1.3. Властивості спектрів

1.3.1. Теорема про спектр суми

Нехай функції $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ мають спектри $F_1(i\omega_x)$ та $F_2(i\omega_x)$. Унаслідок лінійності перетворення Фур'є отримаємо, що спектр суми двох функцій дорівнює сумі спектрів цих функцій:

$$F(i\omega_x) = F_1(i\omega_x) + F_2(i\omega_x) = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi_1(x) + \varphi_2(x)] e^{-i\omega_x x} dx. \qquad (59)$$

1.3.2. Теорема про парність і непарність функцій

Коли функція $\varphi(x)$ - парна функція (тобто $\varphi(x) = \varphi(-x)$), то парною буде також її спектральна густина:

$$F(i\omega_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-i\omega_x x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cos \omega_x x dx,$$

$F(i\omega_x) = F(-i\omega_x) = F(\omega_x)$ - тільки дійсна функція.

Якщо функція $\varphi(x)$ - непарна (тобто $\varphi(x) = -\varphi(-x)$), то її спектральна густина також непарна та суто уявна:

$$F(i\omega_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-i\omega_x x} dx = -i \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \sin \omega_x x dx.$$

При цьому $F(-i\omega_x) = -F(\omega_x)$.

1.3.3. Теорема про комплексно спряжене

Нехай $\varphi(x)$ - комплексний сигнал, $F(i\omega_x)$ - його спектральна густина. Визначимо спектральну густину сигналу, що спряжений із $\varphi(x)$, тобто $\varphi^*(x)$.

Маємо:

$$\varphi(x) = \varphi_\partial(x) + i\varphi_m(x),$$

$$\varphi^*(x) = \varphi_\partial(x) - i\varphi_m(x).$$

Позначимо через $F_c(i\omega_x)$ шукану спектральну густину спряженого сигналу.

$$F_c(i\omega_x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(x) e^{-i\omega_x x} dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\partial(x) e^{-i\omega_x x} dx - i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m(x) e^{-i\omega_x x} dx$$

Проте

$$F(i\omega_x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\partial(x) e^{-i\omega_x x} dx + i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m(x) e^{-i\omega_x x} dx .$$

Відповідно

$$F^*(i\omega_x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\partial(x) e^{i\omega_x x} dx - i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m(x) e^{i\omega_x x} dx .$$

Порівнюючи $F_c(i\omega_x)$ та $F^*(i\omega_x)$, бачимо: спектральна густина сигналу, комплексно спряжена із заданими, визначається шляхом заміни знака в аргументі та спряження, тобто $F_c(i\omega_x) = F^*(-i\omega_x)$.

1.3.4. Теореми зміщення та запізнення

У практиці дуже часто доводиться зміщувати шкали частот, часу на постійну величину. Теорема зміщення встановлює зв’язок між функціями зі зміщеними шкалами. Нехай $F(i\omega_x)$ - спектральна густина функції $\varphi(x)$. У загальному випадку $\varphi(x)$ - комплексна величина (використані позначення Порфир’єва).

$$\varphi(x) = |\varphi(x)| e^{i \arg \varphi(x)} .$$

Змістимо частоту ω_x на величину ω_{x0}. Отримаємо спектральну густину $F(i\omega_x - \omega_{x0})$. Визначимо сигнал $\varphi_{см}(x)$, що відповідає спектральній густині. Зі зворотного перетворення Фур’є отримаємо:

$$\varphi_{см}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F[(i\omega_x - \omega_{x0})] e^{i\omega_x x} d\omega_x .$$

Домножимо останній вираз на $e^{-i\omega_{x0} x}$, $e^{i\omega_{x0} x}$, вводячи нову змінну $\omega_x^{'} = \omega_x - \omega_{x0}$, отримаємо:

$$\varphi_{см}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F[(i\omega_x^{'})]e^{i\omega_x^{'}x} d\omega'_x e^{i\omega_{x0}}.$$

На основі останньої рівності отримаємо:

$$\varphi_{см}(x) = \varphi(x)e^{i\omega_{x0}x} = |\varphi(x)|e^{|i[\omega_{x0}x + \arg\varphi(x)]|}. \qquad (60)$$

Зміщення спектральної густини на ω_{x0} приводить до модульованого сигналу з несучою частотою ω_{0x}. Якщо уявити, що $\varphi(x)$ - керуючий сигнал, то сигнал $\varphi_{см}(x)$ виявляється модульованим за амплітудою та фазою.

Змістимо сигнал $\varphi(x)$ по часу на x_0. Це зумовить нову спектральну густини

$$F_{см}(i\omega_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x - x_0)e^{-i\omega_x x} dx = e^{-i\omega_x x_0} F(i\omega_x). \qquad (61)$$

якщо ввести заміну $x^{'} = x - x_0$.

Вираз (61) називають теоремою запізнення. При зміщенні функції (сигналу) в часі відбувається модуляція спектральної потужності. Оскільки модуль нової функції $F_{см}(i\omega_x)$ не змінюється, то ширина спектра зміщеної та незміщеної функції однакова.

Змінюється тільки аргумент спектральної потужності, $|F_{см}(i\omega_x)| = |F(i\omega_x)|$. А $F_{см}(i\omega_x) = \arg F(i\omega_x) - \omega_x x_0$.

1.3.5. Зв’язок між скалярним добутком функцій та їх спектрами. Рівність Парсеваля

Важливі співвідношення для функцій, що задовольняють перетворенням Фур’є, випливають з формули, вперше отриманої Релеєм.

Нехай $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ - дійсні чи комплексні сигнали та $F_1(i\omega_x)$, $F_2(i\omega_x)$ - відповідні їм спектральні густини.

Скалярний добуток функцій φ_1 і φ_2, F_1 і F_2 визначається такими рівностями:

$$(\varphi_1 \cdot \varphi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^*(x)\varphi_2(x)dx\,, \quad (F_1 \cdot F_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1^*(i\omega_x)F_2\,(i\omega_x)d\omega_x\,.$$

Формула Релея встановлює такий зв'язок між скалярним добутком функцій та їх спектрів:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^*(x)\varphi_2(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1^*(i\omega_x)F_2\,(i\omega_x)d\omega_x \qquad (62)$$

або

$$(\varphi_1 \cdot \varphi_2) = \frac{1}{2\pi}(F_1 \cdot F_2)\,.$$

Доведення (62):

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(i\omega_x)e^{i\omega_x x}d\omega_x\,,\ \varphi_2(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_2(i\omega_x)e^{i\omega_x x}d\omega_x\,.$$

Згідно з визначенням,

$$(\varphi_1 \cdot \varphi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1^*(i\omega_x)e^{-i\omega_x x}d\omega_x\right]\varphi_2(x)dx.$$

Змінюючи порядок інтегрування отримаємо:

$$(\varphi_1 \cdot \varphi_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1^*(i\omega_x)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega_x x}d\omega_x dx d\omega_x =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1^*(i\omega_x)F_2\,(i\omega_x)d\omega_x = \frac{1}{2\pi}(F_1 \cdot F_2).$$

При $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \varphi(x)$ отримаємо рівність, що називається формулою Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(i\omega_x)|^2 d\omega_x. \qquad (63)$$

Ця рівність виражає закон збереження енергії. Якщо $|\varphi(x)|^2$ виражає густину енергії на одиничний інтервал *x*, $|F(i\omega_x)|^2$ - відповідно енергію, що припадає на одиничний інтервал шкали ω_x, то повна енергія, згідно з (63), при переході від однієї шкали до іншої, повинна зберігатись однією і тією ж. Зауважимо, що при використанні шкали частот, множник $\frac{1}{2\pi}$ у виразах (62), (63) відсутній.

1.3.6. Скалярний добуток функцій зі зміщеними шкалами

Якщо у функцій φ_1 та φ_2 шкали зміщені на величину τ , то їх скалярний добуток буде називатись функцією взаємної кореляції функцій φ_1 і φ_2:

$$K_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^*(x)\varphi_2(x+\tau)dx. \tag{64}$$

На основі формули Релея і теореми зміщення отримаємо

$$K_{12}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1^*(i\omega_x)F_2\,(i\omega_x)e^{i\omega_x\tau}d\omega_x. \tag{65}$$

З останньої рівності випливає, що функція взаємної кореляції $K_{12}(\tau)$ являє собою зворотне перетворення Фур’є від добутку функції $F_1^*(i\omega_x)\cdot F_1\,(i\omega_x)$.

Якщо $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \varphi(x)$, то функцію (66) називають функцією автокореляції:

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(x)\varphi(x+\tau)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|F(i\omega_x)\right|^2 e^{i\omega_x\tau}d\omega_x. \tag{66}$$

Функції $K_{12}(\tau)$ та $K(\tau)$ посідають важливе місце в теорії когерентності, аналізі шумів ОЕС, Фур’є-спектроскопії та взагалі при вивченні різноманітних випадкових процесів.

1.3.7. Згортка функцій

Згорткою функцій $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ називається інтеграл вигляду $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1\,(x-x^{'})\varphi_2\,(x^{'})dx^{'}$. Згортка позначається так: $\varphi_1 \otimes \varphi_2$. Для згортки характерна комутативність $\varphi_1 \otimes \varphi_2 = \varphi_2 \otimes \varphi_1$.

Доведемо таку теорему: спектральна густина згортки функцій φ_1 та φ_2 дорівнює добутку їх спектральних густин, тобто:

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x - x')\varphi_2(x')dx' = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(i\omega_x)F_2(i\omega_x)e^{i\omega_x x}d\omega_x . \quad (67)$$

Доведення (67) випливає із формули Релея та властивостей Фур'є-перетворення.

Функція $\varphi_1^*(x')$ має спектральну густину $F_1^*(-i\omega_x)$. Функція $\varphi_1^*(-x')$ повинна мати спектральну густину $F_1^*(i\omega_x)$. Візьмемо функцію $\varphi_1^*(-x' + x) = \varphi_3^*(x')$, для якої спектральна густина на сонові теореми про запізнення буде $F_1^*(i\omega_x)e^{-i\omega_x x}$.

Згідно з формулою Релея, скалярний добуток функцій $\varphi_3(x')$ та $\varphi_2(x')$ буде дорівнювати:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_3^*(x')\varphi_2(x')dx' = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [F_1^*(i\omega_x)e^{-i\omega_x x}]F_2(i\omega_x)d\omega_x$$

або остаточно

$$\varphi_1 \otimes \varphi_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x - x')\varphi_2(x')dx' = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(i\omega_x)F_2(i\omega_x)e^{i\omega_x x}d\omega_x.$$

Знайдемо Фур'є-перетворення від згортки:

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x')\varphi_2(x - x')dx' ,$$

$$F(i\omega_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)e^{-i\omega_x x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x')dx' \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(x - x')e^{-i\omega_x x}dx .$$

Уводячи змінну $y = x - x'$, маємо:

$$F(i\omega_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x')dx' e^{-i\omega_x x'} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(y)e^{-i\omega_x y}dy = F_1(i\omega_x)F_2(i\omega_x) \quad (67а)$$

Відповідно Фур'є-перетворення згортки двох функцій дорівнює добутку їх спектральних густин:

$\varphi_1 \otimes \varphi_2 = F_1\ F_2$.

Якщо функції $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ дійсні, парні, то відповідно до властивостей парності функцій, що задовольняють Фур'є-перетворенням, будемо мати:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x - x')\varphi_2(x')dx' = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(i\omega_x)F_2(i\omega_x)\cos\omega_x x d\omega_x.$$

Із визначення згортки слідує також наступна властивість: спектральна густина $F(i\omega_x)$ відповідає Фур'є перетворенню від добутку сигналів $\varphi_1(x)\ \varphi_2(x)$, тобто:

$$F(i\omega_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x)\varphi_2(x)e^{-i\omega_x x}dx, \text{ то}$$

$$F(i\omega_x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1[i(\omega_x - \omega_x')]F_{21}(i\omega_x')]d\omega_x'. \qquad (68)$$

Формула Релея:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x)\varphi_3^*(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(i\omega_x)F_3^*(i\omega_x)d\omega_x .$$

Позначимо $\varphi_3^*(x) = \varphi_2(x)e^{-i\omega_x' x}$.

Функції $\varphi_3(x)$ відповідає спектральна густина $F_3(i\omega_x)$, функції $\varphi_2(x)$ - спектральна густина $F_2(i\omega_x)$.

Спектральна густина сигналу $\varphi_3^*(x)$ буде $F_3^*(-i\omega_x)$, а сигналу $\varphi_2(x)e^{-i\omega_x' x}$ відповідно до теореми запізнення - $F_2(i\omega_x + i\omega_x')$.

Маємо:

$$F_3^*(-i\omega_x) = F_2(i\omega_x + i\omega_x')$$

$$F_3^*(i\omega_x) = F_2(-i\omega_x + i\omega_x') .$$

Підставляючи значення $\varphi_3^*(x)$, $F_3^*(i\omega_x)$ у формулу Релея, отримаємо:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(x)\varphi_2(x)e^{-i\omega_x' x}dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F_1(i\omega_x)F_2[i(\omega_x'-\omega_x)]d\omega_x,$$

що відповідає (68) при перепозначенні $\omega_x' \to \omega_x$, $\omega_x \to \omega_x'$.

Вираз (68) свідчить про те, що спектральна густина добутку двох функцій дорівнює згортці їх спектральних густин, поділеній на 2π, тобто

$$F(i\omega_x)=\frac{1}{2\pi}F_1\otimes F_2.$$

1.3.8. Теорема про спектр похідної

Нехай спектр функції $\varphi(x)$ дорівнює $F(i\omega_x)$. Визначимо спектр $F_1(i\omega_x)$, що відповідає похідній від заданого сигналу $\varphi'(x)=\dfrac{d\varphi(x)}{dx}$. Згідно із Фур'є-перетворенням маємо:

$$F_1(i\omega_x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi'(x)e^{-i\omega_x x}dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega_x x}d\varphi(x).$$

Інтегруючи частинами $\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du$, знайдемо

$$F_1(i\omega_x)=\varphi(x)e^{-i\omega_x x}\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)(-i\omega_x)e^{-i\omega_x x}dx.$$

Перший доданок дорівнює нулю згідно з умовами представлення функції інтегралом Фур'є, тобто

$\varphi(x)\to 0$ при $x\to\pm\infty$. Тому

$$F_1(i\omega_x)=i\omega_x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{-i\omega_x x}dx=i\omega_x F(i\omega_x), \qquad (69)$$

тобто спектр похідної дорівнює спектру вихідної функції, помноженої на $i\omega_x$ (чи $i2\pi f_x$ у представленні зворотних частот).

1.3.9. Теорема про спектр інтеграла

Нехай спектр функції $\varphi(x)$ дорівнює $F(i\omega_x)$. Знайдемо спектр $F_1(i\omega_x)$ інтегралу від заданої функції в межах від $-\infty$ до *X*, тобто $\varphi_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{X} \varphi(x)dx.$ За умови, що

$$\varphi_1 \underset{X\to\infty}{(x)} = \int\limits_{-\infty}^{X} \varphi(x)dx = 0.$$

Після послідовних перетворень:

$$F_1(i\omega_x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(\int\limits_{-\infty}^{X}\varphi(x)dx)e^{-i\omega_x x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(\int\limits_{-\infty}^{X}\varphi(x)dx)\frac{de^{-i\omega_x x}}{-i\omega_x},$$

використовуючи інтегрування частинами отримаємо:

$$F_1(i\omega_x) = \left[(\int\limits_{-\infty}^{X}\varphi(x)dx)\frac{e^{-i\omega_x x}}{-i\omega_x}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega_x x}}{-i\omega_x}\varphi(x)dx,$$

Отже, спектр інтегралу заданого функцією дорівнює її спектру, поділеному на $i\omega_x$:

$$F_1(i\omega_x) = \frac{1}{i\omega_x}F(i\omega_x). \tag{70}$$

1.3.10. Двовимірне перетворення Фур'є, перетворення Ганкеля

При аналізі роботи ОЕС дуже часто вхідні та вихідні сигнали визначаються на площині у вигляді функцій, що залежать від прямокутних (x, y) чи полярних (r, α) координат. Використання полярних координат для знаходження просторово-частотного спектра сигналу переважає та зумовлює перетворення Ганкеля.

Нехай є перетворення Фур'є від двовимірної функції $\varphi(x, y)$, заданої у прямокутній системі координат (x, y):

$$F(i\omega_x, i\omega_y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \varphi(x, y)e^{-i(\omega_x x+\omega_y y)}dxdy. \tag{71}$$

Перейдемо до полярної системи координат у просторі предметів, як і в просторі просторових частот відповідно до таких рівностей:

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\sin\alpha, \quad r = (x^{1/2} + y^{1/2})^{1/2}; \quad \alpha = arctg(\frac{y}{x}), \tag{72}$$

$$\omega_x = \omega_r \cos\beta, \quad \omega_y = \omega_r \cos\beta, \quad \omega_r = (\omega_x{}^2 + \omega_y{}^2)^{1/2}; \quad \beta = arctg(\frac{\omega_y}{\omega_x}). \tag{73}$$

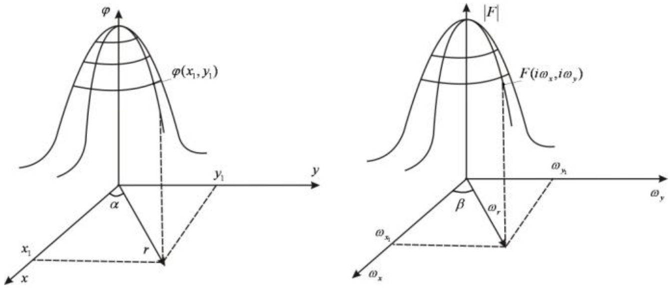

Рис. 18. Двовимірна функція $\varphi(x, y)$ та її двовимірний спектр у декартовій системі координат

Підставляючи (72), (73) у інтеграл (71), враховуючи, що $dxdy = rdrd\alpha$, після перетворень, отримаємо:

$$F(i\omega_r, \beta) = \int_0^\infty rdr \int_0^{2\pi} \varphi(r,\alpha) e^{-ir\omega_r \cos(\alpha-\beta)} d\alpha. \tag{74}$$

Підставимо функції $\varphi(r,\alpha)$ та $F(i\omega_r, \beta)$ у вигляді таких добутків:

$$\varphi(r,\alpha) = i^n \varphi(r) e^{in\alpha},$$
$$F(i\omega_r, \beta) = F(\omega_r) e^{in\beta}. \tag{75}$$

n – цілі числа (*n = 0, 1, 2…).*

При підстановці (75) в (74), позначивши $\theta = \alpha - \beta$, $d\theta = d\alpha$, отримаємо:

$$F(\omega_r) = i^{-n} \int_0^\infty r\varphi(r) dr \int_0^{2\pi} e^{-i(r\omega_r \cos\theta - n\theta)} d\theta.$$

Згідно з визначенням, вираз $\dfrac{i^{-n}}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-i(r\omega_r \cos\theta - n\theta)} d\theta = J_n(\omega_r r)$ є функцією Бесселя *n*-го порядку від аргументу $(\omega_r r)$. У зв’язку із цим маємо:

$$F(\omega_r) = 2\pi\int\limits_0^{\infty} r\varphi(r) J_n(\omega_r r) dr. \tag{76}$$

Формула (76) називається перетворенням Ганкеля. Зворотне перетворення Ганкеля матиме вигляд

$$\varphi(r) = \int\limits_0^{\infty} \omega_r F(\omega_r) J_n(\omega_r r) d\omega_r. \tag{77}$$

Повне значення функції $\varphi(r,\alpha)$ на основі (75), (77) буде таким:

$$\varphi(r,\alpha) = i^{-n} e^{in\alpha} \int\limits_0^{\infty} F(\omega_r)\omega_r J_n(\omega_r r) d\omega_r. \tag{78}$$

Значення функції $F(i\omega_r,\beta)$, відповідно до повного перетворення Ганкеля, що визначається у просторі кругової частоти $\omega_r = (\omega_x{}^2 + \omega_y{}^2)^{1/2}$ та напрямком $\beta = arctg(\dfrac{\omega_y}{\omega_x})$, на основі (75) та (76), буде:

$$F(i\omega_r,\beta) = 2\pi e^{in\beta} \int\limits_0^{\infty} r(\varphi(r)) J_n(\omega_r r) dr. \tag{79}$$

Якщо функція $\varphi(r,\alpha)$ симетрична відносно координати $r = 0$, то її форма повністю повинна визначатися радіусом r, що можливе, коли $n = 0$. Тому, якщо $\varphi(r,\alpha) = \varphi(r)$, то $F(i\omega_r,\beta) = F(\omega_r)$. Згідно із (76) та (77), отримаємо пару симетричних перетворень Ганкеля:

$$F(\omega_r) = 2\pi\int\limits_0^{\infty} \varphi(r) r J_0(\omega_r r) dr, \tag{80}$$

$$\varphi(r) = \int\limits_0^{\infty} F(\omega_r)\omega_r J_0(\omega_r r) d\omega_r, \tag{81}$$

де $J_0(\omega_r r) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-i\omega_r r\cos\theta)} d\theta$ - функція Бесселя нульового порядку.

1. 3. 11. Узагальнення основних властивостей *n*-вимірних перетворень Фур'є

Висхідна функція $\varphi(\vec{x})$	Спектр Фур'є функції $F(i\vec{\omega}_x) = \int\limits_{\substack{-\infty \\ (n)}}^{+\infty} \varphi(\vec{x}) e^{-i\vec{\omega}_x \vec{x}} d\vec{x}.$
$a_1\varphi_1(\vec{x}) + a_2\varphi_2(\vec{x})$	$a_1F_1(i\vec{\omega}_x) + a_2F_2(i\vec{\omega}_x)$
$\varphi_1^{(m)}(\vec{x}) = \dfrac{d^{(m)}\varphi_1(\vec{x})}{d\vec{x}^m}$	$(i\vec{\omega}_x)^m F_1(i\vec{\omega}_x)$
$\int\limits_{\substack{-\infty \\ (m)}}^{\vec{X}} \varphi_1(\vec{x}) d\vec{x}$	$(i\vec{\omega}_x)^{-m} F_1(i\vec{\omega}_x)$
$\varphi_1(\vec{x} + \vec{y})$	$F_1(i\vec{\omega}_x) e^{-i\vec{\omega}_x \vec{y}}$
$\int\limits_{\substack{-\infty \\ (n)}}^{+\infty} \varphi_1(\vec{x}^{'}) \varphi_2(\vec{x} - \vec{x}^{'}) d\vec{x}$	$\dfrac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\substack{-\infty \\ (n)}}^{+\infty} F_1(i\vec{\omega}_x^{'}) F_2[i(\vec{\omega}_x - \vec{\omega}_x^{'})]d$
$\varphi_1(\vec{x})\varphi_2(\vec{x})$	$2F_1(i\vec{\omega}_x^{'}) \cos(\vec{\omega}_x \vec{x}_1)$
$\varphi_1(\vec{x} - \vec{x}_1) + \varphi_1(\vec{x} + \vec{x}_1)$	$2F_1(i\vec{\omega}_x^{'}) \sin(\vec{\omega}_x \vec{x}_1)$
$\varphi_1(\vec{x} - \vec{x}_1) - \varphi_1(\vec{x} + \vec{x}_1)$	$\dfrac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\| F_1(i\vec{\omega}_x^{'}) \right\|^2 d\vec{\omega}_x$

1.3.12. Зміна масштабу та поворот системи координат при Фур'є-перетворенні.

При розрахунку ОЕС часто виникає необхідність перетворення векторного аргументу $\vec{x}$ функції $\varphi(\vec{x})$, пов'язаного зі зміною масштабу чи поворотом системи координат. Розглянемо, як знайти спектр функції φ після того, як здійснено перетворення її аргументу.

Нехай задана функція $\varphi(\vec{x})$ та знайдено її спектр Фур'є:

$$F(i\vec{\omega}_x)=\int\limits_{\substack{-\infty\\(n)}}^{+\infty}\varphi(\vec{x})e^{-i\vec{\omega}_x\vec{x}}d\vec{x}.$$

Здійснимо лінійне перетворення n-вимірного аргументу $\vec{x}$ у n-вимірний аргумент $\vec{z}$ згідно з правилом:

$$\vec{z}=\hat{A}\vec{x}\,,\quad \vec{x}=\hat{A}^{-1}\vec{z}\,, \tag{82}$$

де $\hat{A}=\|a_{ik}\|$, $(i,k=1,2...n)$ - $n\times n$-вимірна матриця коефіцієнтів перетворення;

$\hat{A}^{-1}=\dfrac{\|A_{k,i}\|}{\det\hat{A}}$ - $n\times n$-вимірна матриця, зворотна матриці $\hat{A}$;

$\det\hat{A}$ - визначник матриці $\hat{A}$;

$A_{k,i}$ - алгебралічне доповнення елементів a_{ik} прямої матриці $\hat{A}$.

Спектр функції φ після перетворення в ній аргументу $\vec{x}$ в аргумент $\vec{z}$ запишеться так:

$$F(i\vec{\omega}_z)=\int\limits_{\substack{-\infty\\(n)}}^{+\infty}\varphi(\vec{z})e^{-i\vec{\omega}_x\vec{x}}d\vec{x}.$$

Після підстановки $\vec{x}=\hat{A}^{-1}\vec{z}$, отримаємо:

$$F(i\vec{\omega}_z)=\int\limits_{\substack{-\infty\\(n)}}^{+\infty}\varphi(\vec{z})e^{-i\vec{\omega}_x\hat{A}^{-1}\vec{z}}d(\hat{A}^{-1}\vec{z}). \tag{83}$$

Із векторної алгебри відомий такий вираз для диференціалу:

$$d\vec{x}=d(\hat{A}^{-1}\vec{z})=\det\hat{A}^{-1}d\vec{z}$$

та справедлива перестановка $\vec{\omega}_x\hat{A}^{-1}\vec{z}=\vec{z}\hat{A}^{-1}\vec{\omega}_x$. На основі чого (83) запишеться у вигляді:

$$F(i\vec{\omega}_z)=\det\hat{A}^{-1}\int\limits_{\substack{-\infty\\(n)}}^{+\infty}\varphi(\vec{z})e^{-i\vec{z}\hat{A}^{-1}\vec{\omega}_x}d(\vec{z})=\det\hat{A}^{-1}\cdot F(i\hat{A}^{-1}\vec{\omega}_x). \qquad (84)$$

Із (84) випливає таке правило: якщо задана функція $\varphi(\vec{x})$ і знайдений її спектр $F(i\vec{\omega}_x)$, то для знаходження спектра $F(i\vec{\omega}_z)$ функції $\varphi(\vec{z})$ необхідно помножити модуль початкового спектра на визначник матриці $\hat{A}^{-1}$, а аргумент $\vec{\omega}_x$ у просторі частот - на саму матрицю $\hat{A}^{-1}$.

Приклад

Нехай у прямокутній системі координат задана функція $\varphi(x,y)$, спектр Фур'є якої дорівнює $F(i\omega_x,i\omega_y)$. Перетворимо функцію φ у другу із прямокутною системою координат (x_1,y_1), яка буде відрізнятись від попередньої лише зміною масштабу (поворот відсутній): $\varphi(x_1,y_1)=\varphi(a_x x,a_y y)$. Зв'язок між координатами (x_1,y_1) та (x,y) при цьому біде визначатись матричними рівняннями:

$$\begin{vmatrix}x_1\\y_1\end{vmatrix}=\begin{Vmatrix}a_x & 0\\0 & a_y\end{Vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}, \qquad (85)$$

тобто

$$\hat{A}=\begin{Vmatrix}a_x & 0\\0 & a_y\end{Vmatrix};\quad \det\hat{A}=a_x a_y;\quad \hat{A}^{-1}=\begin{Vmatrix}\frac{1}{a_x} & 0\\0 & \frac{1}{a_y}\end{Vmatrix};\quad \det\hat{A}^{-1}=\frac{1}{a_x a_y}.$$

Спектр Фур'є $F(i\omega_{x_1},i\omega_{y_1})$ функції $\varphi(x_1,y_1)$, згідно з (84), буде таким:

$$F(i\omega_{x_1},i\omega_{y_1})=\frac{1}{a_x a_y}F\left(i\frac{\omega_x}{a_x},i\frac{\omega_y}{a_y}\right). \qquad (86)$$

Зверенемо увагу на те, що при лінійному перетворенні $z = ax$; коли $a > 1$, спостерігається стиснення сигналу; коли $a < 1$ - сигнал розтягується, що показано на рис. 18.

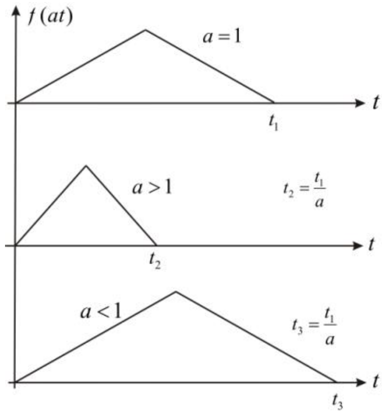

Рис. 18.

Водночас відповідні спектри $F(i\omega_z) = \frac{1}{a} F(i\frac{\omega_x}{a})$ поводять себе протилежно. Тобто при стисненні синалу спектр розтягується та навпаки.

Здійснимо поворот системи координат від початкової проти годинникової стрілки на кут ψ без зміни масштабу. Тоді зв'язок між функціями $\varphi(x, y)$ та $\varphi(x_1, y_1)$ визначиться так:

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{Vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix},$$

$$\varphi(x_1, y_1) = \varphi(x\cos\psi + y\sin\psi, -x\sin\psi + y\cos\psi).$$

$$\hat{A} = \begin{Vmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{Vmatrix}; \quad \det \hat{A} = 1,$$

$$\hat{A}^{-1} = \begin{Vmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{Vmatrix}; \quad \det \hat{A}^{-1} = 1.$$

Частотний спектр у новій системі координат буде матиме вигляд:

$$F(i\omega_{x_1}, i\omega_{y_1}) = F\left[i \begin{Vmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{Vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \omega_x \\ \omega_y \end{vmatrix} \right] =$$
$$= F\left[i(\omega_x \cos\psi - \omega_y \sin\psi), i(\omega_x \sin\psi + \omega_y \cos\psi) \right] \tag{87}$$

Отже, при повороті системи координат заданої функції проти годинникової стрілки на кут ψ частотний спектр нової функції $F(i\omega_{x_1}, i\omega_{y_1})$ відповідає частотному спектрові $F(i\omega_x, i\omega_y)$ при повороті його просторових частот (ω_x, ω_y) за годинниковою стрілкою.

1.3.13. Функції із обмеженим спектром. Теорема Котєльнікова

При передачі реальних сигналів їх спектр завжди обмежений значенням смуги пропускання частотного тракту ОЕС. Обмеження за спектром приводить до того, що відповідні сигнали можуть бути визначені кінцевою кількістю значень протягом кінцевого інтервалу. Ця особливість випливає з теореми В.А. Котєльнікова: *якщо функція $\varphi(x)$ не містить частот, більших ніж f_{xm}, то вона повністю визначається шляхом задання її ординат у послідовних точках, які знаходяться на відстані $\frac{1}{2f_{xm}}$ одна від одної.*

Доведення

У загальному випадку

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(if_x) e^{i2\pi f_x x} df_x,$$

де

$$F(if_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-i2\pi f_x x} dx.$$

Оскільки функція $F(if_x)$ з обмеженим спектром, то при $f_x > f_{xm}$,

$|F(if_x)| = 0$, $F(if_x) = 0$ та $\varphi(x) = \int\limits_{-f_{xm}}^{f_{xm}} F(if_x) e^{i2\pi f_x x} df_x$.

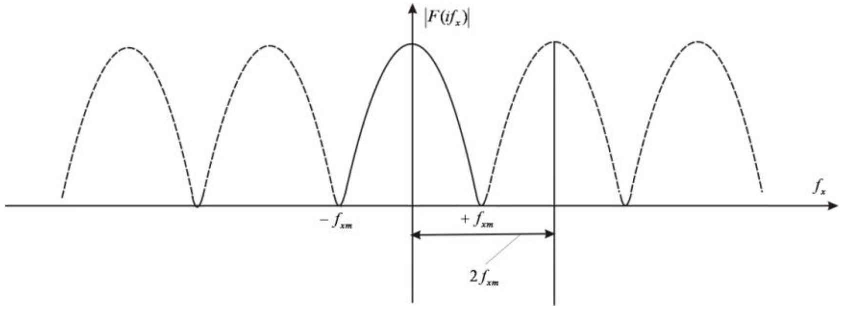

Рис. 19. Представлення функції з обмеженим спектром періодичної функції з періодом $2f_{xm}$

Оскільки межі інтегрування обмежують наступний розгляд інтервалом $-f_{xm} \div f_{xm}$, то припустимо, що функція $F(if_x)$ періодично повторюється з періодом $2f_{xm}$ (рис. 19):

$F(if_x) = F[(i(f_x + 2f_{xm})]$.

Тоді цю періодичну функцію можна подати рядом Фур'є:

$$F(if_x) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \hat{A}_k e^{i\frac{2\pi k f_x}{(2f_{mx})}},$$

де

$$\hat{A}_k = \frac{2}{(2f_{xm})} \int\limits_{-f_{xm}}^{f_{xm}} F(if_x) e^{i\frac{2\pi k f_x}{(2f_{mx})}} df_x.$$

При $x = -\dfrac{k}{(2f_{xm})}$ маємо:

$$\varphi\left(-\frac{k}{(2f_{xm})}\right) = \int\limits_{-f_{xm}}^{f_{xm}} F(if_x) e^{-i\frac{2\pi k f_x}{(2f_{mx})}} df_x = \frac{\overline{A}_k}{2/(2f_{xm})}.$$

$$\overline{A}_k = \frac{2}{(2f_{xm})}\varphi(-\frac{k}{(2f_{xm})}).$$

Визначимо значення $\varphi(x)$ через значення $F(if_x)$, що подається нескінченним рядом:

$$\varphi(x) = \int_{-f_{xm}}^{f_{xm}} \frac{1}{2}(\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\overline{A}_k e^{i\frac{2\pi k f_x}{(2f_{xm})}})e^{i2\pi f_x}df_x.$$

Після зміни порядку інтегрування та сумування отримаємо:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\overline{A}_k \int_{-f_{xm}}^{f_{xm}} e^{i2\pi f_x[x+\frac{k}{2f_{xm}}]}df.$$

$$\int_{-f_{xm}}^{f_{xm}} e^{i2\pi f_x[x+\frac{k}{2f_{xm}}]}df_x = \frac{e^{i2\pi f_{xm}[x+\frac{k}{2f_{xm}}]} - e^{-i2\pi f_x[x+\frac{k}{2f_{xm}}]}}{i2\pi f_{xm}[x+\frac{k}{2f_{xm}}]} = .$$

$$= (2f_{xm})Sa\left[2\pi f_{xm}(x+\frac{k}{2f_{xm}})\right]$$

$$Sa\left[2\pi f_{xm}(x+\frac{k}{2f_{xm}})\right] = \frac{\sin\left[2\pi f_{xm}(x+\frac{k}{2f_{xm}})\right]}{\left[2\pi f_{xm}(x+\frac{k}{2f_{xm}})\right]} \qquad (87а)$$

- функція відліків.

Відповідно:

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\overline{A}_k f_{xm}Sa\left[2\pi f_{xm}(x+\frac{k}{2f_{xm}})\right] = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\varphi(-\frac{k}{2f_{xm}})Sa\left[2\pi f_{xm}(x+\frac{k}{2f_{xm}})\right].$$

Позначимо $\Delta x = \dfrac{1}{2f_{xm}}$ та відмітимо, що знаки перед k в останньому виразі можна змінити, оскільки йде перебір у сумуванні за всіма значеннями k. Тоді остаточно матимемо:

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\varphi(k\Delta x)Sa\left[2\pi f_{xm}(x-k\Delta x)\right]. \qquad (87б)$$

Отриманий вираз і є аналітичним представлення теореми Котєльнікова. Його ще називають рядом Котєльнікова. Задана неперервна функція $\varphi(x)$ подається дискретними значеннями, що знаходяться один від одного на відстані $\Delta x = \dfrac{1}{2 f_{xm}}$. Ці значення називаються *вибірками сигналу*. Принцип дискретизації сигналу знаходить дедалі більше застосування в оптичному приладобудуванні (наприклад, у Фур'є-спектрометрах).

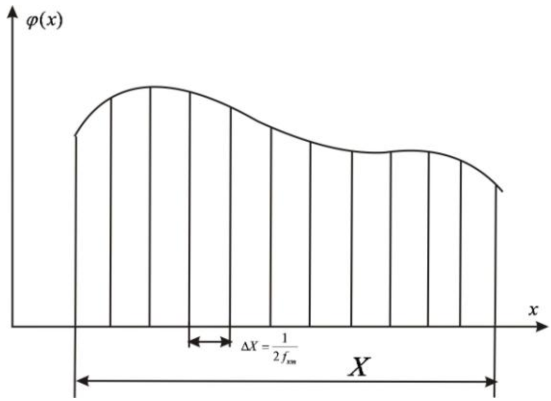

Рис. 20. Принцип дискретизації сигналу

При вимірах кількість вибірок – завжди скінчене число. Тому при вимірах сигналів скінченної протяжності існує можливість точного їх вимірювання на осі *x*, та насправді це не так. Обмеження в просторі (в часі) сигналу призводить до уширення спектра, що приводить до зменшення кроку дискретизації. Проте в реальному спектрі завжди можна вказати значення частоти f_{xm}, за межами якої інтенсивність спектра майже відсутня та відповідно до якої вибраний крок $\Delta x = \dfrac{1}{2 f_{xm}}$.

Спектральна роздільна здатність відновленого спектра частот $|F(if_x)|$ на основі вимірів сигналу $\varphi(x)$ виявляється залежною від кількості вибірок N та пов'язана із на півшириною Sa функції віліків та в цілому визначається інтервалом X.

КількістьЧисло вибірок на інтервалі X така:

$$N = \frac{X}{\Delta X} + 1.$$

Одна «лінійна» вибірка з'являється за рахунок границь сигналу. Оскільки $N >> 1$, то $N = \frac{X}{\Delta X} = X 2 f_{xm}$. У Фур'є-спектроскопії буде доведено, що точність відновленого спектра $\delta f_x = \frac{1}{2X} = \frac{1}{2N\Delta X} = \frac{f_{xm}}{N}$.

1.3.14. Перетворення Фур'є деяких функцій

Розрахунки проводяться на семінарах.