**Лекція 5**

**Розділ 2. Хвильові поля у вільному просторі**

**1. Просторові та кутові спектри хвильових полів**

Для отримання різних форм математичного представлення хвильових процесів використовують спектральний розпад, як самих полів, так і їх джерел за часовим, просторовим або кутовим зміщеннями. Також є різні форми запису полів з використанням коплексних функцій (комплексна амплітуда та комплексна фаза).

Як було зазначено є можливість спектрального розкладу хвильового фронта як функції часу у вільному просторі.

З принципу суперпозиції хвильового полів отримаємо, що кожну спектральну компоненту поля можна розглядати як окреме монохроматичне коливання, незалежно від присутності інших спектральних компонент.

Поняття комплексної амплітуди монохроматичного коливання можна перенести на хвильові поля, приймаючи, що монохроматичне хвильове поле в кожній точці являє собою монохроматичне коливання.

Характерною рисою хвильового процесу є взаємозв’язок коливань, які відбуваються у різних точках та у різні моменти часу.

Розглянемо плоску скалярну монохроматичну хвилю:

де - хвильовий вектор, модуль якого .

Тут плоска хвиля – сума двох коплексно спряжених доданків.

Як вираз для плоскої хвилі можна взяти один з двох доданків за умови можливості приєднання до нього комплексно – спряженого доданку.

Комплексно спряжений доданок можна добавляти й після виконання будь якого лінійної операції навіть якщо вона виконується з одним з 2-ох доданків, тобто коли вже отримано кінцевий результат.

Нас будуть цікавити лінійні операції, тому будемо розглядати лише другий член суми:

Перетворюємо останній вираз, щоби ввести параметри плоскої хвилі явно.

Плоска хвиля задається частою (довжиною хвилі) напрямком поширення, фазою коливання.

Довжина хвилі може бути визначена з рівняння:

Даний вираз демонструє, що напрямок поширення хвилі визначається величиною проекції хвильового вектора на осі ординат.

У загальному випадку напрямок поширення задається двома кутами .

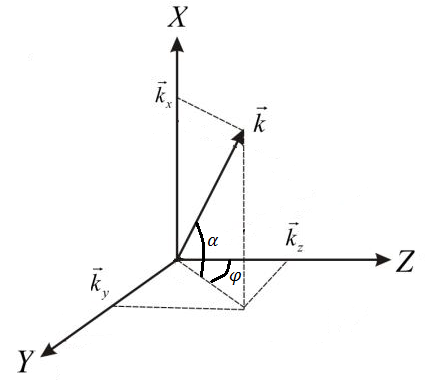


Рис. 18. Хвильовий вектор у декартовій системі координат

Тоді

Нехай

Тоді для отримаємо:

Комплексна амплітуда плоскої монохроматичної хвилі може бути записана:

(\*)

Цей вираз містить у явному вигляді характерні параметри хвилі: амплітуду А, довжину хвилі , фазу, напрямки поширення та

Останній вираз задовільняє хвильовому рівнянню для довільних та , що міняється в межах від мінус до плюс безмежності, лише, якщо виконується умова:

**1.2. Хвильове рівняння для монохроматичної хвилі**

Використовуємо отримане представлення плоского монохроматичної хвилі (\*) для побудови загального розв'язку хвильового рівняння.

Важжаємо, що хвильове рівняння – лінійне, для нього виконується принцип суперпозиції. Якщо (\*) є розв'язок хвильового рівняння сума полів типу (\*) буде розв'язком хвильового рівняння. Тобто, якщо запишемо суму типу (\*) з довільними амплітудами, фазами та напрямками поширення, то отримаємо розв'язок тільки загальний ніж (\*).

Такий розв'язок може бути записаний як інтеграл від (\*) по незалежних параметрах таких хвиль, якими є їх амплітуди, фази та напрямки поширення:

(\*\*)

Тут –комплексна функція, яка описує амплітуду та фазу окремої плоскої хвилі з напрямком поширення, що визначається сукупністю дійсних змінних та , що містить поряд зі звичайними плоскими хвилями ще й неоднорідні хвилі.

Це є представлення Релея опису хвилі.

Вираз (\*\*) є узагальнене поняття комплексної амплітуди для неплоскої монохроматичної хвилі. Від цього виразу можна прийти до реального поля, якщо помножити на та додаючи до отриманого виразу комплексно-спряженого доданку.

Вираз (\*\*) є загальним розв’язком хвильового рівняння.

Можна побудувати точний розв’язок скалярного хвильового рівняння, що задовільняє граничній умові на площині

Необхідно побудувати розв’язок для .

Вибираємо замкнену поверхню, що складається з площини та півсфери при , причому при хвильове рівняння має вигляд заданого поля, а на безмежній сфері перетворення в нуль (умова випромінювання Кіргофа).

Значення заданого поля запишемо у вигляді комплекної амплітуди на площині Позначимо її .

Тоді розв’язок (\*\*) перетворюється в задане при

(v`)

Отримаємо інтеграл Фур’є.

Відповідно

(v)

Визначив ми задовільним граничним умовам при .

Розв’язок є двозначним, оскільки можна вибрати довільний з двох знаків перед координатою у (\*\*). Ця невизначеність усувається якщо врахувати граничні умови на безмежній сфері.

Зміна знаку змінює затухаюче поле на наростаюче.

Неоднорідні хвилі отримуються при , при цьому убиваюче з ростом поле отримується якщо у виразі (68) перед знак .

Тоді

(++)

визначається як (v).

Останні 2 вирази задають комплексну амплітуду скалярного поля у всьому просторі у вигляді суперпозиції плоских хвиль різних напрямків (у тому числі неоднорідних) з різними амплітудами і фазами.

Функція , що визначає розподіл амплітуд і фаз плоских хвиль по напрямках, носить назву спектра хвильового поля або кутового спектра поля.

“Кутовий спектр” відображає зв’язок аргументів та з кутами поширення відповідних плоских хвиль.

Нехай задане поле не залежить від координат

Тоді

і підставимо в (v).

Тоді

Тоді при довільному значенні поле (\*):

(v+)

не залежно від координати .

**1.3. Зміст просторових частот**

Розглянемо співвідношення (v) та (v`).

Це є інтеграли Фур’є для двох пар змінних , та . Змінні x та y – координати точок простору та мають розмірність довжини.

Змінні та мають розмірність обернену до довжини. Ці змінні носять назву просторових частот.

Запишемо інтеграл Фур’є для довільної функції f(t):

Вирази (v) та (v`) представлені аналогічно.

Змінні та володіють такими ж властивостями, як і частота .

У цьому змісті та – просторові частоти. Функція – просторовий спектр функції .

Згідно (++) змінні мають інший зміст, що задає поширення плоских хвиль. ().

Кути під якими поширюються хвилі, визначаються з наведених умов, зміст яких в тому що величини проекцій хвильового вектора на координатні вісі x та y повинні дорівнювати та . Таким чином, змінні та мають подвійний зміст – це з одного боку просторові частоти а з іншого – величини, на які розкладається хвильове поле. Саме тому функція носить назву кутового спектру.

“Кутовий спектр” – розклад хвильового поля в спектр плоских хвиль різних хвиль різних напрямків поширення.

У вирази з та як просторових частот довжини хвилі не входить. Тому значення просторових частот лишається незмінними при збереженні геометрії розподілу джерел поза залежності від частоти випромінювання та швидкості поширення хвиль у просторі (довжина хвилі).

Спектр напрямку плоских хвиль, що відповідає даному просторовому спектру, залежить від довжини хвилі випромінювання.

Зі збільшенням довжини хвилі кутовий спектр представлений у значеннях кутів, деформуються.