math_2021_076

Міністерство освіти і науки України

Чернівецький національний університет

імені Юрія Федьковича

Факультет математики та інформатики
(повна назва інституту/факультету)

Кафедра диференціальних рівнянь
(повна назва кафедри)

Мотивація на уроках математики

Дипломна робота

Рівень вищої освіти - другий (магістерський)

Виконала:
студентка 6 курсу, групи 606 заочної ф.н.
спеціальності 014.04 Середня освіта
(математика)
(назва спеціальності)
Яковенюк Аліна Миколаївна
(прізвище, ім'я та по-батькові)
Керівник к.ф.-м.н., доцент Лусте І.П.
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

До захисту допущено:

Протокол засідання кафедри № ___

від „___” ____________ 2021 р.

зав. кафедри _________ проф. Пукальський І.Д.

Чернівці – 2021

Зміст

Вступ

У наш час традиційний погляд на зміст навчання математики, її роль та місце в загальній освіті переглядають та уточнюють. Поряд із підготовкою учнів, які у своїй подальшій професійній діяльності користуватимуться математикою, важливим стає забезпечення деякого гарантованого рівня підготовки всіх школярів, незалежно від спеціальності, яку вони виберуть у майбутньому.

Математика, яка є мовою науки і техніки, нині дедалі поширюється в повсякденне життя і традиційно далекі від неї галузі. Комп'ютеризація суспільства, упровадження сучасних інформаційних технологій вимагають від людини математичної грамотності буквально на кожному робочому місці. Це передбачає і конкретні математичні знання, і певний стиль мислення, що формує тільки математика.

Навчальний процес у школі – складне соціальне психолого-педагогічне явище. Він охоплює сукупність таких взаємопов'язаних компонентів, як інформаційно-конструктивна керівна діяльність учителя, пізнавальна діяльність учнів, предметний зміст освіти, засоби і способи навчання, співробітництва, канали управління процесом загалом, а також самоконтроль, контроль і корекція діяльності учнів. Процес навчання і виховання учнів є "відкритою системою", оскільки на нього впливає зовнішнє суспільне середовище. Однак вагомі його результати формуються і досягаються на уроках. Формування світогляду учнів неодмінно супроводжується органічно пов'язаними з ним процесами світосприймання, світовідчуття і світорозуміння. Важлива складова – забезпечити розуміння кожним учнем того, що математичні поняття і їх властивості, а також операції над ними створюються внаслідок ідеалізації реальних операцій над предметами та виділення їх властивостей. Під час навчання математики увагу приділяють не лише засвоєнню математичних знань, а й формуванню вмінь застосовувати їх до розв'язування практичних і прикладних задач, оволодіння методами, моделями, що забезпечить успішне вивчення таких предметів, як хімія, фізика, біологія, технології. Зв'язки математики з цими предметами дозволяють формувати цілісне гармонійне світосприйняття учня.

§1. Мотивація на уроці математики

Для багатьох школярів мотиваційним чинником вивчення математики служить її загальновизначна роль у житті та в інших науках. Але є чимало учнів, які на уроці перестають слухати пояснення вчителя, якщо новий матеріал їх не зацікавив з самого початку.

Щоб запобігти байдужості (несприятливості), поява нового матеріалу має відповідати природній допитливості школярів: новий факт не повинен виникати "з нічого", разом з учнями потрібно з'ясувати можливість його застосування, а також передбачити його зміст.

Основним засобом здійснення такого підходу є підбір і розгляд на уроці відповідної задачі (вправи, запитання). Класичним прикладом може служити задача про миттєву швидкість (або про дотичну), яка традиційно передує введенню поняття похідної.

Разом з тим, без будь-якого вмотивування починається, наприклад, розгляд поняття косинуса гострого кута, теореми про три перпендикуляри; без попередніх міркувань звертаються до понять логарифма і тригонометричного рівняння.

Такий стан притаманний не лише підручникам, але нерідко також урокам математики, оскільки здебільшого вчителі вважають підручник взірцем для наслідування. Разом з тим, серйозних підстав докоряти авторам підручників немає, бо на обсяг підручника накладаються певні обмеження. Тому значну частину мотиваційного тягаря вчитель математики повинен брати на себе, більше звертаючись до математичної літератури, самостійно придумуючи влучні задачі і запитання та розглядаючи їх на уроках.

Враховуючи дефіцит навчального часу, слід дотримуватися таких вимог: 1) задача не повинна бути громіздкою (її розв'язування в класі може займати не більше 5-7 хвилин); 2) малюнки та окремі формули мають бути підготовлені на дошці заздалегідь; 3) оскільки йдеться не про формування навичок, а лише про підведення до нових понять і тверджень, не слід вимагати від учнів повних записів у зошитах розв'язувань таких задач.

Нижче наведено приклади вступних вправ під час розгляду нового матеріалу, які можуть стати в пригоді вчителям математики.

1. **Теоремі про суму кутів трикутника** може передувати таке запитання до класу: *за якої умови $\triangle ABC$, поданий на рис. 1, міг би бути рівнобедреним?*

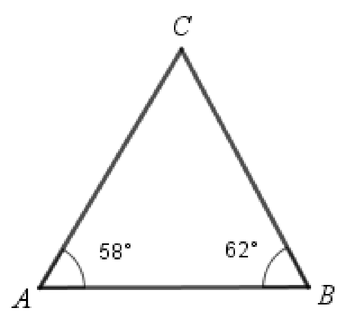


Рис. 1

Після формулювання та доведення теореми про суму кутів трикутника, повертаємось до запитання про рівнобедреність трикутника, поданого на рис. 1, і разом з учнями встановлюємо, що $\angle C = 180° - (58° + 62°) = 60°$, з чого випливає, що згаданий трикутник не може бути рівнобедреним.

2. Перед означенням **поняття косинуса гострого кута прямокутного трикутника** варто запропонувати учням таку вправу.

На рис. 2 схематично зображено площадку MN і встановлену на ній вишку KC, а також одну з відтяжок AB, шо утримують вишку у вертикальному положенні ($\angle C = 90°$). Із зміною кута α змінюються AC і AB, і кожному значенню α відповідає певне значення їх відношення $\dfrac{AC}{AB}$. Знайдіть, чому дорівнює $\dfrac{AC}{AB}$, якщо $\alpha = 60^\circ$.

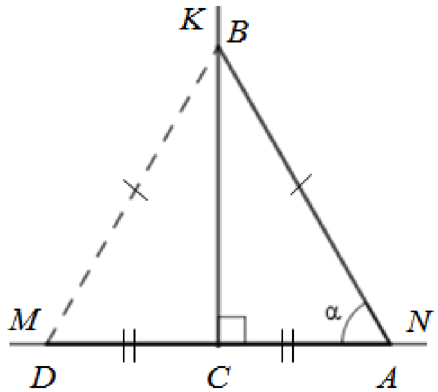


Рис. 2

Учитель може пропонувати додатково розглянути $\triangle BCD$, рівний $\triangle BCA$, і разом з учнями встановлює, що при $\alpha = 60^\circ$ новий $\triangle ABD$ є рівностороннім, а $AC = \dfrac{1}{2}AB$. З цієї рівності випливає, що $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{1}{2}$, тобто довжина відтяжки удвічі більша за відстань від її нижнього кінця A до основи вишки C.

3. Вступні вправи до **теореми Піфагора** можна подати у формі бесіди.

На рис. 3 подано квадрат із стороною a і діагоналлю $AB = c$. Як можна за значенням a знайти значення c?

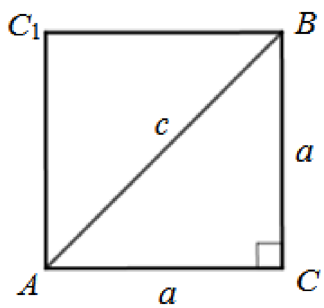


Рис. 3

Для розв'язання цього питання потрібно знайти співвідношення (залежність) між a і c. Нагадавши формулу площі квадрата $S = a^2$, вчитель (разом з учнями) встановлює, що площа $\triangle ABC$ дорівнює $\dfrac{1}{2}a^2$. Він звертає увагу на рис. 4 пояснюючи, що на ньому зображено квадрат, складений з чотирьох трикутників, рівних трикутнику $\triangle ABC$. Разом з учнями з'ясовує, шо площа цього квадрата дорівнює, з одного боку c^2, а з іншого $\frac{1}{2}a^2 \cdot 4 = 2a^2$, з чого випливає рівність $c^2 = 2a^2$ або в іншій формі: $c^2 = a^2 + a^2$. Отже, залежність (формула) отримана.

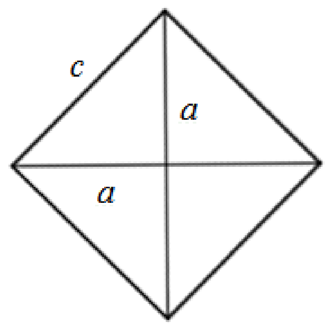


Рис. 4

Після цього, повертаючись до рис. 3, вчитель, звернувши увагу на те, шо $\triangle ABC$ – прямокутний і рівнобедрений, робить висновок: *у такого трикутника квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.*

4. Формулюванню **теореми синусів** може передувати така коротка бесіда.

За другою ознакою рівності трикутників, – говорить учитель, – сторона і два прилеглі кути визначають трикутник. Природно виникає запитання: *а як знайти третій кут і дві інші сторони заданого в такий спосіб трикутника?* Щодо третього кута, то його знайдемо, скориставшись теоремою про суму кутів трикутника. А для відшукання вказаних двох сторін треба знайти співвідношення між кутами і сторонами трикутника. Спробуємо зробити це у випадку, коли трикутник прямокутний (рис. 5).

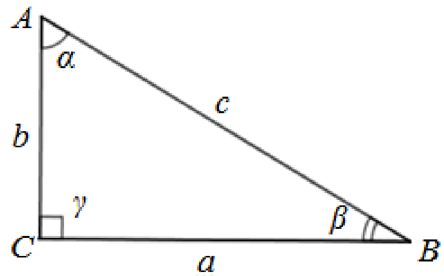


Рис. 5

Далі вчитель пригадує (разом з учнями) формули $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\beta = \frac{b}{c}$, а також записує рівність (враховуючи, шо $\gamma = 90^\circ$) $\sin\gamma = \frac{c}{c}$. Від цих рівностей переходимо до таких $\frac{a}{\sin\alpha} = c$; $\frac{b}{\sin\beta} = c$; $\frac{c}{\sin\gamma} = c$, з чого випливає, що $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

Останні рівності вірні не лише у випадку прямокутного трикутника, а й тоді, коли трикутник рівносторонній (всі чисельники рівні і всі знаменники рівні). Але ми повинні дізнатися, чи вони вірні для будь-якого трикутника. Після цього формулюється і доводиться теорема синусів.

5. Щоб вмотивувати звернення до **біквадратного рівняння**, можна запропонувати класу таку задачу.

Земельна ділянка площею 12 м^2 має форму прямокутника, діагональ якого дорівнює 5 м. Знайти довжину і ширину ділянки.

Позначивши одну зі сторін прямокутника через x, отримаємо для суміжної сторони $\frac{12}{x}$ (тут, мабуть, можна обійтись без рисунка; формула площі прямокутника учням знайома). За умовою задачі та теоремою Піфагора складаємо рівність $x^2 + \left(\frac{12}{x}\right)^2 = 5^2$, яку легко перетворюємо до вигляду $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$.

Після цього вчитель подає означення біквадратного рівняння і розв'язує останнє рівняння (відповідь: 4 м і 3 м).

6. Означенню **ірраціонального рівняння** може передувати така задача.

Фронтон (верхня частина фасаду будівлі) має форму прямокутного трикутника (рис. 6), сума катетів якого дорівнює 8 м, а висота, що проведена з вершини прямого кута, дорівнює 2 м. Знайти площу фронтону.

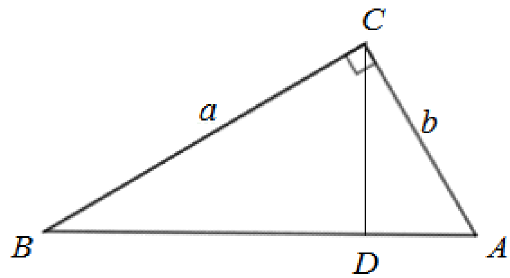


Рис. 6

Позначивши катети через a і b, а шукану площу через x, складаємо рівність: $x = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} \cdot 2$ або $x = \sqrt{a^2+b^2}$.

Далі замінюємо a^2+b^2 на $(a^2+b^2) - 2ab$ і, враховуючи, що $a+b=8$ і $ab = 2x$, одержуємо: $x = \sqrt{64-4x}$.

Після означення поняття ірраціонального рівняння вчитель разом з учнями розв'язує останнє рівняння (відповідь: $2\left(\sqrt{17}-1\right)$ м^2).

7. На початку вивчення **тригонометричних рівнянь** можна запропонувати учням наступну задачу.

На рис. 7 подано прямокутний трикутник, у якого гіпотенуза c удвічі більша за бісектрису l, проведену з вершини гострого кута A. Визначити градусну міру кута A.

Позначивши через x половину кута A, отримуємо рівності $AC = c\cos 2x$; $AC = l\cos x$, з яких випливає рівність $c\cos 2x = l\cos x$. Враховуючи умову задачі $\left(\frac{c}{l} = 2\right)$, дістаємо $2\cos 2x = \cos x$.

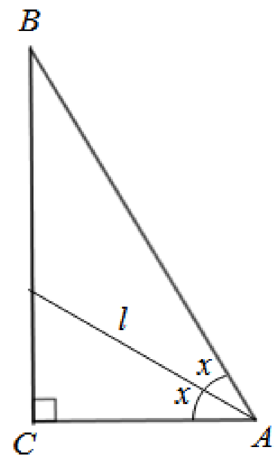


Рис. 7

Після цього вчитель подає загальне означення тригонометричного рівняння та з'ясовує можливість зведення останнього рівняння до квадратного. Остаточне розв'язування рівняння може бути розглянуте пізніше.

8. Ознайомлення з **показниковим рівнянням** можна розпочати з такої текстової (сюжетної) задачі.

На спорудження невеликої фабрики підприємець витратив 107 360 грн. Через скільки років його витрати повністю окупляться, якщо за перший рік роботи фабрики прибуток складатиме 20 000 грн., а далі прибуток зростатиме щороку на 20%?

Позначивши невідоме число років через x, учитель записує прибуток за x років так: $20000+20000\cdot 1,2^2+\ldots+20000\cdot 1,2^{x-1}$. А далі (за формулою суми членів геометричної прогресії) отримує: $20000\dfrac{1,2^x-1}{1,2-1}$ або $100000\cdot(1,2^x-1)$.

Враховуючи умову задачі, складаємо рівність: $100000\cdot(1,2^x-1)=107360$ або $1,2^x-2,0736=0$.

Після цього вчитель формулює означення показникового рівняння і розв'язує останнє рівняння підбором (відповідь: 4 роки).

9. Введенню **поняття логарифма** може передувати така задача.

Зараз у колбі 100 бактерій і щодоби їх кількість потроюється. Через скільки діб число бактерій у колбі досягне 24 300?

Позначивши шукане число діб через x, складаємо рівність $100 \cdot 3x = 24300$ або $3^x = 243$.

Далі вчитель разом з учнями підбором отримує, що $x = 5$ (тут можна міркувати так: $3^2 = 9$, $3^4 = 81$, а $81 \cdot 3 = 243$).

Підводячи підсумок, учитель наголошує на тому, шо наприкінці розв'язання ми займалися відшуканням показника степеня, до якого треба піднести число 3, щоб отримати число 243. Після цього він формулює означення логарифма, вводить позначення і записує: $\log_3 243 = 5$.

10. Перед означенням **логарифмічного рівняння** можна запропонувати класу таке запитання: *чи існує число, логарифм якого удвічі менший за логарифм (за тією ж основою) половини цього числа?*

Позначивши шукане число через x, вчитель з класом складає рівність $\log_a x = \frac{1}{2} \log a \frac{x}{2}$ або $2 \log_a x = \log_a x - \log_a 2$, яка після простих перетворень набуває вигляду $\log_a x - \log_a 2 = 0$ або $\log_a 2x = 0$. З останньої рівності випливає $2x = 1$, тобто $x = \frac{1}{2}$.

Після цього дається означення логарифмічного рівняння і зазначається, що одне з таких рівнянь щойно розв'язане.

11. **Теоремі про три перпендикуляри** може передувати така вправа.

Нехай основа AB рівнобедреного $\triangle ABC$ (рис. 8) лежить у площині α, причому його медіана CD є похилою до цієї площини, а $\triangle ABC_1$ є ортогональною проекцією $\triangle ABC$ на площину α. Що треба з'ясувати, щоб встановити рівнобедреність $\triangle ABC_1$?

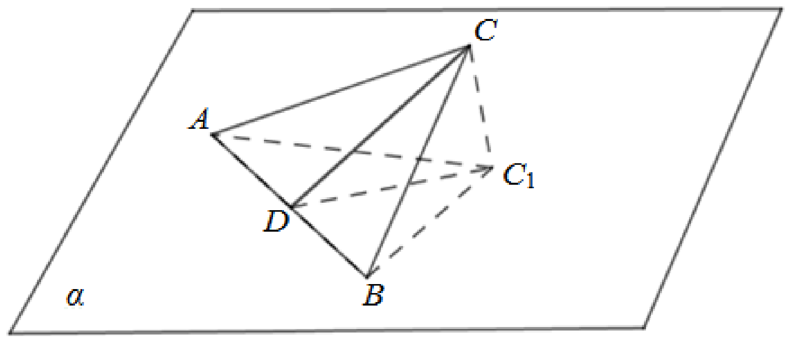


Рис. 8

Заключне зауваження. Щоб майбутній учитель призвичаївся до думки про необхідність мотивації в школі, треба посилити мотивацію у вищих навчальних закладах, які готують учителів математики. Наведемо один приклад.

Перед формулюванням теореми Больцано–Коші (*якщо неперервна на відрізку функція набуває на його кінцях значень з різними знаками, то вона в якійсь точці цього відрізка набуває значення нуль*) варто поставити до аудиторії таке запитання: *чи вірно, що один з коренів рівняння* $2x^5+x^2-1=0$ *більший за 0 і менший за 1?*

Викладач пропонує розглянути неперервну функцію $y = 2x^5 + x^2 - 1$ і переконатися, що при $x = 0$ вона набуває від'ємного значення, а при $x = 1$ – додатного. Оскільки графік цієї функції – суцільна крива, він повинен перетнути вісь абсцис десь між 0 і 1. Тому відповідь на поставлене запитання: вірно. Нарешті, лектор підкреслює, що все це слід строго обгрунтувати, і переходить до формулювання та доведення теореми Больцано–Коші.

§2. Створення на уроці умов для підвищення пізнавальної активності всіх учнів

Одночасно з проблемними дітьми в одному класі навчаються здібні й обдаровані діти. Сам факт їхньої взаємодії в одному класі, коли навчальний матеріал викладають за єдиною програмою для всіх, уже є серйозною психологічною проблемою. Для розв'язання цієї проблеми можна було б запровадити на уроках нові форми роботи, які мали б реабілітаційну спрямованість.

Тому центральне завдання корекційно-розвивальної діяльності – забезпечення кожної дитини індивідуальною траєкторією розвитку з урахуванням її психофізіологічних особливостей, здібностей та нахилів – можна розв'язати тільки за тісної співпраці з учителями, проводячи спільні заняття.

Мета організації навчальної діяльності учнів "групи ризику" під час таких занять – сприяти виникненню бажання вчитися (це можливо, якщо вони зможуть узяти посильну участь у виконанні спільного завдання), розумінню, що будь-яку роботу важливо виконувати із зацікавленістю й відповідно до вимог, які перед ними ставлять. Тобто зовсім інший підхід: на першому місці не надання знань із навчальних тем, а прагнення зацікавити самим процесом навчання, інтегрувати в суспільство.

Основні вимоги до проведення інтегрованих занять:

– використовувати ігрові способи організації виконання навчальних завдань, а також оцінювання навчальної діяльності учнів;

– формувати розумові дії школярів (орієнтувально-дослідницькі дії, оцінювання, аналіз, узагальнення, порівняння, планування) на всіх етапах навчального процесу;

– спонукати до мовної активності, здійснювати контроль за мовленням дітей;

– установлювати більш повільний темп навчання;

– використовувати багатократні модифікаційні повторення матеріалу;

– максимально використовувати збережені психічні функції дитини;

– розчленовувати діяльність на окремі складові частини, елементи, операції, допомагати дітям усвідомлювати їх у внутрішньому співвідношенні одне до одного;

– використовувати вправи, спрямовані на розвиток уваги, пам'яті, уяви, будуючи їх на матеріалі уроку.

Зацікавити дітей самим процесом навчання, показати успішність кожного зусилля в здобутті знань із предмета допоможуть прийоми мотивації навчального процесу.

2.1. Деякі прийоми роботи з учнями-гуманітаріями

Важливо зробити зміст навчання школярів таким, щоб у голові учня зосереджувалася не маса уривків знань, невідомих подій, епох, формул, а образи, які навчать його розуміти, що є добро, зло, честь, порядність.

Саме уроки з математики дають виключні можливості прищеплювати учням-гуманітаріям інтерес до творчих пошуків, виховувати в них бажання аналізувати, проводити аналогії, зіставляти факти, робити припущення, висувати гіпотези та ін. Справді, пошук різноманітних способів розв'язування нестандартних задач, нестандартних розв'язань традиційних задач, аналіз змісту теорем, бесіди про видатних учених, проведення аналогій між математичними та філологічними фактами - усе це є важливими складовими на шляху розвитку творчих здібностей учнів-гуманітаріїв на уроках математики. Одним із найважливіших моментів удосконалення методики навчання математики учнів суспільно-гуманітарного напряму є організація евристичної діяльності, оскільки така діяльність повною мірою готує майбутнього випускника середньої школи до сучасного сприйняття світу та надає можливість через набуття евристичних умінь побудувати модель гармонійно розвинутої особистості [5].

Розглянемо **прийоми організації мотивації** учнів-гуманітаріїв як на вивчення математики взагалі, так і на вивчення певних тем курсу.

Наприклад, однією з головних змістових ліній курсу "Математика" в профільній школі є функціональна лінія. Тому вивчення курсу починається з теми "Функції, їхні властивості та графіки" – його фундаменту.

Мотиваційним заходом у цьому плані в гуманітарних класах може бути використання приказок та прислів'їв, які розглядаються як ілюстрації деяких залежностей. Наприклад:

1. "*Як у лісі гукнеш – така й луна буде*", "*що посієш – те й пожнеш*", "*чим далі в ліс, тим більше дров*", "*як ми вбрані – в такій ми й шані*" - ілюструють пряму пропорційність.

2. "*Скільки вовка не годуй, а він у ліс дивиться*" – сталу функцію.

3. "*Високо літаєш, а низько впадеш*", "*де найбільше порадників – там найменше каші*", "*тіло старішає – хвороби молодшають*" – обернену пропорційність.

У процесі роботи з пошуку таких філологічних речень учні для розпізнавання функцій використовують різноманітні евристичні прийоми, а саме: аналіз, зіставлення, порівняння, модифікацію та ін.

Під час організації уроку перевагу варто надавати задачам на дослідження, встановлення закономірностей, а також задачам, які вимагають нешаблонного, оригінального евристичного мислення. Ніщо так не активізує евристичну діяльність учнів, як вдало створена практична проблемна ситуація.

Приклад. *На відпочинку в Таїланді юнак скуштував екзотичну страву на ринку. В його кров потрапив один мікроб, який відразу почав розмножуватися шляхом ділення навпіл через кожну годину. Скільки мікробів буде в крові юнака через добу? Через який час у крові юнака буде мільйон мікробів?*

Така задача може бути використана для підведення учнів під поняття показникової функції та показникового рівняння.

Для учнів суспільно-гуманітарного напряму корисною буде і така задача: *під час передвиборної кампанії кожен кандидат обирає собі в помічники двох довірених осіб. Кожна з довірених осіб протягом наступного дня, проводячи агітаційну роботу, залучає в команду цього кандидата ще по одній людині. Наступного дня агітаційна робота проводиться вже командою в 4 особи. Що станеться з командою кандидата, якщо цю роботу продовжити за тією самою схемою? Якщо цю роботу продовжити, за яким законом буде рости команда кандидата?*

Корисно також знаходити завдання на мотивацію, що пов'язані з найцікавішими для гуманітаріїв проблемами. Таким зв'язком можна вважати, наприклад, поему Ліни Костенко "Зоряний інтеграл" з темою "Інтеграл". Учням пропонується прослухати уривок з поеми та відповісти на запитання:

1. Чому поетеса назвала життя "зоряним інтегралом"?
2. Як це – "життя оперує безконечно малими"?
3. Як у математиці і в поемі – "душа обчислює суму площ"?

Наступним етапом, який підлягає розгляду, є етап **вивчення нового матеріалу**. Для учнів гуманітарного напряму тут важливо організовувати евристичні діалоги. Успішне їх застосування приводить до свідомого сприйняття, осмислення і запам'ятовування учнями навчального матеріалу, сприяє пошуку нової теорії самими учнями.

Наприклад, щоб учні змогли "відкрити" поняття логарифма, вчитель пропонує такі завдання.

Завдання 1. Розв'яжіть рівняння:

а) $2^x = 32$; б) $2^x = 48$; в) $2^x = 5$; г) $ax = N (a > 0, a \neq 1, N > 0)$.

Учні швидко визначають корені перших двох рівнянь, але під час розв'язування третього рівняння у них виникають труднощі.

Учитель: Таким чином, ми підійшли до необхідності введення нового поняття, яке означало б ... показник степеня x, до якого треба піднести основу a, щоб отримати число N.

Такий показник степеня x, до якого треба піднести основу a, щоб получити число N, називається логарифмом числа N при основі a.

Введемо позначення для введеного поняття: $\log_a N$.

Учень: Тоді рівняння $a^x = N$ має корінь $x = \log_a N$?

Учитель: Так, правильно, але чи для любого N існуватиме $\log_a N$?

Учень: Ні, a^x – показникова функція, вона набуває лише додатних значень.

Далі розглядаються обмеження на a і N.

Учитель: Як ви вважаєте, чи завжди рівняння $a^x = N$ має корені?

Учні: Не завжди, по-перше, показникові рівняння ми розглядаємо тільки при $a > 0$ і $a \neq 1$, по-друге, при $N < 0$ вони не мають коренів.

Учитель: Отже, ми ввели поняття $x = \log_a N$ – корінь рівняння $a^x = N$, але таке рівняння не завжди матиме корінь. Який можна зробити висновок?

Учні: Вираз $\log_a N$ не завжди матиме значення. $\log_a N$ існує при $a > 0$,

$a \neq 1$ та $N > 0$.

Після цього можна запропонувати учням виконати вправи на розпізнавання об'єкта, виведення наслідків із приналежності об'єкта поняттю, доповнення умов.

Завдання 2. Які рівняння розв'язані правильно?

1) $3^x = 29,\ = \log_3 29$;

2) $3^x = 29,\ = \log_{29} 3$;

3) $3^x = -29,\ = \log_3(-29)$;

4) $29^x = 3,\ = \log_3 29$;

5) $29^x = 3,\ = \log_{29} 3$;

6) $x^3 = 29,\ = \log_3 29$.

Управляючи евристичною діяльністю, учням надають різнорівневі підказки: евристичні, алгоритмічні чи повне розв'язання. На етапі засвоєння теоретичного матеріалу спочатку надається корекція до вправи та виконується колективна робота з класом. При розв'язуванні системи завдань на розпізнавання об'єктів формуються уміння аналізувати, порівнювати, зіставляти і протиставляти.

Завдання 3. Оберіть із наведених тверджень 1) – 3) правильні.

1) а) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 1$; б) $\log_a a = 1$; в) $\log_a a = 1$, $a > 0$, $a \neq 1$;

2) а) $\log_{\sqrt{2}} 2 = -1$; б) $\log_{\sqrt{2}} 2 = \dfrac{1}{2}$; в) $\log_{\sqrt{2}} 2 = 2$;

3) а) $\log_{\sqrt[3]{2}} 2 = 3$; б) $\log_{\sqrt[3]{2}}(-2) = 3$; в) $\log_{\sqrt[3]{-2}} 2 = -3$.

Корекція до вправи. Зверніть увагу на визначення логарифма та на обмеження його параметрів.

Завдання 4. Обчисліть значення виразу:

1) $\log_{\sqrt{5}+1}\left(26 + 2\sqrt{5}\right)$; 2) $\log_{1-\sqrt{5}}\left(26 - 2\sqrt{5}\right)$; 3) $\log_{|1-\sqrt{5}|}\left(26 - 2\sqrt{5}\right)$.

Корекція до вправи. Зверніть увагу на вирази під знаком логарифму: їх можна представити у вигляді повних квадратів; а також на числові значення основ логарифмів.

Завдання 5. Укажіть, у яких випадках вираз $\log_a N$ має значення.

1) $a \geq 0, N \geq 0;$

2) $a > 0, a \neq 1, N > 0;$

3) $a > 1, N > 0;$

4) $a > 0, a \neq 1, N \geq 0;$

5) $a < 0, N > 0;$

6) $a \neq 1, N > 0;$

7) $a > 2, N > 3;$

8) $a > 0, a \neq 1, N < 0;$

9) $a \geq 0, a \neq 1, N > 0.$

Корекція до вправи. Зіставте дані умови з обмеженнями на параметри логарифма.

Наступним етапом навчального процесу є організація сприйняття, усвідомлення учнями і закріплення в їхній пам'яті первинної інформації, тобто **засвоєння початкових знань** і **формування навчальних умінь**.

Наприклад, для формування вміння за графіком "читати" властивості функції треба використовувати такі евристики, як аналіз, порівняння, розпізнавання, систематизація та ін.

Використовуючи міжпредметні зв'язки математики з іншими науками, вчитель висуває проблеми на кожному уроці, які пов'язують математику з іншими предметами. Цілісного розуміння світу можна досягти на основі синтезу науки з філософією, етикою, естетикою, технікою, з урахуванням міфологічних, релігійних, художніх та інших форм сприйняття і відображення природної реальності. Це дає змогу забезпечити цілісність навчання математики, можливість концентрації навчальної діяльності на певному відрізку часу навколо невеликої кількості понять і фактів, забезпечити природні внутрішні та міжпредметні зв'язки тощо.

Різноманітний і багатий матеріал у прислів'ях та приказках можна знайти під час вивчення теорії ймовірностей та статистики. Наприклад, вправи на порівняння ймовірностей подій можна побудувати на прикладі приказок. "*Перший млинець грудкою*" та "*При семи няньках дитя без догляду*".

Подія з більшою ймовірністю описана першою приказкою, бо найчастіше під час смаження першого млинця сковорода ще недостатньо розігріта; а ось друга приказка змальовує подію з меншою ймовірністю, оскільки дитина все ж таки під пильним наглядом (якщо не враховувати випадок, що кожна з няньок перекладатиме свої обов'язки на інших).

Під час управління діяльністю учнів учитель організовує роботу з формування певних евристичних умінь, які сприяють самореалізації учня, оволодінню основними евристичними прийомами.

Так, наприклад, у процесі вивчення теми "Інтеграл та його застосування" до евристичних умінь можна віднести такі:

– досліджувати задачі теоретичного характеру при обчисленні площі підграфіка за допомогою формули Ньютона-Лейбніца;

– модифікувати задачі, в яких необхідно для функції знайти первісну, графік якої проходить через задану точку;

– переходити до рівносильної задачі під час розв'язання прикладних задач;

– розбивати "ціле на частини" під час обчислення площі фігури;

– виділяти підзадачу при знаходженні первісної, яка задовольняє початкову умову.

Задача 1. Точка рухається прямолінійно зі змінною швидкістю $V = 10t$ м/с; за перші 4 с вона пройшла 80 м. Знайдіть закон руху точки.

Задача 2. Продуктивність праці бригади робітників протягом зміни визначається формулою $f(t) = -2t^2 + 24t + 110$, де t – робочий час у годинах. Визначте обсяг продукції, виготовленої за 5 робочих годин.

Евристична підказка: Переформулюйте задачу, застосовуючи фізичний зміст інтегралу.

Переформулювання задачі можна здійснити, враховуючи фізичний зміст похідної:

– задача 1: закон руху $s = s(t)$, де $s(t)$ – первісна для закону зміни швидкості $v = v(t)$;

– задача 2: обсяг випуску продукції є первісною від функції, що виражає продуктивність праці.

Для оволодіння евристичним прийомом розбиття "цілого на частини" можна пропонувати учням-гуманітаріям задачу: *знайти площу фігури, обмеженої графіками функцій* $y = x^2$ *і* $y = 4x - x^2$.

Оскільки отримана фігура не відповідає означенню підграфіка функції, можна розбити її на дві частини. А площу заданої фігури обчислити як різницю "розбитих" частин.

2.2. Інтегровані уроки в основній школі

Інтеграція – це процес і результат створення нерозривно пов'язаного, єдиного, суцільного. У навчанні вона здійснюється шляхом злиття в одному синтезованому курсі елементів різних навчальних предметів, підсумовування основ наук у розкритті комплексних навчальних тем і проблем.

Тенденція інтеграції не тільки проникає в структуру предметних знань і побудову програм, а й охоплює форми організації навчальної роботи (інтегрований день, комплексні заняття, бінарні уроки, навчальні дослідницькі центри, учнівські конференції та міжпредметні семінари з комплексних проблем, учнівські вечори, конкурси, вікторини на міжпредметному матеріалі, учнівські реферати з використанням матеріалу кількох суміжних предметів тощо).

В основі інтеграції можуть лежати найрізноманітніші взаємозв'язки: міжпредметні, внутрішньопредметні, внутрішньогалузеві, взаємозв'язки методів тощо.

Міжпредметні зв'язки (МЗ) – це провідний дидактичний інструмент інтеграції. Модель міжпредметних зв'язків структорована і має такі складові: зміст, обсяг, спосіб зв'язків.

Здійснюючи інтеграцію через міжпредметні зв'язки, треба знайти смислові відповідності елементів змісту навчального матеріалу, що належить двом чи більше дисциплінам, спланувати комплексне використання знань під час розв'язування навчальних завдань, поєднаних інформацєю так, щоб її визначала багатогранна єдність.

Такий підхід до підготовки уроків з використанням міжпредметних зв'язків відповідатиме найвищим принципам інтеграції.

Залучення школярів до реалізації міжпредметних зв'язків – досить важливий аспект, якому варто приділити належну увагу. Незалежно від форми організації навчальної роботи (переважно це урок), потрібно дотримуватись основних дидактичних вимог:

1) урок повинен мати чітко сформульовану мету (що може потребувати залучення знань з інших предметів);

2) має бути забезпечена висока активність школярів у застосуванні рі-

знобічних знань;

3) здійснення МЗ має бути спрямоване на пояснення причинно-наслідкових зв'язків, суті досліджуваних понять та явищ;

4) міжпредметний урок має містити висновки світоглядного узагальненого характеру, які спираються на зв'язок знань з різних предметів; учні можуть усвідомити їхню об'єктивність, лише переконавшись у необхідності залучення таких знань;

5) урок завжди має бути спрямований на узагальнення певних розділів навчального матеріалу суміжних курсів, отже, можливі комплексні домашні завдання, узагальнювально-повторювальні уроки, уроки-лекції, семінари, екскурсії тощо;

6) урок має сприяти формуванню позитивного ставлення до навчання, чого можна досягти встановленням зв'язку міжпредметних пізнавальних завдань з життям, із практичною діяльністю учнів; виконанням практичних робіт на міжпредметній основі; використанням наочних посібників з інших предметів, науково-популярної літератури, яка розкриває досягнення сучасної науки та має міжпредметний характер тощо.

Інтегрування математики в інші науки завжди залежало від рівня розвитку самої математичної науки. Чим більше розвивалася математика, тим більше її використовували в інших галузях науки, наприклад у фізиці, хімії, біології, географії тощо. Так, на сьогоднішній день існує вагомий перелік інтегрування математичних знань з предметами навчального плану і можливостей застосування цих знань в інших наукових галузях.

Математика потрібна всім. Важко знайти таку галузь людської діяльності, де можна було б обійтися без неї, причому з часом діапазон її практичного застосування збільшується.

Нині все більше і більше професій потребують високого рівня знань і застосування математики. Математика так стрімко розвивається, що передбачити, якою вона стане у майбутньому, неможливо. Зрозуміло одне – вона буде ще кориснішою і потрібнішою людям.

Шлях до вершин математики починається з дитинства, бо саме у цьому віці, цікавлячись буквально всім, діти роблять перші кроки у пізнанні математики. Більшість дітей, прийшовши до школи, вже вміють лічити і писати, розв'язувати найпростіші задачі і бажають дізнатися про математику більше. На перших етапах навчання підтримувати інтерес до математики допомагає наявність великої кількості привабливого унаочнення, набори різних геометричних фігур і предметів навколишньої діяльності. Однак з часом інтерес до математики (зацікавленість математикою) зменшується, зокрема і тому, що з'являється велика кількість нових понять, означень, тверджень, не настільки простих, як раніше, і збагнути їх не всім під силу.

Інтерес до цієї науки буде зростати, коли допомагати дітям пізнавати математику не тільки як саму науку, а в сукупності з іншими предметами.

Так, наприклад, музика не може обійтися без нот, кожна з яких має свою тривалість. Відчути тривалість нот "раз – і – два – і – три – і – ...", називаємо початок натурального ряду. А такі назви тривалостей нот, як "половина", "четвертна", "восьма", "шістнадцята" і т. д. схиляють до думки про існування безпосереднього зв'язку між музикою і математикою. І це лише найпростіші приклади.

Деякі музичні терміни можна пояснити за допомогою математики, провівши аналогію. Наприклад, коли мелодію, яку співають у два голоси, записати нотами, то з точки зору геометрії другий голос є не що інше, як паралельне перенесення першого. Доведено, що діти, які займаються музикою, легше засвоюють математику, зокрема геометрію. Це тому, що навчання музики пов'язане з розумінням, запам'ятовуванням, читанням нотних текстів, що складаються переважно із символів. Навички, сформовані у такий спосіб, полегшують засвоєння математичної символіки. Крім цього, у дітей, які цікавляться музикою, добре розвинуті просторова і творча уяви, інтуїція.

Найяскравішим прикладом поєднання математики і музики є дослідження Піфагора, якого всі знають як видатного математика, автора відомої теореми. А те, що він був ще й прекрасним музикантом, відомо далеко не всім.

Піфагор уперше математично описав звук. Тому його цілком можна назвати "прадідом" акустики.

Інтегрування математики з інформатикою нині взагалі важко недооцінити. На уроках математики не можна обійтися без комп'ютерних програм, серед яких і тестові програми: "Площі фігур", "Площі поверхонь", "Об'єми тіл".

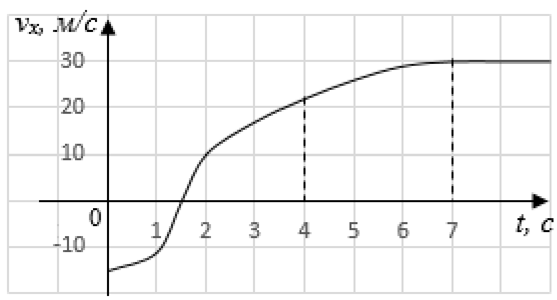
Розглядаючи тему "Масштаб у математиці", не можна не звернутися до географії, зокрема до теми: "Знаходження відстані між двома населеними пунктами (на карті й на місцевості)".

Інтегрування математики з фізикою прослідковується при вивченні теми "похідна" з темою "Швидкість, прискорення", "Арифметична прогресія". "Лінійна та квадратична функція". "Рівномірний рух, рівнозмінний рух".

§3. Формування цілісного світогляду учнів засобами інтеграції навчальних дисциплін

Вчителі математики не завжди враховують на своїх уроках особистий досвід учнів, здобутий у процесі вивчення фізики, не підкріплюють методи, застосовані на уроках фізики, математичним обґрунтуванням. Так, наприклад, на уроках фізики шлях (переміщення), пройдений тілом за певний час, обчислюють як площу фігури, що знаходиться нижче від графіка залежності швидкості (проекції вектора швидкості па координатну вісь) від часу. Такий спосіб розв'язання не має математичного обґрунтування (за виключенням рівномірного руху) на сторінках підручника фізики. Тому було б доцільно на уроках алгебри і початків аналізу 11 класу під час вивчення теми "Площа криволінійної трапеції" повернутися до цього питання. Розглянемо підбірку завдань з цього питання.

Задача 1. На рисунку подано графік залежності проекції швидкості тіла, яке рухається прямолінійно, від часу. Визначте переміщення тіла протягом останніх 3 с руху.

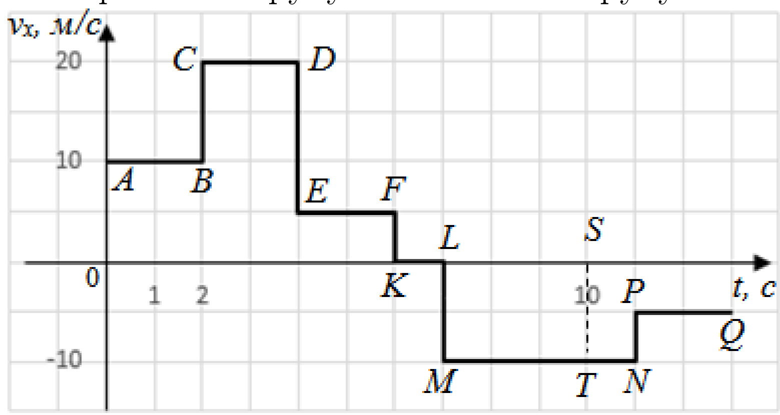


Розв'язання. Числове значення переміщення за останні 3 секунди дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої поданим графіком, прямими $t = 4$, $t = 7$ і віссю часу. Площу цієї фігури можна наближено обчислити за допомогою клітинок (площа однієї клітинки – 10) або як площу прямокутника.

Відповідь. ≈ 90 м.

Звісно, результат дістали наближений. До речі, такі задачі й прийоми обчислень стануть у пригоді під час підготовки до ЗНО.

Задача 2. На рисунку наведено графік залежності проекції вектора швидкості на вісь x від часу. Скориставшись графіком, визначте модуль переміщення тіла за перші 10 хв руху та за весь час руху.

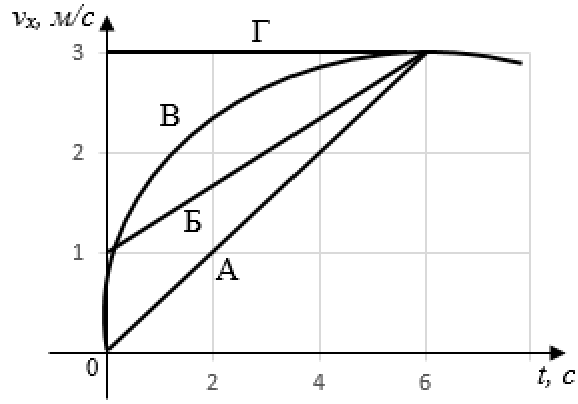


Розв'язання. Розглянувши рисунок, доходимо висновку, що перші 6 хвилин тіло рухалось у напрямі, який збігався з напрямом осі, наступну хвилину залишалося у стані спокою, а від сьомої хвилини почало рухатися у зворотному напрямі.

Тому модуль переміщення за перші 10 хвилин дорівнює 10 (різниці площ фігур $OABCDEFK$ і $LMTS$). А за весь час руху – 13 (різниці площі фігур $OABCDEFK$ і $LMNPQ$). Звичайно, при цьому звертаємо увагу на масштаб системи координат. Модуль переміщення за перші 10 хвилин дорівнює $(14-6)\cdot 300 = 2400$, а за весь час руху – $(14-10)\cdot 300 = 1200$ (м) (1 клітинка – 300 м).

Задача 3. (Фізика, ЗНО–2011)

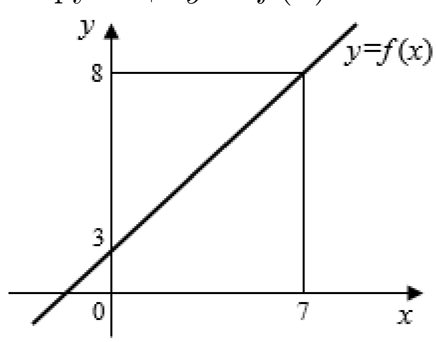
На рисунку зображені графіки залежності проекції швидкості v_x чотирьох тіл (А, Б, В, Г), що рухаються вздовж осі Ox, від часу t. Укажіть тіло, яке пройшло найбільший шлях за 6 с.



Розв'язання. Оскільки шлях, пройдений тілом, дорівнює площі відповідної фігури, очевидним є факт, що найбільший шлях за 6 с пройшло тіло Г.

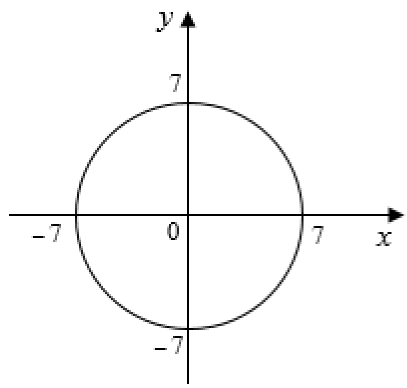
Серед завдань ЗНО з математики теж були запропоновані подібні задачі.

Задача 4. Обчисліть інтеграл $\int\limits_0^7 f(x)dx$, використовуючи зображений на рисунку графік лінійної функції $y = f(x)$.



Розв'язання. Значення інтеграла дорівнює площі відповідної трапеції, основи якої дорівнюють 3 та 8, а висота – 7. Отже, $\int\limits_0^7 f(x)dx = \dfrac{3+8}{2} \cdot 7 = 38,5$.

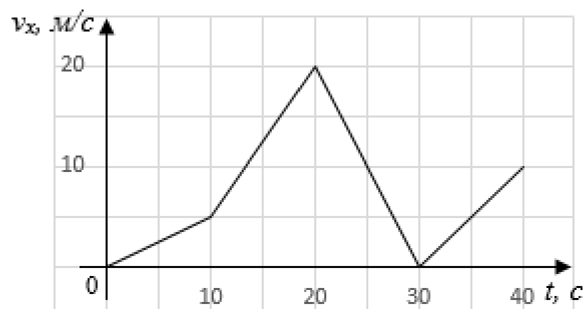
Задача 5. Обчисліть $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-7}^{0} \sqrt{49 - x^2}dx$, використовуючи рівняння кола $x^2 + y^2 = 49$, зображеного на рисунку.



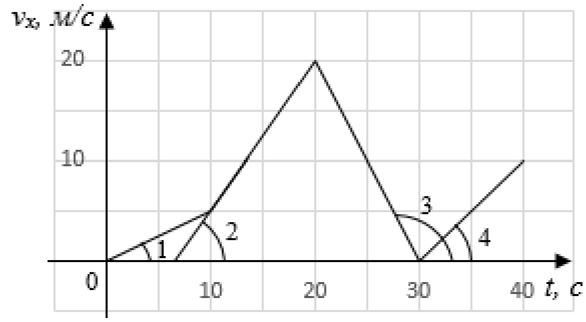
Розв'язання. Значення інтеграла дорівнює площі чверті круга радіуса 7, отже,

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-7}^{0}\sqrt{49-x^2}dx = \frac{1}{\pi}\cdot\pi\cdot 49\cdot\frac{1}{4} = 12,25.$$

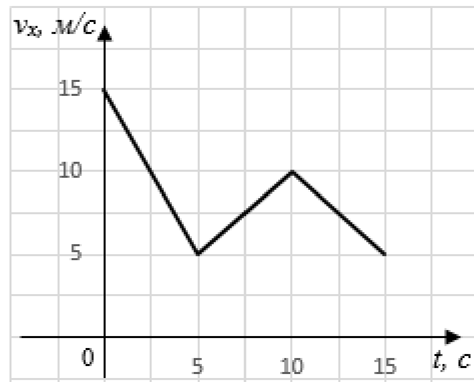
Задача 6. (ЗНО, фізика) На рисунку зображено графік залежності проекції швидкості V_x автомобіля від часу t за прямолінійного руху. Визначте інтервал часу, коли модуль прискорення є мінімальним.



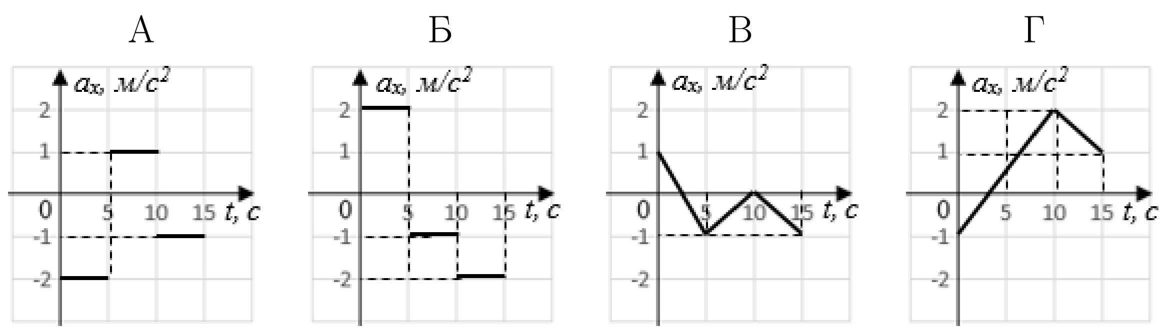
Розв'язання. Як відомо, прискорення є похідною швидкості й дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції, тобто тангенсу кута, який утворює дотична з додатним напрямом осі абсцис. Оскільки графік складається з прямолінійних відрізків, то дотичні збігаються із самими відрізками і для розв'язування задачі треба порівняти тангенси позначених кутів (використавши клітинки). Очевидно, що найменший модуль значення тангенса має кут 1, а отже, модуль прискорення є мінімальним від 0 до 20 с.



Задача 7. (ЗНО, фізика) Для прямолінійного руху за графіком залежності проекції швидкості тіла від часу визначте графік залежності проекції прискорення цього тіла від часу.



Варіанти відповідей



Розв'язання. Прискорення – це похідна швидкості. Якщо швидкість на проміжку від 0 до 5 спадає, то її похідна на цьому проміжку набуває від'ємних значень, на проміжку від 0 до 10 швидкість зростає, отже, похідна є додатною і на наступному проміжку – знову від'ємною. Таким умовам відповідає графік А.

Отже, інтеграція як процес пристосування й об'єднання розрізнених елементів у єдине ціле сприяє формуванню в учнів не тільки цілісного світогляду про навколишній світ, а й активізує їх пізнавальну діяльність, підвищує якість засвоєння навчального матеріалу та викликає інтерес до навчання.

§4. Алгебраїчні задачі на дослідження

Особливої актуальності на сучасному етапі набуває проблема всебічного розвитку учнівської молоді. Важливе значення для розв'язання цієї проблеми має забезпечення належного рівня математичної освіти в країні. Це пов'язано з тим, що шкільний курс математики має, як зазначено в Концепції базової математичної освіти в Україні, широкі, невичерпні можливості курсу для розвитку особистості, в першу чергу інтелектуального розвитку школярів, формування в них логічного мислення, просторових уявлень та уяви, алгоритмічної та інформаційної культури, вмінь встановлювати причинно-наслідкові зв'язки, обґрунтовувати висновки і моделювати ситуації.

Одним із найефективніших способів математичної підготовки учнів є розв'язування математичних задач. Математична задача – це будь-яка вимога обчислити, побудувати, довести або дослідити що-небудь, що стосується просторових форм чи кількісних відношень, або запитання, рівносильне такій вимозі. Відповідно до вимоги, що ставиться в умові задачі, серед математичних задач розрізняють чотири види: 1) на обчислення; 2) на побудову: 3) на доведення; 4) на дослідження.

Особливе місце серед математичних задач посідають задачі на дослідження. У процесі розв'язування таких задач в учнів формується особливий стиль мислення: повноцінність аргументації, дотримання логічної схеми міркувань, лаконічність вираження думок, чіткість і точність у вживанні термінів та символічних позначень. Підготовчу роботу з розв'язування задач на дослідження можна починати ще в молодших класах, що передбачено програмою. Адже коли учень відповідає на запитання "Чому?", "Скільки?", "За яких умов?", "Чи існує?" тощо, він активно міркує, обґрунтовує, досліджує.

Наведемо приклади таких задач для старших класів.

Приклад 1. Чи випливає з рівності $x_1^n = x_2^n$, що $x_1 = x_2$, коли: 1) n – парне: 2) n – непарне?

Приклад 2. За яких значень a сума $\log_a(\sin x + 2)$ та $\log_a(\sin x + 3)$ буде дорівнювати одиниці хоча б при одному значенні x?

Приклад 3. З'ясуйте: а) чи є друге рівняння наслідком першого; б) чи є ці рівняння рівносильними.

1) $2x^2 - 8x - 9 = 0$ і $x^2 - 4x - 4,5 = 0$;
2) $\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6} = 0$ і $x^2 = 4$.
Відповідь обґрунтуйте.

Задача 1. Дослідіть, чи при будь-якому значенні a сума многочленів

$$1,6a^5 - 1\frac{1}{3}a^4 - 3,4a^3 - 2a^2 - 1 \quad \text{і} \quad -1\frac{3}{5}a^5 - \frac{2}{3}a^4 + 3\frac{2}{5}a^3$$

набуває від'ємного значення.

Дослідження. Для дослідження складемо відповідну нерівність і розглянемо її.

$$\left(1,6a^5 - 1\frac{1}{3}a^4 - 3,4a^3 - 2a^2 - 1\right) + \left(-1\frac{3}{5}a^5 - \frac{2}{3}a^4 + 3\frac{2}{5}a^3\right) < 0;$$

$$\frac{8}{5}a^5 - \frac{4}{3}a^4 - \frac{17}{5}a^3 - 2a^2 - 1 - \frac{8}{5}a^5 - \frac{2}{3}a^4 + \frac{17}{5}a^3 < 0;$$

$$-2a^4 - 2a^2 - 1 < 0;$$

$$-2\left(a^4 + a^2\right) < 1;$$

$$a^4 + a^2 > -\frac{1}{2}.$$

Відомо, що $a^2 \geq 0$ і $a^4 \geq 0$, тоді $a^4 + a^2 \geq 0$. Тобто $a^4 + a^2 > -\frac{1}{2}$ виконується при будь-яких дійсних значеннях a.

Задача 2. Дослідіть, за яких значень a вираз $(a-1)(a-3)(a-4)\times$ $\times(a-6)+10$ є додатним числом?

Дослідження.

$$(a-1)(a-3)(a-4)(a-6)+10 = (a-1)(a-6)(a-3)(a-4)+10 =$$

$$= (a^2-7a+6)(a^2-7a+12)+10 = (a^2-7a+6)\big((a^2-7a+6)+6\big)+10 =$$

$$= (a^2-7a+6)+2\cdot 3(a^2-7a+6)+9+1 = (a^2-7a+6+3)^2+1 = (a^2-7a+9)^2+1.$$

Оскільки $(a^2-7a+9)^2 \geq 0$ – як квадрат деякого числа, то $(a^2-7a+$ $+9)^2+1>0$. Тобто $(a-1)(a-3)(a-4)(a-6)+10>0$ при будь-яких дійсних значеннях a.

Задача 3. Дослідіть, яких значень набуває x залежно від a у нерівності: $ax^2-2x+4>0$.

Дослідження. Маємо нерівність із параметром, від якого і буде залежати значення невідомого x. Прирівнюючи до нуля коефіцієнт при x^2 і дискримінант квадратного тричлена ax^2-2x+4, знаходимо перше і друге контрольні значення параметра: $a=0$ і $a=\dfrac{1}{4}$ (причому, якщо $a>\dfrac{1}{4}$, то $D<0$, якщо $a\leq\dfrac{1}{4}$, то $D\geq 0$). Далі будемо розв'язувати задану нерівність у кожному із 4 наступних випадків: 1) $a>\dfrac{1}{4}$; 2) $0<a\leq\dfrac{1}{4}$; 3) $a=0$; 4) $a<0$.

1) Якщо $a>\dfrac{1}{4}$, то тричлен ax^2-2x+4 має від'ємний дискримінант і додатний старший коефіцієнт. Це означає, що тричлен додатний при всіх x, тобто розв'язком нерівності у цьому випадку є множина всіх дійсних чисел.

2) Якщо $0<a\leq\dfrac{1}{4}$, то тричлен ax^2-2x+4 має наступні корені: $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4a}}{a}$, причому $\dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{a}\leq\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{a}$. Це означає, що розв'язком нерівності у цьому випадку є наступна сукупність: $x\in$

$\left(-\infty; \dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{a}\right) \cup \left(\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{a}; +\infty\right)$.

3) Якщо $a = 0$, то задана нерівність набуває наступного вигляду: $-2x + 4 > 0$, тобто $x \in (-\infty; 2)$.

4) Якщо $a < 0$, то маємо $\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{a} \leq \dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{a}$. Це означає, що в цьому випадку розв'язком нерівності є: $x \in \left(\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{a}; \dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{a}\right)$.

Відповідь. 1) якщо $a > \dfrac{1}{4}$, то $x \in \mathbb{R}$;

2) якщо $0 < a \leq \dfrac{1}{4}$, то $x \in \left(-\infty; \dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{a}\right) \cup \left(\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{a}; +\infty\right)$;

3) якщо $a = 0$, то $x \in (-\infty; 2)$;

4) якщо $a < 0$, то $x \in \left(\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{a}; \dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{a}\right)$.

Задача 4. Дослідіть, за яких значень a корені x_1 і x_2 рівняння $(3a+2)\times$ $\times x^2 + (a-1)x + 4a + 3 = 0$ задовольняють умову $x_1 < -1 < x_2$?

Дослідження. Нехай задано квадратний тричлен $f(x) = Ax^2 + Bx + C$; $A \neq 0$ з коренями x_1, x_2, причому $x_1 < x_2$. Нехай $x_1 < p < x_2$ (рис. 1).

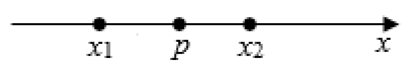


Рис. 1

Тут можливі випадки:

а) $A > 0$, тоді вітки відповідної параболи $y = Ax^2 + Bx + C$ будуть напрямлені вгору (рис. 2).

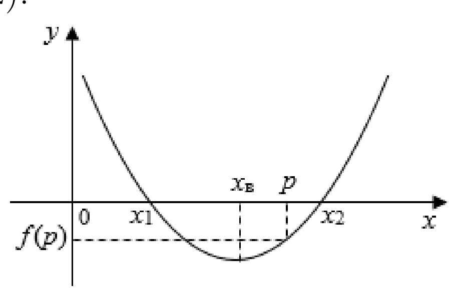


Рис. 2

Тоді має виконуватися відповідна умова: $f(p) < 0$.

б) $A < 0$, тоді вітки відповідної параболи $y = Ax^2 + Bx + C$ будуть напрямлені вниз (рис. 3).

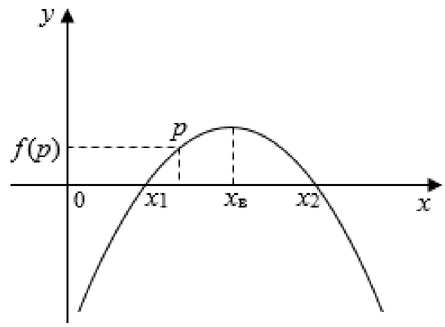


Рис. 3

Тоді має виконуватися відповідна умова: $f(p) > 0$.

Якщо об'єднати випадки а) і б), отримаємо загальну умову: $A \cdot f(p) < 0$.

Користуючись отриманою нерівністю, можна записати таке:

$$(3a + 2) \cdot f(-1) < 0;$$

$$(3a + 2)(3a + 2 - a + 1 + 4a + 3) < 0;$$

$$(3a + 2)(6a + 6) < 0;$$

$$\left(a + \frac{2}{3}\right)(a + 1) < 0.$$

Отже, $a \in \left(-1; -\frac{2}{3}\right)$.

Відповідь. $a \in \left(-1; -\frac{2}{3}\right)$.

Задача 5. Дослідіть, при яких значеннях параметра a рівняння $x^2 + x + 4a = 0$ і $a^2x^2 + ax + 4a = 0$ мають спільний дійсний корінь.

Дослідження. Якщо нам потрібно знайти спільні корені двох рівнянь, то слід перейти до розв'язування системи цих рівнянь. Тобто ми отримаємо систему двох рівнянь з двома невідомими a і x.

$$\begin{cases} x^2 + x + 4a = 0, \\ a^2x^2 + ax + 4a = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + x - a^2x^2 - ax = 0, \\ x^2 + x + 4a = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-1)\,(x(1+a)+1)\,x = 0, \\ x^2 + x + 4a = 0. \end{cases}$$

Остання система рівносильна сукупності трьох систем:

а) $\begin{cases} a - 1 = 0, \\ x^2 + x + 4a = 0. \end{cases}$

Ця система розв'язків не має.

б) $\begin{cases} x = 0, \\ x^2 + x + 4a = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0, \\ a = 0. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + ax + 1 = 0, \\ x^2 + x + 4a = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{1+a}, \\ \left(\dfrac{-1}{1+a}\right)^2 - \dfrac{1}{1+a} + 4a = 0. \end{cases}$

Ця система матиме зміст при всіх a, що $a \neq -1$.

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{1+a}, \\ a\left(4a^2 + 8a + 3\right) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{1+a}, \\ 4a\left(a + \dfrac{3}{2}\right)\left(a + \dfrac{1}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

Очевидно, що ця система має три розв'язки вигляду $(x; a)$: $(-1; 0)$, $\left(-2; -\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-2; -\dfrac{3}{2}\right)$.

Відповідь. Рівняння мають спільний дійсний корінь при $a = 0$; $a = -\dfrac{1}{2}$ і $a = -\dfrac{3}{2}$.

§5. Шукаємо нові підходи та ідеї при розв'язуванні задач

У навчально-методичній літературі можна знайти багато цікавих розробок уроків, у яких використовують поєднання, взаємопроникнення різних предметів, наприклад математики й економіки, математики й мистецтва, математики й географії, біології, історії, поезії, музики... Але не менш цікавими є взаємодоповнення і в самій математиці.

Задача 1. Розглянемо завдання, яке привернуло увагу незвичним підходом до розв'язання (задачу наведено в [6]): відомо, що $m^2 + n^2 = 1$, $p^2 + q^2 = 1$, $mp + nq = 0$. Обчисліть: $mn + pq$.

Тригонометричний метод розв'язування

Нехай $m = \sin\alpha$, $n = \cos\alpha$, $p = \sin\beta$, $q = \cos\beta$, тоді

$$mp + nq = \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha - \beta).$$

З умови випливає, що $\cos(\alpha - \beta) = 0$.

Отже,

$$mn + pq = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) =$$

$$= \sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = 0.$$

Відповідь. $mn + pq = 0$.

Неочікувана інтеграція різних розділів математики наштовхнула на таке розв'язання.

Векторний метод розв'язування

Нехай $\vec{a}(m; n)$, $\vec{b}(p, q)$, $|\vec{a}| = \sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{1} = 1$, $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{p^2 + q^2} = \sqrt{1} = 1$.

Оскільки за умовою $mn + pq = 0$, тобто скалярний добуток дорівнює нулю, то $\vec{a} \perp \vec{b}$. Отже, вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – одиничні і перпендикулярні, тобто їх можна вважати ортами, тоді $\vec{a}(1;0)$, $\vec{b}(0;1)$. Тоді дістанемо: $mn + pq = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$.

Два неочікуваних розв'язання викликають запитання: як ще можна розв'язати цю задачу? що нагадують рівності в умові задачі? які розділи математики можна застосувати? А ще спадає на думку, що $m^2 + n^2 = 1$ нагадує теорему Піфагора. Отже, з'являється геометричне розв'язання.

Геометричний метод розв'язування

Оскільки в умові $mp + nq = 0$, тобто $mp = -nq$, то розглянемо модулі величин m, n, p, q.

За умовою $m^2+n^2 = 1$, $p^2+q^2 = 1$, отже, $|m|$ і $|n|$, $|p|$ і $|q|$ можна вважати катетами прямокутних трикутників зі спільною гіпотенузою, що дорівнює 1 (рис. 1).

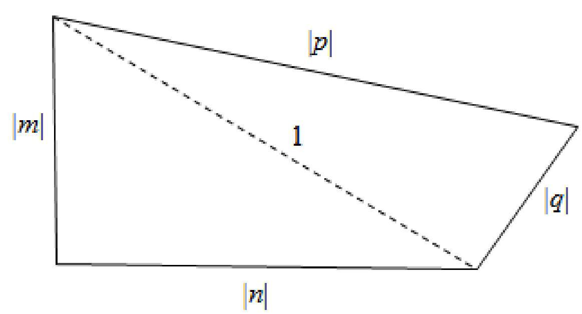


Рис. 1

Запишемо рівність $|m| \cdot |p| = |q| \cdot |n|$ у вигляді

$$\frac{|m|}{|q|} = \frac{|n|}{|p|}.$$

Дістанемо, що відповідні катети прямокутних трикутників пропорційні, отже, ці трикутники подібні з коефіцієнтом подібності, що дорівнює 1 (у трикутників спільна гіпотенуза). Маємо:

$$|m| = |q|, \quad |p| = |n|.$$

Оскільки $mp = -nq$, то або m і q, або p і n мають різні знаки, що дає нам можливість стверджувати, що $mn + pq = 0$.

Якщо ще раз звернутися до умови й уважно до неї придивитися, то можна помітити, що $m^2 + n^2 = 1$ і $p^2 + q^2 = 1$ – рівняння, що задають одне й те саме коло на площині з центром у початку координат і радіусом, що дорівнює 1, у системі координат mOn і pOq.

Координатний метод розв'язування

Як було зазначено в попередньому розв'язанні, з рівності $mp = -nq$ випливає, що або m і q, або n і q мають різні знаки. Нехай для визначеності $n = -q$, тоді коло в зазначених системах координат матиме вигляд як на рис. 2.

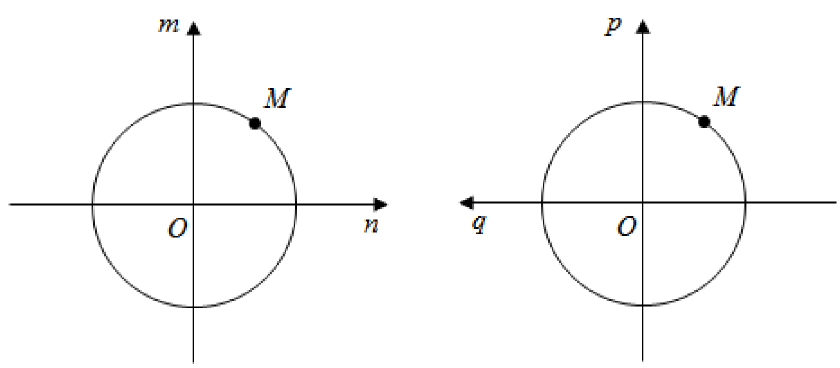


Рис. 2

Позначимо на колі точку M і запишемо її координати. У системі координат mOn точка $M(n_1; m_1)$, а в системі координат pOq точка $M(q_1; p_1)$. Але це одна й та сама точка, отже, $n_1 = -q_1$, $m_1 = p_1$. Оскільки точка M – довільна точка кола, то $mn + pq = 0$.

Пригадаємо, що завдання алгебраїчне, тоді його розв'язання може на-бути такого вигляду.

Алгебраїчний метод розв'язування

Дано:

$$\begin{cases} m^2+n^2=1, \\ p^2+q^2=1, \\ mp+nq=0. \end{cases}$$

Обчисліть: $mn+pq=0$.

Маємо:

$$m=-\frac{nq}{p},$$

$$n^2+m^2=n^2+\frac{n^2q^2}{p^2}=\frac{n^2p^2+n^2q^2}{p^2}=\frac{n^2\left(p^2+q^2\right)}{p^2}=\frac{n^2}{q^2},$$

звідки $p^2=n^2$.

Аналогічно дістанемо, що $q^2=m^2$.

Отже, $(p-n)(p+n)=0$ і $(q-m)(q+m)=0$.

Якщо $p+n=0$, то $p=-n$, отже,

$$m=q \quad \text{і} \quad mn+pq=0.$$

Якщо $p-n=0$, то $p=n$, отже,

$$m=-q \quad \text{і} \quad mn+pq=0.$$

Аналогічно розглянемо випадки, якщо

$$q-m=0 \quad \text{і} \quad q+m=0.$$

А якщо просто поміркувати?

Логічний метод розв'язування

Виходячи з умови задачі, припустимо, що $m=q=0$, тоді $n=\pm1$ і

$p = \pm 1$. Ці значення m, n, p і q задовольняють усі три рівності умови, і тоді $mn + pq = 0$.

Варіант розв'язання міг бути й таким: $n = p = 0$, тоді $m = \pm 1$ і $q = \pm 1$, або таким: нехай $m = 0,6$, $n = 0,8$, тоді

$$0,36 + 0,64 = 1 \quad \text{і} \quad \begin{cases} 0,6p + 0,8q = 0, \\ p^2 + q^2 = 1. \end{cases}$$

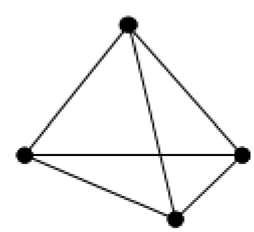
$$p = \frac{-0,8q}{0,6} = -\frac{4q}{3}, \quad \frac{16q^2}{9} + q^2 = 1,$$

звідки $q = \pm\frac{3}{5}$. Знаходимо $p : p = \mp\frac{4}{5}$, Підставивши одержані значення у вираз $mn + pq$, дістанемо: $mn + pq = 0$.

У який би спосіб ми не розв'язували цю задачу, щоразу мали б неочікуване і красиве розв'язання. Отже, потрібно ознайомлювати учнів із цією різноманітністю розв'язань, і нехай вони вибирають ті методи, які їм подобаються, захоплюють і залишають у душі відчуття прекрасного.

Задача 2. Із шести сірників можна скласти два рівносторонніх трикутники. Із тих самих шести сірників складіть чотири таких трикутники.

Відповідь. Із шести сірників можна скласти фігуру, зображену на рисунку.



Нова ідея полягає в переході від двовимірного простору до тривимірного.

Задача 3. Чи існує натуральне число n, при якому число $4n^3 + 6n^2 +$

$+4n+1$ є простим?

Розв'язання. Переформулюємо задачу так: при якому натуральному значенні n задане число буде складеним?

$$4n^3+6n^2+4n+1=4n^3+2n^2+4n^2+4n+1=$$

$$=2n^2(2n+1)+(2n+1)^2=(2n+1)\left(2n^2+2n+1\right).$$

Оскільки $2n+1\neq 1$, $2n^2+2n+1\neq 1$, то задане число буде складеним при будь-якому натуральному n.

Відповідь. Не існує. Нова ідея полягає в переформулюванні задачі.

Задача 4. Чи є число

$$\sqrt{2011\cdot 2012\cdot 2013\cdot 2014+1}$$

цілим?

Розв'язання. Покладемо $2011=n$, Тоді заданий числовий вираз набуває вигляду:

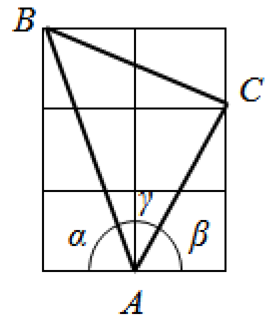
$$\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1}=\sqrt{\left(n^2+3n\right)\left(n^2+3n+2\right)+1}=$$

$$=\sqrt{\left(n^2+3n+1\right)^2}=n^2+3n+1=2011^2+3\cdot 2011+1.$$

Нова ідея полягає у використанні ідеї узагальнення.

Задача 5. Обчисліть найбільш раціональним способом: arctg1+arctg2+ +arctg3.

Розв'язання. Зробимо рисунок.



Трикутник ABC є прямокутним і рівнобедреним, тому $\mathrm{tg}\gamma = \mathrm{tg}45^\circ = 1$, звідки $\gamma = \mathrm{arctg}1$. Отже, $\mathrm{arctg}1 + \mathrm{arctg}2 + \mathrm{arctg}3 = \pi$.

Нова ідея полягає в застосуванні рисунка як графічної моделі розв'язання задачі.

Задачі, розв'язування яких пов'язане з пошуком нової ідеї, відіграють велику роль у розвитку учнів, оскільки розвивають сміливість мислення, примушують ламати певні психологічні бар'єри та підвищують інтерес до вивчення математики. Розвинений інтелект потрібен кожній людині, у якій би галузі вона не працювала. У розглянутому циклі задач сам процес відшукання нової ідеї більш важливий, ніж результат. За словами відомого математика і педагога О. І. Маркушевича, "знання з часом забуваються, а розвиток залишається". Процес розв'язування таких задач може зафіксуватись у підсвідомості учня і, можливо, навіть через багато років за сприятливих умов активізуватись. Саме тоді може настати та мить, яка має назву "Евріка!".

Висновки

Мотивація – найважливіший компонент навчальної діяльності, а для особистості внутрішня мотивація є основним критерієм її сформованості. Учням зрозуміло, коли їм цікаво – це факт. Як же сформувати зацікавленість? Через самостійність і активність, через пошукову діяльність на уроці і вдома, створення проблемної ситуації, різноманітність методів навчання, через новизну матеріалу та емоційний фон уроку.

Сучасне суспільство зацікавлено в людях високого професійного рівня, здатних приймати нестандартні рішення і творчо мислити. Для цього школа має не просто озброїти випускника набором знань, але й сформувати такі риси особистості ініціативність, здатність творчо та нестандартно мислити, вміння застосовувати отримані знання в практичній діяльності.

У формуванні таких рис велику роль грає саме математика. В загальноосвітній підготовці цей предмет є одним із найскладніших для учнів. Тому так важливо вибрати способи та методи навчання з метою забезпечення максимальної ефективності, вміло використовувати сучасні технології з урахуванням і особливостей учнів, і умов в школі; важливо, щоб учні зрозуміли: знання і компетентності, набуті в школі, і цінність яких вони ще не в змозі оцінити, в майбутньому принесуть їм великі дивіденди.

Список літератури

1. Шкіль М. І., Слєпкань З. І., Дубинчук О. С. Алгебра і початки аналізу. 10–11. – К. : Зодіак. – Еко, 2001.

2. Фуртак Б. Л., Живко Д. Я. Нові підходи до змісту математичної освіти в Україні. – Математика в школі. – 2000. – № 5.

3. Карелина Т. М. Методика проблемного обучення. – Математика в школе. – 2000. – № 5.

4. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу, 11 клас. – Х. : Гімназія, 2011.

5. Матеріали ЗНО з фізики та математики, УЦОЯО.

6. Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С. Неожиданный шаг, или Сто тринадцать красивых задач. – К. : Агрофирма "Александрия", 1993. – 60 с.

7. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання : Наук.-метод. посібн. / О. І. Пометун, Л. В. Пироженко. За ред. О. І. Пометун. – К.: Вид-во А.С.К., 2014. – 192 с.