. У цьому випадку легко отримати формулу, анолгічну (2.38):

$$V_t = V_0(1 + \beta t), \qquad (2.39)$$

де величина β називається коефіцієнтом об'ємного теплового розширення. Для ізотропного твердого тіла $\beta = 3\alpha$.

Для одного моля хімічно простого твердого тіла теплоємність буде дорівнювати:

$$C = 3R\,. \qquad (2.40)$$

Отримане співвідношення виражає собою *закон Дюлонга і Пті,* який стверджує, що атомна теплоємність хімічно простих твердих тіл при достатньо високих температурах є постійною і такою, що дорівнює $3R = 25\cdot10^3$ *Дж*/(*моль*·*К*).

У випадку коли ізотропне тверде тіло піддане односторонньому розтягу або стиску, співвідношення між величиною деформації і силами, які є причиною цієї дефомації, виражається *законом Гука*. При пружних деформаціях механічна напруга пропорційна деформації

$$\sigma = E\varepsilon\,, \qquad (2.41)$$

де $\sigma = F/S$ – механічна напруга, яка виникає в тілі під дією сили *F*, *S* – площа поперечного перерізу тіла, ε – величина, яка характеризує деформацію, *E* – модуль Юнга.

Для деформації розтягу $\varepsilon = \Delta l/l$ і називається відносним видовженням. Δl – абсолютне видовження, l – початкова довжина тіла. З урахуванням вищесказаного закон Гука можна переписати у вигляді:

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l}\,. \qquad (2.42)$$

Методичні поради

1. Загальне правило, яким треба користуватися при розв'язуванні задач, в яких мова йде про реальні гази, полягає у тому, що методи їх розв'язування нічим не відрізняються від методів, які застосовувалися при розв'язуванні задач, у яких фігурував ідеальний газ. Відмінність лише в тому, що рівняння стану ідеального газу замінюється скрізь на рівняння Ван-дер-Ваальса (2.26).

2. Деяку специфіку мають задачі в яких потрібно розглянути ефект Джоуля – Томсона, який властивий тільки реальним газам. Тут слід розрізняти два випадки: а) розширення газу в пустоту, при якому зовнішня робота не виконується, оскільки $P = 0$, а також $dQ = 0$, бо немає зовнішнього середовища, з яким можливий теплообмін. Отже умова розширення газу в пустоту:

$$dU = 0 \ \text{ або } \ U = const\,;$$

б) диференціальний ефект Джоуля – Томсона, коли газ перетікає через пористу перегородку при малому перепаді тисків. У цьому випадку внутрішня енергія газу змінюється. Але залишається сталою теплова функція стану (ентальпія)

$$U + PV = const\,.$$

3. При розв'язуванні задач на капілярні явища слід пам'ятати, що додатковий тиск ΔP завжди обчислюється за загальною формулою (2.35), яка в залежності від умови задачі набуває того чи іншого конкретного вигляду. У капілярній трубці радіусом r, меніск є сферичним сегментом радіусом

$$R = \frac{r}{\cos\vartheta}\,,$$

де ϑ – крайовий кут, тобто кут між стінкою капіляра і дотичною до меніска, проведеною у точці дотику меніска зі стінкою капіляра. Оскільки радіуси кривизни нормальних перерізів сфери однакові, тобто $R_1=R_2=R$, то

$$\Delta P = \frac{2\sigma}{R} = \frac{2\sigma\cos\vartheta}{r}\,.$$

Якщо поверхня рідини є частиною циліндричної поверхні (наприклад, коли рідина міститься між двома довгими плоскопаралельними пластинками), то радіус кривизни нормального перерізу поверхні рідини, що паралельний твірній циліндра $R_1=\infty$, $R_2=R$, тоді

$$\Delta P = \frac{\sigma}{R} = \frac{\sigma\cos\vartheta}{r} = \frac{2\sigma\cos\vartheta}{d},$$

де $d = 2r$ – відстань між пластинами.

Випадок, коли $\vartheta = 0$ називається повним змочуванням, а коли $\vartheta = \pi$ – повним незмочуванням.

Приклади розв'язування задач

1. Користуючись рівнянням Ван-дер-Ваальса, обчислити тиск 1,1 *кг* вуглекислого газу, що знаходиться в балоні місткістю 20 *л* при температурі 13 ^{o}C. Результат порівняти з тиском ідеального газу за тих самих умов.

Розв'язання

Рівняння Ван-дер-Ваальса має вигляд

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT .$$

Звідки

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2},$$

де $a = 3{,}64\cdot 10^5\ Н/кмоль^2$; $b = 0{,}043\ м^3/кмоль$.

Кількість кіломолів вуглекислого газу дорівнює

$$\frac{m}{\mu} = \frac{1{,}1}{44} = 0{,}025\ кмоля .$$

Об'єм, що займає один кіломоль вуглекислого газу, дорівнює

$$\frac{0{,}02}{0{,}025} = 0{,}8\ м^3/кмоль;$$

$$P=\frac{8{,}32\cdot10^3\ Дж/(кмоль\cdot К)\cdot 286\ град}{0{,}83\ м^3/кмоль-0{,}043\ м^3/кмоль}-$$

$$-\frac{3{,}64\cdot10^5\ Н^4/кмоль^2}{0{,}8^2\ м^6/кмоль^2}=25{,}4\cdot10^5\ Па\,.$$

Тиск, що обчислюється за рівнянням Клапейрона – Менделєєва

$$P=\frac{RT}{V}=$$

$$=\frac{8{,}31\cdot10^3\ Дж/\left(кмоль\cdot К\right)\cdot 286\ К}{0{,}8\ м^3/кмоль}=29{,}7\cdot10^5\ Н/м^2\,.$$

Останній результат відрізняється від результату, одержаного при урахуванні поправок a та b, на величину ΔP=4,3·10^5 $Н/м^2$, що дає відносну похибку

$$\frac{\Delta P}{P}=\frac{4{,}3\cdot10^5}{25{,}4\cdot10^5}=0{,}169\,.$$

Відповідь: $P=25{,}4\cdot10^5\ Н/м^2$; $\Delta P/P=0{,}169$.

2. Яку роботу проти сил поверхневого натягу необхідно виконати, щоб надути мильну бульбашку радіусом 5 *см*? Чому дорівнює додатковий тиск Лапласа всередині бульбашки? σ = 0,04 *Н/м*.

Розв'язання

Мильна бульбашка являє собою дуже тонку плівку мильного розчину приблизно сферичної форми. Ця плівка має дві поверхні – внутрішню і зовнішню. Нехтуючи товщиною плівки і вважаючи тому радіуси обох поверхонь однаковими, знайдемо їх загальну площу:

$$S=4\pi R^2+4\pi R^2=8\pi R^2\,.$$

Оскільки до утворення бульбашки поверхня, з якої вона була видута – мала, то можна вважати, що S виражає приріст площі поверхні мильного розчину ΔS. Користуючись формулою (2.34), одержуємо:

$$\Delta A = \sigma \Delta S = 0{,}04\frac{Н}{м} \cdot 8 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}0025 м^2 = 2{,}5 мДж .$$

Додатковий тиск Лапласа для мильної бульбашки можна обчислити за формулою (8.9)

$$\Delta P = \frac{4\sigma}{R} = \frac{4 \cdot 0{,}04\, Н/м}{0{,}05 м} = 3{,}2 Па .$$

Відповідь: $\Delta P = 3{,}2 Па$.

3. У бензол (σ = 0,03 *Н/м*) занурено капіляр, внутрішній діаметр якого становить 0,4 *мм*. Знайти вагу бензолу, що увійшов у капіляр за умови повного змочування.

Розв'язання

Вага бензолу, що увійшов у капіляр:

$$P = mg = \rho g V = \rho g \pi r^2 h ,$$

де m – маса бензолу; r – внутрішній радіус капіляра. Висота підняття бензолу в капілярі

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r} .$$

Підставивши вираз для h у вираз для P, отримаємо

$$P = 2\pi r \sigma ;$$

$$P = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2 \cdot 10^{-4} м \cdot 0{,}03 Н/м \approx 3{,}8 \cdot 10^{-5} Н .$$

Відповідь: $P \approx 3{,}8 \cdot 10^{-5} Н$.

Задачі для самостійного розв'язування

2.89. Яку температуру мають 2 *г* азоту, що займає об'єм 820 $см^3$ при тиску 2 *атм*? Газ розглядати як: а) ідеальний, б) реальний.

2.90. 10 *г* гелію займають об'єм 100 $см^3$ при тиску 10^8 *Па*. Знайти температуру газу, розглядаючи його як: а) ідеальний, б) реальний.

2.91. У закритій посудині об'ємом $V = 0{,}5\ м^3$ знаходиться 0,6 *моль* вуглекислого газу під тиском $3 \cdot 10^6$ *Па*. Користуючись рівнянням Ван-дер-Ваальса, знайти, у скільки разів потрібно збільшити температуру газу, щоб тиск збільшився вдвоє.

2.92. У посудині місткістю 10 *л* знаходиться 0,25 *кг* азоту при температурі 27 ^{O}C. а) Яку частину тиску газу складає тиск, зумовлений силами взаємодії між молекулами? б) Яку частину об'єму посудини складає власний об'єм молекул?

2.93. Кисень масою 100 *г* розширюється від об'єму 5 *л* до об'єму 10 *л*. Знайдіть роботу міжмолекулярних сил притягання при цьому розширенні.

2.94. Яку частину скляної ампули повинен займати рідкий ефір при 20 ^{O}C, щоб при його нагріванні можна було спостерігати перехід речовини у критичний стан? Молярна маса ефіру 74 *г/моль*, густина 714 *кг/м*^{3} при 20 ^{O}C, критична температура 194 ^{O}C, критичний тиск 35,6 *атм*.

2.95. Визначити тиск повітря (у *мм рт.ст.*) у повітряній бульбашці діаметром d = 0,01 *мм*, яка знаходиться на глибині h = 20 *см* під поверхнею води. Зовнішній тиск P_1 = 765 *мм рт.ст.*

2.96. У посудину зі ртуттю занурено відкритий капіляр внутрішнім діаметром d = 3 *мм*. Різниця рівнів ртуті в посудині і капілярі дорівнює Δh = 3,7 *мм*. Чому дорівнює радіус кривизни ртутного меніска в капілярі?

2.97. У посудину з водою занурено відкритий капіляр внутрішнім діаметром d = 1 *мм*. Різниця рівнів води в посудині і капілярі дорівнює Δh = 2,8 см. 1) Чому дорівнює радіус кривизни меніска в капілярі? 2) Якою була б різниця рівнів рідини в посудині та капілярі, якщо б змочування було повним?

2.98. На яку висоту підніметься бензол у капілярі з внутрішнім діаметром 1 *мм*? Змочування вважати повним.

2.99. При визначенні сили поверхневого натягу крапельним методом, кількість крапель гліцерину, що витікає через капіляр, складає $n = 50$. Загальна маса гліцерину $m = 1\,г$, а діаметр краплі в момент відриву $d = 1\,мм$. Знайдіть за цими даними коефіцієнт поверхневого натягу гліцерину.

2.100. Капіляр, внутрішнім радіусом 2 *мм*, занурено в рідину. Вага рідини, що піднялася у капілярі, дорівнює $9 \cdot 10^{-4}$ *Н*. Знайти за цими данними коефіцієнт поверхневого натягу рідини.

2.101. Між двома вертикальними плоско–паралельними скляними пластинками, що знаходяться на відстані 0,25 *мм* одна від одної, налито рідину. Знайти густину рідини, якщо коефіцієнт поверхневого натягу становить 0,03 *Н/м* і висота, на яку вона піднялася між пластинками, дорівнює 3,1 *см*. Змочування повне.

2.102. Скляна капілярна трубка внутрішнім діаметром $d = 0{,}2$ *мм* та довжиною $l = 20$ *см* вертикально опускається у воду. Верхній кінець трубки запаяний. Який відрізок x трубки повинен знаходитися під водою, щоб рівні води у капілярі і поза ним були однаковими? Тиск повітря $P_0 = 10^5$ *Па*, $\sigma = 0{,}073$ *Н/м*.

2.103. Обчислити приріст вільної енергії ΔF поверхневого шару в процесі злиття двох однакових крапель ртуті в одну. Процес вважати ізотермічним, радіус крапель до злиття $r = 2{,}5$ *мм*.

2.104. Дві мильні бульбашки радіусами $R_1 = 2$ *см* і $R_2 = 3$ *см* зливаються в одну. Визначити енергію, що виділяється при цьому процесі, якщо коефіцієнт поверхневого натягу $\alpha = 0{,}045$ *Н/м*.

2.105. Яка кількість енергії поглинається при розбитті великої краплини води масою 2 *г* на дрібні краплини радіусом 10^{-5} *см*?

2.106. У закритому мідному калориметрі масою $m_{\text{Cu}} = 0{,}2\ кг$ знаходиться лід масою $m_л = 1\ кг$ при температурі $t_л = -10\ {}^{\circ}C$. У калориметр впускають водяну пару масою $m_п = 0{,}2\ кг$, яка має температуру $t_п = 110\ {}^{\circ}C$. Яка температура встановиться в калориметрі? Питому теплоємність водяної пари в інтервалі температур від 100 до 110 °*C* вважати такою, що дорівнює $c_п = 1{,}7\ кДж/(кг \cdot K)$.

2.107. У посудині міститься деяка кількість води при $t = 0\ {}^{\circ}C$. Викачуючи з посудини повітря, воду заморозили. Яка частина води при цьому випарувалася, якщо посудина була теплоізольована?

2.108. Користуючись законом Дюлонга і Пті, знайти, з якого матеріалу виготовлено металеву кульку масою 0,025 *кг*, якщо відомо, що для її нагрівання від 10 °*C* до 30 °*C* затрачено 117 *Дж* тепла.

2.109. Свинцева куля, яка летить зі швидкістю 400 *м/с*, вдаряється об стінку і застрягає в ній. Вважаючи, що 10 % кінетичної енергії кулі витрачається на її нагрівання, знайти, на скільки градусів вона нагрілася. Питому теплоємність свинцю знайти за законом Дюлонга і Пті.

2.110. Які сили треба прикласти до кінців сталевого стержня з площею поперечного перерізу $S = 10$ *см*^{2}, щоб не дати йому розширитися при нагріванні від $t_1 = 0$ °*C* до $t_2 = 30$ °*C*?

2.111. При температурі 0 ^{O}C довжина алюмінієвого стержня l =50 *см*, а залізного на Δl = 0,5 *мм* більше. Перерізи стержнів однакові. При якій температурі t_1 будуть однакові довжини стержнів і при якій температурі t_2 будуть однакові їх об'єми?

2.112. Довжина металевого стержня при температурі 20 ^{O}C становить 500,12 *мм*; після нагрівання його до 100 ^{O}C довжина стержня стала такою, що дорівнює 500,6 *мм*. Визначити з якого матеріалу зроблено стержень.

2.113. Об'єм цинкової кулі при температурі 15 ^{O}C дорівнює 100 $см^3$. Який об'єм витіснить куля при зануренні її у воду, що має температуру 100 ^{O}C? Вважати, що об'єм гарячої води набагато більший за об'єм кулі.

2.114. До сталевої дротини довжиною 1 *м* і радіусом 1 *мм* підвісили вантаж 980 *Н*. Яка робота виконується по розтягуванню дротини?

2.115. Знайти потенціальну енергію дротини довжиною 5 *см* і діаметром $4 \cdot 10^{-3}$ *см,* закрученої на кут 10$''$. Модуль зсуву матеріалу дротини дорівнює $5{,}9 \cdot 10^{10}$ $Н/м^2$.

2.116. Знайти відносну зміну густини циліндричного мідного стержня при стискуванні його тиском $P = 10^8$ *Па*. Коефіцієнт Пуассона для міді вважати таким, що дорівнює $\mu = 0{,}34$.

2.117. Залізна дротина довжиною 5 *м* висить вертикально. На скільки зміниться об'єм дротини, якщо до неї прив'язати гирю вагою 100 *Н*?

ВІДПОВІДІ

Розділ 1. МЕХАНІКА

1.1. $\upsilon' = 122\,км/год; \upsilon'' = 72{,}2\,км/год$. **1.2.** $64\,км/год$. **1.3.** $<\upsilon>= S/(t_1+t_2) =$ $=2\,м/с$. **1.6.** 40 *с*; 80 *м*; –0,1 *м/с*. **1.7**. Зустрінуться двічі: через 3,4 *с* на відстані 15 *м* і через10,6 *с* на відстані 123 *м*. **1.8**. 0; 2 *м/с*; 2 *м/с*; –8 *м/с*^{2}; 1 *м/с*^{2}. **1.9.** 0,235 *с*; 5,1 *м/с*; 0,286 *м/с*. **1.10.** $H = (2S+gt^2)^2/(8gt^2)$ = 5,61 *м*, де $S = 1$ *м*. **1.11.** 0,5 *м/с*. **1.12.** 3 *м/с*. **1.13.** 1 *м/с*. **1.14.** 1) $y = x + \dfrac{Bx^2}{A}$;

2) $\vec{r} = At\vec{i} + At(1+Bt)\vec{j}$; 3) $\upsilon = A\sqrt{1+(1+2Bt)^2}$; 4) $a = 2AB$.

1.15. 1) $\upsilon = 25\,м/с$; 2) $S = 83{,}3\,м$. **1.16.** $\upsilon = \upsilon_0 + At + Dt^2/2$; $x = x_0 + \upsilon_0 t + At^2/2 + Dt^3/6$. **1.17.** $x = x_0 + 0{,}5t - 0{,}5t^3/3$.

1.18. $x = x_0 + \upsilon_0 t + At^3/6 + Dt^4/12$. **1.19.** $<\upsilon>= n\Big/\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\upsilon_i}$.

1.20. $<\upsilon>= \sum\limits_{i=1}^{n}\upsilon_i\Big/n$. **1.21.** $<\upsilon>= \tau\left(\dfrac{a\tau}{3}+\dfrac{b}{2}\right)$. **1.22.** $S = S_0 + \dfrac{1}{k}\ln\left(1+k\upsilon_0 t\right)$.

1.24. $\upsilon_к = 17{,}5\,км/год; \upsilon_m = 7{,}5\,км/год$. **1.25.** $\varphi = 105^\circ$, кут між прямими АВ і ВС. **1.26.** $|\upsilon| = \sqrt{5}\,м/с$; вектор швидкості складає з берегом річки, від якого віддаляється човен, кут $\alpha = 63^\circ 30'$. **1.27.** Курс човна повинен складати кут $\alpha = 39^\circ$ з прямою, яка з'єднує пристані; $\upsilon = 0{,}62\,м/с$. **1.28.** 19 *м/с*. **1.29.** $S = 500t$; $S(3) = 1500\,км$. **1.30.** $\upsilon = 5\,км/год$. **1.31.** $\upsilon_1\cos\alpha = \upsilon_2\cos\beta$ (в напрямку мотузки); $\alpha > \beta$, $|\upsilon_1| > |\upsilon_2|$. **1.32.** 107 *м*. **1.33.** 4 *м*.

1.34. $a = -\dfrac{\upsilon^2}{\upsilon_0 t_0}$ для $t > t_0$. **1.35.** 1) $S = \upsilon_0 t_0 \ln\dfrac{t}{t_0}$ для $t > t_0$;

2) $\upsilon = \upsilon_0 \exp\left(-\dfrac{S}{\upsilon_0 t_0}\right)$ для $S > 0$. **1.36.** $S = 2\upsilon_0 t$. **1.37.** 1) 8,4 *с*; 2) 7,3 *с*; 3) 7,8 *с*.

1.38. *h*=0,37 *м*. **1.39.** 1) 0,049 *м*; 2) 1,9 *м*. **1.40.** 1) 0,45 *с*; 2) 0,05 *с*.

1.41. 1) $h = 57\,м$; 2) $t = 3{,}4\,с$. **1.42.** 1) 127 *мс*; 2) 56 *см*; 3) 3,75 *м/с*; 4) 6,25 *м/с*.

1.43. $h = \upsilon^2/2g = 20{,}4\,м$. **1.44.** $\upsilon_0 = \dfrac{g(t_1+t_2)}{2\sin\alpha} = 588\,м/с$; $h = gt_1t_2 = 245\,км$.

1.45. 45°. **1.46.** $h_1 : h_2 : h_3 = 3:2:1$; $l_1 : l_2 : l_3 = \sqrt{3} : 2 : \sqrt{3}$. **1.47.** 1) 0,1 *с*; 2) 0,3 *м*.

1.48. $\upsilon_0 = 82\,м/с$. **1.49.** 1) $h = 1{,}22\,м$; 2) $\upsilon_0 = 10\,м/с$; 3) $\upsilon = 11{,}1\,м/с$;

4) $\varphi = 26^o12'$. **1.50.** 1) $\upsilon_0 = 11{,}1\,м/с$; 2) $\varphi = 68^o12'$. **1.51.** $\upsilon_0 = 4{,}4\,м/с$. **1.52.** $a_\tau = 5{,}4\,м/с^2$; $a_n = 8{,}2\,м/с^2$. **1.53.** $R = 305\,м$. **1.54.** 1) 2,1 *м*; 2) 10 *м*; 3) 1,3 *с*; 4) 8,37 *м/с*. **1.55.** 16,23 *м*. **1.56.** $|\boldsymbol{\upsilon}| = a$; $|\boldsymbol{w}| = a\omega$; $\boldsymbol{\upsilon} \perp \boldsymbol{w}$; рух по колу радіусом $R = a/\omega$. **1.57.** 2 *м/с*²; 1 *м/с*²; 2,24 *м/с*². **1.58.** 0,872 *с*; 14,8 *м/с*². **1.59.** 0,256 *м/с*². **1.60.** 1,2 *м/с*²; 168 *м/с*²; ~ 168 *м/с*². **1.61.** 1) 6 *м/с*²; 2) 85 *м*; 3) 17,1 *м/с*². **1.62.** 3,5 *хв*. **1.63.** ~8 обертів. **1.64.** $a_\tau = 19{,}6\,м/с^2$; $a_n = 3{,}7\,м/с^2$. Швидкість зростає, оскільки $a_\tau > 0$. **1.65.** 1) 2 *с*; 2) 2,8 *с*. **1.66.** 1) 230 *м/с*²; 2) 4,8 *м/с*²; 3) 2,67 *рад*. **1.67.** 0,01 *м/с*². **1.68.** 1) 3,14 *рад/с*; 2) 0,314 *м/с*; 3) 0,314 *м/с*²; 4) 0,986 *м/с*²; 5) 1,03 *м/с*²; 6) $\alpha = 17^o46'$.

1.69. 1) $\beta = 0{,}157\,рад/с^2$, $n = 300\,об$. **1.70.** 72 *км/с*. **1.71.** $a_n = 0{,}03\cos\varphi$; $a_R = 0{,}03\cos^2\varphi$, де φ – географічна широта. Для Москви $a_n = 0{,}017\,м/с^2$ і $a_R = 0{,}01\,м/с^2$. **1.72.** $\beta = \pi N^2/n$. **1.73.** $a_n = 0{,}6\,м/с^2$; $a = 0{,}67\,м/с^2$; $\mathbf{a}^\wedge\mathbf{R} = 153^o$. **1.74.** 0,43 *рад/с*². **1.75.** 6,1 *м*. **1.76.** $a = m_2 g/(m_1 + m_2) = 1{,}96\,м/с^2$.

1.77. 2 *м/с*²; 8 *Н*; 2 *Н*. **1.78.** $a = \dfrac{m}{M+m}g$; $T = \dfrac{mM}{M+m}g$.

1.79. $a = \dfrac{M}{M + m_1 + m_2 + m_3}g$; $T_1 = (m_1 + m_2 + m_3)a$; $T_2 = (m_2 + m_3)a$; $T_3 = m_3 a$. **1.80.** $a = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g$; $T = \dfrac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}g$; $F = 2T$. **1.81.** $a \geq 0{,}98$ *м/с*².

1.82. $F \geq 22{,}5$ *Н*. **1.83.** $\Delta M = 2(M - P/g)$. **1.84.** $F \geq 39{,}2$ *Н*. **1.85.** Не зміниться.

1.86. $a = 1{,}02$ *м/с*², $T = 5{,}9$ *Н*. **1.87.** 0,244 *м/с*²; 6 *Н*. **1.89.** $a = \dfrac{m_1 \sin\alpha - m_2}{m_1 + m_2}g$;

$T = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1 + \sin\alpha)g$. **1.90.** $a = g\sin\alpha - F_{тер}/m$. **1.91.** $\upsilon_{max} = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}gl}$.

1.92. $F = \mu(\upsilon^2 + gl)$. **1.93*.** $\upsilon = \dfrac{F}{k}\left(1 - \mathbf{e}^{-(k/m)\Delta t}\right) = 6{,}3\,м/с$.

1.94*. $F = \dfrac{k\upsilon}{1 - \mathbf{e}^{-(k/M)\tau}} = 1{,}03\,Н$. **1.95*.** $k = \dfrac{m}{t}\dfrac{\upsilon_0 - \upsilon}{\upsilon_0 \upsilon} = 4{,}7 \cdot 10^{-5}\,кг/м$.

1.96*. $\Delta t = (m/k)\ln 10 = 18{,}4\,с$. **1.97.** $r = \sqrt[3]{\gamma M (T/2\pi)^2} = 4200\,км$;

$3{,}1\,км/с$; $0{,}22\,м/с^2$. **1.98.** $F = G\dfrac{m_1 m_2}{a(l + a)}$. **1.99.** 7,8·10³ *м/с*.

1.100. $F = \dfrac{2\pi^2 G m \rho r^2 RL}{\left(R^2 + L^2\right)^{3/2}}$. **1.101.** 1600 *км*. **1.102.** 974 *см/с*². **1.103.** 975 *см/с*².

1.104. 162 *см/с*². **1.105.** $a = 28g$. **1.106.** 0,62 *см/с*².

1.107. $g_{\text{с-п}} = g_{\text{м}}(1+0{,}0008)$. **1.108.** Годинник йшов би повільніше в ~2,5 рази. **1.109.** $R \approx 785 \cdot 10^6$ *км*. **1.110.** $M/m \approx 3{,}3 \cdot 10^5$. **1.111.** $d = \sqrt[3]{\dfrac{MGT^2}{4\pi^2}}$.

1.112. $g(r) = 4/3\pi G\rho r$ при $r \le R$, $g(r) = \dfrac{4\pi G\rho R^3}{3r^2}$ при $r \ge R$. **1.113.** 1) $A = 1/2\, mgR = 31{,}2$ *МДж*; 2) $A = mgR = 62{,}4$ *МДж*. **1.114.** $\varphi = -62{,}6$ *МДж/кг*; $\varphi = -190$ *ГДж/кг*.

1.115. 1) $\sigma = 4mg/(\pi d^2) = 3{,}12$ *МПа*; 2) $\sigma = 4mg/(\pi d^2) + \rho gl/2 = 6{,}45$ *МПа*; 3) $\sigma = 4mg/(\pi d^2) + \rho gl = 9{,}78$ *МПа*. **1.116.** $\sigma_{\max} = \dfrac{2\pi^2 n^2 ml}{S} = 4{,}74$ *МПа*.

1.117. $x_1 = (k_2/k_1)x_2 = 4$ *см*. **1.118.** $k' = \dfrac{k_1k_2}{k_1+k_2} = 1{,}5$ *кН/м*; $k'' = k_1 + k_2 = 8$ *кН/м*.
1.119. T = 4,9 *Дж*; υ = 3,1 *м/с*; S = 10 *м*. **1.120.** 4,3 *МДж*.
1.121. $A = ESx^2/(2l) = 10$ *Дж*. **1.122.** $A = \dfrac{k_2}{2k_1}(k_1+k_2)x_2^2 = 0{,}6$ *Дж*.
1.123. $\upsilon = x\sqrt{k/m} = 7{,}07$ *м/с*. **1.124.** $\upsilon = x\sqrt{(k/m)(x_2^2 - x_1^2)} = 22{,}5$ *м/с*.
1.125. $U = \beta x^4/4$. **1.126.** 1) $U_1/U_2 = k_2/k_1$; 2) $U_1/U_2 = k_1/k_2$. **1.127.** 12,4 *Н*.
1.128. 11,2 *км/с*. **1.129.** 1) 6,9 *кВт*; 2) 11,8 *кВт*; 3) 1,98 *кВт*. **1.130.** 2 *кДж*; 1 *кДж*. **1.131.** $A = mg(H + kl)$. **1.132.** $\upsilon = \dfrac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1+m_2}$; $T = \dfrac{(m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2)^2}{2(m_1+m_2)}$.
1.133. 1) 0,5 *м*; 2) 1,48 *Дж*. **1.134.** 0,64 *м*. **1.135.** У 1,25 рази. **1.136.** 10 *см/с*.
1.137. $\sin\dfrac{\alpha_1}{2} = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\sin\dfrac{\alpha}{2}$; $\sin\dfrac{\alpha_2}{2} = \dfrac{2m_1}{m_1+m_2}\sqrt{\dfrac{l_1}{l_2}}\sin\dfrac{\alpha}{2}$. **1.138.** $2{,}51 \cdot 10^{-3}$ *Дж*.
1.139. 0,051. **1.140.** $p_1 = 2m\upsilon_0 \sin\alpha = 3$ *Н·с*. **1.141.** 1) 6,3 *м/с*; 2) –0,57 *м/с*.
1.142. 0,4 *м/с*. **1.143.** $A = \mu mgS + m\upsilon^2/2 = 996$ *Дж*.
1.144. $A = mh(g + 2h/t^2) = 4{,}72$ *кДж*. **1.145.** 336 *Дж*. **1.146.** $Q = 1{,}19$ *Дж*.
1.147. $l = m^2\upsilon_1^2/(2\mu gM^2) = 6{,}37$ *м*. **1.148.** $h = m^2\upsilon^2/(2gM) = 7{,}34$ *см*.
1.149. $h = l(1-\cos\varphi)\dfrac{m_1}{m_1+m_2} = 7{,}34$ *см*. **1.150.** 22 *об/хв*. **1.151.** $3 \cdot 10^3$ $с^{-1}$; $T_c/T_к \approx 3\%$. **1.152.** 1) 2,65 *м/с*; 2) 2,56 *м/с*; 3) 3,21 *м/с*; 4) 3,13 *м/с*. **1.153.** 7,56 *м*.
1.154. 34,1 *Дж*. **1.155.** $\varepsilon = -0{,}21$ *рад/с*^{2}; $M_{\text{г}} = 0{,}42$ *Н·м*; $A = 630$ *Дж*; $N = 240$ *об*.
1.156. 1) 21 *Дж*; 2) – 64 *Дж*. **1.157.** k=0,01. **1.158.** 1) $2{,}25 \cdot 10^6$ *Дж*; 2) 375 *м*.
1.159. T = 32,2 *Дж*, U = 39,4 *Дж*. **1.160.** 1) T = 6,6 *Дж*, U = 15,9 *Дж*; 2) T = 5,7 *Дж*, U = 16,8 *Дж*. **1.161.** $T = U$ = 98,1 *Дж*. **1.162.** 1) 5,14 *км/год*; 2) 1,71 *км/год*.

1.163. 1) 17,8 *км/год*; 2) 53,5 *км/год*; 3) –17,8 *км/год*. **1.164.** 1) 3 *кН*; 2) 30 *кН*; 3) 0,3 *МН*.

1.165. $s = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M} l$ **. 1.166.** $\omega_1 / \omega_2 = 1{,}43$ **. 1.167.** $F = 2aS\sqrt{1 + (S/R)^2}$ **.**

1.168. $\nu_2 = 23\, хв^{-1}$ **. 1.169.** $a = 11{,}6\, м/с^2$ **. 1.170.** $A \approx 900\, Дж$ **.**

1.171. $4 \cdot 10^{-8}\, кг \cdot м^2$. **1.172.** $J = 1/12 \sigma a^3 b = 2 \cdot 10^{-5}\, кг \cdot м^2$.

1.173. 1) $\varepsilon = \dfrac{3g}{2l} = 14{,}7\, рад/с^2$, $a_\tau = g = 9{,}8\, м/с^2$;

2) $\varepsilon = \dfrac{3g}{2l} \sin\alpha = 12{,}7\, рад/с^2$, $a_\tau = g \sin\alpha = 8{,}49\, м/с^2$;

3) $\varepsilon = \dfrac{12g}{7l} \sin\alpha = 14{,}6\, рад/с^2$, $a_\tau = 6/7\, g \sin\alpha = 7{,}27\, м/с^2$.

1.174. 1) $65{,}3\, рад/с^2$, $9{,}8\, м/с^2$; 2) $32{,}7\, рад/с^2$, $4{,}9\, м/с^2$; 3) $59{,}9\, рад/с^2$, $7{,}99\, м/с^2$. **1.175.** 1) $t = 2\, с$; 2) $T = 4{,}31\, Н$; 3) $K = 1{,}32\, Дж$.

1.176. 1) $\omega = \dfrac{6m_2 \upsilon}{(3m_2 + m_1) l} = 2{,}61\, рад/с$, $u = \dfrac{3m_2 \upsilon}{3m_2 + m_1} = 1{,}3\, м/с$;

2) $\omega = \dfrac{3m_2 \upsilon}{(m_2 + m_1) l} = 1{,}43\, рад/с$, $u = \dfrac{2m_2 \upsilon}{m_2 + m_1} = 0{,}952\, м/с$;

3) $\omega = \dfrac{4m_2 \upsilon}{(m_2 + 7/3\, m_1) l} = 0{,}833\, рад/с$, $u = \dfrac{3m_2 \upsilon}{m_2 + 7/3\, m_1} = 0{,}625\, м/с$.

1.177. 1) $4{,}55\, рад/с$, $0{,}909\, м/с$; 2) $2{,}27\, рад/с$, $0{,}454\, м/с$; 3) $3{,}03\, рад/с$, $0{,}303\, м/с$; 4) $1{,}52\, рад/с$, $0{,}202\, м/с$. **1.178.** $\omega = m\upsilon r / (J + mr^2) = 1{,}02\, рад/с$.

1.179. $\omega = \dfrac{2m_1 \upsilon}{(m_2 + 2m_1) R} = 0{,}445\, рад/с$. **1.180.** $\varphi = \dfrac{4\pi m_2}{m_2 + 2m_1} = 2\pi/3$.

1.181. $N_{\min} = m\left(\dfrac{\upsilon^2}{2S} + \mu g\right)\upsilon \approx 3\, МВт$.

1.182. $N_{сер} = m\left(\dfrac{\upsilon}{t} + \mu g \cos\alpha - g \sin\alpha\right)\dfrac{\upsilon}{2} \approx m\left(\dfrac{\upsilon}{t} + \mu g - g\varphi\right)\dfrac{\upsilon}{2} = 200\, МВт$.

1.183. $M = T / 2\pi N = 1{,}99\, Н \cdot м$. **1.184.** $T = (m/4)(2\upsilon^2 + \pi^2 d^2 n^2) = 3{,}21\, кДж$.

1.185. $T = 3m\upsilon^2 / 4 = 3\, Дж$.

Розділ 2. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА

2.1. 2,32 *кПа*. **2.2.** 350 *К*. **2.3.** Зменшиться на 642 *Н*.

2.4. $P_1 = \dfrac{V+V_1}{V_1}(P_a + \rho g H)$. **2.5.** 106 *см*^{3}. **2.6.** 4,5 *см*.

2.7. $m = \dfrac{M_{\text{пов}} P_a \pi d^3}{6RT} - \dfrac{P}{g} \approx 530\,кг$. **2.8.** 6,4 *м*^{3}. **2.9.** 28,8. **2.10.** а) $2{,}4\cdot 10^{-3}\ м^3$; б) 1170 *К*; в) 4,14 *кг/м*^{3}; г) 1*кг/м*^{3}. **2.11.** 637. **2.12.** 1,48 *г*. **2.13.** 1,45 *м*^{3}*/кг*. **2.14.** 2 *атм*. **2.15.** 1) 37 *г/моль*; 2) $1{,}01\cdot 10^5$ *Па*; 3) $1{,}34\cdot 10^5$ *Па*. **2.16.** 554 *л*. **2.17.** 1400 *К*.**2.18.** $P = \dfrac{\rho g h (d^2 - l^2)}{2dl} \approx 5{,}1\cdot 10^4$ *Па*, де $d = \dfrac{L-h}{2}$. **2.19.** $l \approx 15\,см$. **2.20.** $V_2/V_1 = 1{,}07$.

2.21. $V_B/V_A = m_B\mu_A/(m_A\mu_B + m_B\mu_A) = 0{,}65$.

2.22. $P = \dfrac{2P_1P_2}{P_1+P_2} = 0{,}15\,МПа$. **2.23.** $T = T_0\dfrac{2V_0 + S(l+2x)}{2V_0 + S(l-2x)}$. **2.24.** 58,6 *Н*.

2.25. 0,096 *Н*. **2.26.** $n = \dfrac{F\Delta S V T_1}{P_1 S(S-\Delta S)V_0 T_2} = 148$. **2.27.** $1{,}75\cdot 10^{16}$ *см*$^{-3}$; $1{,}01\cdot 10^{17}$ *см*$^{-3}$.

2.28. 55 $^{\circ}$*С*. **2.29.** *Т*=381 *К*. **2.30.** *Р*=768 *Па*. **2.31.** 210 *Дж*. **2.32.** 750 *Дж*. **2.33.** 1) $\sqrt{\upsilon^2}$ = 230 *м/с*; 2) *N* = $1{,}9\cdot 10^{23}$; 3) ρ = 5,0 *кг/м*^{3}. **2.34.** 5,88 *км*. **2.35.** 885 *м*. **2.36.** 1) 8,78 *м*; 2) 25,8 *м*. **2.37.** P=1,12P_0. **2.38.** 2,3 *км*. **2.39.** 0,346 *атм*. **2.40.** $P_1/P_2 = 0{,}778$. **2.41.** 1) 5,5 *км*; 2) 80 *км*. **2.42.** 1) 7,75 *МДж*; 2) 7,75 *МДж*; 3) 0. **2.43.** 1) 0,4 *МДж*; 2) 160 *кДж*; 3) 560 *кДж*. **2.44.** 1) 3,25*МДж*; 2) 0,4 *МДж*; 3) 3,65 *МДж*. **2.45.** При постійному тиску. **2.46.** 157 *К*; – 21 *кДж*. **2.47.** 17,6. **2.48.** 1) $\Delta U = -4{,}03\,кДж$; 2) $A = 4{,}03\,кДж$. **2.49.** 1) 1500*К*; 2) $12{,}4\cdot 10^{-3}$ *м*^{3}; 3) 12,4 *кДж*. **2.50.** 1) 102 *Дж*; 2) 1570 *м/с*; 3) $1{,}33\cdot 10^5$ *Па*; 4) 0,164 *кг/м*^{3}; 5) 400 *Дж*. **2.51.** 4,14 *кДж*. **2.52.** При *V = const*. **2.53.** 1) 2500 *К*; 2) 16,3 *кДж*. **2.54.** *m*=28 *г*. **2.55.** 1) 700 *Дж*; 2) 500 *Дж*. **2.56.** 1)*ΔU*=2500 *Дж*; 2)*A*=830*Дж*; 3)*Q*=3330*Дж*. **2.57.** 720*Дж*. **2.58.** *A*=207*Дж*. **2.59.** $\sqrt{\upsilon^2}$ =500 *м/с*. **2.60.** $\eta = 2/19$.**2.61.** а) 264*К*; б) 176 *кДж*; в) –1,62 *кДж*; г) –0,14 *кДж*. **2.62.** а) *C* = –*R*/2; б) *Q* = 4,16 *кДж/кмоль*; в) *A* = 16,6 *кДж/кмоль*. **2.63.** а) *n* = 1,43; б) *ΔU* = 0,25 *МДж*; в) *ΔQ* = 0,02 *МДж*; г) *A* = –0,23 *МДж*. **2.64.** $\Delta S = -20{,}2\ Дж/К$. **2.65.** а) 50%; б) 2,8 *МДж*; в) 1,4 *МДж*; г) 1,4 *МДж*.

2.66. $\eta = 1 - \left(\dfrac{V_{\min}}{V_{\max}}\right)^{\gamma-1} = 60\%$. **2.67.**1) $A = \nu RT[\ln a - (a-1)/a] = 1{,}28\,МДж$;

2) $\eta = \dfrac{\ln a - (a-1)a}{\ln a + (a-1)/((\gamma-1)a)} = 13\%$; $\dfrac{\eta}{\eta_0} = 0{,}27$. **2.68.** 300 *К*; 500 *К*; 1000 *К*; 650 *К*; 8,55%. **2.69.** 0,11. **2.70.** 630 *Дж*, 1880 *Дж*. **2.71.** 18%. **2.72.** 1) 26,8%; 2) 274 *кДж*; 3) 200 *кДж*. **2.73.** 1) 20%; 2) 1,26 *кДж*. **2.74.** 1) $V_1 = 2$ *л*, $P_1 = 7$ *атм*; $V_2 = 5$ *л*, $P_2 = 2{,}8$ *атм*; $V_3 = 8$ *л*, $P_3 = 1{,}44$ *атм*; $V_4 = 3{,}22$ *л*, $P_4 = 3{,}6$ *атм*; 2) 1300 *Дж*, 620 *Дж*, –1070 *Дж*, –620 *Дж*; 3) 230 *Дж*; 4) 17,5%; 5) 1300 *Дж*, 6) 1070 *Дж*.

2.75. У 2,1 рази. **2.76.** 1) 0,093; 2) $Q_2 = \dfrac{1-\eta}{\eta}$ = 360 *Дж*; 3) 397 *кДж*.

2.77. 4,94 *кг*. **2.78.** 7,4 *Дж/К*. **2.79.** $m_2 = \dfrac{m_1 r}{\lambda + c(t_2 - t_1)} = 251\,г$;

$\Delta S = \dfrac{m_1 r}{T_1} - \dfrac{m_2 \lambda}{T_2} - c m_2 \ln\dfrac{T_2}{T} = 457\ Дж/К$. **2.80.** 5,4 *Дж/К*. **2.81.** 2,9 *Дж/К*. **2.82.** а) 1,76 *Дж/К*; б) 2,46 *Дж/К*. **2.83.** а) 8,5 *кДж/К*; б) 11,8 *кДж/К*. **2.84.** При постійному тиску. **2.85.** а) 8,42 *кДж/К*; б) 11,7 *кДж/К*; в) 0; г) 5,61 *кДж/К*. **2.86.** 4,9 *Дж/К*. **2.87.** $\Delta S = m\left(\alpha \ln(T_2/T_1) + b(T_2 - T_1)\right)$ = 2 *кДж/К*. **2.88.** 2,43 *Дж/К*. **2.89.** а) 280 *К*; б) 280 *К*. **2.90.** а) 482 *К*; б) 204 *К*. **2.91.** 1,85.

2.92. а) 4,95 %; б) 0,86 %. **2.93.** *A*=–133 *Дж*. **2.94.** $\dfrac{V_{рід}}{V} = 0{,}25$. **2.95.** 999 *мм рт. ст.* **2.96.** 2 *мм*. **2.97.** 1) 0,53 *мм*; 2) *Dh* = 2,98 *см*. **2.98.** 13,9 *мм*. **2.99.** $\sigma = 62{,}4\ мН/м$. **2.100.** 0,07 *Н/м*. **2.101.** 790 *кг/м*^{3}. **2.102.** 2,9 *мм*. **2.103.** –16 *мкДж*. **2.104.** 261,09Ч10^{-6} *Дж*. **2.105.** 4,38 *Дж*. **2.106.** $t \approx 37\ ^\circ C$. **2.107.** $x \approx 11{,}7\%$. **2.108.** Кулька виготовлена зі срібла. **2.109.** *Н*а 66°. **2.110.** 71 *кН*. **2.111.** 1) 83 $^{\circ}C$; 2) 28 $^{\circ}C$. **2.112.** Із заліза. **2.113.** 100,1 *м*^{3}. **2.114.** 0,84 *Дж*. **2.115.** 1,25Ч10^{-12} *Дж*. **2.116.** 0,027 %. **2.117.** *Н*а 1 *мм*^{3}.

ДОДАТОК

Таблиця 1. **Фундаментальні фізичні константи**

Константа	Позначення	Числове значення
Швидкість світла	c	$3 \cdot 10^{8}$ *м/с*
Гравітаційна стала	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$ *Н·м²·кг⁻²*
Стала Авогадро	$N_А$	$6{,}022 \cdot 10^{23}$ *моль*$^{-1}$
Стала Больцмана	k	$1{,}38 \cdot 10^{-23}$ *Дж/К*
Універсальна газова стала	R	8,314 *Дж/(моль·К)*
Стандартний об’єм газу	V_m	$22{,}42 \cdot 10^{-3}$ *м*^{3}*/моль*
Елементарний заряд	e	$1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *Кл*
Маса спокою електрона	m_e	$9{,}11 \cdot 10^{-31}$ *кг*
Питомий заряд електрона	e/m_e	$1{,}76 \cdot 10^{11}$ *Кл/кг*
Стала Фарадея	F	$9{,}65 \cdot 10^{4}$ *Кл/моль*
Атомна одиниця маси	*а.о.м.*	$1{,}66 \cdot 10^{-27}$ *кг*
Електрична стала	ε_0	$8{,}85 \cdot 10^{-12}$ *Ф/м*
Магнітна стала	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ *Гн/м*
Стала Планка	h	$6{,}62 \cdot 10^{-34}$ *Дж·с*

Таблиця 2. **Густина речовин ρ, *кг/м*^{3}**

Гази за нормальних умов (T=273,15 *К*, P=$1{,}01 \cdot 10^5$ *Па*)

Азот	1,250	Кисень	1,429
Водень	0,089	Метан	0,717
Вуглекислий газ	1,977	Неон	0,900
Гелій	0,178	Повітря	1,293

Рідини, (ρ, 10^3 *кг/м*^{3})

Бензол (t=20 °*C*)	879	Гліцерин (t=0 °*C*)	1260
Вода (t=4 °*C*)	1000	Етанол (t=0 °*C*)	789
Гас (t=0 °*C*)	800	Ртуть (t=0 °*C*)	13596

Тверді тіла при 293 *К* (ρ, 10^3 *кг/м*^{3})

Алюміній	2,69	Олово лите	7,23
Залізо	7,86	Сталь лита	7,7 - 8,0
Латунь	8,3 - 8,7	Свинець	11,22 - 11,44
Лід (t=0 °*C*)	0,91	Срібло	10,42 - 10,57
Мідь	8,88 - 8,96	Цинк	6,86 - 7,24

Таблиця 3. **Деякі фізичні характеристики рідин**

Коефіцієнт поверхневого натягу на межі “рідина – повітря” σ при 20 ^oC, 10^{-3} *Н/м*; коефіцієнт внутрішнього тертя η при 20 ^oC, 10^{-3} *Па·с*; коефіцієнт об’ємного розширення β при 20 ^oC, 10^{-6} K^{-1}; точка кипіння $t_к$ при P=1,01·10^5 *Па*; питома теплота пароутворення при точках кипіння r, 10^5 *Дж/кг*; питома теплоємність c при 20 ^oC, *Дж/(кг·К)*.

Рідина	σ	η	β	$t_к$	r	c
Вода	72,6	1,005	21	100,0	22,6	4190
Гліцерин	66	1480	50	290	-	2390
Ртуть	500	1590	18	356,7	2,85	138
Спирт	22,0	1,2	110	78,3	8,57	2470

Таблиця 4. **Властивості деяких твердих тіл**

Густина ρ, *кг/м*^{3}, питома теплоємність $c^{пит}$ при 20 ^OC, *Дж/кг·град*; температура плавлення, ^OC; питома теплота плавлення λ, 10^5 *Дж/кг*; коефіцієнт лінійного теплового розширення α при 20 ^OC, 10^{-5} K^{-1}.

Речовина	ρ	$c^{пит}$	$t_{пл}$	λ	α
Алюміній	2600	896	659	3,22	2,3
Залізо	7900	500	1530	2,72	1,2
Лід	900	2100	0	3,35	–
Мідь	8600	395	1100	1,76	1,6
Срібло	10500	234	960	0,88	1,9

Таблиця 5. **Постійні Ван–дер–Ваальса для деяких речовин**

Речовина	a, *Н·м*^{3}*/моль*	b, *см*^{3}*/моль*
Азот	0,135	38,6
Вода	0,545	30,4
Водень	0,024	6,6
Гелій	0,003	23,6
Кисень	0,136	31,7
Вуглекислий газ	0,36	42,8

Таблиця 6. **Пружні властивості твердих тіл**

Модуль Юнга E, 10^{10} *Па*; модуль зсуву G, 10^{10} *Па*; коефіцієнт Пуассона μ; межа міцності σ_μ, 10^8 *Па*.

Матеріал	E	G	μ	σ_μ
Алюміній	6,1 - 7,4	2,2 - 2,6	0,33	0,98 - 3,90
Залізо	20 - 22	6,9 - 8,3	0,28	3,90 - 5,90
Сталь	20 - 22	7,8 - 8,1	0,28	4,9 - 15,7
Чавун	7,4 - 17,6	4,9	0,23 - 0,27	1,17 - 1,27
Латунь	7,8 - 9,8	2,6 - 3,6	0,3 - 0,4	0,98 - 4,90
Мідь	10 - 13	3,8 - 4,7	0,31 - 0,40	1,56 - 4,41
Свинець	1,5 - 1,7	0,54	0,44	0,0196

Таблиця 7. **Множники і приставки для утворення десяткових кратних і дольних одиниць та їх найменувань**

Множник	Префікс	Позначення	Множник	Префікс	Позначення
10^{18}	екса	Е	10^{-1}	деци	д
10^{15}	пета	П	10^{-2}	санти	с
10^{12}	тера	Т	10^{-3}	мілі	м
10^{9}	гіга	Г	10^{-6}	мікро	мк
10^{6}	мега	М	10^{-9}	нано	н
10^{3}	кіло	к	10^{-12}	піко	п
10^{2}	гекто	г	10^{-15}	фемто	ф
10^{1}	дека	да	10^{-18}	атто	а

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Задачі з механіки та методика їх розв'язування / Укл.: Курек І.Г. – Чернівці, ЧДУ, 1998. – 120 с.
2. Задачі з молекулярної фізики та методика їх розв'язування / Укладачі: Курек І. Г., Лотоцький В. Б. – Чернівці : Рута, 2003. – 128 с.
3. Чертов А. Г. Задачник по физике / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев – М. : Высшая школа, 1981. – 496 с., ил.
4. Дубровский И. М. Справочник по физике / И. М. Дубровский, Б. В. Егоров, К. П. Рябошапка – К. : Наукова думка, 1986. – 560 с.
5. Иродов И.Е. Основные законы механики / И. Е. Иродов – М. : Высшая школа, 1997. – 240 с.
6. Иродов И.Е. Основные законы электромагнетизма / И. Е. Иродов – М. : Высшая школа, 1991. – 288 с.
7. Чертов А. Г. Физические величины / А. Г. Чертов – М. : Высшая школа, 1990. – 335 с.

ЗМІСТ

Навчально-методичне видання

Задачі для інженерів
(механіка і молекулярна фізика)

Укладачі: ***Курек Ігор Геннадійович***
Курек Єлена Ігорівна
Олійнич – Лисюк Алла Василівна
Ткач Оксана Олександрівна