Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
Факультет математики та інформатики
Кафедра алгебри та інформатики

Похідна функції та її застосування при розв'язуванні задач прикладного характеру

Дипломна робота
Рівень вищої освіти - другий (магістерський)

Виконала: студентка 6 курсу, 606 групи
(денної форми навчання)_________
спеціальності 014.04 — «Середня освіта (Математика)»
Галак Марія-Олена Олександрівна
Керівник: кандидат фіз.-мат.наук, доцент кафедри алгебри та інформатики
Колісник Р.С.

До захисту допущено:
Протокол засідання кафедри № 6
від „8” грудня 2021 р.
Зав. кафедри ________доц. Колісник Р.С.

Чернівці-2021

Анотація

У дипломній роботі систематизовано теоретичний матеріал з теми «Похідна та її застосування», розв'язанні приклади з даної теми, представлено приклади інтерактивних та тренувальних вправ з теми, а також наведено задачі прикладного характеру, тобто задачі на застосування похідної в різних сферах життя людини.

Зміст

Вступ 5

РОЗДІЛ 1. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ, ЇЇ ГЕОМЕТРИЧНИЙ ТА ФІЗИЧНИЙ (МЕХАНІЧНИЙ) ЗМІСТ 8

1.1. Задачі, які приводять до поняття похідної 8

1.1.1. Геометрична задача 8

1.1.2. Фізична задача 9

1.2. Похідна функції 10

1.2.1. Означення похідної 10

1.2.2. Фізичний зміст похідної 11

1.2.3. Геометричний зміст похідної 11

1.3. Зв’язок між диференційовністю й неперервністю функції в точці 12

1.4. Основні теореми й правила диференціювання функцій 13

1.5. Теорма (про похідну оберненої функції) 14

1.6. Теорема (про похідну складної функції) 15

1.7. Диференціювання функцій, заданих у параметричному вигляді 17

1.8. Диференціювання неявно заданих функцій 18

1.9. Логарифмічне диференціювання 18

Розділ 2. Розв’язування прикладів 20

Розділ 3. Цікаві завдання на закріплення вивчення теми «Похідна» 29

Розділ 4. Застосування похідної в різних сферах життя людини 39

4.1. Історичні відомості 39

4.2. Похідна в прикладних задачах. 40

4.3. Застосування фізичного змісту похідної при розв’язанні фізичних задач 40

4.3.1. Похідна в механіці 40

4.3.2. Похідна в електротехніці 43

4.4. Розв’язання хімічних і біологічних задач за допомогою похідної ... 44

4.4.1. Похідна в хімії 44

4.4.2. Похідна в біології 45

4.5. Рішення задач з географічним, економічним змістом 46

4.5.1. Похідна в географії 46

4.5.2. Похідна в економіці 48
4.6. Використання методу проєктів до теми: «Похідна та її застосування» ... 51
Висновки 56
Список використаних джерел 58

Вступ

Поняття похідної – це не тільки фундаментальне поняття математичного аналізу, за допомогою якого досліджують процеси і явища в природничих, соціальних, економічних науках. До відкриття похідної незалежно один від одного прийшли два відомих вчених – Ньютон і Лейбніц наприкінці XVII століття [41]. Проте ще задовго до цього Архімед розв’язав задачу на побудову дотичної до кривої та знайшов максимум деякої функції.

Розділ алгебри та початків аналізу “Похідна та її застосування” займає значне місце у шкільному курсі математики, в першу чергу тому, що має велике прикладне значення.

Сучасна школа має забезпечити виховання всебічно розвиненої людини, тому одночасно з піднесенням науково-теоретичного рівня викладання треба дбати про вироблення в учнів уміння застосовувати здобуті знання на практиці, про розвиток розумових здібностей, виховання інтересу до предмета, про вміння самостійно здобувати знання.

Тема «Застосування похідної до розв’язування задач у шкільному курсі математики» має важливе значення в загальному розвитку дитини. В учнів формується: здатність самостійно аналізувати ситуацію, швидко адаптуватися до нових умов, уміння використовувати набуті знання, графічні навички (правильно і гарно виконувати побудову); розвивається: інтерес до алгебри і початків аналізу, здатність аналізувати і робити обґрунтовані висновки, культура усної та письмової математичної мови. Загалом, вивчення теми застосування похідної до розв’язування задач у шкільному курсі математики робить суттєвий внесок у розвиток логічної культури учня.

Проблемою вивчення похідної в шкільному курсі математики займалися такі педагоги-математики, як Т. В. Думанська [9], Л. С. Капкаєва [36], О. Е. Корнійчук [15], В. Д. Погребний [27], З. І. Слєпкань [32] та інші, всі вони дотримуються думки, що дана тема має велике значення у розвитку учня.

Програма з математики для загальноосвітньої школи відводить на вивчення теми “Похідна та її застосування” приблизно 26 годин (загальноосвітньої школи), 46 годин (ліцеї і гімназії з поглибленим вивченням математики).

При вивченні цієї теми вводиться поняття похідної, розкривається її геометричний і механічний зміст. Мова похідної дозволяє строго формулювати багато законів природи. В курсі математики за допомогою диференціального числення досліджуються властивості функцій, будуються їхні графіки, розв’язуються задачі на найбільше й найменше значення, поглиблюються історичні знання з математики.

Отже, **тема «Похідна» -** це один з найважливіших розділів курсу математичного аналізу, так як це поняття є основним в диференціальному численні і служить вихідною базою при побудові інтегрального числення. Але часто, учні, стикаючись з цим поняттям в перший раз, не розуміють для чого потрібно його вивчати. Вони не бачать практичного застосування цієї теми. Тому дана тема спрямована на те, щоб учні з'ясували, навіщо потрібно вивчати похідну, де можна використовувати знання, пов'язані з похідною в житті, а також в інших предметах.

Актуальність теми роботи полягає в тому, що сучасна людина, повинна бути здатною не лише ефективно творчо оволодівати знаннями, а й уміти застосовувати їх на практиці, швидко адаптуватися до нестандартних ситуацій. Тому, я хочу показати, які саме цікаві вправи та задачі можна використовувати на уроках математики з теми «Похідна та її застосування».

Об’єктом дослідження даної дипломної роботи є: застосування похідної до розв’язування прикладних задач.

Предмет дослідження – цікаві завдання з теми «Похідна та її застосування» в курсі алгебри та початків аналізу, а також задачі фізики, хімії, біології, економіки, географії, що розв’язуться за допомогою похідної.

Практичне значення дослідження. Дана робота написана з точки зору проведення уроків алгебри на тему "Похідна та її застосування" в десятому класі з метою систематизації зібраних матеріалів на допомогу вчителям, котрі працюють в стандартному та профільному класах.

Робота складається зі вступу і чотирьох основних частин. У першому розділі наведено основні теоретичні відомості, де наведено означення похідної, основні теореми, необхідні та достатні умови зростання (спадання) функції, достатня ознака екстремуму функції, та наведені алгоритми розв'язання конкретного типу задач. У другому розділі розглядаються різні приклади, наводиться їх розв'язання з повним поясненням. У третьому розділі представлені цікаві завдання на закріплення вивчення теми «Похідна». У четвертому розділі наведено прикладні задачі та задачі з використанням похідної в інших науках та відомості про метод проєктів.

Розділ 1. Похідна функції, її геометричний та фізичний (механічний) зміст

1.1. Задачі, які приводять до поняття похідної

1.1.1. Геометрична задача

Нехай криву задано рівнянням $y = f(x)$ і в точці $M_0(x_0, y_0)$ проведено дотичну T (не перпендикулярно до осі Ox).

Візьмемо на кривій точку $M_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Пряма M_0M_1 буде січною. Нехай ϕ – кут, який утворює січна M_0M_1 з додатним напрямком осі Ox , а α – кут між дотичною M_0T і теж додатним напрямком осі Ox (рис. 1).

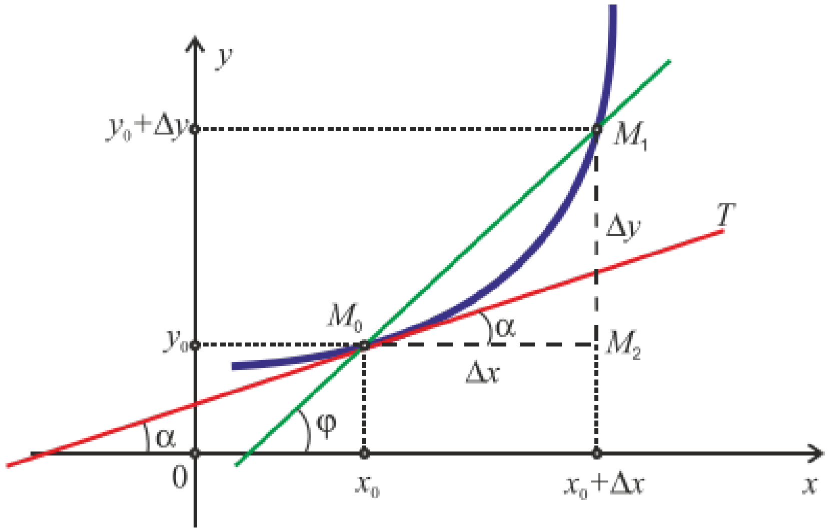


Рис. 1

Розглянемо прямокутний трикутник $M_0M_1M_2$ ($< M_1M_0M_2 = \varphi$) (рис. 1). Тоді

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{M_1M_2}{M_2M_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\mathrm{f}(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Нехай $\Delta x \to 0$. Тоді точка M_1 буде прямувати вздовж кривої до точки M_0, кут φ – до кута α, а січна M_0M_1 наближатиметься до дотичної M_0T (дотичною до кривої в точці M_0 називається граничне положення січної M_0M_1, якщо точка M_1 наближається вздовж кривої до точки M_0), тобто

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{f}(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha.$$

З аналітичної геометрії відомо, що tgα = k (k – кутовий коефіцієнт прямої). Тоді

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = k \qquad (1)$$

Цю границю й називають кутовим коефіцієнтом дотичної.

1.1.2. Фізична задача

Нехай матеріальна точка m рухається за законом $S = S(t)$ вздовж прямої і за час t проходить відстань OM (рис. 2). Знайдемо швидкість руху точки m в положенні M.

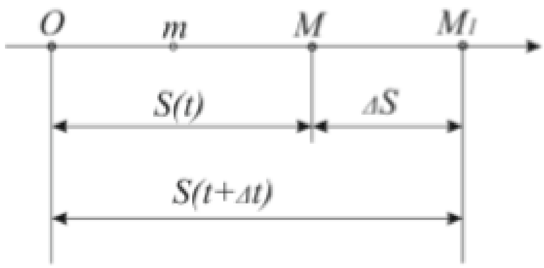


рис. 2

Нехай з моменту часу t пройшов ще деякий невеликий проміжок часу, який позначимо через Δt, а шлях MM_1, пройдений за цей час, позначимо через ΔS. Середня швидкість руху точки m за час Δt буде дорівнювати

$$v_{\text{сер}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$

Нагадаємо, що нам потрібно знайти швидкість матеріальної точки m у положенні M. Чим менший проміжок ΔS , тим ближче буде значення $v_{\text{сер}}$ до значення швидкості в точці M. Швидкість руху точки m у момент часу t характеризує та границя, до якої прямує середня швидкість при $\Delta t \to 0$. Тобто

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = v$$

Цю границю й називають *швидкістю руху* точки m в даний момент часу t.

1.2. Похідна функції

1.2.1. Означення похідної

Нехай задано функцію $y = f(x)$ на деякому проміжку. Візьмемо довільну внутрішню точку x_0 цього проміжку, надамо значенню x_0 довільного приросту Δx (число Δx може бути як додатним, так і від'ємним), але такого, щоб точка $x_0+\Delta x$ належала даному проміжку.

Тоді:

1) обчислимо в точці x_0 приріст $\Delta y = \Delta f(x_0)$ функції:

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0);$$

2) складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$;

3) Знайдемо границю цього відношення за умови, що $\Delta x \to 0$, тобто:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо дана границя існує, то y називають похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0 і позначають $f'(x_0)$ або y'.

Похідною функції *y=f(x)* у точці x_0 називають границю відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля, а границя існує, тобто:

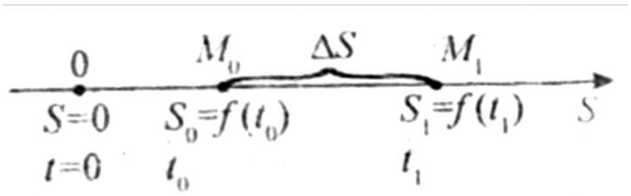
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Похідну позначають ще й так: $y'(x), y'$, $\frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}$. Значення похідної при $x = a$ позначається так: $f\,'(a)$.

- Функцію, яка має похідну в точці x_0, називають <u>диференційовною в цій точці.</u>
- Функцію, яка має похідну в кожній точці деякого проміжку, називають <u>диференційовною на цьому проміжку</u>. Операція знаходження похідної називається <u>диференціюванням</u>.

1.2.2. Фізичний зміст похідної

Нехай матеріальна точка *M* рухається прямолінійно за законом $s = f(t)$.



У момент t_0 вона зайняла положення M_0 і пройшла шлях $s_0 = f(t_0)$. Знайдемо швидкість точки в момент t_0. Припустимо, що за довільно вибраний проміжок часу Δt, починаючи з моменту t_0, точка перемістилася на відстань Δs і зайняла положення M_1. Тоді $t_1 = t_0 + \Delta t,\ s_1 = f(t_1) = s_0 + \Delta s$. За проміжок часу Δt матеріальна точка проходить шлях

$$\Delta S = f(t_1) - f(t_0) = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0).$$

Середня швидкість ($v_{\text{сер.}}$) руху на проміжку M_0M_1 дорівнює

$$v_{\text{сер}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

Миттєвою швидкістю точки, яка рухається прямолінійно, у момент часу t_0 називають границю середньої швидкості за умови, що Δt наближається до нуля:

$$v_{\text{сер}}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{сер}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

Числа Δt , Δs називають відповідно приростом часу і приростом шляху.

Отже, миттєвою швидкістю точки, яка рухається прямолінійно, є границя відношення приросту шляху Δs до відповідного приросту часу Δt, коли приріст часу наближається до нуля.

Висновок: якщо матеріальна точка рухається прямолінійно і її координата змінюється за законом $s = s(t)$, то швидкість її руху $v(t)$ у момент часу t дорівнює похідній $s'(t)$: $v(t) = s'(t)$.

1.2.3. Геометричний зміст похідної

Згадаємо геометричну задачу й формулу (1):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{f}(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$$

Геометричний зміст похідної: похідна функції $y = f(x)$ у точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка цієї функції в даній точці x_0, тобто

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = k$$

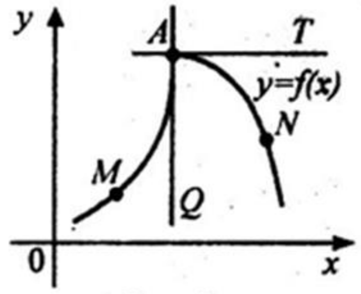


Рис. 5

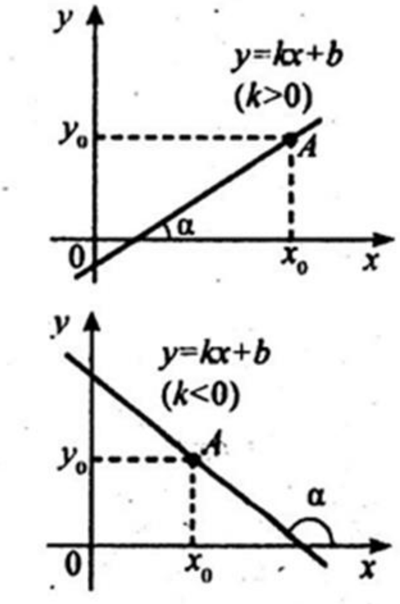


Рис. 6

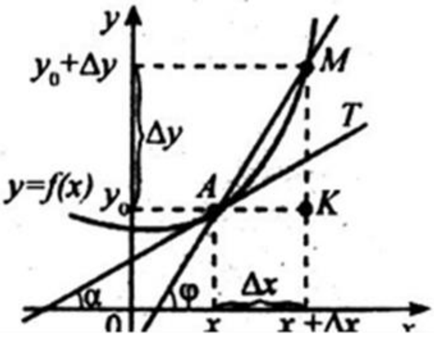


Рис. 7

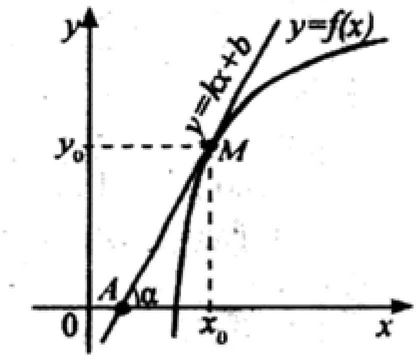


Рис. 8

1.3. Зв’язок між диференційовністю й неперервністю функції в точці

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в деякій точці $x = x_0$, то функція в цій точці неперервна. [28, с.10]

Доведення. Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_0, то в цій точці виконується рівність $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Застосуємо теорему (формулюємо її в скороченому вигляді): якщо $\lim y = b,$ то $y = b + \alpha$ (α – нескінченно мала функція). Тоді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha \text{ або } \Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x \qquad (4)$$

За означенням, функція неперервна в точці, якщо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Перейдемо до границі в рівності (4) при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x] = 0.$$

Тобто функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0.

Зауваження. Обернена теорема не виконується. Тобто, неперервна в деякій точці функція $y = f(x)$ не завжди має похідну в цій точці. Для підтвердження цього факту розглянемо приклад.

Приклад. Функція $y = \sqrt[3]{x}$ неперервна на $(-\infty; +\infty)$. В точці $x_0 = 0$ дотична до кривої – вертикальна й збігається з віссю *Oy*. Кут нахилу цієї дотичної $\alpha = \frac{\pi}{2}$, кутовий коефіцієнт $k = f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}\frac{\pi}{2}$ не існує, тобто в точці x_0 похідна не існує.

1.4. Основні теореми й правила диференціювання функцій

2. *Похідна сталої y = c дорівнює нулю.* [28, с.12]

Справді, нехай $y = c$. Тоді

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = c \Rightarrow \Delta y = c - c = 0 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

Отже, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, тобто похідна сталої дорівнює нулю: $c' = 0$.

3. *Нехай функції $u = u(x)$, $v = v(x)$ диференційовні в точці x.*

Тоді в цій точці:

1) *похідна суми (різниці) двох (і більше) функцій дорівнює сумі (різниці) похідних цих функцій:*

$$[u \pm v]' = u' \pm v';$$

2) *похідна добутку двох функцій u і v обчислюється за формулою*

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v';$$

3) *похідна частки цих функцій обчислюється за формулою*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, v \neq 0.$$

Доведемо, наприклад, другу рівність. Нехай $y = u \cdot v$. Тоді $y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$. Знайдемо Δy.

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv =$$
$$= \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \Delta v.$$

Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ і знайдемо його границю, коли $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta u}{\Delta x} v + \frac{\Delta v}{\Delta x} u + \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x}\right] = v\left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\right]$$
$$+ u\left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}\right] + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}\right].$$

Перш ніж записати відповідь, пояснимо одержаний вираз. У перших двох доданках v і u винесено за знак границі тому, що вони не залежать від Δx . У третьому доданку можна було б Δu і Δv поміняти місцями – нічого б не змінилось. Вирази у квадратних дужках – це похідні відповідних функцій. Третій доданок прямує до нуля, тому що функція $u(x)$ диференційовна, а тому й неперервна. А це означає, що $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$. Таким чином,

$$(uv)' = u'v + uv' \tag{5}$$

Зауваження. Якщо одна з функцій, наприклад функція $u(x)$, є сталою величиною, тобто $u = \text{C}$, то за формулою (5) маємо

$$[\text{C}\,v]' = \text{C}'v + \text{C}\,v' = \{\text{C}' = 0\} = \text{C}\,v'.$$

Це означає, що *сталий множник можна виносити за знак похідної.*

1.5. Теорма (про похідну оберненої функції)

Якщо для функції $y = f(x)$ існує обернена функція $x = \varphi(y)$, яка в точці y має похідну $\varphi'(y)$, що не дорівнює нулю, то у відповідній точці x функція $y = f\,(x)$ має похідну, яка обчислюється за формулою

$$x'_y = \frac{1}{x'_y} \quad \text{або} \quad f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)},\ \ x'_y = \varphi'(y) \neq 0.$$

Зазначимо, що індекси вказують, за якою змінною обчислюється похідна. [28, с.14]

Доведення. За умовами теореми функція $x = \phi(y)$ має похідну, тобто

$$x'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}.$$

Далі запишемо такий ланцюжок:

$$x'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \begin{Bmatrix} \text{якщо } \Delta y \to 0, \\ \text{то і } \Delta x \to 0 \end{Bmatrix} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{{y_x}'}$$

Тобто $x'_y = \frac{1}{y_{x'}}$ або навпаки $y'_x = \frac{1}{x'_y}$. Застосуємо цю теорему для знаходження похідної функції $y = a^x$. Спочатку запишемо обернену функцію $x = log_a y$ та її похідну $x'_y = \frac{1}{ylna}$. За теоремою про похідну оберненої функції маємо:

$$x'_y = (a^x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\frac{1}{y \ln a}} = y \ \ln a = a^x \ln a.$$

Отже, $(a^x)' = a^x \ln a$. Як окремий випадок $(e^x)' = e^x \ln e = e^x$.

Тепер знайдемо похідні обернених тригонометричних функцій за допомогою цієї самої теореми.

Для функції $y = arcsin\, x$ обернена функція $x = \sin y$. Її похідна

$$x'_y = \cos y.$$

Тоді $y'_x = (arcsin\, x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{cos\, y} = \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Отже,

$$(arcsin\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Аналогічно можна знайти, що

$$(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Для функції $y = arctg \ x$ похідна має вигляд

$$y'_x = (arctg \ x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\frac{1}{cos^2 y}} = cos^2 y = \frac{1}{1 + tg^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Аналогічно можна показати, що $y'_x = arcctg \ x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

1.6. Теорема (про похідну складної функції)

Якщо функція $y = f\,(u)$ має похідну в точці u, а функція $u = \phi(x)$ –

похідну в точці х, тоді складна функція $y = f[\varphi(x)]$ має похідну в точці x, яка обчислюється за формулою

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x\,. \qquad (6)$$

Зазначимо, що індекси у формулі (6) вказують, за якою змінною обчислюється похідна. [28, с.16]

Доведення. Запишемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ у вигляді $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$. Знайдемо границю відношення, коли $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Функція $u = \varphi(x)$ неперервна в точці *x*. Тому, якщо $\Delta x \to 0$, то І $\Delta u \to 0$. Тоді

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \left\{ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y_u{}' , \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x \right\} = y'_u \cdot u'_x.$$

Тобто $y'_x = y'_u \cdot u_x$.

Таким чином, щоб продиференціювати складну функцію

$$y = f[\varphi(x)], \text{ де } \varphi(x) = u,$$

необхідно знайти похідну від «зовнішньої» функції у за проміжним аргументом *u* і помножити на похідну від «внутрішньої» функції $y = \phi(x)$ за аргументом x.

Зазначимо, що це правило можна використовувати й для функції, яка складена з трьох і більше функцій.

За допомогою цієї теореми знайдемо похідну функції $y = x^{\alpha}$. Спочатку перетворимо функцію:

$$y = x^a = e^{\ln x^a} = e^{\alpha \ln x}$$

Одержали складну функцію

$$y = e^{ln\, x} \Rightarrow y = e^u; \quad u = \alpha \ln x$$

Знайдемо похідні функцій $y = e^u$ та $u = \alpha \ln x$:

$$y'_u = e^u;\ u_x = (\,\alpha \ln x)' = \alpha \frac{1}{x}$$

За формулою (6) маємо:

$$y'_x = e^u \alpha \frac{1}{x} = e^{\alpha\, ln\, x} \alpha \frac{1}{x} = x^a \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

Таким чином, $(x^{a})' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Розглянемо окремі випадки цієї формули:

1) $x' = 1$;

2) $(x^2)' = 2x$;

3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \left\{\text{тут } \alpha = \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

4) $\left(\frac{1}{x}\right) = \{\text{тут } \alpha = -1\} = -\frac{1}{x^2}$.

1.7. Диференціювання функцій, заданих у параметричному вигляді

Нехай функція $y = f(x)$ задана у вигляді

$$\begin{cases} y = y(t), \\ x = x(t), \end{cases} \text{ або } \begin{cases} y = \varphi(t), \\ x = \psi(t). \end{cases}$$

Такий вигляд диференціальної залежності між змінними y та x називається *параметричним,* а змінна t – *параметром.*

Іноді функцію в параметричному вигляді записують в один рядок і без дужок, тобто $y = y(t), x = x(t)$. Знайдемо формулу для обчислення похідної функції, заданої в параметричному вигляді.

Теорема. Нехай функції $y = y\,(t)$ і $x = x(t)$ мають похідні, причому $x'_t \neq 0$ і функція $x = x(t)$ має обернену функцію $t = F\,(x)$, яка теж має похідну. Тоді функція $y = f\,(x)$ має похідну й ця похідна визначається за формулою

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \text{ або } y'(x) = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}.$$

[28, с.26]

Доведення. Дійсно, нехай функція $x = x(t)$ має обернену функцію $t = F\,(x)$. Тоді функцію $y = f\,(x)$ можна розглядати як складну функцію: $y = y\,(t)$, $t = F(x)$. За правилом диференціювання складної функції запишемо: $y'_x = y'_t \cdot t'_x$. Далі за теоремою про похідну оберненої функції $t'_x = \frac{1}{x'_t}$. І нарешті, $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$. (Приклад 10).

1.8. Диференціювання неявно заданих функцій

Нехай функція $y = f(x)$ задана рівнянням $F(x, y) = 0$. У цьому випадку кажуть, що функція у задана в *неявному вигляді*. Зазначимо, що не обов'язково в правій частині рівняння $F(x, y) = 0$ повинен стояти нуль. Головне, що рівняння не розв'язане відносно y. [28, с.27]

(Приклад 11)

1.9. Логарифмічне диференціювання

Функція вигляду $y = u(x)^{v(x)}$ $[u(x) > 0]$ називається степенево-показниковою (або складено-показниковою функцією). Похідну від такої функції знаходять таким чином:

1) спочатку функцію логарифмують (зазвичай по основі e), тобто записують:

$$\ln y = v(x) \cdot \ln u(x);$$

2)потім диференціюють цю рівність і знаходять з одержаного виразу y'.

[24, с.28], (Приклад 12)

Таблиця похідних

1. $(c)' = 0;$
2. $(x)' = 1;$
3. $\left(x^{a}\right)' = ax^{a-1};$
4. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$
5. $\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a;$
6. $\left(e^{x}\right)' = e^{x};$
7. $\left(\log_{a} x\right)' = \frac{1}{x\ln a};$
8. $(\ln x)' = \frac{1}{x};$
9. $(\sin x)' = \cos x;$
10. $(\cos x)' = -\sin x;$
11. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^{2} x};$
12. $(ctgx)' = \frac{-1}{\sin^{2} x};$
13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}};$
14. $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^{2}}};$
15. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^{2}};$
16. $(arcctgx)' = \frac{-1}{1+x^{2}}.$

Таблиця 1.1.

Розділ 2. Розв'язування задач

Наведені в цьому розділі приклади взято з підручника алгебра і початків аналізу 10 клас [13].

Приклад 1. Знайти похідну функції $f(x) = x^2$ у точці $x_0 = 7$.

Розв'язання.

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (7 + \Delta x)^2 - 7^2$$
$$= 49 + 14\Delta x + (\Delta x)^2 - 49 = 14\Delta x + (\Delta x)^2.$$

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{14\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta \mathrm{x}(14 + \Delta x)}{\Delta x} = 14 + \Delta x.$$

$f'(7) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(14 + \Delta x) = 14.$

Відповідь: $f'(7) = 14.$ [11, с.344]

Приклад 2. Чи має функція $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, \text{якщо x} \leq 1, \\ 2x - 4, \text{якщо x } > 1 \end{cases}$

похідну у точці $\mathrm{x}_0 = 1$? У разі позитивної відповіді, знайти $f'(1)$.

Розв'язання. Маємо $f(x_0) = f(1) = 1^2 - 3 = -2$.

Оскільки функцію $f(x)$ для різних значень аргументу задано різними формулами: для $\mathrm{x} \leq 1$ – однією формулою, а для $\mathrm{x} > 1$ іншою, і дати відповідь про існування похідної потрібно саме в точці $x_0 = 1$, то під час розв'язування задачі треба розглянути 2 випадки $\Delta x < 0, \Delta x > 0$.

Якщо $\Delta x < 0$, то

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (1 + \Delta x)^2 - 3 - (-2) =$$
$$= 1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 - 3 + 2 = 2\Delta x + (\Delta x)^2.$$

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{2\Delta \mathrm{x} + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2 + \Delta x)}{\Delta x} = 2 + \Delta x.$$

Отже, в обох випадках $\lim\limits_{\Delta \mathrm{x} \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = 2$, тобто $f'(1)$ інує і $f'(1) = 2$.

Відповідь: має; $f'(1) = 2$. [13, с.344]

Приклад 3. Дано функцію $f(x) = \mathrm{x}^3$. Знайти $f'(-1), f'(2)$.

Розв'язання. Відомо, що похідною функції $f(x) = \mathrm{x}^3$ є функція $f'(x) = 3x^2$. Тоді $f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 = 3$ і $f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$.

Відповідь: $f'(-1) = 3$; $f'(2) = 12$. [11, с.345]

Приклад 4. (Правила диференціювання. Таблиця похідних). Знайти рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 + 4x + 7$, яка проходить через точку $A(-1; 0)$.

Розв'язання. Оскільки $f(-1) = 4 \neq 0$, то точка А не належить графіку даної функції. Нехай $\left(x_0; f(x_0)\right)$ – точка дотику, тоді

$$f(x_0) = {x_0}^2 + 4x_0 + 7.$$

Оскільки $f'(x)$= $2x + 4$, то $f'(x_0) = 2x_0 + 4$. У рівняння дотичної $y = f(x_0) + f'^{(x_0)}(x\text{-}x_0)$ підставимо отриманні для $f(x_0)$ та $f'(x_0)$ вирази:

$$y = {x_0}^2 + 4x_0 + 7 + (2x_0 + 4)\ (x\text{-}x_0).$$

Оскільки точка $A(-1; 0)$ належить дотичній, то її координати задовольняють рівняння дотичної, маємо: $0 = {x_0}^2 + 4x_0 + 7 + (2x_0 + 4)\ (-1\text{-}x_0)$, або після спрощень: ${x_0}^2 + 2x_0 - 3 = 0$. Звідси $x_0 = 1$ *або* $x_0 = -3$.

Отже, таких дотичних буде дві.

1) Якщо $x_0 = 1$, маємо рівняння дотичної:

$$y = 1^2 + 4 \cdot 1 + (2 \cdot 1 + 4)(x - 1)\text{, тобто } y = 6x + 6.$$

2) Якщо $x_0 = -3$, маємо рівняння дотичної:

$$y = 9 - 12 + 7 + (2 \cdot (-3) + 4)(x + 3)\text{, тобто } y = -2x - 2.$$

Відповідь. $y = 6x + 6$; $y = -2x - 2$. [13, с.358]

Приклад 5. (Похідна від частки)

$\left(\frac{x^3}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^3)'(x^2+1)-(x^2+1)'\ x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^2(x^2+1)-2x\cdot x^3}{(x^2+1)^2} == \frac{3x^4+3x^2-2x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$. [10, с.359]

Приклад 6. Знайти похідну функції $f(x) = \frac{2}{x^3}$ у точці $x_0 = -1$.

Розв'язання. Оскільки $\frac{2}{x^3} = 2x^{-3}$, то

$$f'(x) = (2x^{-3})' = 2(-3)x^{-3-1} = -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4}.$$

Тоді $f'(-1) = -\frac{6}{(-1)^4} = -6$.

Відповідь. -6. [13, с.359]

Приклад 7. Обчислити похідні функцій:

1) $y = \ln x - 8\,\mathrm{tg}\,x;$

2) $y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2};$

3) $y = \cos^{-1} x - 4 \cdot 5^x + e^2.$

Розв'язання. Усі три функції складаються із суми (різниці) функцій. Користуємося формулою $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

1. $y' = (\ln x - 8tgx)' = (\ln x)' - (8tgx)' = \frac{1}{x} - 8\frac{1}{cos^2x} = \frac{1}{x} - \frac{8}{cos^2x}$

1.Запишемо функцію таким чином: $y = 2 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x.$ Тоді

$$y' = 2\left(\frac{1}{x}\right)' + \frac{1}{2}(x)' = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{2}.$$

2.Зазначимо, що e^2 – це стала, похідна якої дорівнює нулю:

$y' = (\cos^{-1} x)' - 4(5^x)' + (e^2)` = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 4 \cdot 5^x \ln 5 + 0 = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 4 \cdot 5^x\, ln\, 5.$ [24, с.19]

Приклад 8. Знайти похідні складних функцій:

1) $y = sin^3x;$

2) $y = \sin x^3\,;$

3) $y = sin3x;$

4) $y = \ln(x^2 + 3);$

5) $y = 3^{x+x^2};$

6) $y = e^{\cos 6x};$

7) $y = arctg^4 5x;$

8) $y = \cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}\right), y'(0) -?$

9) $y = 7^{sin\, 5x}.$

Розв'язання. Нагадаємо формулу, за якою будемо розв'язувати подані приклади: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$. Тобто, щоб знайти похідну від складної функції, необхідно знайти похідну від «зовнішньої» функції $y(u)$ і помножити її на похідну від «внутрішньої» функції $u(x)$. Якщо функція складається з трьох і більше функцій, то правило знаходження похідної не змінюється: похідна складної функції дорівнює добутку похідних від функцій, що її утворюють.

1. Запишемо задану функцію таким чином: $y = (\sin x)^3$.

Вона складається з двох функцій: $y = u^3, u = \sin x$. Знайдемо похідні цих функцій: $y'_u = 3u^2$; $u'_x = \cos x$.

Тоді за наведеною формулою маємо:

$$y'_u = 3u^2 \cos x = 3(\sin x)^2 \cos x = 3\sin^2 x \cdot \cos x.$$

2. На перший погляд функція $\mathrm{y} = \sin x^3$. нагадує функцію з попереднього прикладу. Але це інша функція: $y = \sin u$, $u = x^3$. Знайдемо похідні: $y'_u = \cos u$; $u'_x = 3x^2$. Тоді

$$y'_x = cos\, u \cdot 3x^2 = \cos x^3 \cdot 3x^2 = 3x^2\, cos\, x^3.$$

3. А цю функцію запишемо так: $y = \sin u$, $u = 3x$. Знайдемо похідні: $y'_u = cos\, u$; $u'_x = 3$. Тоді

$$y'_x = cos\, u \cdot 3 = 3\cos 3x.$$

4. Аналогічно для функції $y = \ln(x^2 + 3)$ маємо

$$y = \ln u, \;\; u = x^2 + 3.$$

Похідні цих функцій $y'_u = \frac{1}{u}, u'_x = 2x$. Звідси

$$y'_x = \frac{1}{u} \cdot 2x = \frac{1}{x^2 + 3} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 3}.$$

5. Запишемо складові функції: $y = 3^u; u = x + x^2$. Тоді

$$y' = (3^u)' \cdot (x^2 + 3)' =$$

$$= 3^u \cdot \ln 3 \cdot (1 + 2x) = 3^{x+x^2} \cdot ln\, 3 \cdot (1 + 2x).$$

6. Функція $y = e^{\cos 6x}$ складається з трьох функцій: $y = e^u, u = \cos v\, , v = 6x.$ У цьому випадку похідна обчислюється за формулою

$$y'_x = {y_u}' \cdot {u_v}' \cdot {v_x}'.$$

Тоді маємо: $y'_u = e^u, u'_v = -\sin v,\; v'_x = 6$. Перемножимо знайдені похідні та запишемо результат:

$$y_x' = e^u \cdot (-\,sin\,v) \cdot 6 = -6e^{\cos 6x} \cdot \sin 6x.$$

7. Запишемо функцію у вигляді $y = arctg^4 5x = (arctg5x)^4$. Запишемо складові функції: $y = u^4, u = arctgv, v = 5x.$ Знайдемо похідні цих функцій і перемножимо їх:

$$y' = 4u^3, u' = \frac{1}{1+v^2}, v' = 5.$$

Тоді $y_x' = 4u^3 \cdot \frac{1}{1+v^2} \cdot 5 = 4 \cdot (arctg5x)^3 \cdot \frac{1}{1+25x^2} \cdot 5 == \frac{20arctg^3 5x}{1+25x^2}.$

8. У цьому прикладі необхідно знайти значення похідної в точці $x_0 = 0$. Запишемо складові функції:

$$y = \cos u,\ u = \frac{x}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{1}{4}x + \frac{\pi}{3}.$$

Знайдемо похідні цих функцій, а потім ${y_x}'$:

$$y_u' = -\sin u\,, u_x' = \frac{1}{4};\ y_x' = -\sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{1}{4}.$$

Тепер обчислюємо значення похідної в заданій точці $x_0 = 0$:

$$y_x'(0) = y'(0) = -sin\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Зазначимо, що розкладання функції на складові, тобто докладний запис, застосовують тільки на початку освоєння техніки диференціювання складної функції. Надалі такі розкладання рекомендується робити подумки.

Розглянемо ще один метод знаходження похідної складної функції.

9. Нехай нам необхідно обчислити не похідну, а значення функції в деякій точці *x*. Що для цього потрібно зробити?

1) знайти $5x$;

2) знайти $\sin 5x$;

3) знайти $7^{\sin 5x}$.

Тобто, останнє, що треба зробити, це знайти значення показникової функції.

Тепер повернемося до умови прикладу. Похідну будемо знаходити, починаючи з третьої (останньої) дії (тобто з похідної показникової функції), потім перейдемо до другої дії (похідна тригонометричної функції) і потім – до першої. Одержані похідні перемножимо.

$$y' = 7^{\sin 5x} \cdot \ln 7 \cdot \cos 5x \cdot 5 = 5 \cdot 7^{\sin 5x} \cdot ln\, 7 \cdot cos\, 5x.$$

Зрозуміло, що дії краще не записувати, а продумувати їх. [28, с.22]

Приклад 9. Обчислити похідні заданих функцій:

1) $y = \ln 2x \cdot \cos x$;

2) $y = \sqrt{x} \cdot \mathrm{arctg} 9x$;

3) $y = \dfrac{x^2}{\sin(3x-1)}$;

4) $y = \dfrac{x^3-1}{x^3+1}$;

5) $y = \ln\sqrt{2-3x}$;

6) $y = arcctg^4 4x$;

7) $y = sin^3 \dfrac{1}{x}$;

8) $y = e^{ctg^2 4x^2}$.

Розв'язання.

1. Знаходимо похідну добутку двох функцій:

$$y' = (\ln 2x)' \cos x + \ln 2x (\cos x)' = \frac{1}{2x} 2\, cos\, x$$
$$+ \ln 2x \cdot (-\sin x) = \frac{cos\, x}{x} - \ln 2x \cdot \sin x.$$

2. Аналогічно попередньому прикладу знаходимо похідну добутку двох функцій:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot arctg 9x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{1+(9x)^2} \cdot 9 = \frac{arctg 9x}{1+81x^2}.$$

3. Обчислюємо похідну частки двох функцій:

$$y' = \frac{(x^2)' \cdot \sin(3x-1) - x^2 \cdot [\sin(3x-1)]'}{sin^2(3x-1)}$$
$$= \frac{2x \cdot \sin(3x-1) - x^2 \cdot \cos(3x-1) \cdot 3}{sin^2(3x-1)}$$
$$= \frac{2x \cdot \sin(3x-1) - 3x^2 \cos(3x-1)}{sin^2(3x-1)}.$$

4. Аналогічно знаходимо похідну частки двох функцій:

$$y' = \frac{3x^2 \cdot (x^3+1) - 3x^2 \cdot (x^3-1)}{(x^3+1)^2} = \frac{3x^2 \cdot (3x^2+1-x^3+1)}{(x^3+1)^2} = \frac{6x^2}{(x^3+1)^2}.$$

5. Маємо складну функцію: $y = \ln u\,, u = \sqrt{v},\ \ v = 2 - 3x$. Тоді

$$y' = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot (-3) = \frac{1}{\sqrt{2-3x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2-3x}} \cdot (-3) = -\frac{3}{2(2-3x)}$$

6. Маємо складну функцію. Тоді

$$y' = 4arcctg^3 4x \cdot \left(-\frac{1}{1+(4x)^2}\right) \cdot 4 = -\frac{16arcctg^3 4x}{1+16x^2}.$$

7. Маємо складну функцію. Тоді

$$y' = 3sin^2\frac{1}{x} \cdot \cos\frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{3\,sin^2\frac{1}{x} \cdot \cos\frac{1}{x}}{x^2}.$$

8. Маємо складну функцію. Тоді

$$y' = e^{ctg^2 4x^2} \cdot 2ctg4x^2 \cdot \left(-\frac{1}{sin^2 4x^2}\right) \cdot 8x = -16x \cdot e^{ctg^2 4x^2} \cdot \frac{ctg4x^2}{sin^2 4x^2}.$$

[28, с.25]

Приклад 10. Знайти y'_x, якщо $\begin{cases} y = 2\sin t \\ x = 5\cos t\,. \end{cases}$

Розв'язання. Знайдемо похідні функцій $y\,(t)\ i\ x = x(t)$.Тоді

$$y'_t = 2\cos t\,, x'_t = -5\sin t.$$

$$y'_x = -\frac{2\cos t}{5\sin t} = -\frac{2}{5}\text{ctg}.$$

[28, с.27]

Приклад 11. Знайти похідну функції у, що задана неявно рівнянням

$x^4 + \ln y = 3$.

Розв'язання. Знаходимо похідні лівої та правої частин рівності:

$$(x^4 + ln\, y)' = 3' \Rightarrow 4x^3 + \frac{1}{y} \cdot y' = 0.$$

А тепер знайдемо y', тобто розв'яжемо одержане рівняння відносно y'*:*

$\frac{1}{y} \cdot y' = -4x^3, y' = -4x^3 y$. [28, с.28]

Приклад 12. Обчислити похідну функції $y = (\sin 4x)^{2x}$.

Розв'язання.

1. Логарифмуємо функцію:

$$\ln y = \ln(sin\, 4x)^{2x} \text{ або } \ln y = 2x \cdot \ln(\sin 4x).$$

2. Диференціюємо вираз:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 2 \cdot ln(sin\, 4x) + 2x \cdot \frac{1}{\sin 4x} \cdot \cos 4x \cdot 4.$$

Вираз $\frac{1}{y} \cdot y'$ називають *логарифмічною похідною*. Спростимо вираз у правій частині:

$$\frac{y'}{y} = 2 \ln \sin 4x + 8x \cdot ctg 4x.$$

Знайдемо y'*:*

$$y' = (2\, ln\, sin\, 4x + 8x\, ctg 4x) \cdot y = (2\, ln\, sin\, 4x + 8x \cdot ctg 4x) \cdot (\sin 4x)^{2x}.$$

Метод логарифмічного диференціювання застосовують ще й тоді, коли задана функція складається з декількох доданків або дробу, у якому в чисельнику й знаменнику є декілька доданків. [28, с.29]

Приклад 13. Знайти похідні функцій, які задані в параметричному вигляді:

$$1) \begin{cases} y = t - \sin t, \\ x = \cos \frac{t}{2}. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = cos^4 4t, \\ x = sin^4 4t. \end{cases}$$

Розв'язання. Обидва приклади розв'язуємо за допомогою формули $y'_x =$

$\frac{y'_t}{x'_t}$, тобто обчислюємо похідні від заданих функцій і записуємо дріб: у чисельнику – похідна y'_t, у знаменнику – похідна x'_t:

$$1)\ y'_t = 1 - \cos t, \qquad x'_t = -\sin\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{2}.$$

Тоді

$$y'_x = -\frac{1-\cos t}{sin\ \frac{t}{2}\cdot\frac{1}{2}} = -\frac{2(1-\cos t)}{\sin\frac{t}{2}}.$$

До речі, одержану відповідь можна спростити (нагадаємо, що $1 - \cos 2x = 2sin^2 x$): $y'_x = -\frac{2\cdot 2sin^2\frac{t}{2}}{sin\frac{t}{2}} = -4\ sin\frac{t}{2}$.

У наступних прикладах скоротимо обчислення похідної і будемо водночас у чисельнику знаходити похідну y'_t а в знаменнику – похідну x'_t .

$$2)\ \ y'_x = \frac{(cos^4 4t)'}{(sin^4 4t)'} = \frac{4cos^3 4t\cdot(-sin4t)\cdot 4}{4sin^3 4t\cdot cos4t\cdot 4} = -ctg^2 4t;$$

[28, с.31]

Розділ 3. Цікаві завдання на закріплення вивчення теми «Похідна та її застосування»

Щоб учням краще засвоїти тему «Похідна та її застосування» можна їм запропонувати цікаві завдання з рисунками та ігри на дану тему.

Перше з чим зустрічаються учні перед введенням означення похідної – це приріст функції, тому ми розробили завдання, які сприяють більш глибокому розумінню даного поняття. Наприклад у наступній вправі (рисунок 3.1.) учням потрібно вказати де з відмічених областей знаходиться приріст функції, а де приріст аргументу.

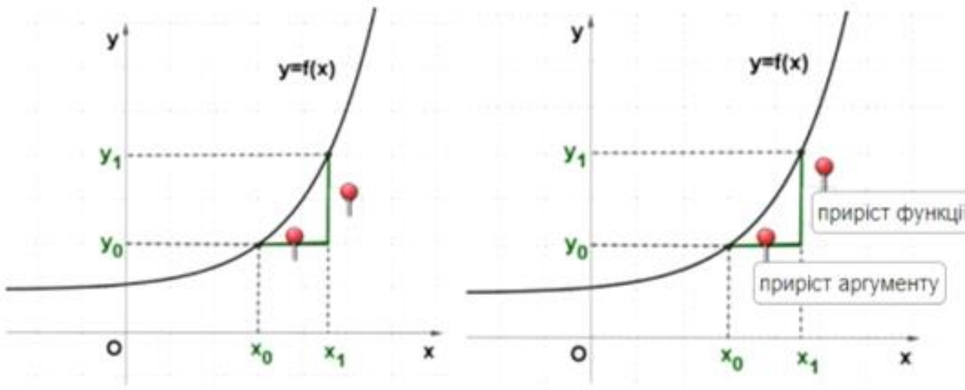


Рис. 3.1. Завдання на приріст функції і аргументу

Дана вправа є нескладною, але з її допомогою можна вирахувати тих учнів, кому є незрозумілими поняття приросту. Також можна запропонувати завдання більш практичного характеру на знаходження приросту функції в заданій точці за графіком при вказаному прирості аргументу, як показано на рисунку 3.2.

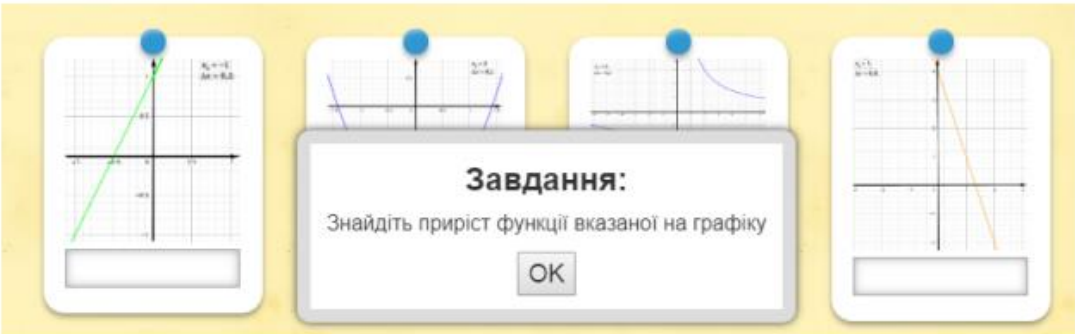


Рис. 3.2. Приріст за графіком

Завдання на використання однієї лише формули є доволі нескладним для класу з поглибленим вивченням математики, тому ми ускладнили його пошуком рівняння функції. Для зручності графіки функції можна збільшувати, як це показано на рисунку 3.3. У підручнику А. Г. Мерзляка та інших [16], подібних вправ немає, але вміння знаходити рівняння функції за її графіком важливе, його необхідно вміти застосовувати, тим паче вправи подібного типу можуть зустрітись на ЗНО.

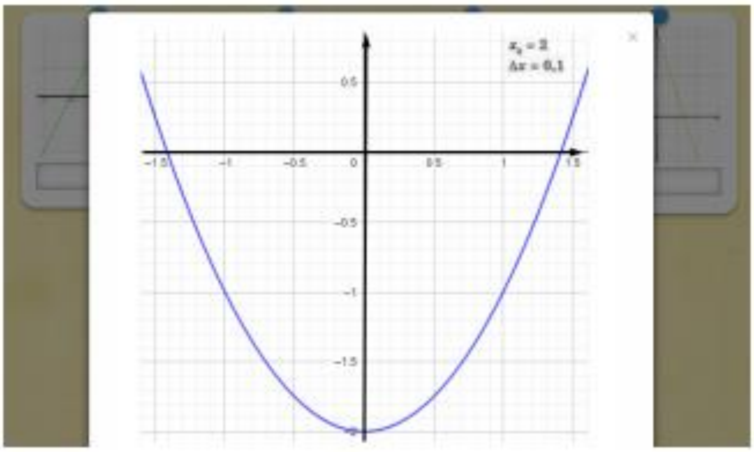


Рис. 3.3. Збільшений графік

Також ми пропонуємо комп'ютеризувати одну з задач, які приводять до означення похідної, наприклад задачу про дотичну до графіка функції, а саме відтворити рух точки по параболі. За допомогою математичного додатку GeoGebra [39] та інструменту «повзунок», ми розробили імітацію руху точки C, через яку проходить пряма OC, по графіку функції $y = x^2$, для якої OC – січна (рисунок 3.4). За допомогою додатку ми не перенавантажуємо малюнок зайвими елементами, і природно показуємо рух прямої по кривій. На малюнку також зафіксоване положення дотичної до графіка функції і трикутник, який допоможе учням побачити відношення якому дорівнює кутовий коефіцієнт.

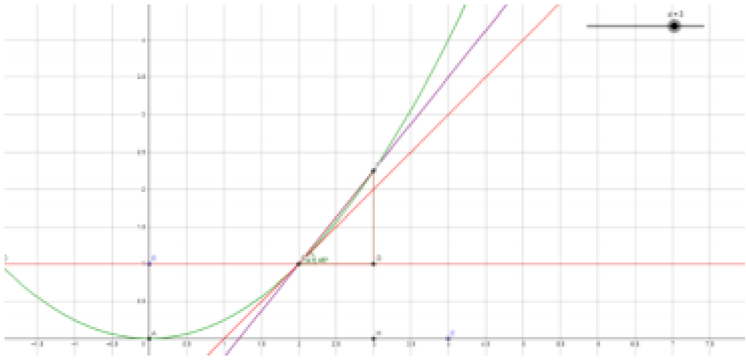


Рис. 3.4. Рух точки по параболі

Вчитель може не встигнути ознайомити учнів зі всіма задачами на уроці і виникає потреба обрати найбільш вдалий приклад, стосовно цього З.І. Слєпкань у своєму підручнику [32, с. 402] рекомендує перш за все надавати перевагу задачі про миттєву швидкість, аргументуючи це тим, що учнів вже знайомили з цим прикладом на уроках фізики, а вчителю математики залишається оформити розв’язання задачі в термінах і символах математики.

Поняття похідної функції є одним з найважливіших понять курсу алгебри і початків аналізу, оскільки це поняття є основним в диференціальному численні, тому необхідно створити умови для того, щоб учні досконало володіли означенням похідної та розуміли його зміст. При вивченні означення похідної учні іноді губляться і не можуть згадати, наприклад, що похідною функції в заданій точці є число, а не функція, саме тому для відпрацювання означення ми розробили вправу, яка робить акценти на так званих «крихких» моментах, в яких учні допускають помилки.

Як ми бачимо на рисунку 3.5, в означенні пропущені слова та учням потрібно заповнити пропуски дібравши потрібні слова. Дана вправа 3.5. сприяє запам’ятовуванню означення похідної функції в точці, її можна задавати у якості домашнього завдання, щоб учні звернули увагу на потрібні моменти, або на етапі актуалізації знань. Можливо використання подібного типу завдань на самостійній роботі, але вже не в інтерактивній формі.

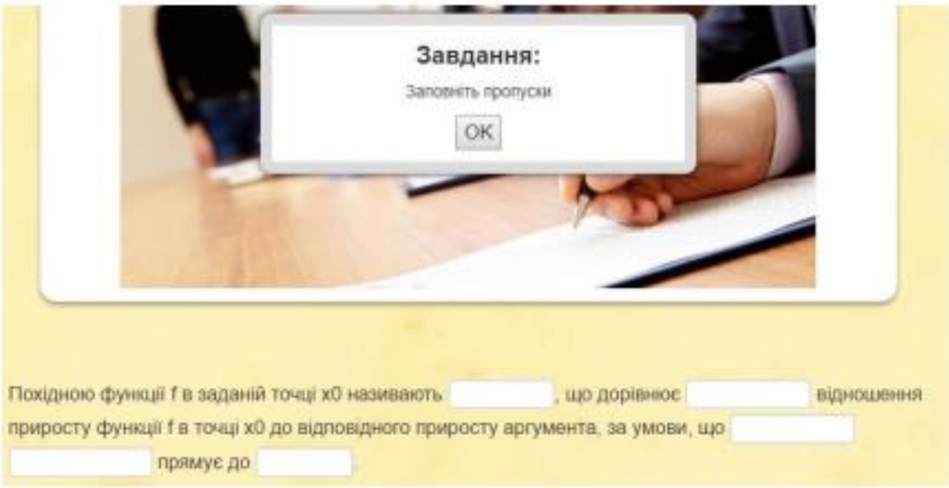


Рис. 3.5. Означення похідної

Після того, як учні розглянули знаходження похідної за допомогою означення, треба пояснити їм, що даний спосіб не завжди раціональний, і перейти до вивчення таблиці похідних (таблиця 1.1).

З метою формування дослідницької компетентності, як предметно-галузевої математичної компетентності, даний перехід можна здійснити дослідницьким шляхом, послідовно доводячи похідні. Але перед цим необхідно ввести означення функції диференційованої на проміжку і розмежувати, що коли похідну шукають у деякій точці, то вона як границя є певним числом, а якщо функція має похідну в кожній точці проміжку, то кожному значенню аргументу відповідає певне значення похідної.

Для вивчення таблиці похідних і правил обчислення похідних можна використовувати широкий спектр різноманітних інтерактивних вправ, наприклад, у формі вікторини з варіантами відповідей, за допомогою завдань на знаходження відповідностей чи вправ на пошук помилок у запропонованих рівняннях.

Вправи на знаходження відповідностей (рисунок 3.6) не тільки сприяють вивченню та закріпленню таблиці похідних, а й розвиває уважність, виховує наполегливість, не кажучи вже про інформаційну культуру.

Рис. 3.6. Знаходження похідної

Починати опрацювання похідних від складеної функції потрібно з представлення прикладів складових функцій, потім навчити дітей самостійно визначати зовнішню і внутрішню функції, а вже після цього формулювати правило відшукання похідної.

Треба сказати, що таблиця похідних вивчається не вся одразу, а по мірі вивчення правил обчислення похідних (рисунок 3.7).

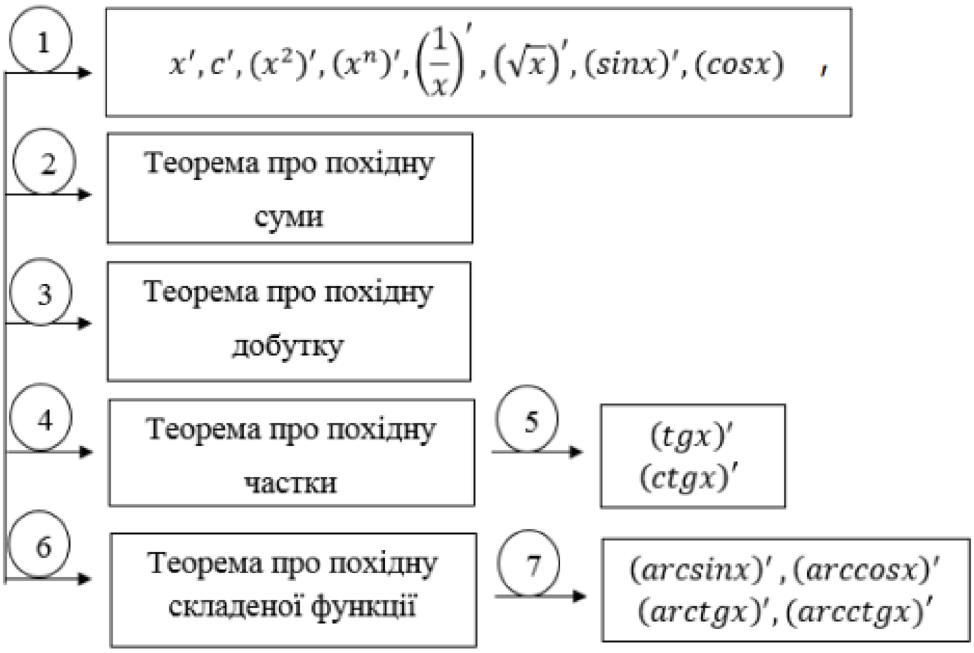


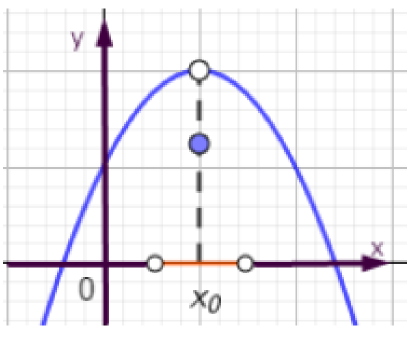
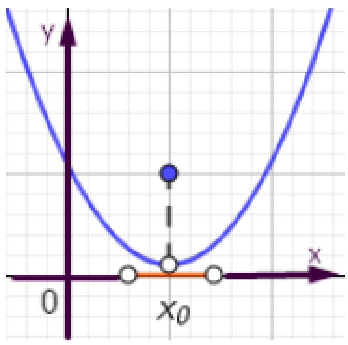
Рис. 3.7. Схема вивчення таблиці похідних

Дана послідовність вивчення обумовлена тим, що істинність деяких похідних доводиться не тільки за допомогою означення, а й за допомогою розглянутих теорем. Нами розроблена схема, з якої видно, що, наприклад, похідну від тангенсу можна вивести з теореми про похідну частки, а похідну арксинусу за теоремою про похідну складеної функції.

Перед тим, як розпочинати вивчати способи застосування похідної до дослідження функції, необхідно провести актуалізації знань та умінь, щоб в учнів не виникало труднощів при роботі з теоремами про зростання і спадання функції, точки екстремуму, екстремуми функції, найбільше і найменше значення на відрізку, опуклість функції. Так, наприклад, пригадати означення точок максимуму і мінімуму можна за допомогою розробленої нами таблиці 3.1.

Таблиця 3.1.

Точки екстремуму

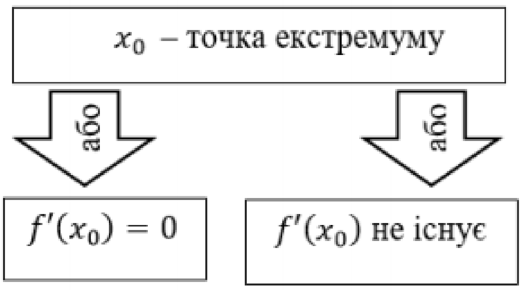
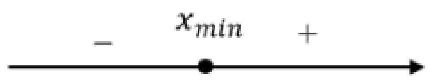
Точка мінімуму	**Точка максимуму**
Точку x_0 називають точкою мінімуму функції f, якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу виконується $f(x_0) \leq f(x)$.  $x_{min} = x_0$ – точка мінімуму $y_{min} = f(x_{min})$– мінімум	Точку x_0 називають точкою максимуму функції f, якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу виконується $f(x_0) \geq f(x)$.  $x_{max} = x_0$ – точка максимуму $y_{max} = f(x_{max})$ – максимум

Після формулювання зазначених теорем, необхідно скласти алгоритми пошуку точок екстремуму, найбільшого і найменшого значення функції на відрізку, проміжків опуклості функції та обов'язково запропонувати кілька прикладів закріплення цих алгоритмів.

Доцільно після опрацювання теоретичного матеріалу про точки екстремуму функції подати учням узагальнений матеріал у вигляді таблиці 3.2.

Таблиця 3.2.

Необхідна і достатня умови існування точок екстремуму

Необхідна умова	**Достатня умова**
В точках екстремуму похідна або не існує, або дорівнює нулю. 	Якщо при переході через точку x_0, у якій функція є неперервною: 1) похідна змінює знак з плюса на мінус, то x_0 – точка максимуму;  2) якщо похідна змінює знак з мінуса на плюс, то x_0 – точка мінімуму. 

Головне – це сформулювати разом з учнями алгоритм дослідження функцій за допомогою похідної та на конкретному прикладі показати суть кожного з пунктів, а також досягти послідовності їх виконання. Далі доцільно зробити акцент на розв'язуванні практичних завдань, оскільки з цим матеріалом в учнів можуть виникнути певні труднощі.

Після вивчення кожної нової теми необхідно розв'язувати різнорівневі завдання (початкового, середнього, достатнього і високого рівнів), а також завдання, які допоможуть закріпити новий і дадуть можливість повторити попередній матеріал, мотиваційні задачі та задачі, які допоможуть продемонструвати міжпредметні зв'язки.

На платформі LearningApps [40] є підготовлення система інтерактивних вправ (Додаток В), що можуть бути використані в різних формах навчальної діяльності, та які допоможуть вивчити означення теми, закріпити знання таблиці похідних, полегшити роботу з основними теоремами диферентіального числення.

Звісно, при навчанні учнів темі «Похідна та її застосування» не можна використовувати тільки інтерактивні вправи. Також іноді завдань з підручника може бути не достатньо, тому там також є розробленні тренувальні вправи (Додаток Б), які можна включати в зміст уроків та пропонувати учням до розв’язання та використовувати для відпрацювання і закріплення навичок і умінь. Дібрані тренувальні вправи доцільно можна пропонувати в якості домашнього завдання. Дібрали вправи на знаходження похідної за допомогою означення в заданій точці, на застосування таблиці похідних, правил обчислення похідних та диференціювання складеної функції, задачі на застосування геометричного змісту, основних теорем диференціального числення, вправи на застосування похідної для дослідження функції. Також окремо виділено задачі на розв’язування рівнянь, нерівностей та доведення тотожностей. Таким чином даний тренажер можна використовувати на уроках впродовж усієї теми «Похідна та її застосування». Оскільки добір задач і вправ для контрольних робіт має відбуватись не по номерам з підручника, а вимагає використання додаткових дидактичних матеріалів, то на поміч вчителю розроблено контрольні роботи з теми «Похідна та її застосування» (Додаток Г), які можна пропонувати учням, що навчаються на поглибленому рівні вивченні математики.

На сьогодні йде тенденція на впровадження ігор у навчальний процес, то актуально буде виділяти час на уроці для «ігрових хвилинок», наприклад цікава для учнів інтерпретація гри «Хто хоче стати мільйонером» на математичний лад, як показано на рисунку 3.8. Учням пропонуються питання з варіантами відповідей, при чому питання з рівневою диференціацією, тобто чим далі тим складніші завдання.

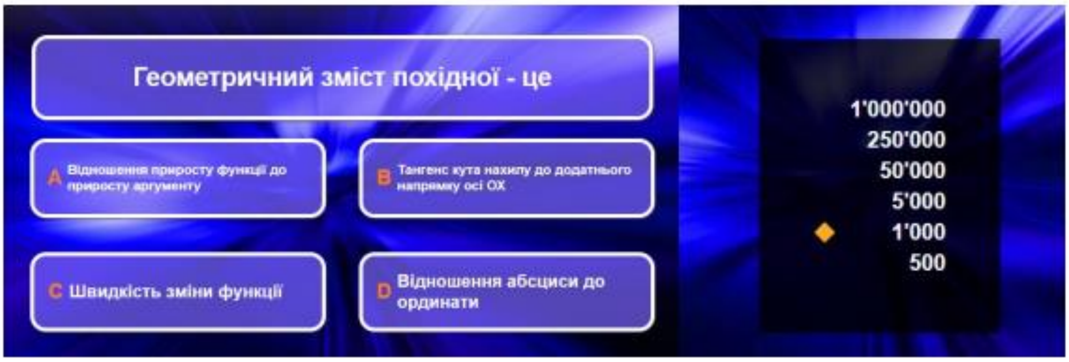


Рис. 3.8. Хто хоче стати мільйонером

На нашу думку, гра дає змогу легко привернути увагу й тривалий час підтримувати в учнів інтерес до тих важливих і складних предметів, властивостей і явищ, на яких у звичайних умовах зосередити увагу не завжди вдається. Багато вчителів сходяться з думкою, що ігрові технології мають місце бути в навчальному процесі. Вчитель математики А. В. Голич пише у своєму блозі, що виникнення зацікавленості до математики у значної кількості учнів залежить в більшій мірі від методики її викладання, від того, наскільки вдало буде побудована навчальна робота, не мала роль тут відводиться дидактичним іграм на уроках математики – сучасному і визнаному методу навчання і виховання, якому властиві навчальна, виховна і розвиваюча функції [5].

Пропонуємо наступну гру на пошук слів (рисунок 3.9.). Учням потрібно знайти основні поняття теми «Похідна та її застосування», але спочатку треба за означенням зрозуміти, про яке саме поняття йдеться мова, а потім шукати слова серед літер.

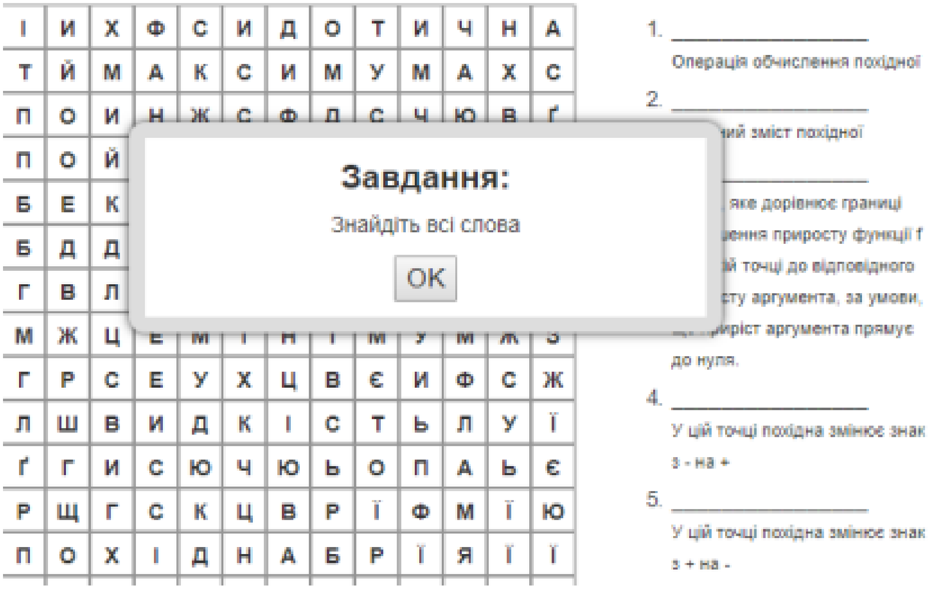


Рис. 3.9. Знаходження слів

Узагальнюючи вправи подібного типу є доцільними навіть при підготовці до контрольної роботи, оскільки вони можуть включати весь спектр теоретичного матеріалу та показати прогалини у знаннях. Таким чином учні дізнаються на що їм треба звернути увагу при підготовці до контрольної вдома.

Отже, існує багато способів формування математичної компетентності, і не останню роль в цьому процесі відіграють інформаційно-комунікаційні засоби, використання яких може забезпечити високий рівень наочності та, як результат, засвоєння матеріалу.

Розділ 4. Застосування похідної в різних сферах життя людини

4.1. Історичні відомості

Похідна - одне з фундаментальних понять математики. Воно виникло у 18 столітті. Незалежно один від одного І. Ньютон і Г. Лейбніц розробили теорію диференціального обчислення. [42]

Ісаак Ньютон (1643-1727) - один із творців диференціального обчислення. Головна його праця - "Математичні начала натуральної філософії" - надала колосальний вплив на розвиток природознавства, стала поворотним пунктом в історії природознавства. [42]

Ньютон ввів поняття похідної, вивчаючи закони механіки, тим самим розкрив її механічний зміст.

Г.В. Лейбніц (1646-1716) - творець Берлінської академії наук. Основоположник диференціального обчислення, ввів велику частину сучасної символіки математичного аналізу. [42]

Лейбніц дійшов до поняття похідної, вирішуючи завдання на проведення дотичної до довільної лінії, пояснивши цим її геометричний зміст. Справді, для будь-якої функції $y = f(x)$ в системі координат, на її області визначення можна побудувати графік. Якщо взяти точку на осі абсцис то, відповідно до цієї точки можна знайти точку на графіку функції. У цій точці може бути побудована дотична, яка утворює з додатним напрямом осі абсцис кут β. [42]

Але це не означає те, що до них ці питання не вивчалися. Задовго до цього *Архімед* (287 до н.е. – 212 до н.е) не тільки вирішив задачу на побудову дотичної до такої складної кривої, як спіраль, застосовуючи при цьому граничні переходи, а й зумів знайти максимум функції. [42]

Частково поняття дотичної зустрічалося в роботах італійського математика *І. Тарталья* (1499-1557). [42]

У 17 ст. на основі вчення *Г. Галілея* (1564-1642) активно розвинулася кінематична концепція похідної. Поняття похідної зустрічається вже у *Р. Декарта* (1596-1650), французького математика *Ж. Роберваля* (1602-1675), англійського вченого *Д. Грегорі* (1638-1675), в роботах *І. Барроу* (1630-1677). [42]

Великий внесок у вивчення диференціального обчислення внесли *Лопіталь* (1661-1704), *Бернуллі* (1744-1807), *Лагранж* (1736-1813), *Гаусс* (1777-1855), *Коші* (1789-1857). Необхідно сказати, що ні Ньютон ні Лагранж не дали чіткого визначення похідної. Вперше визначення похідної було сформульовано Коші, і саме це визначення стало загальноприйнятим і в даний час використовується майже у всіх курсах аналізу. [42]

4.2. Похідна в прикладних задачах.

Приділимо увагу прикладним задачам на застосування похідної, а саме, на знаходження найбільшого і найменшого значень функції та прикладним задачам на застосування похідної до дослідження функції за загальною схемою на основі якого будується її графік.

Діючими навчальними програмами з курсу алгебри і початків аналізу всіх рівнів [20]-[23] в темі ”Похідна та її застосування” передбачено навчання учнів розв’язування прикладних задач на знаходження найбільших і найменших значень реальних величин.

Аналізуючи шкільні підручники курсу алгебри і початків аналізу старшої профільної школи можна дійти висновку, що задачі на знаходження найбільшого (найменшого) значень функції, пропонуються в кожному з них, зокрема в [1], [16], [18], [25], але переважна більшість задач має геометричний та алгебраїчний зміст. Лише окремі з них відносяться до задач прикладного характеру.

Окремі питання методики навчання учнів розв’язування прикладних задач на знаходження найбільшого і найменшого значень функції методом диференціального числення розглядають М. Вайнтрауб, Г. Дутка, С. Григулич, А. Парафійник, В. Стасюк, І. Стрельченко, О. Стрельченко та ін. Автори статей зосереджують увагу на задачах з економічним змістом.

Проведено ряд дисертаційних досліджень, серед яких дослідження Г. Дутки, Л. Соколенко, Ю. Ткач та ін., у яких, серед інших питань, розглядаються питання методики навчання учнів розв’язування прикладних задач, призначених для вивчення застосувань похідної.

4.3. Застосування фізичного змісту похідної при розв’язанні фізичних задач

Похідна у фізиці дуже широко використовується. Розглянемо кілька прикладів застосування похідної в фізичних задачах.

4.3.1. Похідна в механіці

Механічний рух - це зміна положення тіла в просторі відносно інших тіл з плином часу. Основною характеристикою механічного руху є швидкість.

Розглянемо алгоритм знаходження швидкості тіла за допомогою похідної.

Якщо закон руху тіла заданий рівнянням $s = s(t)$, то для знаходження миттєвої швидкості тіла в який-небудь певний момент часу треба:

1. Знайти похідну $s'' = f''(t)$.

2. Підставити в отриману формулу задане значення часу.

Задача. Автомобіль наближається до мосту зі швидкістю 72 км/год. Біля мосту стоїть дорожній знак «36 км/год». За 7 сек до в'їзду на міст, водій натиснув на гальмівну педаль. Чи заїде на міст з дозволеною швидкістю автомобіль, якщо гальмівний шлях визначається формулою $s = 20t - t^2$?

Розвязання:

$$v(t) = s'(t) = 20 - 2t$$

Далі обчислимо швидкість автомобіля, яка буде через 7 секунд:

$$v(7) = 20 - 2 \cdot 7 = 20 - 14 = 6\ (\text{м/с})$$

$$6\ \text{м/с} = 21{,}6\ \text{км/год.}$$

Відповідь: Так, тому що швидкість через 7 сек. буде дорівнювати 21,6 км/год. [42]

Задача. Вантажівка, яка на початку руху знаходиться в точці ***B*** (рис.4.1) і прямує до пункту ***D*** по шосе зі швидкістю *60 км/год*, порушує правила дорожнього руху. На початку руху полем патрульний мотоцикл, який знаходиться в пункті ***A***, що за 2 км від шосе, може розвивати швидкість до *40 км/год*. А на шосе швидкість мотоцикла складає *80км/год.* Під яким кутом φ до напрямку ***AB*** слід виїхати патрульному мотоциклу, щоб якомога швидше наздогнати вантажівку? За який мінімальний час патруль наздожене порушника?

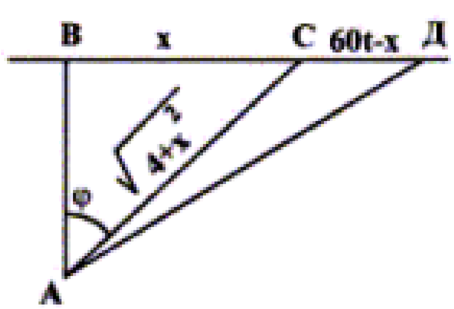


рис.4.1

Розв'язання. Геометричною моделлю даної задачі є прямокутний трикутник *ABD* , в якому ***A*** - точка за 2км від шосе, в якій знаходиться патруль, ***B*** - точка з якої виїжджає вантажівка, ***C*** - точка в яку повинен потрапити патрульний мотоцикл, щоб якомога скоріше наздогнати вантажівку, ***D*** - точка на шосе в якій мотоцикл наздожене вантажівку. Нехай ця подія відбудеться через *t* годин. За цей час порушник проїде відстань *60t* км , а патруль

$$AC + CD = \left(\sqrt{4 + x^2} + (60t - x)\right) \text{ км},$$

де *C* - точка на шосе, *BC = x*. Оскільки на проміжку *AC* швидкість патрульного мотоцикла *40 км/год ,* а на проміжку *CD - 80 км/год ,* то на весь шлях він витратить $\left(\frac{\sqrt{4+x^2}}{40} + \frac{60t-x}{80}\right)$ годин, що дорівнює часу *t* .

Отже, маємо $t = \frac{\sqrt{4+x^2}}{40} + \frac{60t-x}{80}$, звідки $t = \frac{\sqrt{4+x^2}}{10} + \frac{x}{20}$. Тобто цільовою функцією даної задачі є функція $t(x) = \frac{\sqrt{4+x^2}}{10} + \frac{x}{20}$, де $x > 0$.

Дослідимо її на найменше значення. Знайшовши похідну функції *t(x)* та виконавши необхідні тотожні перетворення, будемо мати

$t'(x) = \frac{x}{10\sqrt{4+x^2}} + \frac{1}{20}$. Розв'язавши рівняння $\frac{x}{10\sqrt{4+x^2}} + \frac{1}{20} = 0$ з'ясовуємо, що дана функція, яка визначена на множині додатних чисел, має єдину критичну точку $x_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Оскільки друга похідна $t'(x) = \frac{2}{5(4+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ додатна, зокрема і в точці $x_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$, то на основі достатньої ознаки екстремуму функції (в термінах другої похідної) можна стверджувати, що точка $x_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$ є точкою мінімуму функції *t(x)* на проміжку *(0;+∞)* , то в ній функція *t(x)* набуває найменшого значення $t\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{10} \approx 0{,}17(\text{год}) \approx 10{,}2(\text{хв})$. З прямокутного трикутника *ABC* маємо: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Звідси $\varphi = \frac{\pi}{6} = 30°$.

Отже, якщо патрульний мотоцикл виїде під кутом $30°$ до напряму *AB* , то він наздожене порушника за найкоротший час, що дорівнює 10,2 хв.

Відповідь. $\varphi = 30°,\ t = \frac{\sqrt{3}}{10} \approx 0{,}17(\text{год}) \approx 10{,}2(\text{хв})$.

4.3.2. Похідна в електротехніці

У наших будинках, на транспорті, на заводах: усюди працює електричний струм. Під електричним струмом розуміють спрямований рух вільних електрично заряджених частинок. Кількісною характеристикою електичного струму є сила струму.

У ланцюзі електричного струму електричний заряд змінюється з плином часу за законом $q = q(t)$. Сила струму *I* є похідною заряду q по часу

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t} = q'(t)$$

В електротехніці в основному використовується робота змінного струму. Електричний струм, що змінюється з часом називають змінним. Ланцюг змінного струму може містити різні елементи: нагрівальні прилади, котушки, конденсатори. Отримання змінного електричного струму засноване на законі електромагнітної індукції, формулювання якого містить похідну магнітного потоку.

Задача. Заряд, що протікає через провідник, змінюється за законом

$$q = \sin \cdot (2t - 10)$$

Знайти силу струму в момент часу *t = 5* сек.

Розв'язання:

Знайдемо похідну q.

$$q' = \cos(2t - 10) \cdot 2 = 2\cos(2t - 10)$$

Згідно з умовами задачі, *t* дорівнює 5 секундам, отже:

$$q' = 2\cos(2 \cdot 5 - 10) = 2\cos 0 = 2(A)$$

Відповідь: Сила струму *I* дорівнює 2 (А). [42]

4.4. Розв’язання хімічних і біологічних задач за допомогою похідної

4.4.1. Похідна в хімії

І в хімії знайшло широке застосування диференціальне числення для побудови математичних моделей хімічних реакцій і подальшого опису їх властивостей.

Хімія - це наука про речовини, про хімічні перетворення речовин. Хімія вивчає закономірності перебігу різних реакцій.

Отже, як же саме використовують похідну в хімії?

Наприклад, інженерам-технологам при визначенні ефективності хімічних виробництв, хімікам, які розробляють препарати для медицини і сільського господарства, а також лікарям і агрономам, які використовують ці препарати для лікування людей і для внесення їх в грунт. Одні реакції проходять практично миттєво, інші йдуть дуже повільно. Тому в реальному житті для вирішення виробничих завдань у медичній, сільськогосподарській та хімічній промисловості просто необхідно знати швидкості реакцій хімічних речовин.

Швидкістю хімічної реакції називається зміна концентрації реагуючих речовин в одиницю часу або похідна від концентрації реагуючих речовин за часом (на мові математики концентрація була б функцією, а час – аргументом).

Якщо $P\ (t)$ - закон зміни кількості речовини, що вступив в хімічну реакцію, то швидкість $v\ (t)$ хімічної реакції в момент часу t дорівнює похідній:

$$V\ (t)\ =\ p\,'(t)$$

Задача. Нехай кількість речовини, що вступили в хімічну реакцію, задаються залежністю: $\mathrm{p}\ (t)\ =\ t2\ /\ 2\ +\ 3t\ -3$ (моль). Знайти швидкість хімічної реакції через 3 секунди.

Розв’язання: Знайдемо похідну даної функції:

$$p\,'(t)\ =\ t\ +\ 3$$

Підставами значення часу 3 с в похідну:

$$p\,'(3)\ =\ 3\ +\ 3\ =\ 6\ (\text{моль / с})$$

Відповідь: 6 моль в секунду. [42]

Задача. *(для самостійного розв’язання)*. Концентрація сахарози (виражена в моль/л) в момент часу t (час виражено в хв) задається формулою $f(t) = e^{-0{,}0035t}$, де $t \geq 0$. Дослідіть функцію $f\ (t)$ і побудуйте її графік в прямокутній системі координат, вибравши такі одиниці вимірювань: 1 см для 20 хв на осі абсцис, 1 см для 0,1 моль/л на осі ординат. Визначте час, необхідний для того, щоб концентрація досягла половини свого початкового значення. Підтвердіть результат графічно. *Відповідь.* 1316 хв ≈ 21,9 год.

4.4.2. Похідна в біології

Популяція - це сукупність особин даного виду, що займають певну ділянку території всередині ареалу виду, що вільно схрещуються між собою і частково або повністю ізольованих від інших популяцій, а також є елементарною одиницею еволюції.

Ефективна чисельність популяції – це сукупність особин, які беруть участь у відтворенні потомства (Ne).

Щільність популяції – це чисельність популяції на одиницю площі.

Формула Ферсхюльца: $N1 = (Ne - К_{\text{смерт}})\,(К_{\text{народж}} + N0)$

Швидкість чисельності популяції: $v(t) = N'(t)$

Задача. Розрахуйте на підставі наявних даних, як буде змінюватися щільність популяції синиць через рік і 2 роки, якщо щільність синиць становить 260 особин/га. За період розмноження з однієї кладки яєць в середньому виживає 3 пташенята. У популяції рівне число самців і самок. Смертність синиць постійна, в середньому за рік гине 27 особин. Знайти швидкість росту чисельності популяції в рік.

Розв'язання: За умовою щільність популяції $N0 = 260\,\text{особин/га}$. У популяції рівне число самців і самок, а значить ефективна чисельність популяції дорівнює 100.

$$Ne = 100\%, \text{тоді}\ Ne = 1$$

Коефіцієнт смертності: $К_{\text{смерт}} = К_{\text{смерт}} = 27\% = 0{,}27$

За рік 130 пар дає 390 пташенят, тобто $(260 \div 2) \cdot 3 = 390$

$N1 = \left(Ne - К_{\text{смерт}}\right)\left(К_{\text{народж}} + N0\right) = (1 - 0{,}27)(390 + 260) = 474$ особин всього за 1-ий рік N1

Відносний приріст чисельності популяції $\Delta N = 474/260 = 1{,}82$ рази.

Тоді чисельність популяції буде визначатися функцією:

$N = 260 \cdot 1{,}82t,$ де $t = 1{,}2, \ldots$

Знайдемо тоді швидкість росту чисельності популяції:

$v(t) = N'(t) = (260 \cdot 1{,}82t)' = 260 \cdot (1{,}82t)' = 260 \cdot 1{,}82t \cdot \ln 1{,}82$ (особин/рік)

$N(1) = 260 \cdot 1{,}82 \cdot t = 260 \cdot 1{,}82 = 474$ особини

$N(2) = 260 \cdot 1{,}82 \cdot 2 = 260 \cdot 3{,}3124 = 861$ особина.

Відповідь: $260 \cdot 1{,}82t \cdot \ln 1{,}82$ особин/рік. [42]

Задача. *(для самостійного розв'язання)*. Кількість хворих *p(t)* під час епідемії грипу змінювалась з часом t (вимірюється днями) від початку вакцинації населення за законом $p(t) = \frac{200t}{t^2+100}$. Визначте час максимуму захворювання, інтервали його зростання і спадання та побудуйте графік заданої функції.

Відповідь. $t = 10$ днів.

Задача. *(для самостійного розв'язання)*. З допомогою графіків зобразіть процеси неперервного зростання чисельності популяції з нульового моменту часу, задані за допомогою таких функцій:

$$a)\ P(t) = 90 + 10t^2; \qquad b) P(t) = 10e^{\frac{t}{10}}.$$

4.5. Розв'язання задач з географічним, економічним змістом

4.5.1. Похідна в географії

Ідея соціологічної моделі Томаса Мальтуса полягає в тому, що приріст населення пропорційний числу населення в даний момент часу *t* через $N\ (t)$. Модель Мальтуса непогано діяла для опису чисельності населення США з 1790 по 1860 роки. Нині ця модель в більшості країн не діє.

Виведемо формулу для обчислення кількості населення на обмеженій території в момент часу *t*.

Нехай $\text{у} = \text{у}\ (t)$ - чисельність населення.

Розглянемо приріст населення за $t = t - t_0$

$$y = k\, y\, t,$$

де k - коефіцієнт приросту (н - коефіцієнт народжуваності, с - коефіцієнт смертності)

$$y\ /\ t = k\, y$$

При t_0 отримаємо $lim\, y\ /\ t\ =\ $ y "

$$\text{y}\,''=\ \text{y}$$

У багатьох прикладних задачах роль математичної моделі відіграють *трикутники.* Задачі цього виду також бувають різних рівнів складності. Включаючи їх у процес навчання, слід правильно установити послідовність задач за принципом "від простого до складного" з урахуванням індивідуальних особливостей і можливостей учнів. Необхідно дотримуватися розумної різноманітності задач у системі. Пропонуємо декілька задач названого типу.

Задача. Чотири населених пункти, розташовані у вершинах квадрата ABCD (рис. 4.2), з'єднані системою доріг. При якому х сумарна довжина доріг мінімальна, якщо сторона квадрата дорівнює 20 км?

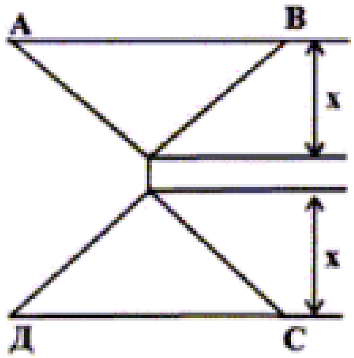


рис.4.2

Розв'язання. Проаналізувавши рисунок 4.2 з'ясовуємо, що система доріг складається з 4-х однакових ділянок, довжиною $\sqrt{100+x^2}$ км , та п'ятої ділянки, довжиною $(20-2x)$ км.

Отже, цільова функція, що визначає сумарну довжину доріг

$$S(x)=4\sqrt{100+x^2}+20-2x,\ \text{де}\ x\ \epsilon\ [0;10]$$

Дослідимо її на найменше значення. Знайшовши похідну функції S та виконавши необхідні тотожні перетворення, будемо мати

$$S(x)=\frac{4x-\sqrt{100-x^2}}{\sqrt{100-x^2}}$$

Розв'язавши рівняння $4x-\sqrt{100-x^2}=0$, з'ясовуємо, що дана функція, яка визначена на множині додатних чисел, має єдину критичну точку $x=\frac{10}{\sqrt{3}}$.

Оскільки при переході через цю точку знак похідної змінюється з ”-” на ”+”, то на основі достатньої умови існування екстремуму в точці, робимо висновок, що точка $x=\frac{10}{\sqrt{3}}$ є точкою мінімуму функції S .

Виходячи з єдності такої точки на відрізку [0;10] , можемо стверджувати, що в ній функція *S(x)* набуває найменшого значення.

Відповідь. При $x=\frac{10}{\sqrt{3}}$ сумарна довжина доріг є мінімальною.

4.5.2. Похідна в економіці

Сучасний економіст повинен добре володіти кількісними методами аналізу. До такого висновку неважко дійти практично з самого початку вивчення економічної теорії. При цьому важливі як знання традиційних математичних курсів (математичний аналіз, лінійна алгебра, теорія ймовірностей), так і знання, необхідні безпосередньо в практичній економіці і економічних дослідженнях (математична і економічна статистика, теорія ігор, економетрика та ін.).

Математика є не тільки знаряддям кількісного розрахунку, але також методом точного дослідження. Вона служить засобом гранично чіткою і ясною формулювання економічних понять і проблем.

Ф. Енгельс свого часу зауважив, що "лише диференціальне числення дає природознавства можливість зображати математично не тільки стану, але і процеси: рух" [9]. Тому метою даної роботи було дослідити застосування похідної при рішенні різних видів завдань з економічної теорії.

Економіка - основа життя, а в ній важливе місце займає диференціальне числення – апарат для економічного аналізу. Базова задача економічного аналізу – вивчення зв'язків економічних величин у вигляді функцій.

Похідна вирішує важливі питання.

В якому напрямку зміниться дохід держави при збільшенні податків або при введенні мита?

Збільшиться чи зменшиться виручка фірми при підвищенні ціни на її продукцію?

Для вирішення цих питань потрібно побудувати функції зв'язку входять змінних, які потім вивчаються методами диференціального обчислення.

Також за допомогою екстремуму функції (похідної) в економіці можна знайти найвищу продуктивність праці, максимальний прибуток, максимальний випуск і мінімальні витрати.

Тому, похідна важлива для економіки, і ми розглянемо основні аспекти.

Економічний додаток похідної.

В економічній теорії використовується поняття «маржинальний», тобто «граничний». Введення поняття в XIX столітті дозволило створити новий інструмент опису економічних явищ, за допомогою якого стало можливо вирішувати наукові проблеми. Економічна теорія Сміта мала справу з середніми величинами: середня ціна, середня продуктивність праці. Але склався інший підхід. Істотні закономірності можна виявити і в області граничних величин. Граничні величини характеризують не стан, а зміна економічного об'єкта. Отже, похідна виступає як інтенсивність зміни економічного об'єкта. [42]

Задача. (тип №1)

Розглянемо ситуацію: нехай y - витрати виробництва, а x - кількість продукції, тоді x_1- приріст продукції, а y_1 - приріст витрат виробництва.

В цьому випадку похідна виражає граничні витрати виробництва і характеризує наближено додаткові затрати на виробництво додаткової одиниці продукції, де:

MC - граничні витрати (marginal costs);

TC - загальні витрати (total costs);

Q – кількість [42]

(тип № 2) *Продуктивність праці*

Через похідну можна визначити і продуктивність праці:

Нехай функція $u = u(t)$ висловлює кількість виробленої продукції *u* за час *t*. Необхідно знайти продуктивність праці в момент t_0.

За період часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ кількість виробленої продукції зміниться від значення $u_0 = u(t_0)$ до значення $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$.

Тоді, середня продуктивність праці за цей період часу

$$Z_{\text{ср}} = \Delta u : \Delta t.$$

Очевидно, що продуктивність праці в момент to можна визначити як граничне значення середньої продуктивності за період часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$, тобто

$$z = lim\, Z_{\text{ср}} = lim\, \Delta u / \Delta t = u''(t) \text{ при } \Delta t \to 0 \quad [42]$$

(тип №3) *Завдання з економічної теорії.*

Підприємство виробляє X одиниць деякої однорідної продукції в місяць. Встановлено, що залежність фінансових накопичення підприємства від обсягу випуску виражається формулою

$$f(x) = -0,02x^3 + 600x - 1000.$$

Дослідити потенціал підприємства.

Функція досліджується за допомогою похідної. Отримуємо, що при $X = 100$ функція досягає максимуму [42].

Висновок: фінансові накопичення підприємства зростають зі збільшенням обсягу виробництва до 100 одиниць, при х = 100 вони досягають максимуму і обсяг накопичення дорівнює 39000 грошових одиниць. Подальше зростання виробництва призводить до скорочення фінансових накопичень [42].

Таким чином, завдання, які вирішуються за допомогою похідної, широко використовуються у виробництві.

Задача. Для будівництва будинку прямокутної форми, зображеного на плані (рис.4.3) темним прямокутником, з площею 400 м 2 відведено ділянку у вигляді прямокутника, межі якої повинні знаходитись від будинку на відстані 36 і 16 м. Які розміри потрібно надати будинку, щоб площа ділянки ABCD була найменшою?

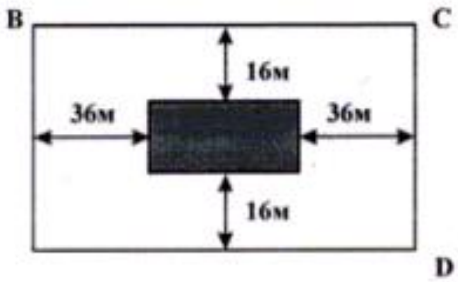


рис.4.3

рис.4.4

Розв'язання. В задачі необхідно визначити довжину і ширину прямокутника, що має площу 2 400м , який розташований в середині площини прямокутника *ABCD* , так що площа прямокутника *ABCD* буде найменшою. Сторони прямокутників взаємно паралельні і відстоять одна від іншої на 16м і 36м відповідно. Позначимо довжину прямокутника x, а ширину - y. Його площа $xy = 400$, звідки $y = \frac{400}{x}$. Площа прямокутника ABCD дорівнює $(72 + x)(32 + y) = (72 + x)\left(32 + \frac{400}{x}\right)$.

Отже, маємо *цільову функцію* $S(x) = (72 + x)(32 + \frac{400}{x})$, де $x > 0$.

Дослідимо її на найменше значення. Знайшовши похідну функції S і розв'язавши рівняння $32 - \frac{28800}{x^2} = 0$, з'ясуємо, що дана функція, яка визначена на множині додатних чисел, має єдину критичну точку $x = 30$. Оскільки при переході через цю точку знак похідної змінюється з ”-” на ”+”, то на основі достатньої умови існування екстремуму в точці, робимо висновок, що точка $x = 30$ є точкою мінімуму функції S . Виходячи з єдності такої точки на інтервалі $(0; +\infty)$, можемо стверджувати, що в ній функція $S(x)$ набуває найменшого значення: $S(30) \approx 4620$. Отже, для того щоб площа ділянки була найменшою, будинок повинен мати розміри 30 м $\times 13\frac{1}{3}$ м .

Відповідь: 30 м $\times 13\frac{1}{3}$ м.

Пропонуємо наступну прикладну задачу, геометричною моделлю якої є прямокутник, для самостійного розв'язування.

Задача. Довжина всіх стін промислової будівлі (рис. 4.4), включаючи перегородки (капітальні), складає 90 м. У будівлі розміщуються три цехи (№1, №2, №3) і коридор, довжина якого в 5 разів більша, ніж ширина. Ширина цеху №3 відноситься до довжини коридору, як *3:5*. Які повинні бути вибрані розміри будівлі, щоб сума площ трьох цехів була найбільшою?

Вказівка. Позначте ширину коридору *x*, тоді його довжина - *5x*, а довжина цеха №3 - *3x*. Ширину цеха №3 позначте *y*. Визначте суму довжин стін промислової будівлі, включаючи перегородки (капітальні). Врахуйте, що сума площ трьох цехів дорівнює різниці площі всієї будівлі і площі коридору. В результаті одержите цільову функцію $S(x) = 180x - 45x^2$, де $x > 0$.

Відповідь. 16м $\times$ 12,5м.

Висновок: Економічний додаток похідної допомагає як економістам і бізнесменам, так і звичайним громадянам в розпорядженні бюджетом. [42]

4.6. Використання методу проєктів до теми: «Похідна та її застосування»

Метод проєктів виник у 20-ті роки ХХ ст. у США. Цей метод не є зовсім новим у світовій педагогіці. Спочатку його називали *«методом проблем»* і розвивався та зростав він у філософії та освіті, в педагогічних поглядах та експериментальній роботі Джона Дьюї. Він містив ідеї побудови навчання на активній та постійній основі через раціональну діяльність здобувача освіти у відношенні з його особистісним інтересом саме в цих знаннях. Дуже важливо було розкрити в дитині її особисту зацікавленість у здобутті даних знань, де саме і яким чином вони їй знадобляться у власному житті. Проблема повинна бути взята з реального життя, знайома і важлива для дитини. Для її розв'язання даної проблеми учневі необхідно застосувати отриманні знання або ті, що їх лише треба здобути. [28]

Робота над проєктом включає в себе те, щоб учень усвідомлював її мету, задум, розробку та оформлення плану, працювати за цим планом, а також підбити підсумки у вигляді письмового або електронного звіту.

Проєктне навчання формує мотивацію до творення самого себе, тому його можна вважати проблемним і розвивальним.

Перевагами даного методу проєктів є те, що цей метод поєднує в себе такі компоненти:

- теорія з практикою, а саме пошуково-творча діяльність учнів;

- навчання і виховання дитини у співвідношенні життя і навколишнього середовища.

Залучення здобувачів освіти до проєктної діяльності насамперед спрямоване на:

- досягненні конкретних цілей (тобто, розвиток критичного мислення, яке так необхідне людині протягом життя, творчого та проєктного мислення, стимулюється та зростає мотивація на оволодіння необхідних знань, учні навчаються бути і стають більш самостійними, навчаються працювати не лише з підручниками, але й з різними джерелами інформації з метою формування вмінь та використовувати їх для вирішення нових пізнавальних завдань або різних життєвих ситуацій);

- розвиток компетенцій, які обов'язково знадобляться у дорослому житті (спільне прийняття рішень, тобто навчаться працювати в команді; толерантне та спокійне вирішення конфліктних ситуацій тощо);

- формування умінь дослідження навколишнього середовища (в першу чергу виявлення, а потім формулювання даної проблеми, висунення припущення щодо даної проблеми, збирання необхідної інформації та її використання у різних видах дослідницької роботи, аналіз та узагальнення отриманих результатів тощо). Проєктна технологія дозволяє учням розширити самоосвіту, змінити ставлення до конкретного предмета, навчитися визначати в чому полягає проблема та розв'язувати її, зростати у моральному, інтелектуальному, творчому, організаційному плані. [33]

Можна і треба визначити такі етапи роботи над проєктом:

1. Пошуковий – визначається тема проєкту, шукається та аналізуються проблеми, висовуються різні припущення, визначається мета, обговорюються методи їх дослідження.

2. Аналітичний – аналізується знайдена інформація. Знаходиться оптимальний спосіб дослідження мети проєкту, будується алгоритм діяльності. Поетапно планується робота.

3. Практичний – виконується заплановані етапні кроки.

4. Презентаційний – оформлюється остаточні результати та готується оформлення презентації та проєкт „захищають" .

5. Контрольний – аналізуються результати, коректують, якщо в цьому є необхідність та оцінюється якість проєкту, рефлексія. [12]

Для закріплення теми: «Похідна та її застосування» буде доцільно та цікаво використати метод проєктів, а саме розроблення учнями проєкту на тему: «Похідна навколо нас».

За даною схемою можна орієнтовно оформити проєкт:

1 етап. Вибираємо напрям і формуємо назву проєкту, вибираємо коло пов'язаних з даною темою питань; визначаємо, тобто виділяємо загальний напрям або пріоритетні напрямки, оформлюємо все.

2 етап. Пишемо назву проєкту. Далі створюємо *розділи проєкту:*

1. Актуальність, необхідність, значущість обраного напряму (чому саме цей).

2. Мета та завдання проєкту, вони можуть бути:

а) довготривалі: коли створюється щось нове (за структурою або підходами); використовуються нові технології та методики; визначаються очікувані результати;

б) короткодіючі: коли визначається конкретна мета, завдання на визначений період.

3. Визначення етапів реалізації проєкту:

а) обов'язково зазначаються терміни початку і закінчення проєкту;

б) закінчення проєкту визначається його реалізацією;

в) зазначаються часові інтервали для кожного етапу.

4. Процедура реалізації проєкту. Треба зазначити – Як? Яким чином? Та за допомогою яких засобів буде реалізовано даний проєкт?

5. Відповідальність учасників щодо реалізації проєкту: треба вказати хто відповідає за проєкт? хто і за що відповідає всередині проєкту? хто допомагає в реалізації даного проєкту?

6. Очікувані результати, тобто, які конкретні результати ви очікуєте отримати на кожному з етапів та після завершення проєкту?

7. Оцінювання та самооцінювання проєкту. [33]

Вважається, що при спільній діяльності під час роботи над проєктом в молодших та старших учнів формуються такі якості, як **уміння працювати в колективі**, **брати відповідальність за свій вибір** та власне рішення, **розділяти відповідальність ще з кимось**, **аналізувати результати діяльності та робити висновки**, **підкоряти свій характер та темперамент**, задля інтересів до спільної справи. Досвід роботи вчителів, які використовують цей метод проєктів показує, що учні є активними учасниками процесу створення проєкту, вміють або навчаються виробляти свій власний погляд на отриману інформацію, визначають мету й задачі, шукають шляхи їхнього розв'язування.

На сьогоднішній день, метод проєктів вважають одним з найперспективніших методів навчання, оскільки він створює умови для творчої і не лише самореалізації тих, хто навчається; підвищує мотивацію до навчання, адже учні наочно бачать де можна використати дані знання; сприяє розвитку інтелектуальних та мовленнєвих здібностей; дозволяє залучити кожного учня до активного процесу пізнання навколишнього світу; формує навички пошуково – дослідницької діяльності; виявляє нові здібності дітей у груповій співпраці, набуваючи комунікативних умінь; допомагає грамотно та якісно працювати з інформацією. [37]

Зразок прєкту

Тема проєкту: «Похідна навколо нас»

Учасники проєкту: Учні 10 класу

Термін реалізації проєкту: 2 тижні

Результат: захист проєкту

Завдання для груп (у кожній групі по 2-3 людини, залежно від наповнюваності класу):

Група №1: Збирає інформацію про історичні відомості щодо похідної (можна використовувати підручники, довідники, джерела Інтернету). Оформлює звіт про виконану роботу (електронний варіант). Готується до захисту проєкту та захищає його у форматі презентації.

Група №2: Збирає інформацію про теоретичні відомості щодо похідної (можна використовувати підручники, довідники, джерела Інтернету). Оформлює звіт про виконану роботу (електронний варіант). Готується до захисту проєкту та захищає його у форматі презентації.

Група №3: Збирає інформацію про застосування фізичного змісту похідної при розв'язанні фізичних задач (можна використовувати підручники, довідники, джерела Інтернету). Оформлює звіт про виконану роботу (електронний варіант). Готується до захисту проєкту та захищає його у форматі презентації.

Група №4: Збирає інформацію про застосування похідної при розв'язанні біологічних та хімічних задач (можна використовувати підручники, довідники, джерела Інтернету). Оформлює звіт про виконану роботу (електронний варіант). Готується до захисту проєкту та захищає його у форматі презентації.

Група №5: Збирає інформацію про застосування похідної при розв'язанні географічних і економічних задач (можна використовувати підручники, довідники, джерела Інтернету). Оформлює звіт про виконану роботу (електронний варіант). Готується до захисту проєкту та захищає його у форматі презентації.

Висновки

Тема «Похідна та її застосування» доволі складна для розуміння учнів, саме тому вона повинна мати високий рівень наочності, чого можна досягти за допомогою використання інтерактивних вправ. Треба зазначити, що для розвитку сучасних школярів недостатньо традиційної системи навчання, а є необхідним використання поряд з традиційними новітніх методів та засобів навчання. Тому впровадження інформаційно-комунікаційних технологій під час навчання учнів старших класів на сьогоднішній день є однією з умов ефективності освітнього процесу [7].

Використання інформаційно-комунікаційних технологій на уроках буде доцільним, оскільки, для навчання, розвитку та виховання сучасних дітей недостатньо традиційної системи навчання, та необхідно використовувати такі методи, прийоми та засоби навчання, які б задовольнили запити суспільства. Тільки за умови, що учням цікаво навчатися, підвищується пізнавальна активність, активізується мислення та розумові процеси, школярі починають працювати більш продуктивно і творчо.

Інформаційно-комунікаційні технології є одним із засобів підвищення рівня знань, мотивації до навчання, інтересу до предмета, в реаліях сьогодення та допомагають виконувати завданням сучасної школи такі як: підвищення ефективності та якості освіти, формування інформаційної культури як основи інформатизації суспільства в цілому, формування творчої, всебічно розвиненої особистості.

В ході написання даної роботи розглянуто теоретичний матеріал з теми «Похідна та її застосування», розв’язанні приклади з даної теми, представлено приклади інтерактивних та тренувальних вправ з теми, а також наведено задачі, з використанням похідної в інших науках.

Можна зробити висновок, що похідна – одне з найважливіших понять математичного аналізу. Знання похідної дозволяє вирішувати численні завдання з економічної теорії, фізики, алгебри, геометрії, хімії, біології, географії та інших науках.

Список використаних джерел

1. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К. Математика. 11 клас: Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. – Тернопіль: Навчальна книга-Богдан, 2011.-480 с.
2. Ачкан В. В. Використання прикладних задач у процесі вивчення похідної у курсі алгебри та початків аналізу в класах різних профілів / В. В. Ачкан, О. В. Ніколаєва // Збірник наукових праць Бердянського державного педагогічного університету (Педагогічні науки). – Бердянськ: БДПУ, 2011. – № 2. – 360 с.
3. Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа: учебник для 10-11 классов средней школы / Башмаков Марк Иванович. – 2-е издание. – М.: Просвещение, 1992. – 351 с.
4. Бевз Г. П. Методика викладання математики. Навчальній посібник / Бевз Григорій Петрович. – 3-те видання, доповнене і перероблене.– К.: Вища школа, 1989. – 369 с.
5. Блог вчителя математики Голич А. В. [Електронний ресурс] // Інформаційний портал. – Режим доступу: https://teacherslifesite.wordpress.com/.– Назва з екрану. – Мова укр.
6. Дереза І. С. Використання СКМ GeoGebra під час навчання учнів теми «Похідна та її застосування» на поглибленому рівні вивчення математики / І. С. Дереза, О. А. Іванова // Новітні комп’ютерні технології. – Кривий Ріг: Видавничій центр ДВНЗ «Криворізький національний університет», 2018. – Том XVI. – с. 269-274.
7. Дереза І. С., Формування дослідницької компетентності учнів при вивченні теми «Похідна та її застосування» на поглибленому рівні / І. С. Дереза, О. А. Іванова // ВІСНИК Міжнародного дослідного центру: «Людина: мова, культура, пізнання»: наук. журн.: за заг. ред. В. В. Корольського. – Кривий Ріг: КДПУ, МДЦ «ЛМКП», 2018. – Том 42. – с.171-178.
8. Дубовик В. П. Вища математика: Навчальний посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрнік. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.

9. Думанська Т.В. Особливості викладання теми „Похідна та її застосування” для курсантів факультету військової підготовки. Педагогічна освіта: теорія і практика : зб. наук. праць. Вип. 10. / Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка / гол. ред. Каньоса П. С. Кам’янець-Подільський : Видавець ПП Зволейко Д. Г., 2012. С. 187-193.
10.Енгельс Ф., див. Маркс К. і Енгельс Ф., Соч., 2 изд., т. 20, з. 587
11. Жалдак М.І. Математика з комп’ютером: посібник для вчителів / М.І. Жалдак, Ю.В. Горошко, Є. Ф. Вінниченко. – 3-е видання. – К.: Видавництво НПУ імені М.П. Драгоманова, 2015. – 315 с.
12. Ісаєва Г.М. Метод проектів – ефективна технологія навчання учнів сучасної школи // Метод проектів: традиції, перспективи, життєві результати. – К.: Департамент, 2003.
13. Істер О. С. Алгебра і початки аналізу: (профіл. рівень) : підруч. Для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти / О. С. Істер, О. В. Єргіна. – Київ : Генеза, 2018. – 448 с. : іл.
14. Колмогоров А. М. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учебное пособие для общеобразовательных организаций / А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын // Под редакцией А.М. Колмогорова. – 26-е издание. – М.: Просвещение, 2018. – 384 с.
15.Корнійчук О.Е. Вивчення похідної разом із Maple // Фізико-математична освіта : науковий журнал, 2016. Випуск 3(9), С.61-69.
16. Мерзляк А. Г. Алгебра і почф/атки аналізу :початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу., проф. рівень: підручник для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. ф/Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2018. – 512 с.: іл.
17. Мерзляк А. Г. Алгебра: підручник для 11 класу для профільного та академічного рівня вивчення математики / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2011. – 431 с.: іл.
18. Мерзляк А.Г. Алгебра: підруч. для 11 кл. з поглибленим вивченням математики: у 2 ч./ А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський,

М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2011.- Ч. 1.- 256 с.

19. Методичний пошук вчителя математики: зб. наук. праць за матеріалами І Всеукр. дистанц. наук.-практ. конф., 16 березня 2017 р. / Міністерство освіти і науки України, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського [та ін.]. – Вінниця, 2017 – 269 с.
20. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту// Збірник програм з математики для до профільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). ЧІІ. Профільне навчання / Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єргіна.-Х.: Видавництво ”Ранок”, 2011.-С.6-27.
21. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Академічний рівень.// Збірник програм з математики для до профільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). ЧІІ. Профільне навчання / Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єргіна. -Х.: Видавництво ”Ранок”, 2011.-С.28-51.
22. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень.// Збірник програм з математики для до профільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). ЧІІ. Профільне навчання / Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єргіна. -Х.: Видавництво ”Ранок”, 2011.-С.52-83.
23. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (для класів з поглибленим вивченням математики).// Збірник програм з математики для до профільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). ЧІІ. Профільне навчання / Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єргіна. -Х.: Видавництво ”Ранок”, 2011.-С.84-121.
24. Навчальні матеріали онлайн. Факультативи, спецкурси і спецсемінари як форми організування навчання [Електронний ресурс] // Інформаційний портал. – Режим доступу: https://pidruchniki.com/70153/pedagogika/fakultativi_spetskursi_spetsseminari

_fo rmi_organizuvannya_navchannya – Назва з екрану. – Мова укр.
25. Нелін Є. П. Алгебра. 11 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: академічний рівень, профільний рівень / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. – Х.: Гімназія, 2011. – 448 с.: іл.
26. Нелін Є. П. Алгебра в таблицях: учбовий посібник для учнів 7-11 класів / Нелін Євген Петрович – 3-е видання. – Х.: Гімназія, 2011. – 128 с.: іл.
27. Погребний В. Узагальнення поняття похідної // Фізико-математична освіта: науковий журнал, 2017. Випуск 2(12), С.124-129.
28. Похідна та її застосування [Текст]: навчальний посібник / В.М. Кузнецов, Т.М. Бусарова, Т.А. Агошкова, І.В. Клименко, Н.В. Міхєєва; Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – Дніпро, 2017. – 104 с.
29. Проектна діяльність у школі / Упоряд. М. Голубченко. – К.: Шк.. світ, 2007.
30. Радченко А. А. Ігрові методи та прийоми. Відкритий урок / Радченко А. А. – К, 2012. – № 10. – с. 47-49.
31. Раков С. А. Формування математичних компетентностей учителя мАтематики на основі дослідницького підходу у навчанні з використанням інформаційних технологій: дис. доктора пед. наук / Раков Сергій Анатолійович. – К., 2005. – 503 с.
32. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник. – 2-ге видання, доповнене і перероблене / Слєпкань Зінаїда Іванівна. – К.: Вища школа, 2006. – 34 с.
33. Слівінська Л. А. Урок на тему: «Застосування похідної до дослідження функцій» / Л. А. Слівінська // Методичний вісник. – 2015. – №4.– с. 37-42.
34. Сучасні шкільні технології. Ч. 2 / Упоряд. І. Рожнятовська– 2-ге вид., стереотипне. – К.: Ред.. загальнопед. газ., 2005.
35. Тести ЗНО онлайн з предмета «Математика» [Електронний ресурс] // Інформаційний портал. – Режим доступу: https://zno.osvita.ua/mathematics/. – Назва з екрану. – Мова укр.
36. Теория и методика обучения математике: частная методика. В 2 ч. Часть 2

: учеб. пособие для СПО / Л. С. Капкаева. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 191 с. — (Серия : Профессио нальное образование)

37.Усик Ольга. Запровадження нових технологій у традиційну систему навчання методом проектів.Математика в сучасній школі. – 2012. – №1.

38.Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубинчук О.С. Алгебра і початки аналізу. 11 клас Підручник. — К.: Зодіак-ЕКО, 2002. — 384 с.

39. GeoGebra [Електронний ресурс] // Інформаційний портал. – Режим доступу: https://www.geogebra.org.– Назва з екрану. – Мова англ.

40. LearningApps [Електронний ресурс] // Інформаційний портал. – Режим доступу: https://learningapps.org/. – Назва з екрану. – Мова укр.

41. https://physics-mathematics.ru/

42. https://englishyz.ru/uk/properties-in-chemistry/zachem-nuzhna-proizvodnaya-v-zhizni-primenenie-proizvodnoi-v-fizike-tehnike/