**Лекція 4**

**Властивості Фур’є спектрів**

**1.3.1. Теорема про спектр суми**

Нехай функції мають спектри .

Спектр суми двох функцій дорівнює сумі спектрів цих функцій:

+

**1.3.2. Теорема про парність та непарність функцій**

Коли функція 𝜑(𝑥) - парна функція, тобто 𝜑(𝑥)=𝜑(−𝑥), то:

=.

Якщо функція - непарна (), то:

=.

**1.3.3.Теорема про комплексно спряжене**

Нехай - комплексний сигнал, - його спектральна густина.

Знайдемо спектральну густину сигналу, що спряжений з , тобто .

Нехай – шукана спектральна густина спряженого сигналу:

Якщо

то

Порівнюючи та , отримаємо, спектральна густина сигналу, комплексно спряжена із заданими, визначається шляхом заміни знаку в аргументі та спряження, тобто =.

**1.3.4.Теореми про зміщення та запізнення**

У практиці часто є необхідність зміщувати шкали частот, часу на постійну величину. Теорема зміщення встановлює зв’язок між функціями зі зміщеними шкалами.

Змістимо сигнал по часу на . Тоді спостерігаємо за зміною спектральної густини:

якщо .

Це є теорема зміщення.

При зміщенні функції (сигналу) в часі відбувається модуляція спектральної потужності.

Ширина зміщеної та незміщеної функції однакова.

Відповдно змістимо на величину .

- теорема змішення.

Зміщення спектральної густини на приводить до модульованого сигналу з несучою частотою Якщо уявити, що - керуючий сигнал, то сигнал виявляється модульованим за амплітудою та фазою.

**1.3.5. Зв’язок між скалярним добутком функції та їх спектрами.**

**Рівність Парсеваля**

Важливі співвідношення для функцій, що задовольняють перетворенням Фур’є, випливають з формули отриманої Релеєм.

Нехай та – дійсні чи комплексні сигнали та - відповідні їм спектральні густини.

Скалярний добуток:

Формула Релея встановлює такий зв’язок між скалярним добутком функцій та їх спектрів:

або

При отримуємо рівність, що називається формулою Парсеваля:

Ця рівність виражає законом збереження енергії. Якщо - густину енергії на одиничний інтервал x, - енергію, що припадає на одиничний інтервал шкали то повна енергія при переході від однієї шкали до іншої повинна зберігатись однією і тією ж.

**1.3.6. Функції кореляції**

Якщо у функцій та шкали зміщені на величину , то їх скалярний добуток буде називатись функцією взаємної кореляції функцій двох функцій та :

На основі формул Релея та теореми запізнення:

Функція взаємної кореляції являє собою зворотне перетворення Фур’є від добутку функції .

Функції та - посідають важливе місце в теорії когерентності, аналізі шумів ОЕС, Фур’є-спектроскопії та при дослідженні різноманітних випадкових процесів.

Якщо == то функцію (57) називають функцією автокореляції:

**1.3.7. Теорема згортки функцій**

Спектральна густина згортки функцій та дорівнює добутку їх спектральних густин, тобто:

.

**1.3.8. Теорема про спектр похибки**

Нехай спектр функції дорівнює Визначаємо спектр , що дорівнює похідній від заданого сигналу

тобто спектр похідної дорівнює спектру вихідної функції, помноженої на (чи у представленні зворотних частот).

**1.3.9. Теорема про спектр інтеграла**

Нехай спектр функції дорівнює . Знайдемо спектр інтегралу від заданої функції в межах від тобто

Спектру інтегралу:

**1.3.10. Зміна масштабу та поворот системи координат**

**при Фур’є-перетворення**

При розрахунку ОЕС часто виникає необхідність перетворення векторного аргументу функції пов’язаного за зміною масштабу чи поворотом системи координат.

Як знайти спектр функції після того, як здійснено перетворення її аргументу.

Для функція - спектра Фур’є:

Здійснимо лінійне перетворення n-вимірного аргументу у n-вимірний аргумент згідно з правилом:

(i, k=1,2…n) – -вимірна матриця коефіцієнтів перетворення.

Тоді

Для 2-ох мірного випадку:

;

- вимірна матриця, зворотна матриці ;

- визначник матриці ;

- алгебраїчне доповнення елементів прямої матриці .

Алгер. доповнення

Якщо є функція і її спектр , то для знаходження спектра функції необхідно помножити модуль початкового спектра на визначник матиці , а аргумент у просторі частот – на саму матрицю .

При повороті системи координат заданої функції проти годинникової стрілки на кут ψ частотний спектр нової функції відповідає частотному спектрові при повороті його просторових частот (, ) за годинниковою стрілкою.

**1.3.11. Функції із обмеження спектром. Теорема Котєльнікова**

При передачі реальних сигналів їх спектр завжди обмежений значенням смуги пропускання частотного тракту ОЕС. Обмеження за спектром приводить до того, що відповідні сигнали можуть бути визначені кільцевою кількістю значень протягом кінцевого інтервалу. Ця особливість випливає з теореми В.А.Котельнікова: якщо функція не містить частот, більших ніж то вона повністю визначається шляхом задання її ординат у послідовних точках, які знаходяться на відстані одна від одної.