math_2021_063

Міністерство освіти і науки України

Чернівецький національний університет

імені Юрія Федьковича

Факультет математики та інформатики
(повна назва інституту/факультету)

Кафедра диференціальних рівнянь
(повна назва кафедри)

Формування поняття функціональної залежності на уроках математики

Дипломна робота

Рівень вищої освіти - другий (магістерський)

Виконав:
студент 6 курсу, групи 606 заочної ф.н.
спеціальності 014.04 Середня освіта
(математика)
(назва спеціальності)
Ващенко Олександр Валерійович
(прізвище, ім’я та по-батькові)
Керівник к.ф.-м.н., доцент Лусте І.П.
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

До захисту допущено:

Протокол засідання кафедри № ___

від „ ___ ” _______________ 2021 р.

зав. кафедри _________ проф. Пукальський І.Д.

Чернівці – 2021

Зміст

Вступ

"Именно функция является тем средством математического языка, которое позволяет описывать процессы движения, изменения, присущие природе"

Галилео Галилей

Жодне явище, жодний процес навколишнього світу не можуть бути вивчені без математичного опису. Одним із інструментів такого опису реального світу є функція.

Сучасна математика знає багато функцій, і кожна з них є неповторною, як неповторною є кожна людина. Усі ми також є функціями багатьох змінних, однією з яких є час. Ідуть роки і ми змінюємся. Ми також залежні від своєї спадковості, від книг, які читаємо, від середовища, в якому живемо, від виховання ... Попри це, у кожного з нас є дещо спільне – у нас є дві руки, дві ноги, вуха, голова, рот. Так само і функцію можна представити складеною з набору характерних деталей, в яких проявляються основні властивості функції.

Вільне володіння технікою побудови графіків функцій часто допомагає у розв'язанні багатьох задач, а інколи є єдиним способом знайти їх розв'язок.

Поняття функції є одним із основних в науці і має загальнокультурне значення. Завдяки йому можна вивчати фізичні величини та їх взаємозв'язок, розв'язувати математичні задачі, вивчати природознавство, та техніку. Проблема вивчення поняття функції в школі є дуже актуальною. Педагоги та методисти виділяють його як фундаментальне математичне поняття. Безумовно, вивчення функції розвиває функціональне мислення учнів, знайомить з ідеєю неперевності та нескінченності, формує вміння аналізувати, знаходити залежності між змінами різних об'єктів, вчить працювати з абстрактним матеріалом.

Розуміння функції як математичної моделі реальних процесів визначає зальнокультурний аспект вивчення математики. Учні повинні вміти побачити функціональну залежність не тільки в алгебраїчних формулах, а і в інших шкільних предметах та в житті. Така побудова учбового матеріалу відповідатиме принципу цілісності освіти.

§1. Розвиток дослідницьких умінь учнів у процесі дослідження функцій з використанням Microsoft Excel

Розвиток дослідницьких умінь є необхідною умовою підготовки майбутніх учителів математики і фізики до професійної діяльності. Перехід вітчизняної системи освіти до Болонського процесу передбачав відведення не менш як 50 % навчального матеріалу на самостійне опрацювання. Інформаційно-комунікаційні технології (ІКТ), які ввійшли у навчальний процес вищих навчальних закладів, надають величезні можливості для розвитку дослідницьких умінь. Одним із таких засобів є табличний процесор Microsoft Excel. Однак слід зазначити, що, незважаючи на розробки науковців у використанні засобів ІКТ для організації навчально-дослідницької роботи учнів та студентів, можливості Microsoft Excel поки що вивчені недостатньо.

Використанню засобів ІКТ у навчанні математики присвятили свої праці О. В. Вітюк [2], М. І. Жалдак [1, 2, 3], М. С. Львов [4], М. І. Михалін [3]. Проблему використання засобів ІКТ для формування дослідницьких умінь майбутніх учителів математики досліджував С. А. Раков.

Дослідницькі уміння – це уміння спланувати і здійснити науковий пошук, розробити задум, логіку і програму дослідження, відібрати наукові методи і вміло їх застосувати, організувати і здійснити дослідно-експериментальну роботу, обробити, проаналізувати й оформити у вигляді наукового тексту отримані результати, сформулювати висновки й успішно їх захистити.

Одним із засобів розвитку дослідницьких умінь є завдання на дослідження функцій. Незважаючи на суто математичне завдання (дослідження функцій), застосування Microsoft Excel як засобу дослідження функцій відкриває певні можливості для розвитку дослідницьких умінь.

Дослідження функцій в табличному процесорі Microsoft Excel можна використати як завдання для лабораторної роботи, а можна як індивідуальне завдання. Відповідно у першому випадку необхідна детальна розробка завдання до лабораторної роботи.

Нагадаємо схему дослідження функцій:

1. Знаходження області існування функції.

2. Знаходження точок перетину графіка з координатними осями.

3. Дослідження функції на періодичність, парність і непарність.

4. Знаходження точок розриву функції та дослідження їх.

5. Знаходження значення функції на кінцях відрізків, де визначена функція.

6. Знаходження інтервалів монотонності функції.

7. Знаходження екстремальних точок і побудова їх на площині.

8. Знаходження інтервалів увігнутості та опуклості кривої, яка є графіком функції.

9. Знаходження точок перегину і побудова їх на площині.

10. Знаходження асимптот графіка функції.

11. Побудова графіка функції.

Однак слід зазначити, що схема дослідження функції, запропонована в шкільному курсі алгебри, дещо простіша: п. 8–10 в ній опускаються.

Тому схема дослідження функції може бути такою:

1. Знаходження області існування функції.

2. Знаходження точок перетину графіка з координатними осями.

3. Дослідження функції на періодичність, парність і непарність.

4. Знаходження точок розриву функції та дослідження їх.

5. Знаходження значення функції на кінцях відрізків, де визначена функція.

6. Знаходження інтервалів монотонності функції.

7. Знаходження екстремальних точок і побудова їх на площині.

8. Побудова графіка функції.

Особливості табличного процесора зумовлюють необхідність побудови складових програми дослідження функції у вигляді таблиць, розміщених на окремих аркушах.

Крім того, є певні складнощі у побудові програми для дослідження функції в Microsoft Excel. Вони викликані тим, що табличний процесор має відмінності від математичних пакетів і мов програмування. Зокрема, в Microsoft Excel відсутні функції знаходження похідної, розгалуженої умови (if ... then ... else ...), мова виразів Microsoft Excel дещо відрізняється від математичної, при побудові графіка необхідно вказати всі точки, за якими будується графік. Усе вищесказане зумовлює необхідність навчання учнів дослідженню функцій на практичних заняттях (полегшені завдання) з наступним виконанням індивідуальних навчально-дослідницьких завдань.

У процесі дослідження функції в Microsoft Excel учні розвивають такі дослідницькі уміння:

– висувати гіпотезу дослідження;

– розробляти послідовність дослідження;

– логічно структурувати матеріали дослідження;

– визначати необхідні формули і виконувати дослідження функції;

– аналізувати результати дослідження.

Послідовність дослідження функції в Microsoft Excel має бути такою:

1. Нагадування схеми дослідження функції.

2. Розбиття етапів дослідження функції на логічно завершені складові.

3. Визначення таблиць, графіків і діаграм, які необхідно побудувати для дослідження функції.

4. Визначення стандартних функцій Microsoft Excel, які необхідні у процесі дослідження.

5. Визначення кількості робочих аркушів Microsoft Excel (бажано, щоб таблиці для кожного етапу дослідження були розміщені на окремому аркуші) і їх назв. Також необхідно передбачити створення робочого аркуша "Результати дослідження".

6. Створення необхідної кількості робочих аркушів, їх перейменування.

7. Створення на аркуші "Область визначення" таблиці для знаходження області визначення функції, введення необхідних формул, знаходження області визначення функції.

8. Створення на аркуші "Точки перетину" таблиці, введення формул, знаходження точки перетину графіка з координатними осями.

9. Створення на аркуші "Періодичність" таблиці, введення формул, обчислення періодичності запропонованої функції.

10. Створення на аркуші "Парність і непарність" двох таблиць. Одна з таблиць необхідна для співставлення значень x і $-x$ та для визначення проходження графіка через початок координат, друга – для визначення парності або непарності функції.

11. Створення на аркуші "Точки розриву" таблиці для визначення точок розриву функції, введення формул, визначення точок розриву.

12. Створення на аркуші "Значення функції на кінцях відрізків" таблиць для обчислення значень функції на кінцях відрізків, де визначена функція (формули повинні посилатися на вираз функції на аркуші "Область визначе-

ння”).

13. Створення на аркуші ”Похідна” таблиці для обчислення першої похідної функції, введення формул і обчислення першої похідної, а також точок, у яких вона дорівнює нулю.

14. Створення на аркуші ”Інтервали монотонності” таблиці для визначення проміжків зростання (спадання), введення формул з посиланням на аркуш ”Похідна” і визначення інтервалів монотонності функцій.

15. Створення на аркуші ”Екстремальні точки” таблиці для визначення екстремальних точок (формули повинні посилатися на комірки аркушів ”Похідна”, ”Інтервали монотонності”). Знаходження координат точок, у яких похідна дорівнює нулю, визначення, максимумом чи мінімумом є точка.

16. Створення на аркуші ”Графік” таблиці для визначення значень x і y, визначення значень функції в кожній з точок, побудова графіка функції.

17. Створення на аркуші ”Результати дослідження” таблиці для представлення основних результатів дослідження. Дані для таблиці повинні братися з таблиць на попередніх аркушах.

18. Збереження файла під назвою *Прізвище.xls* у своїй папці.

Індивідуальне завдання з дослідження функції належить до завдань практично-дослідницького типу і, крім розробки програми дослідження функції в Microsoft Excel, передбачає оформлення результатів дослідження у вигляді реферату обсягом 12–18 аркушів, який може мати приблизно таку структуру (див. таблицю).

Результатом виконання завдання практично-дослідницького типу є програма (файл Microsoft Excel) і реферат. Виконання індивідуального завдання значно складніше, ніж лабораторної роботи, і вимагає від учнів уміння організовувати власну діяльність, а також розвиває уміння формулювати мету, гіпотезу і завдання дослідження, виконувати науковий пошук, робити висновки з проведеного дослідження, оформляти дослідження у вигляді реферату, захищати результати дослідження.

Структура індивідуального навчально-дослідницького завдання з дослідження функції в Microsoft Excel

Структурна складова	**Зміст**
Титульний аркуш	Інформація про тему дослідження, тип завдання, прізвище та ім'я учня
Зміст	Перелік змістових складових роботи
Вступ	Актуальність, тема, мета і завдання дослідження
Основна частина	Схема дослідження. Деталізація схеми дослідження (залежно від виду досліджуваної функції). Перелік необхідних таблиць (і їх призначення). Перелік використовуваних функцій табличного процесора (і їх коротка характеристика). Перелік використовуваних робочих аркушів (і їх призначення). Опис процесу створення програми. Інструкція з користування
Висновки	Висновки з проведеного дослідження. Рекомендації

У навчальному процесі з інформатики для дослідження функцій у середовищі табличного процесора доцільно використовувати як лабораторне заняття, так і індивідуальне завдання. У процесі виконання лабораторної роботи та індивідуального завдання на дослідження функцій у середовищі табличного процесора Microsoft Excel розвиваються дослідницькі уміння: формулювати мету, гіпотезу і завдання дослідження, виконувати науковий пошук, розробляти послідовність дослідження, логічно структурувати матеріали дослідження, визначати необхідні формули і виконувати дослідження функції, аналізувати результати дослідження, робити висновки з проведеного дослідження, оформляти дослідження у вигляді реферату, захищати результати дослідження.

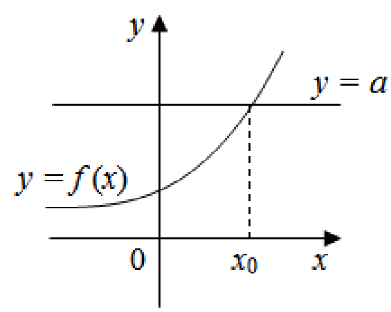
§2. Застосування властивостей функцій до розв'язування рівнянь

Розглянемо деякі опорні математичні факти.

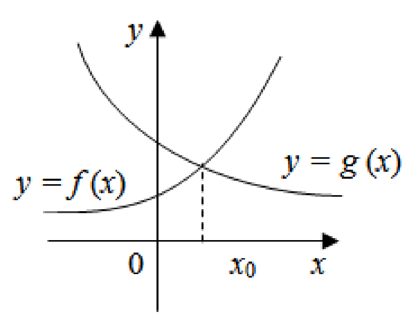
Теорема 1 (про корінь рівняння). *Якщо в рівнянні*

$$f(x) = a,$$

де a – const, а функція $y = f(x)$ – монотонна (зростає (спадає)) на деякому проміжку, то на цьому проміжку подане рівняння має не більше ніж один корінь x_0.



Наслідок. *Якщо в рівнянні $f(x) = g(x)$ функція $y = f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, а функція $y = g(x)$ – спадає (зростає) на цьому проміжку, то це рівняння має не більше ніж один корінь.*



Також корисно знати такі твердження.

Т1. Якщо функція $y = f(x)$ зростає (спадає) на проміжку M, то функція $y = -f(x)$ спадає (зростає) на M.

Т2. Якщо функція $y = f(x)$ зростає (спадає) на проміжку M, функція $y = g(x)$ зростає (спадає) на M, то функція $y = f(x) + g(x)$ зростає (спадає) на M.

Т3. Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ зростають (спадають) на проміжку M і $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$, то функція $y = f(x) \cdot g(x)$ зростає (спадає) на M.

Т4. Якщо функція $y = f(x)$ зростає (спадає) на проміжку M, який є проміжком знакосталості функції $y = f(x)$, то функція

$$y = \frac{1}{f(x)}$$

є спадною (зростаючою).

Корисно пам'ятати:

$$y = \sqrt{x+a}, \quad y = -\sqrt{-x+a}, \quad y = x^3, \quad y = \sqrt[3]{x}, \quad y = kx + b \quad (k > 0)$$

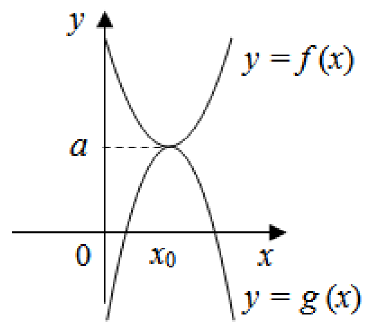
– зростаючі функції на своїй області визначення;

$$y = -\sqrt{x+a}, \quad y = \sqrt{-x+a}, \quad y = -x^3, \quad y = -\sqrt[3]{x}, \quad y = \sqrt[3]{-x},$$

$$y = kx + b \quad (k < 0)$$

– спадні функції на своїй області визначення.

Теорема 2. *Якщо в рівнянні $f(x) = g(x)$ на його області визначення виконуються умови $f(x) \geq a$, $g(x) \leq a$, де a – деяке дійсне число, то подане рівняння рівносильне системі рівнянь:* $\begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a. \end{cases}$



Наслідок. *Якщо в рівнянні* $f(x)+g(x)=a+b$ *на його області визначення виконуються умови* $f(x)\geq a$, $g(x)\leq a$, *то подане рівняння рівносильне системі рівнянь*

$$\begin{cases} f(x)=a, \\ g(x)=b. \end{cases}$$

Теорема 3. *Якщо функція* $y=f(x)$ *є зростаючою (спадною) на певній множині, то на цій множині рівняння* $f(\alpha)=f(\beta)$ *рівносильне рівнянню* $\alpha=\beta$.

Теорема 4. *Спільні точки графіків зростаючих взаємно обернених функцій лежать на прямій* $y=x$.

Наслідок. *Якщо функції* $y=f(x)$ *і* $y=g(x)$ *взаємно обернені й зростаючі, то рівняння*

$$f(x)=g(x)$$

рівносильне кожному з рівнянь

$$f(x)=x \quad \text{або} \quad g(x)=x.$$

Теорема 5 (Нерівність Коші–Буняковського). *При будь-яких значеннях* $a_1,a_2,\ldots,a_n$, $b_1,b_2,\ldots,b_n$ *виконується нерівність*

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2\leq\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right)$$

Для оцінювання також можна застосувати і векторний аналог нерівності:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

Під час оцінювання стануть у пригоді такі нерівності:

$$|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1, \quad 0 \leq \sin^2 x \leq 1, \quad 0 \leq \cos^2 x \leq 1$$

$$|\sin x \pm \cos x| \leq \sqrt{2}, \quad a + b \geq 2\sqrt{ab},$$

де $a \geq 0$, $b \geq 0$,

$$(a \pm b)^2 \geq 0, \quad (a \pm b)^2 + c \geq c, \quad |a| + \frac{1}{|a|} \geq 2,$$

де $a \neq 0$.

Пропоновані далі вправи можна використовувати під час вивчення теми "Застосування властивостей функцій до розв'язування рівнянь" (10 клас, академічний та профільний рівні), а також під час вивчення тем "Раціональні рівняння", "Ірраціональні рівняння", "Тригонометричні рівняння", "Показникові рівняння" і "Логарифмічні рівняння" (10, 11 класи, академічний, профільний та поглиблений рівні). Наведені рівняння також стануть у нагоді під час підготовки учнів до складання ЗНО.

2.1. Використання області визначення функцій

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{3x^2 - 15x - 18} - 1 = x^3 - \sqrt{6 + 5x - x^2}.$$

Розв'язання. Якщо маємо рівняння $f(x) = g(x)$, то спільну область визначення для функцій $f(x)$ і $g(x)$ називають областю допустимих значень цього рівняння.

Знайдемо область допустимих значень рівняння $\sqrt{3x^2 - 15x - 18} - 1 = x^3 - \sqrt{6 + 5x - x^2}$.

Для цього розв'яжемо систему нерівностей

$$\begin{cases} 3x^2 - 15x - 18 \geq 0, \\ 6 + 5x - x^2 \geq 0. \end{cases}$$

Маємо:

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \geq 0, \\ x^2 - 5x - 6 \leq 0; \end{cases}$$

звідси $x_1 = -1$, $x_2 = 6$.

Отже, область допустимих значень рівняння містить тільки два числа. З'ясуємо, чи ці числа є коренями заданого рівняння. Для цього підставимо значення $x_1 = -1$ і $x_2 = 6$ у рівняння.

Якщо $x = -1$, то дістанемо $-1 = -1$ – правильну рівність; якщо $x = 6$, то дістанемо $-1 = 216$ – неправильну рівність.

Отже, $x = -1$ – корінь рівняння.

Відповідь. -1.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння

$$\log_{\frac{1}{7}}(x - 3) + 2 = \sqrt[4]{x - x^2}$$

Розв'язання. Область допустимих значень рівняння знайдемо із системи нерівностей

$$\begin{cases} x - 3 > 0, \\ x - x^2 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x > 3, \\ x^2 - x \leq 0; \end{cases}$$

система розв'язків не має.

Отже, область допустимих значень рівняння не містить жодного числа. Це означає, що задане рівняння коренів не має.

Відповідь. Коренів немає.

Вправи для самостійного розв'язування

Розв'яжіть рівняння:

1. 1) $\sqrt{x-1}+x=1-\sqrt{1-x}$;

2) $18+\sqrt{6-x}=3x+\sqrt{x-6}$.

2. 1) $x^2-\sqrt{4-2x}=x+2+\sqrt{x-2}$;

2) $\sqrt{5x-20}-2x^2=x-36-\sqrt{4-x}$.

3. 1) $\sqrt{x^2-4}-2x=\sqrt{12-3x^2}-4$;

2) $\sqrt{2x^2-18}-12=4x+\sqrt{9-x^2}$.

4. 1) $\sqrt[4]{x^2-x-2}+\sqrt[3]{x+9}=2-\sqrt{14+7x-7x^2}$;

2) $\sqrt{4-3x-x^2}+3=\sqrt[5]{244-x}-\sqrt[6]{6x^2+18x-24}$.

5. 1) $\sqrt{3x-9}+x^2-2=\sqrt{2-x}$;

2) $\sqrt{8x+40}=3x^3-1-\sqrt{-x-7}$.

6. 1) $\dfrac{2}{\sqrt[4]{x-4}}-1=\sqrt{4-x}+x^2$;

2) $\sqrt[6]{9-x}-x^5=18+\dfrac{1}{\sqrt{x-9}}$.

7. 1) $\log_3(x+1)-2x=\log_2(-4x-4)$;

2) $\log_5(x-8)=x+\lg(33-11x)$.

8. 1) $\arccos\dfrac{x-1}{2}-2x+2\pi+4=2\arccos\dfrac{x-5}{3}$;

2) $\arcsin\dfrac{x+7}{2}-4\arcsin\dfrac{x+1}{4}-4x-20-\dfrac{5\pi}{2}=0$.

9*. 1) $\sqrt{x^2-16}-2\arccos(x-3)+\sqrt[4]{4-x}+x^2-2x-8=0$;

2) $2\arcsin(x+5)-\sqrt[4]{36-x^2}-\sqrt{-x-6}+x^2+x+\pi-30=0$.

2.2. Оцінка значень лівої та правої частин рівняння

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{x^2 - 2x + 10} = 3 - |x - 1|.$$

Розв'язання. Якщо маємо рівняння

$$f(x) = g(x)$$

і відомо, що для всіх допустимих значень x виконуються нерівності $f(x) \geq a$, $g(x) \leq a$ (a – деяке число), то це рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a. \end{cases}$$

Маємо:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1 + 9} = 3 - |x - 1|; \quad \sqrt{(x-1)^2 + 9} = 3 - |x - 1|.$$

Тоді

$$(x-1)^2 + 9 \geq 9; \quad \sqrt{(x-1)^2 + 9} \geq 3; \quad 3 - |x - 1| \leq 3.$$

Отже, задане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + 9} = 3, \\ 3 - |x - 1| = 3; \end{cases} \begin{cases} (x-1)^2 = 0, \\ |x - 1| = 0; \end{cases} \quad x = 1.$$

Відповідь. 1.

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння

$$4\cos x = \sqrt{\sqrt{|x|} + 16}.$$

Розв'язання. Маємо:

$$-4 \le 4\cos x \le 4;$$

$$\sqrt{|x|} \ge 0; \quad \sqrt{|x|} + 16 \ge 16; \quad \sqrt{\sqrt{|x|} + 16} \ge 4.$$

Тоді рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} 4\cos x = 4, \\ \sqrt{\sqrt{|x|} + 16} = 4; \end{cases} \begin{cases} \cos x = 1, \\ \sqrt{|x|} = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = 0. \end{cases}$$

Відповідь. 0.

Приклад 5. Розв'яжіть рівняння

$$x^4 - 8x^2 + 16 + \left|x^2 - 3x - 10\right| + \sqrt{2x^2 + x - 6} = 0.$$

Розв'язання. Нагадаємо, що сума кількох невід'ємних виразів дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли всі вирази одночасно дорівнюють нулю.

Запишемо задане рівняння у вигляді

$$\left(x^2 - 4\right)^2 + \left|x^2 - 3x - 10\right| + \sqrt{2x^2 + x - 6} = 0.$$

Маємо:

$$\left(x^2 - 4\right)^2 \ge 0; \quad \left|x^2 - 3x - 10\right| \ge 0; \quad \sqrt{2x^2 + x - 6} \ge 0.$$

Тоді рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} (x^2 - 4)^2 = 0, \\ |x^2 - 3x - 10| = 0, \\ \sqrt{2x^2 + x - 6} = 0; \end{cases} \begin{cases} (x - 2)(x + 2) = 0, \\ (x - 5)(x + 2) = 0, \\ (2x - 3)(x + 2) = 0; \end{cases} \quad x = -2.$$

Відповідь. -2.

Приклад 6. Розв'яжіть рівняння

$$2^{\cos x} - x^2 = 2.$$

Розв'язання. Запишемо подане рівняння у вигляді:

$$2^{\cos x} = x^2 + 2.$$

Оцінимо ліву і праву частини рівняння:

$$0,5 \leq 2^{\cos x} \leq 2, \quad x^2 + 2 \geq 2.$$

Отже, ця рівність можлива тоді й тільки тоді, коли:

$$\begin{cases} 2^{\cos x} = 2, \\ x^2 + 2 = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} 2^{\cos x} = 2, \\ x = 0. \end{cases}$$

Підставимо здобуте значення $x = 0$ в перше рівняння системи, дістанемо правильну рівність $2^{\cos 0} = 2$. Отже, корінь рівняння $x = 0$.

Відповідь. 0.

Приклад 7. Знайдіть найменше значення параметра a, при якому рівняння

$$2^{\sin^2\left(2\pi x + \frac{5\pi}{4}\right)} = \frac{4}{(x-a)^2 - 6(x-a) + 13}$$

має додатний корінь. (Пробне ЗНО, 2014).

Розв'язання. Для оцінювання лівої частини скористаємося обмеженістю тригонометричної функції:

$$0 \leq \sin^2\left(2\pi x + \frac{5\pi}{4}\right) \leq 1.$$

Тоді

$$1 \leq 2^{\sin^2\left(2\pi x + \frac{5\pi}{4}\right)} \leq 2,$$

оскільки $y = 2^t$ зростає.

Оцінимо знаменник дробу, що стоїть у правій частині рівняння:

$$(x-a)^2 - 6(x-a) + 13 = (x-a-3)^2 + 4 \geq 4.$$

Тоді, використовуючи властивість нерівностей: якщо $a > b$, $ab > 0$, то $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$, матимемо:

$$\frac{1}{(x-a)^2 - 6(x-a) + 13} \leq \frac{1}{4}.$$

Отже,

$$\frac{4}{(x-a)^2 - 6(x-a) + 13} \leq 1.$$

Тоді за теоремою 2 маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2^{\sin^2\left(2\pi x + \frac{5\pi}{4}\right)} = 1, \\ \dfrac{4}{(x-a)^2 - 6(x-a) + 13} = 1. \end{cases}$$

Розв'яжемо друге рівняння системи:

$$\frac{4}{(x-a)^2 - 6(x-a) + 13} = 1,$$

$$(x-a-3)^2 + 4 = 4, \quad x = a + 3.$$

Оскільки за умовою потрібно знайти найменше значення a, то останню рівність запишемо у вигляді $a = x - 3$. Щоб a було найменшим, то найменшим має бути і значення x. Розв'яжемо перше рівняння системи:

$$2^{\sin^2\left(2\pi x + \frac{5\pi}{4}\right)} = 1, \quad \sin^2\left(2\pi x + \frac{5\pi}{4}\right) = 0,$$

$$2\pi x + \frac{5\pi}{4} = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$2x + \frac{5}{4} = k, \quad x = -\frac{5}{8} + \frac{k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Оскільки за умовою корінь повинен бути додатним, то

$$-\frac{5}{8} + \frac{k}{2} > 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Звідки маємо:

$$k > \frac{5}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Змінна x набуває найменшого значення при $k = 2$. Знайдемо це значення: $x = \dfrac{3}{8}$. Підставимо здобуте значення x у рівність $a = x - 3$, звідки дістанемо $a = -2,625$.

Відповідь. При $a = -2,625$.

Вправи для самостійного розв'язування

Розв'яжіть рівняння:

10. 1) $2 - x^2 = \sqrt{4 + |x|}$;

  2) $\sqrt{x^2 + 9} = 3 - |x|$.

11. 1) $\sqrt{x^2 - 4x + 20} = 4 - (x-2)^4$;

  2) $\sqrt{25 - (x+3)^6} = x^2 + 6x + 14$.

12. 1) $6 \sin x = x^2 + 6$;

  2) $3 \cos x = x^4 + 3$.

13. 1) $2 \cos 4\pi x = |2x - 1| + 2$;

  2) $3 \sin 2\pi x = -3 - |4x + 1|$.

14. 1) $4 \sin \dfrac{\pi x}{3} = 4x^2 - 12x + 13$;

  2) $6 \cos 5\pi x = -25x^2 - 10x - 7$.

15. 1) $\left|x^2 - 4x\right| + \sqrt{x - 4} = 0$;

2) $|x+7|+\sqrt{x^2+7x}=0$.

16. 1) $\left(x^2-25\right)^2+\left|x^2+3x-10\right|+\sqrt{x^2-x-30}=0$;

2) $\left(x^2+2x-99\right)^2+\sqrt{x^2-8x-9}+\left|x^2-81\right|=0$.

17) 1) $\left|\log_2\left(x^2-15\right)\right|+\left(2x^2-x-28\right)^4=-2\sqrt{x^2+x-20}$;

2) $\log^6_{\frac{1}{3}}\left(x^2+5x+7\right)+\sqrt{5x^2-45}=-3\left|3x^2+x-24\right|$.

2.3. Використання зростання та спадання функцій

Приклад 8. Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{x-1}+x^3=9.$$

Розв'язання. Для розв'язування цього рівняння скористаємося твердженням: якщо в рівнянні

$$f(x)=a$$

(a – деяке число) і функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то це рівняння може мати не більше ніж один корінь на цьому проміжку.

Функція $f(x)=\sqrt{x-1}+x^3$ зростає на всій своїй області визначення (як сума двох зростаючих функцій), $D(f)=[1;+\infty)$.

Нескладно побачити, що $x=2$ – корінь заданого рівняння $\left(\sqrt{2-1}+2^3=9\right)$.

Отже, рівняння $\sqrt{x-1}+x^3=9$ має єдиний корінь $x=2$.

Відповідь. 2.

Приклад 9. Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x+5}=6-x.$$

Розв'язання. Справедливе таке твердження: якщо в рівнянні $f(x)=g(x)$ функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, а функція $g(x)$

спадає (зростає) на цьому проміжку, то це рівняння може мати не більше ніж один корінь на цьому проміжку.

Функція $f(x) = \sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{x+5}$ є зростаючою на всій числовій прямій (як сума двох зростаючих функцій), функція $g(x) = 6 - x$ є спадною на всій числовій прямій.

Нескладно побачити, що $x = 3$ – корінь заданого рівняння ($\sqrt[3]{3-2} + \sqrt[3]{3+5} = 6 - 3; 3 = 3$).

Тому рівняння $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{x+5} = 6 - x$ має єдиний корінь $x = 3$.

Відповідь. 3.

Приклад 10. Розв'яжіть рівняння $2^x + 3^x = \frac{5}{x}$.

Розв'язання. Функція $f(x) = 2^x + 3^x$ є зростаючою на всій числовій прямій (як сума двох зростаючих функцій). Оскільки функція $g(x) = \frac{5}{x}$ спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$, то розглянемо кожний проміжок окремо.

При $x \in (-\infty; 0)$ рівняння коренів не має. Це випливає з того, що на цьому проміжку $f(x) = 2^x + 3^x > 0$, а $g(x) = \frac{5}{x} < 0$.

При $x \in (0; +\infty)$ рівняння має корінь $x = 1$

$$\left(2^1 + 3^1 = \frac{5}{1}; 5 = 5\right)$$

Отже, рівняння $2^x + 3^x = \frac{5}{x}$ має єдиний корінь $x = 1$.

Відповідь. 1.

Приклад 11. Розв'яжіть рівняння

$$9^x - 5^x - 4^x = 2\sqrt{20^x}.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$3^{2x} = \left(2^x + 5^{\frac{x}{2}}\right)^2,$$

звідки $3^x = 2^x + 5^{\frac{x}{2}}$. Поділимо обидві частини рівняння на $3^x > 0$, маємо:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^x = 1.$$

Ліва частина рівняння містить суму спадних функцій. Отже, ліва частина – спадна функція. Праворуч – константа. За теоремою про корінь рівняння маємо, що рівняння має не більше ніж один корінь, який знайдемо підбором. Маємо $x = 2$ – корінь рівняння.

Відповідь. 2.

Приклад 12. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - 2y = \sin x - \sin y, \\ x + 2y = 9. \end{cases}$$

Розв'язання. Подамо перше рівняння системи у вигляді:

$$\begin{cases} 2x - \sin x = 2y - \sin y, \\ x + 2y = 9. \end{cases}$$

Доведемо, що $f(x) = 2 - \sin x$ – монотонна функція. Для цього застосуємо похідну:

$$f'(x) = (2x - \sin x)' = 2 - \cos x.$$

Оскільки $-1 \leq \cos x \leq 1$, то $1 \leq 2 - \cos x \leq 3$, отже, $y' > 0$, тобто функція

$f(x) = 2 - \sin x$ – зростаюча. Тоді за теоремою 3 маємо:

$$\begin{cases} x = y, \\ x + 2y = 9; \end{cases} \begin{cases} x = y, \\ y + 2y = 9; \end{cases} \begin{cases} x = 3, \\ y = 3. \end{cases}$$

Відповідь. $(3; 3)$.

Приклад 13. Розв'яжіть рівняння

$$\log_2 x - \log_2(5x - 2) = (5x - 2)^3 - x^3.$$

Розв'язання. Подамо рівняння у вигляді:

$$\log_2 x + x^3 = \log_2(5x - 2) + (5x - 2)^3.$$

Розглянемо функцію $f(t) = \log_2 t + t^3$. Оскільки $y = \log_2 t$ – зростає, $y = t^3$ – зростає, то $f(t) = \log_2 t + t^3$ – зростає при $t > 0$. Тоді за теоремою 3 маємо: $x = 5x - 2$, $x = 0,5$.

Відповідь. $0,5$.

Приклад 14. Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{4 - x} + \sqrt{x - 2} = x^2 - 6x + 11.$$

Розв'язання. Для оцінювання лівої частини застосуємо нерівність Коші–Буняковського. Розглянемо такі набори:

$$(\sqrt{4 - x}; \sqrt{x - 2}) \text{і} (1; 1).$$

Отже, маємо:

$$\sqrt{4 - x} + \sqrt{x - 2} = 1 \cdot \sqrt{4 - x} + 1 \cdot \sqrt{x - 2} \leq$$

$$\leq \sqrt{1^2 + 1^2} \sqrt{(\sqrt{4 - x})^2 + (\sqrt{x - 2})^2} = \sqrt{2} \sqrt{4 - x + x - 2} = 2.$$

Для оцінювання правої частини виділимо повний квадрат: $x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2 \geq 2$. Тоді за теоремою 2 маємо:

$$\begin{cases} \sqrt{4-x} + \sqrt{x-2} = 2, \\ x^2 - 6x + 11 = 2. \end{cases}$$

Розв'яжемо друге рівняння системи:

$$x^2 - 6x + 9 = 0,$$

звідки маємо: $x = 3$.

Відповідь. 3.

Вправи для самостійного розв'язування

Розв'яжіть рівняння:

18. 1) $\sqrt{x} + 3x^4 = 4$;

2) $4\sqrt{x} + x^3 = 72$.

19. 1) $6\sqrt{x+2} + x^3 = 20$;

2) $3\sqrt{x-2} + x^4 = 84$.

20. 1) $2x + x^3 = 12$;

2) $9x + x^5 = 10$.

21. 1) $\sqrt{x-3} + \sqrt{x-8} = 5$;

2) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+10} = 9$.

22. 1) $2\sqrt{x-6} + \sqrt{x-3} = 4$;

2) $\sqrt{x+5} + 3\sqrt{x+12} = 15$.

23. 1) $\sqrt[4]{-x} + \sqrt[4]{15-x} = x^3 + 4$;

2) $\sqrt[4]{12-x} + \sqrt[4]{77-x} = x^3 + 69$.

24. 1) $3^{x-1} + 3^{x-2} = \sqrt{6-x}$;

2) $2^{x-1} + 2^{x-3} = \sqrt{28-x}$.

25. 1) $x + \log_2 x = \frac{88}{x}$;

2) $3x + \log_5 x = \frac{80}{x}$.

26. 1) $\log_{\frac{1}{3}} x = 2^x + x^2 - 18$;

2) $\log_{\frac{1}{2}} x = 3^x + x^4 - 4$.

Відповіді

1. 1) 1; 2) 6.

2. 1) 2; 2) 4.

3. 1) 2; 2) -3.

4. 1) -1; 2) 1.

5. 1) Коренів немає; 2) коренів немає.

6. 1) Коренів немає; 2) коренів немає.

7. 1) Коренів немає; 2) коренів немає.

8. 1) 2; 2) -5.

9. 1) 4; 2) -6.

1) *Розв'язання*

Область допустимих значень рівняння знайдемо із системи

$$\begin{cases} x^2 - 16 \geq 0, \\ -1 \leq x - 3 \leq 1, \\ 4 - x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} (x-4)(x+4) \geq 0, \\ 2 \leq x \leq 4, \\ x \leq 4; \end{cases} \qquad x = 4.$$

Перевірка. $x = 4$ – корінь рівняння ($\sqrt{4^2 - 16} - 2\arccos(4-3) + \sqrt[4]{4-4} + 4^2 - 2 \cdot 4 - 8 = 0$; $0 = 0$).

Відповідь. 4.

10. 1) 0; 2) 0.

11. 1) 2; 2) -3.

12. 1) Коренів немає; 2) 0.

13. 1) 0,5; 2) $-0,25$.

14. 1) 1,5; 2) $-0,2$.

15. 1) 4; 2) -7.

16. 1) -5; 2) 9.

17. 1) 4; 2) -3.

18. 1) 1; 2) 4.

19. 1) 2; 2) 3.

20. 1) 2; 2) 1.

21. 1) 12; 2) 15.

22. 1) 7; 2) 4.

23. 1) -1; 2) -4.

24. 1) 2; 2) 3.

25. 1) 8; 2) 5.

26. 1) 3; 2) 1.

§3. Про обернені та взаємно обернені функції та деякі їх властивості (для факультативних занять)

Функцію $f(x)$ називають оборотною, якщо для кожного y із множини її значень $E(f)$ рівняння $f(x) = y$ має єдиний розв'язок, який належить її області визначення $D(f)$. Функцію $g(y)$, яка кожному $y \in E(f)$ ставить у відповідність цей єдиний розв'язок, називають оберненою до функції $f(x)$. Зрозуміло, що при цьому функція $g(y)$ також є оборотною, а функція $f(x)$ – оберненою до неї. Тому такі функції називають взаємно оберненими.

Зазначимо, що графіки взаємно обернених функцій

$$y = f(x) \text{ та } x = g(y)$$

збігаються, а графік функції $y = g(x)$ симетричний до графіка функції $y = f(x)$ відносно прямої $y = x$.

Якщо, крім того,

$$g(x) \equiv f(x)$$

то функцію $f(x)$ називають самооберненою. Такими, зокрема, є функції:

$$f(x) = x, \quad f(x) = -x, \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad f(x) = -\frac{1}{x}.$$

Розглянемо ще декілька прикладів знаходження обернених функцій.

Приклад 1. Довести, що функція, обернена до лінійної функції

$$f(x) = kx + b, \quad k \neq 0,$$

також є лінійною, та знайти всі самообернені лінійні функції.

Розв'язання. Із рівняння $kx + b = y$ знаходимо

$$x = \frac{1}{k}(y - b).$$

Отже, обернена до $f(x)$ функція

$$g(x) = \frac{1}{k}(x - b)$$

є лінійною. Далі з тотожності

$$\frac{1}{k}(x - b) \equiv kx + b$$

знаходимо $k = 1$, $b = 0$, або $k = -1$, $b \in \mathbb{R}$. Отже, крім самооберненої лінійної функції $f(x) = x$, отримуємо цілий клас таких функцій

$$f(x) = -x + b.$$

Приклад 2. Знайти функцію, обернену до дробово-лінійної функції

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Розв'язання. Із рівняння

$$\frac{ax + b}{cx + d} = y$$

маємо

$$x = \frac{dy - b}{-cy + a}.$$

Отже,

$$g(x) = \frac{dx - b}{-cx + a}.$$

Зрозуміло, що при цьому $cx + d \neq 0$, $-cx + a \neq 0$. Таким чином, функція, обернена до дробово-лінійної функції, також є дробово-лінійною функцією.

Безпосередньо з означення випливають такі властивості взаємно обернених функцій:

1) $D(f)=E(g)$, $E(f)=D(g)$;

2) для будь-якого $x \in D(f)$ із рівності $f(x)=y$ випливає, що $g(y)=x$, тобто

$$g(f(x))=x.$$

Приклад 3. Нехай $f(x)=x^3+6x$, $g(x)$ – обернена до неї функція. Не знаходячи $g(x)$:

1) розв'язати рівняння $g(x)=1$;

2) обчислити $g(7)$.

Розв'язання. 1) Унаслідок властивості 2) маємо $x=f(1)=7$; 2) із рівняння $f(x)=7$, тобто $x^3+6x=7$, знаходимо його єдиний дійсний корінь $x=1$. Тому $g(7)=1$.

Перейдемо до вивчення інших властивостей обернених функцій.

Приклад 4. Довести, що кожна монотонно зростаюча функція є оборотною, а обернена до неї функція також є монотонно зростаючою.

Розв'язання. Справді, якщо $f(x)$ – монотонно зростаюча функція, то різним значенням її аргумента відповідають різні значення цієї функції, причому з нерівності $x_1<x_2$ випливає, що

$$y_1=f\left(x_1\right)<y_2=f\left(x_2\right).$$

Тому для кожного $y \in E(f)$ рівняння $f(x)=y$ має єдиний розв'язок $x=g(y)$ такий, що з нерівності $y_1<y_2$ випливає нерівність

$$x_1=g\left(y_1\right)<x_2=g\left(y_2\right).$$

Зауважимо, що аналогічне твердження справедливе і для монотонно спадних функцій. В обох випадках із неперервності функції $f(x)$ випливає й неперервність оберненої функції.

Проте, окремі властивості взаємно обернених функцій можуть і суттєво відрізнятися.

Приклад 5. Про функцію $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ відомо, що вона є взаємно однозначним відображенням множини цілих чисел на себе, причому $f(n) \to +\infty$, якщо $n \to +\infty$. Нехай f^{-1} позначає функцію, обернену до f. Чи можна стверджувати, що $f^{-1}(n) \to +\infty$, якщо $n \to +\infty$?

Розв'язання. Для функцій

$$f(n) = \begin{cases} 2n, & n = 2k, n \in \mathbb{Z}_+, \\ -n, & n = -2k+1, k \in \mathbb{N}, \\ \frac{n}{2}, & n = -2k, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$f^{-1}(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n = 2k, n \in \mathbb{Z}_+, \\ -n, & n = 2k-1, k \in \mathbb{N}, \\ 2n, & n = -k, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$f(n) \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Але $f^{-1}(n)$ не прямує до $+\infty$ для непарних $n \to +\infty$.

Зауважимо, що покладаючи також $f(x) = x$, $x \notin \mathbb{Z}$ ми отримали би функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таку, що є взаємно однозначним відображенням множини всіх дійсних чисел на себе, причому $f(x) \to +\infty$, якщо $x \to +\infty$. Але при цьому $f^{-1}(x)$ не прямує до $+\infty$ при $x \to +\infty$.

Приклад 6. Про функцію $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ відомо, що вона є взаємно однозначним відображенням (бієкцією) множини всіх дійсних чисел на себе і розривною в кожній точці числової прямої. Чи можна стверджувати, що й обернена до неї функція F^{-1} також є розривною в кожній точці числової прямої?

Розв'язання. Доведемо, що так стверджувати не можна. Для цього виділимо у множині дійсних чисел підмножину X усіх дійсних чисел вигляду

$$x = \pm a_n a_{n-1} \dots a_1, b_1 b_2 \dots b_m,$$

де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, a_i, b_j – цифри, $b_m \neq 0$, $b_m \neq 5$. Нехай

$$F(x) = \begin{cases} -x+1, & x \in \mathbb{R}\backslash X, \\ x-1, & x \in X\backslash(0,2), \\ g(x), & x \in X \cap (0,2), \end{cases}$$

де $g(x) = 0,5x$, якщо b_m – парна цифра. Якщо ж цифра $b_m = 1$ чи $b_m = 3$, то збільшимо її на 1, якщо $b_m = 7$ чи $b_m = 9$, то зменшимо її на 1.

Замінивши $x \in X \cap (0;2)$ на отриманий таким способом елемент x, покладемо

$$g(x) = 0,5x' - 1.$$

Функція $y = F(x)$ є бієкцією множини всіх дійсних чисел на себе. Справді, функція

$$y = -x + 1, \quad x \in \mathbb{R}\backslash X$$

взаємно однозначно відображає $\mathbb{R}\backslash X$ на $\mathbb{R}\backslash X$, а інші дві функції взаємно однозначно відображають X на X. Поза інтервалом $(0,2)$ це здійснює функція $y = x - 1$, $x \in X\backslash(0,2)$, а на поданому інтервалі – функція $y = g(x)$.

Унаслідок щільності множини X у $\mathbb{R}$ в околі кожної точки $x \in \mathbb{R}$ знайдуться такі дві точки, у яких різниця значень не менша від 1. Тому функція $y = F(x)$ є розривною в кожній точці числової осі. Водночас, обернена до неї функція $x = F^{-1}(y)$ неперервна в точці $y = \frac{1}{3}$.

Зупинимося на застосуваннях властивостей обернених функцій. Зокрема, властивість

$$D(f) = E(g), \quad E(f) = D(g)$$

часто використовують для знаходження множини значень функції.

Приклад 7. Знайти множину значень функції

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}.$$

Розв'язання. Знайдемо область визначення функції, оберненої до $f(x)$. Для цього розглянемо рівняння

$$\frac{2x}{x^2+1} = y \Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0$$

з параметром y. Якщо $y = 0$, то $x = 0$. А для $y \neq 0$ з останнього квадратного рівняння знайдемо

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-y^2}}{y}.$$

Отже, областю визначення оберненої функції

$$g(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-x^2}}{x}, \;\; x \neq 0, \; g(0) = 0$$

є відрізок $[-1; 1]$. Тому $E(f) = [-1; 1]$.

Зауважимо, що шукати конкретний вираз для оберненої функції $g(x)$ було не потрібно. Для $y \neq 0$ достатньо було лише вказати ті значення параметра, за яких дискримінант квадратного рівняння $yx^2 - 2x + y = 0$ є невід'ємним.

У загальному випадку такий метод є ефективним для знаходження множини значень довільних функцій вигляду

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + h}.$$

У наступних прикладах скористаємося симетричністю графіків взаємно обернених функцій $y = f(x)$ та $y = g(x)$ відносно прямої $y = x$. У випадку, коли обидві ці функції є зростаючими, отримаємо, що рівняння $f(x) = g(x)$ рівносильне кожному з рівнянь

$$f(x) = x \ \text{ та } \ g(x) = x.$$

Наприклад, якщо $f(x) = x^3 + x - 1$, то

$$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0.$$

Тому функції

$$y = f(x) \ \text{ та } \ y = g(x)$$

будуть зростаючими, і замість рівняння

$$f(x) = g(x)$$

достатньо розв'язати набагато простіше рівняння

$$x^3 + x - 1 = x,$$

із якого знаходимо єдиний дійсний корінь $x = 1$.

Зауважимо, що умова монотонного зростання функцій $f(x)$ та $g(x)$ є суттєвою. Наприклад, для монотонно спадних взаємно обернених функцій

$$f(x) = g(x) = -x$$

рівняння

$$f(x) = g(x) \quad \text{та} \quad f(x) = x$$

не є рівносильними. Перше з них задовольняють усі значення $x \in \mathbb{R}$, а друге – лише $x = 0$.

Виділимо декілька класів ірраціональних рівнянь із параметром вигляду

$$f(x) = g(x),$$

для розв'язування яких доцільно скористатися вказаною властивістю.

Приклад 8. Знайти невід'ємні корені рівняння

$$x^2 - a = \sqrt{x + a}.$$

Розв'язання. Функція

$$f(x) = x^2 - a$$

для $x \geq 0$ є монотонно зростаючою, а обернена до неї функція

$$g(x) = \sqrt{x + a}$$

визначена і зростаюча для всіх $x \geq -a$. Тому розв'язуватимемо рівняння $x^2 - a = x$. Його дискримінант $D = \sqrt{1 + 4a}$. Отже, дійсні корені

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

отримаємо лише за умови $1 + 4a \geq 0$. Якщо $a > 0$, то корінь $x_2 < 0$ не задовольняє умову задачі. Якщо $a = 0$, то матимемо два невід'ємні розв'язки: $x_1 = 1$ та $x_2 = 0$. У випадку $a \in [-0,25; 0)$ обидва корені є додатними, причому

$$x_1 > x_2 > -a > 0.$$

Заміною $\sqrt{x} = t \geq 0$ до прикладу 8 зводиться й рівняння

$$\sqrt{\sqrt{x} + a} = x - a.$$

Приклад 9. Розв'язати рівняння

$$x^3 + a - 1 = a\sqrt[3]{ax - a + 1}, \quad a > 0.$$

Розв'язання. Розглянемо функцію

$$f(x) = \frac{x^3 + a - 1}{a}.$$

Оскільки її похідна

$$f'(x) = \frac{3}{a}x^2 > 0$$

для $x \neq 0$, то $f(x)$ та обернена до неї функція

$$g(x) = \sqrt[3]{ax - a + 1}$$

є зростаючими. Отже, достатньо розв'язати рівняння

$$\frac{x^3 + a - 1}{a} = x \Leftrightarrow x^3 - ax + a - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)\left(x^2 + x + 1 - a\right) = 0.$$

Одним із його коренів є $x_1 = 1$, а корені

$$x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{4a - 3}}{2}$$

будуть дійсними лише за умови $4a - 3 \geq 0$.

Аналогічно розв'язують і рівняння

$$x^3 - a + 1 = a\sqrt[3]{ax + a - 1}, \quad a > 0,$$

одним із коренів якого є $x_1 = -1$, а два інші дійні корені існують лише за умови $4a - 3 \geq 0$.

З оборотними та оберненими функціями зустрічаємося і під час розв'язування деяких функціональних рівнянь.

Нехай $F(x)$ – задана, а $\varphi(x)$ – відома оборотна функція. Рівняння

$$f(\varphi(x)) = F(x)$$

називають найпростішим функціональним рівнянням. Для його розв'язування позначимо

$$\varphi(x) = t$$

і визначимо обернену до $\varphi(x)$ функцію

$$x = \psi(t).$$

В результаті дістанемо

$$f(t) = F(\psi(t)).$$

Відповідно, шуканий розв'язок найпростішого функціонального рівняння матиме вигляд

$$f(x) = F(\psi(x)).$$

Зокрема, для

$$\varphi(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

отримаємо

$$f(x) = F\left(\frac{dx - b}{-cx + a}\right).$$

Цікаві й функціональні рівняння, у яких аргументами є взаємно обернені функції. У загальному випадку зупинимося на рівняннях вигляду

$$F(x, f(x), f(\varphi(x))) = 0.$$

Якщо

$$\varphi(\varphi(x)) = x,$$

то, замінивши x на $\varphi(x)$, дістанемо рівняння

$$F(\varphi(x), f(\varphi(x)), f(x)) = 0,$$

яке можна розглядати в системі з початковим рівнянням.

Зокрема, для

$$\varphi(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

маємо

$$\varphi(\varphi(x)) = \frac{\left(a^2 + bc\right)x + b(a + d)}{c(a + d)x + (bc + d^2)} \equiv x$$

за виконання умов:

$$a^2 + bc = bc + d^2, \quad b(a + d) = c(a + d) = 0.$$

Їх, наприклад, задовольняють дробово-лінійні функції вигляду

$$\varphi(x) = \frac{ax + b}{cx - a}.$$

Приклад 10. Розв'язати рівняння

$$3f(x) + f\left(\frac{x+1}{2x-1}\right) = 1, \quad x \neq 0,5.$$

Розв'язання. Замінивши x на

$$\frac{x+1}{2x-1},$$

дістанемо

$$3f\left(\frac{x+1}{2x-1}\right) + f(x) = 1.$$

Віднімаючи тепер помножене на 3 рівняння з умови задачі, знайдемо

$$f(x) \equiv 0,25, \quad x \neq 0,5.$$

Укажемо також на деякі геометричні ідеї для розв'язування задач із використанням властивостей чи значень обернених функцій.

Приклад 11. Обчислити суму

$$\mathrm{arctg} 1 + \mathrm{arctg} 2 + \mathrm{arctg} 3.$$

Розв'язання. Розглянемо прямокутник $ABHK$ (див. рис. 1).

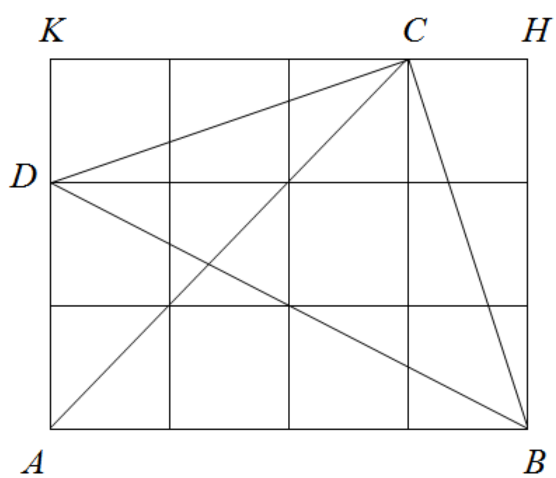


Рис. 1

Нехай

$$KC = 3, \quad AD = 2, \quad KD = CH = 1.$$

Тоді з рівності прямокутних трикутників DKC та CHB випливає, що навколо чотирикутника $ABCD$ можна описати коло. Оскільки

$$\angle CAB = \mathrm{arctg} 1, \quad \angle ABC = \mathrm{arctg} 3,$$

$$\angle ACB = \angle ADB = \mathrm{arctg} 2,$$

то шукана сума дорівнює сумі кутів трикутника ABC, тобто дорівнює π.

Приклад 12. Скориставшись геометричними властивостями взаємно обернених функцій, довести нерівність Гельдера

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

де числа $p > 1$ та $q > 1$ пов'язані умовою

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Доведення. Ураховуючи, що така нерівність є однорідною відносно кожного з наборів

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ та } (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

достатньо довести нерівність

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq 1$$

для випадку, коли

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |b_k|^q = 1.$$

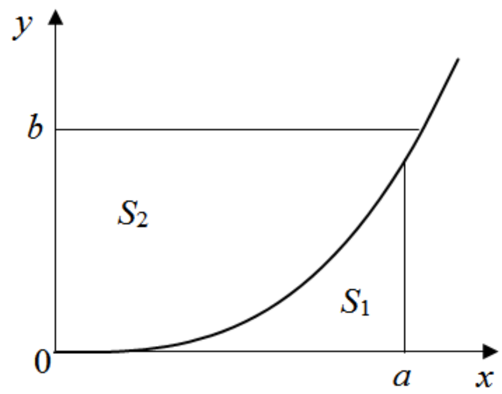


Рис. 2

Розглянемо для $x \geq 0$ графік функції

$$y = x^{p-1}$$

або, що те саме, оберненої до неї функції

$$x = y^{q-1}$$

(див. рис. 2). Із рисунка видно, що $S_1 + S_2 \geq ab$. Обчислимо площі S_1 та S_2:

$$S_1 = \int\limits_0^a x^{p-1} dx = \frac{a^p}{p}, \quad S_2 = \int\limits_0^b y^{q-1} dy = \frac{b^q}{q}.$$

Отже, справедлива нерівність

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Замінивши тут a на $|a_k|$ та b на $|b_k|$, і підсумовуючи по k від 1 до n, із урахуванням умови

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

та рівностей

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |b_k|^q = 1,$$

дістанемо нерівність

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \le 1,$$

яку й слід було довести.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Довести, що кожна монотонно спадна функція є оборотною, а обернена до неї функція також є монотонно спадною.

2. Довести, що функція

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 8$$

є оборотною і знайти значення оберненої до неї функції $g(x)$ у точці $x = 2$.

3. Знайти множину значень функції

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x + 2}.$$

4. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{\sqrt{x} + 1} = x - 1.$$

5. Розв'язати рівняння

$$x^3 - a + 1 = a\sqrt[3]{ax + a - 1}$$

з параметром $a > 0$.

6. Знайти всі функції $f(x)$, які для кожного $x \neq 2$ задовольняють умову

$$f(x) + (x-2)f\left(\frac{2x+1}{x-2}\right) = 3x + 1.$$

7. Обчислити

$$\sqrt{5}\cos(\mathrm{arctg}2),$$

скориставшись співвідношеннями між сторонами прямокутного трикутника.

8. Довести, що для довільної неперервної монотонно зростаючої функції $f(x)$ такої, що

$$f(0) = f^{-1}(0),$$

де $f^{-1}(x)$ – обернена до неї функція, при додатних a та b виконується нерівність

$$ab \le \int\limits_0^a f(x)dx + \int\limits_0^b f^{-1}(x)dx$$

(нерівність Юнга).

§4. Найпростіші перетворення графіків функцій (Урок алгебри в 9 класі)

Пропонований урок може бути проведений за технологією "3 по 30 хвилин", причому перші 30 хвилин учні працюють у кабінеті інформатики та обчислювальної техніки з використанням програми Advanced Grapher, а другі та треті 30 хвилин – у кабінеті математики з використанням програми MyTest. Програма Advanced Grapher використовується з метою самостійного набуття знань і дозволяє учням під час побудови графіків функцій за допомогою комп'ютера дійти висновків про види перетворення графіків. Працюючи в кабінеті математики, учні створюють опорний конспект за планом у вигляді таблиці, що охоплює коло знань, набутих у кабінеті ІОТ. Учні усно, коментовано, колективно, самостійно розв'язують вправи з підручника, виконують тестові завдання з теми "Функції, перетворення графіків функцій". Як підсумок уроку учні вчаться за складеним опорним конспектом виконувати перетворення графіків функцій. Програма MyTest дозволяє учням у процесі тестування за допомогою комп'ютера виявити ступінь засвоєння вказаних навичок та вмінь, удосконалити навички використовувати раніше здобуті знання до розв'язування вправ, виробити вміння застосовувати набуті знання в нових умовах.

Застосування ІКТ на уроках математики дає можливість вчителеві скоротити час на вивчення матеріалу за рахунок наочності і швидкості виконання роботи, перевірити знання учнів в інтерактивному режимі, що підвищує ефективність навчання, допомагає реалізувати весь потенціал особистості – пізнавальний, морально-етичний, творчий, комунікативний і естетичний, сприяє розвитку інтелекту, інформаційної культури учнів, робить уроки яскравими та цікавими. Використання ІКТ в навчальному процесі передбачає підвищення якості освіти, тобто вирішення однієї з нагальних проблем для сучасного суспільства. Використання ПЗНП в навчально-виховному процесі в жодному разі не замінює очне навчання, а лише доповнює його з метою покращити та розширити знання, передбачені програмою. Використання комп'ютера на уроці математики – не данина моді, не засіб перекласти на плечі комп'ютера багатогранну творчу працю вчителя, а лише один із засобів, що дозволяє активізувати пізнавальну діяльність, підвищити мотивацію учня до навчання, створити умови для підвищення ефективності уроку.

Тема уроку: Найпростіші перетворення графіків функцій.

Мета уроку: *навчальна:* сприяти розумінню учнями змісту поняття "перетворення графіка функції"; сформувати знання про основні види геометричних перетворень графіків функцій, уміння "читати" графіки функцій (тобто за готовими графіками задавати функцію та аналізувати її); сформувати навички будувати графіки функцій за допомогою перетворень, заданих рівнянням поданої функції; закріпити знання учнів про види геометричних перетворень графіків функцій і зв'язок між видом перетворення та видом рівняння, що задає функцію, схеми міркувань, що передують побудові графіка деякої функції шляхом геометричних перетворень графіка однієї з елементарних функцій; сформувати вміння виконувати послідовні перетворення графіків елементарних функцій для побудови заданих алгебраїчних функцій відповідно до складеної схеми дій; *розвивальна:* розвивати графічну культуру, здатність до передбачення результатів побудови; *виховна:* виховувати наполегливість, старанність.

Тип уроку: формування знань, умінь і навичок.

Наочність та обладнання: комп'ютери, ноутбук, програми Advanced Grapher, MyTest.

ХІД УРОКУ

ЧАСТИНА 1

30 хв учні працюють у кабінеті ІОТ.

І. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

Мета проведення етапу: 1) повторити зображення графіків елементарних функцій; 2) організувати поточний контроль набутих учнями знань та вмінь (учні виконують тестові завдання, перевірка правильності виконання яких відбувається одразу після завершення).

Виконання тестових завдань

1. На рисунку зображений графік функції, область визначення якої $D(f) = \mathbb{R}$. Укажіть правильне твердження.

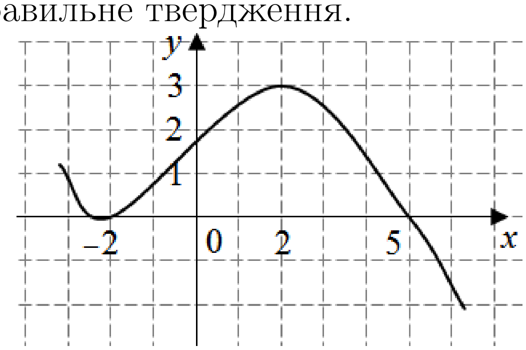


Рис. 3

1) Нулі функції: 2; $-2,5$; $f(x)$ зростає, якщо $x \in [-2; 3]$; $f(x) < 0$, якщо $x \in (5; +\infty)$.

2) Нулі функції: 2; 5; $f(x)$ зростає, якщо $x \in [-2; 2]$; $f(x) < 0$, якщо $x \in [5; +\infty)$.

3) Нулі функції: -2; 5; проміжок зростання $x \in [-2; 2]$; $f(x) > 0$, якщо $x \in (-\infty; -2) \cup (2; 5)$.

4) Нулі функції: 0; функція тільки спадає; $f(x) > 0$, якщо $x \in (-\infty; 5)$.

2. Укажіть область визначення функції

$$y = \frac{x-3}{x(x+5)}.$$

1) $(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$.

2) $(-\infty; -5) \cup (-5; 0) \cup (0; +\infty)$.

3) $(-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$.

4) $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

3. Укажіть множину значень функції

$$f(x) = x^2 - 3.$$

1) $\mathbb{R}$.

2) $[3; +\infty)$.

3) $[-3; +\infty)$.

4) $(-3; +\infty)$.

4. Якщо $f(x) = 3\frac{1}{7}x - 19$, то...

1) $f(3) < f(4)$.

2) $f(3) > f(4)$.

3) $f(-2) > f(-1)$.

4) $f(-5) = f(5)$.

5. Значення функції $y = -3x + 8$ додатні, якщо...

1) $x \leq 2\frac{2}{3}$.

2) $x \geq 2\frac{2}{3}$.

3) $x < 2\frac{2}{3}$.

4) Таких значень x немає.

6. Яка з наведених функцій є зростаючою:

А) на області визначення;

Б) на проміжках $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$?

1) $y = 4x - 1$.

2) $y = \sqrt{x}$.

3) $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

4) $y = 3x$.

5) $y = \frac{x}{3}$.

6) $y = x^2$.

7) $y = -\frac{4}{x}$.

7. Графіком якої з наведених функцій є пряма, що проходить через початок координат? Поясніть свою відповідь, не виконуючи побудови.

1) $y = 2x + 1$.

2) $y = 2x$.

3) $y = 2x^2$.

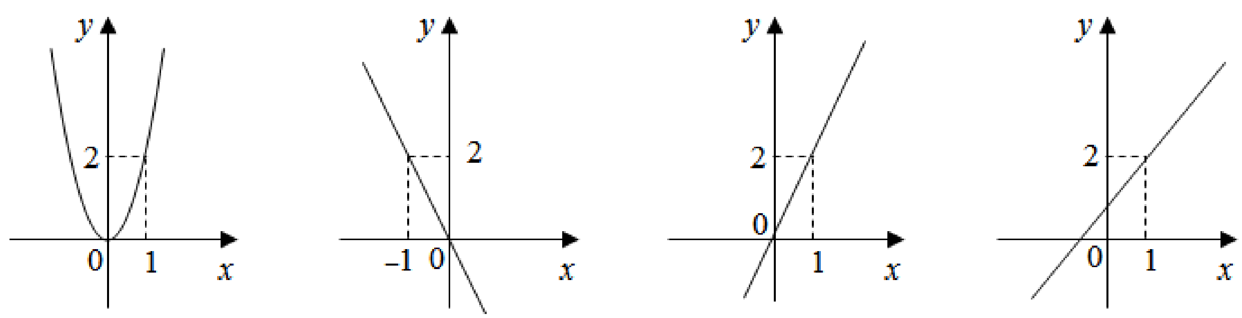
4) $y = 2$.

5) $y = \frac{2}{x}$.

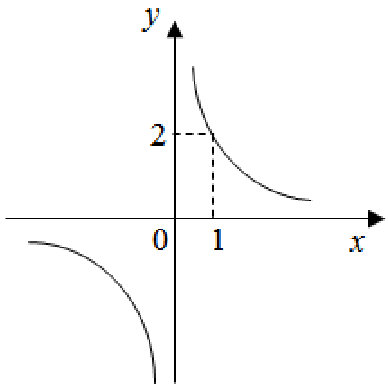
6) $y = \sqrt{x}$.

8. На одному з рисунків зображено графік функції $y = 2x$. укажіть цей рисунок.

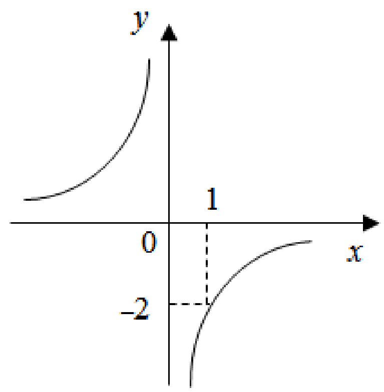
1) 2) 3) 4)



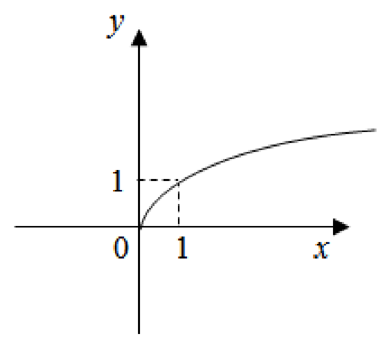
5)



6)



7)



II. МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Дослідження функції за готовим графіком є більш простим, ніж за формулою (підтвердженням цієї думки можуть стати результати перевірки тестових завдань), іноді для розв'язування задач необхідно побудувати графік функції, яка не є елементарною. А чи існують засоби (і якщо існують, то як ними користуватися), за допомогою яких можна побудувати графік деякої функції, при цьому використовуючи вміння будувати графіки елементарних функцій (лінійної, оберненої пропорційності, квадратичної функції та функції $y = \sqrt{x}$)? Пошук відповіді на поставлене запитання і є основною метою уроку.

III. ПОВІДОМЛЕННЯ ТЕМИ, МЕТИ УРОКУ

– Для попереднього сприйняття знань використаємо комп'ютерну техніку. Удосконалимо навички роботи з програмою Advanced Grapher.

Використовуючи програму Advanced Grapher, побудуємо графіки деяких функцій, виконаємо вправи із підручника.

Побудувати графіки функцій:

1) $y = x^2$, $y = 0,1x^2$, $y = 2x^2$, $y = -x^2$, $y = -\frac{1}{4}x^2$;

2) $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = -2\sqrt{x}$;

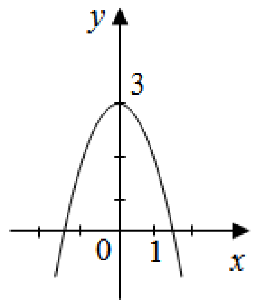
3) $y = x^2 - 3$, $y = x^2 + 4$, $y = (x-3)^2$, $y = (x+4)^2$, $y = (x-2)^2 - 5$;

4) $y = \frac{6}{x}$, $y = -\frac{6}{x} + 5$, $y = -\frac{6}{x-2}$, $y = -\frac{6}{x+4} - 2$;

5) $y = |x|$, $y = |x-2|$, $y = |x+3| - 1$.

Підбиття підсумку першої частини уроку

Графік якої функції зображений на рисунку?



1) $y = x^2 + 3$;

2) $y = x^2 - 3$;

3) $y = -x^2 + 3$;

4) $y = -x^2 - 3$.

ЧАСТИНА 2

Учні працюють 30 хв у кабінеті математики.

IV. ФОРМУВАННЯ ЗНАНЬ, УМІНЬ І НАВИЧОК

Виконання усних вправ

Як треба перетворити графік функції

$$y = f(x),$$

щоб утворився графік функції:

1) $y = -f(x)$;

2) $y = f(x+2)$;

3) $y = f(x-2)$;

4) $y = f(x) + 2$;

5) $y = f(x) - 2$;

6) $y = 2f(x)$;

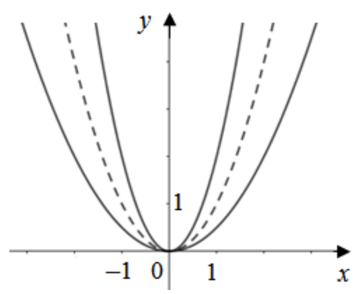
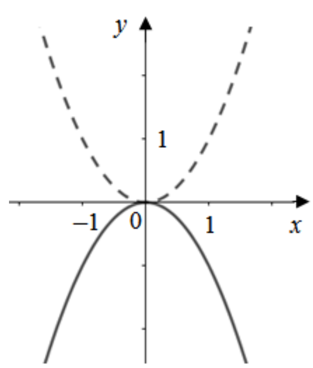
7) $y = \frac{f(x)}{2}$?

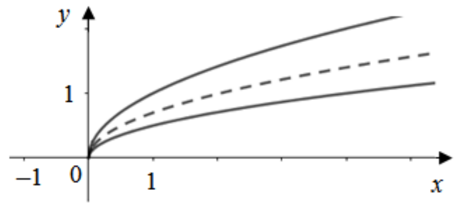
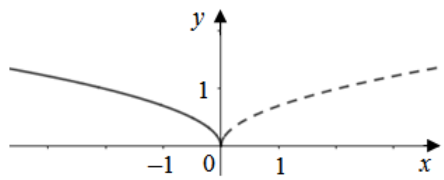
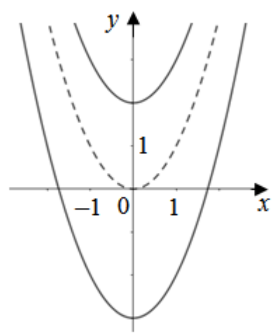
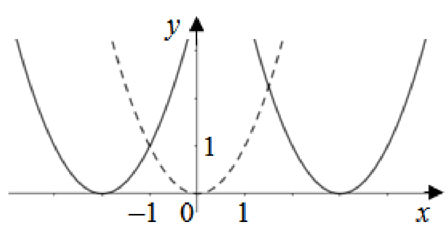
Створення опорного конспекту

Учні працюють за підручником, складають опорний конспект за таким планом:

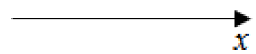
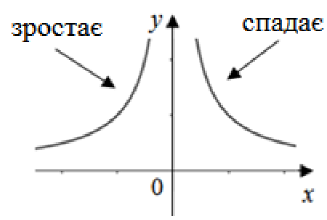
Побудова графіків функцій: $y = kf(x)$, $y = -f(x)$, $y = f(kx)$, $y = f(-x)$, $y = f(x) + b$, $y = f(x + a)$.

Найпростіші перетворення графіків функцій

№ з/п	**Формула залежності**	**Приклад**	**Перетворення**
1	$y = kf(x)$, $k > 0$		Розтягнення в k разів від осі абсцис, якщо $k > 1$, або стиснення в $\frac{1}{k}$ разів до осі абсцис, якщо $0 < k < 1$
2	$y = -f(x)$		Симетрія відносно осі абсцис

3	$y = f(kx)$, $k > 0$		Стиснення в k разів до осі ординат, якщо $k > 1$, або розтягнення в $\frac{1}{k}$ разів від осі ординат, якщо $0 < k < 1$
4	$y = f(-x)$		Симетрія відносно осі ординат
5	$y = f(x) + b$		Паралельне перенесення вздовж осі Oy на b одиниць угору (якщо $b > 0$), униз, якщо $b < 0$
6	$y = f(x + a)$		Паралельне перенесення вздовж осі Ox на a одиниць ліворуч, якщо $a > 0$, і на $-a$ одиниць праворуч, якщо $a < 0$

Властивості функцій

Область визначення	$x \in \ldots$	$f(x) = \frac{a}{b},\ b \neq 0$ $f(x) = \sqrt{a},\ a \geq 0$ $f(x) = \frac{a}{\sqrt{b}},\ b > 0$
Область значень	$y \in \ldots$	За графіком функції
Нулі	Точки перетину з віссю Ox	Рівняння $f(x) = 0$: $x_1, x_2, \ldots$
Знакосталість	$y > 0$ при $x \in \ldots$  $y < 0$ при $x \in \ldots$	Нерівності $f(x) > 0$, $x \in \ldots$ $f(x) < 0$, $x \in \ldots$
Зростання / спадання	 при $x \in \ldots$	За графіком функції

Підсумок другої частини уроку

Визначте, який вигляд мають функції, графік яких утворюється з графіка функції $y = g(x)$ шляхом:

1) паралельного перенесення графіка $y = g(x)$ на 2 одиниці ліворуч;

2) паралельного перенесення графіка $y = g(x)$ на 2 одиниці вниз;

3) симетрії графіка $y = g(x)$ відносно осі абсцис;

4) розтягнення графіка $y = g(x)$ у 2 рази вздовж осі ординат;

5) стиснення графіка $y = g(x)$ у 2 рази вздовж осі абсцис.

ЧАСТИНА 3

Учні працюють 30 хв у кабінеті математики.

V. ЗАКРІПЛЕННЯ ВИВЧЕНОГО МАТЕРІАЛУ

Формування вмінь виконувати перетворення графіків функцій

Перед тим, як будувати графік функції, учні аналізують формулу заданої функції, визначають, за допомогою якого перетворення можна побудувати графік.

Напівсамостійна робота учнів:

1. Задайте функцію формулою виду

$$y = \frac{k}{x+a} + b$$

і побудуйте її графік, використовуючи графік функції

$$y = \frac{k}{x}:$$

1) $y = \frac{3x+8}{x}$;

2) $y = \frac{2x+14}{x+3}$;

3) $y = \frac{-2x}{x-1}$.

2. Задайте функцію формулою виду $y = a(x-m)^2 + n$ і побудуйте її графік, використовуючи графік функції $y = ax^2$:

1) $y = x^2 - 4x + 6$;

2) $y = -x^2 + 6x - 6$;

3) $y = 2x^2 - 4x + 5$.

3. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $(x-1)^2 = \frac{2}{x}$;

2) $1 - x^2 = \sqrt{x} - 1$.

Виконання завдання поглибленого рівня

Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких система рівнянь

$$\begin{cases} |y - x| = 2, \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

має два розв'язки.

Розв'язання

Перше рівняння системи відповідає двом паралельним прямим на координатній площині

$$y = x + 2 \text{ та } y = x - 2,$$

друге рівняння – коло радіуса

$$R = |a|$$

із центром $O(0; 0)$.

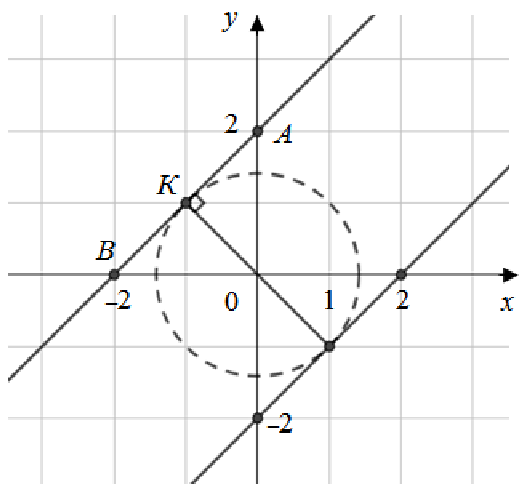
Система має два розв'язки тоді й тільки тоді, коли коло дотикається до вказаних прямих. Трикутник AOB рівнобедрений,

$$\angle A = \angle B = 45^\circ.$$

Тоді його висота

$$OK = R = OA \sin \angle A = 2 \sin 45^\circ = \sqrt{2} \text{ та } |a| = \sqrt{2}.$$

Відповідь. $|a| = \sqrt{2}$.



VI. ПІДСУМКИ УРОКУ

Фронтальне опитування

VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Висновки

Поняття функції пронизує весь шкільний курс математики. На властивостях функції засновано перетворення алгебраїчних та трансцендентних виразів, розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем. Вивчення функцій в основній школі передбачає не тільки оволодіння учнями знаннями, уміннями і навичками відповідно до вимог шкільної програми, а й високу якість їх сформованості.

Список літератури

1. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках математики : Посібник для вчителів / М. І. Жалдак. – К. : Техніка, 1997. – 303 с.

2. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках геометрії : Посібник для вчителів / М. І. Жалдак., О. В. Вітюк. – К. : НПУ їм. М. П. Драгоманова, 2000. – 168 с.

3. Жалдак М. І. Елементи стохастики з комп'ютерною підтримкою. Посібник для вчителів / М. І. Жалдак., Г. О. Михалін. – 2001. – 70 с.

4. Львов М. С. Шкільна система комп'ютерної алгебри ТЕРМ 7-9. Принципи побудови та особливості використання / М. С. Львов // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія № 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання : 36. наук. праць. / Ред. кол. – К. : НПУ ім. М. П. Драгоманова. – № 3 (10). – 2005. – 380 с.

5. Раков С. А. Математична освіта : компетентісний підхід з використанням ІКТ : [Монографія] / С. А. Раков. – Х. : Факт, 2005. – 360 с.

6. Шкіль М. І., Колесник Т. В. Вища математика: [Підручник] : У 3 кн. : Кн. 2. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Ряди / М. І. Шкіль. Т. В. Колесник. – К. : Либідь, 1994. – 352 с.

7. Захарійченко Ю. О., Школьний О. В., Захарійченко Л. І., Школьна О. В. Повний курс математики в тестах. – Х. : Видавництво «Ранок», 2011. – 496 с.

8. Мерзляк А. Г. [та ін.]; за ред. Бурди М. І. Збірник задач для державної підсумкової атестації з математики : 11-й клас. : у 2-х ч. – К. : Центр навч. метод, л-ри, 2014. – 208 с.

9. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра. Підручник для 10 класу з поглибленим вивченням математики. – Х. : Гімназія, 2010. – 415 с.

: іл.

10. Нелін Є. П., Долгова О. Є. Алгебра. 11 клас : Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів : академ. рівень, проф. рівень. – Х. : Гімназія, 2011. – 448 с. : іл.

11. http://vintest.org.ua/ready_math.aspx