math_2021_064

Міністерство освіти і науки України

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Факультет математики та інформатики

Кафедра диференціальних рівнянь

Деякі методи розв'язування задач з параметрами в шкільному курсі математики

Дипломна робота

Рівень вищої освіти - другий (магістерський)

Виконала: студентка 6 курсу, групи 606

(заочної форми навчання)

спеціальності 014.04 — «Середня освіта (математика)»

Дронь Тетяна Іванівна

Керівник: кандидат фіз.-мат.наук, доцент кафедри

диференціальних рівнянь **Перун Г.М.**

До захисту допущено:

Протокол засідання кафедри №

від „___” грудня 2021 р.

Зав. кафедри __________ **Пукальський І.Д.**

Чернівці-2021

Анотація

У дипломній роботі розглянуто питання, присвячені методам розв'язування задач з параметрами у процесі вивчення математики. Зокрема, розглянуто поняття параметру, основні методи при розв'язуванні вправ, види задач при роботі з обдарованими дітьми. Наведено практичні матеріали та методичні рекомендації щодо вивчення задач з параметрами в курсі математики, які сприятимуть формуванню та розвитку мислення учнів.

ЗМІСТ

ВСТУП

В останні роки відбувається модернізація системи освіти. Математика, як один з основних шкільних предметів, також зазнала змін. Зокрема, ці зміни стосуються безпосередньо майбутніх абітурієнтів, оскільки вступ відбувається за результатами зовнішнього незалежного оцінювання, в завданнях якого все більше з'являються завдання з параметром. Ці зміни вимагають від сучасного вчителя мобільності і професійної вдосконаленості. Так як такі завдання дозволяють якісно оцінити як базу знань учня, так і певні вміння і навики розв'язування різних завдань. Залучення завдань, що містять параметр дозволяє педагогічно й доцільно спроектувати повний процес прикладного математичного дослідження.

Актуальність дослідження. Необхідність у реформуванні системи освіти пов'язана зі змінами, які сталися й відбуваються в нашому суспільстві зараз, у всіх галузях життя. Змінюється все, і навіть характер праці, у якій велика частина припадає на розумову складову: змінюється економічна діяльність, її технічна база й організаційні форми, її структура, умови й вимоги, які вона висуває до рівня знань і кваліфікації людини. Виникають і розвиваються нові види і типи діяльності. Ці зміни вимагають професійної та соціальної мобільності, безперервної освіти і професійного вдосконалення. Сучасне суспільство потребує фахівців високого рівня, всебічно підготовлених, з високорозвиненим інтелектом, творчими здібностями. Основа таких якостей закладається в загальноосвітній школі. Підготовка молоді до творчої праці неможлива без впровадження в навчальний процес сучасної школи навчально-дослідницької праці як важливого засобу формування в учнів стійкого інтересу й готовності до творчої діяльності. Сформовані на ранніх етапах навчання пізнавальний інтерес, творчі здібності, дослідницькі вміння є міцним фундаментом формування майбутніх кваліфікованих фахівців.

Орієнтація освіти на особистісний розвиток, варіативність школи вимагає переусвідомлення всіх чинників, в тому числі змісту, методів, форм і засобів навчання, від яких залежить якість навчально-виховного процесу. Реалізацію цієї мети у шкільному курсі математики, потрібно збагатити таким навчальним матеріалом, який міг би забезпечити учню можливість активно залучатися до дослідницької діяльності, у процесі якої в нього відбувалося б формування дослідницьких умінь. Таким матеріалом можуть стати системи задач із параметрами.

Під задачами з параметрами ми розуміємо задачі, в яких умова, хід розв’язку і форма результату залежить від величин, чисельні значення яких не задані конкретно, але повинні вважатися відомими.

Залучення до навчального процесу задач із параметрами дозволяє природньо й педагогічно імітувати повний процес прикладного математичного дослідження або окремих його етапів, що сприяє розвитку в учнів глибокого інтересу до дослідження. Зазначимо, що в процесі розв’язування задач із параметрами учні знайомляться з великою кількістю евристичних прийомів загального характеру.

Мета дослідження: обґрунтувати доцільність використання евристичних схем алгебраїчних та геометричних прийомів розв’язування задач з параметрами та застосувати їх.

Для досягнення цієї мети даної магістерської роботи були поставлені такі завдання:

1) проаналізувати науково-методичну, психолого-педагогічну літературу з проблеми дослідження;
2) провести систематизацію задач із параметрами;
3) подати приклади розв'язування рівнянь з параметрами різної складності та задачі з сертифікаційних робіт зовнішнього незалежного оцінювання;
4) проаналізувати аналітичні та графічні методи розв’язування задач з параметрами;
5) визначити місце задач із параметрами у навчальному процесі;
6) дослідити вміння учнів розв’язувати задачі з параметрами.

Об’єкт дослідження: задачі з параметрами.

Предмет дослідження: методи розв’язування задач з параметрами.

Гіпотеза дослідження: розробка методичної системи навчання розв'язувати рівнянь з параметрами сприятиме вдосконаленню вмінь та навичок учнів.

Структура даної роботи побудована за логічним принципом і складається з вступу, 2 розділів, які включають в себе підрозділи з теоретичними основами розв'язування задач з параметрами, основні види рівнянь з параметрами та методи їх розв'язування, прикладів розв'язування завдань з зовнішнього незалежного оцінювання різних років, висновків, списку використаної літератури.

Теоретичне і практичне значення даної роботи полягає у тому, що наведені висновки, основні положення та методичні рекомендації можуть бути використані вчителями школи, особливо молодими фахівцями, при організації вивчення задач з параметрами, для підготовки до олімпіад, зовнішнього незалежного оцінювання, а також на позакласних заходах чи роботі з обдарованими дітьми, для підвищення якості знань учнів, активізації їх пізнавальної діяльності.

РОЗДІЛ І. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Знайомство з параметром. Основні теоретичні поняття, що стосуються завдань з параметрами. Класифікація

У сучасному технологічному світі відбувається переоцінка завдань та цілей системи освіти. Впроваджуються все нові і нові реформи освіти та методи роботи з дітьми. Це все зумовлено формуванням нового типу суспільного устрою, а саме, інформаційного суспільства. З давніх-давен протягом багатьох років математика була і є невід'ємним елементом освіти по всіх країнах світу.

Вивчення математики спонукає до формування вмінь логічно мислити, складати алгоритми дій, творчо та креативно підходити до вирішення певних проблем, реалізацій життєвих задач. Звичайно, школярам було б легше навчатися стереотипно розв'язувати поставлені перед ними завдання. Тобто за умов, коли надається певний зразок чи алгоритм розв'язування задач з використанням конкретно зазначених формул або теорем. Виконання таких вправ залежить від знання вивчених формул та поданих найпростіших методів, не звертаючи увагу на інші підходи до вирішення та отримання правильного результату для даної задачі. Спираючись на власну точку зору, маємо відмітити, що метою роботи сучасного вчителя математики у школі є формування вмінь учнів нестандартно підходити до вирішення математичних завдань. Одним з видів діяльності, що сприяє удосконаленню потенціалу учнів до розвитку дослідницьких навиків, висловлювань власного підходу, аналізу та гіпотез, є зокрема, розв'язування алгебраїчних задач з параметрами. Саме в процесу розв'язування таких задач учні не лише використовують всі засвоєні знання з відповідних тем, а й систематизують та узагальнюють їх. Основне, що необхідно засвоїти при першому знайомстві з параметром, - це уважність, обережність, ґрунтовність перетворень при розв'язуванні різних задач, що містять параметри. Наведемо приклад: зазвичай в будь-яких рівняннях буквами позначають невідомі.

Розв'язати рівняння − означає: знайти множину значень невідомої змінної, що задовольняє це рівняння. Інколи рівняння, крім букв, що позначають невідомі (x, y, z) містять також інші букви, які називають параметрами (a, b, c). В такому випадку учень отримує не одне, а нескінченну множину рівнянь.

При різних значеннях параметра рівняння може мати різну кількість розв'язків: єдиний корінь, нескінченну множину коренів, жодного кореня.

Відмітимо деякі моменти розв'язання найпростіших рівнянь – лінійних рівнянь. При розв'язанні потрібно:

1) знайти множину всіх допустимих значень параметрів;

2) перенести всі доданки, що містять шукану змінну, у ліву частину рівняння, а решту доданків – у праву;

3) звести подібні доданки;

4) розв'язати найпростіше рівняння $ax = b$.

Можливі три випадки:

1. $a \neq 0$, b – будь-яке дійсне число. Рівняння у цьому випадку має єдиний розв'язок $x = \frac{b}{a}$.

2. $a = 0$, $b = 0$. Маємо таке рівняння: $0x = 0$, розв'язками якого є всі дійсні числа, $x \in R$.

3. $a = 0$, $b \neq 0$. Рівняння $0x = b$ розв'язків не має.

Важливим етапом розв'язування рівнянь із параметрами є запис відповіді, а особливо це стосується тих прикладів, де розв'язування має розгалуження залежно від значень параметра. У подібних випадках складання відповіді – це збір раніше отриманих результатів. І тут дуже важливо не забути врахувати у відповіді всі етапи розв'язання. У такій діяльності поєднуються індуктивний та дедуктивний способи мислення, аналогія, узагальнення, учні вчаться класифікувати та приймати рішення після глибокого та системного аналізу умови задачі. Беззаперечно, що тема задач з параметрами для школярів є однією з найскладніших як для сприйняття, так і для виконання. Саме ці труднощі, пов'язані з тим, що у шкільній програмі з математики передбачено дуже мало часу для вивчення алгебраїчних задач з параметром. Окремо маємо наголосити, що на сьогоднішній день при підготовці до зовнішнього незалежного оцінювання та підсумкової атестації найбільший інтерес старшокласників викликають саме задачі з параметрами. Вивчаючи підбір завдань у сертифікаційній роботи [27-31] зовнішнього незалежного оцінювання з математики за попередні роки, важко не помітити, що четверта, творча частина кожного варіанту обов'язково містить задачу з параметром. Наявність саме таких задач дає змогу прослідкувати рівень засвоєння учнями та випускниками шкіл не лише певних тем, а й розділів та курсу алгебри в цілому. Основна мета даної роботи полягає в проведенні короткого аналізу проблеми задач з параметрами при вивченні алгебри в старшій школі. Спираючись на дослідження, проведені авторами роботи [9], відмітимо, що до середини 60-х років минулого століття такі задачі зустрічались у шкільній практиці не часто. Пізніше задачі, що містять параметр, почали долучати до випускних та вступних іспитів. Отже, в школі такі завдання почали розглядатись та розв'язуватись досить регулярно. Аналізуючи сучасні шкільні підручники [11-14], варто відмітити, що вони містять значну кількість завдань з параметрами. У підручниках з алгебри та математики, що використовуються в школах, де навчання ведеться за рівнем стандарту, такі задачі позначені символом (*). Такі позначення застосовують для вправ з поглибленим вивченням теми, які рідко розглядаються на уроках через брак часу. Алгебраїчні задачі з параметрами складають низку завдань, приступаючи до розв'язання яких, необхідно згадати не лише матеріал, що вивчався на останніх заняттях, а й попередньо вивчені теми. Саме тому, успішне розв'язання задач з параметрами вимагає засвоєння пройденого матеріалу принаймні на достатньому рівні.

У шкільному курсі математики знайомство учнів з параметрами розпочинається у 7 класі при розв'язуванні лінійних рівнянь, далі у 8-9 класах розв'язуванню задач з параметрами виділяються години лише у класах з поглибленим вивченням математики. Оскільки за відсутності належної кількості годин та рівня запропонованих задач, вчителю не завжди вдається познайомити учнів з методами та прийомами розв'язування задач з параметрами, сформувати уміння і навички роботи з таким видом задач. Нажаль у курсі старшої школи зустріч з параметром відбувається ще рідше: у деяких видах рівнянь та нерівностей, при обчисленні площ та фігур тощо.

Параметр – це змінна величина, яку в ході розв'язування часто фіксують для того, щоб мати змогу здійснювати розв'язок відносно іншої змінної.

Рівняння (нерівність, система рівнянь, система нерівностей тощо) з параметром − це таке рівняння (або нерівність, система рівнянь, нерівностей), до запису якого крім змінної та числових коефіцієнтів входять буквені коефіцієнти, які є величинами, значення яких не вказані конкретно, але вони вважаються відомими та заданими на деякій числовій множині. Наприклад, є рівняння $2x - a = 0$ із змінною x та параметром a. Величина a може приймати будь яке числове значення. Зокрема, це можуть бути такі значення: $\frac{1}{2}$, $-100;\ 55{,}02;\ \sqrt{2},\ Ig5$ та інші. Залежно від того, яке конкретне число буде представляти параметр a, рівняння за виглядом буде набувати такого вигляду: $2x - \frac{1}{2} = 0{,}2x + 100 = 0$. [9]

В багатьох темах курсу шкільної математики присутні здачі з параметром, розв’язок яких включає в себе низку попередньо засвоєних знань. Отже, для того щоб розв’язати дані задачі необхідно мати певну базу знань як теоретичного, так і практичного матеріалу. Тому учні зустрічаються з параметрами, коли ознайомлюються :

1) з функціями виду $y = kx$,

де x, y – змінні, $k \neq 0$, k – стала або параметр;

2) з лінійними рівняннями вигляду $ax + b = 0$,

де x – змінна, a та b – параметри;

3) з квадратними рівняннями вигляду $ax^2 + bx + c = 0$,

де x – змінна, $a, b,\ c$ – параметри, $a \neq 0$.

Наведемо деякі типи рівнянь з параметром які вивчаються в шкільному курсі алгебри старшої школи:

1. розв'язування рівняння для будь-якого значення параметра;
2. на знаходження значень параметра, при яких рівняння має розв'язки;
3. на знаходження значень параметра, при яких рівняння має вказану кількість розв'язків;
4. на знаходження значень параметра, при яких розв'язки рівняння задовольняють вказану умову.

Більшість задач з параметрами у курсі алгебри та початків аналізу старшої школи передбачають у собі пошук розв'язків лінійних рівнянь та квадратичних рівнянь у загальному вигляді. Найчастіше використовуються задачі на знаходження і дослідження кількості коренів в залежності від значення параметрів.

Наведемо невеличкі приклади розв'язування задач з параметром, розв'язок яких потрібно подати у вигляді сімейства розв'язків відносно невідомої величини.

Приклад 1. *Розв'язати рівняння виду* $ax = 5$ *відносно* x.

Розв'язання:

При $a \neq 0$, отримаємо $x = \frac{5}{a}$,

При $a = 0$, отримаємо $0x = 5$, отже розв'язків немає.

Можна записати відповідь $x = \frac{5}{a}$, але при $a = 0$ – на нуль ділити не можна, тому необхідно розглядати обидва випадки: коли $a \neq 0$ та $a = 0$.

Відповідь: При $a = 0$ розв'язків немає, якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{5}{a}$. Тобто розв'язки даного рівняння заходяться на проміжку $a \epsilon (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Приклад 2. *Розв'язати нерівність* $ax < 5$ *відносно* x.

Розв'язання:

Розв'язуючи необхідно розглядати 3 випадки, оскільки a – число про яке нам нічого не відомо, тому слід аналізувати всі можливі випадки:

1) при $a > 0$ маємо $x < \frac{5}{a}$;

2) при $a = 0$ маємо $0x < 5$, одже $x \in R$ (x– будь-яке число),

проведемо перевірку $0x = 0$, $0 < 5$– вірно.

3)при $a < 0$ маємо $x > \frac{5}{a}$.

Відповідь: якщо $a > 0$, то $x < \frac{5}{a}$; якщо $a = 0$ то $0x < 5, x \in R$;

якщо $a < 0$, то $x > \frac{5}{a}$.

Приклад 3*. Розв'яжіть нерівність для всіх значень параметра* a *:*

$\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} > a.$

Для початку необхідно знайти область визначення нерівності: для нашого випадку підкореневі вирази мають місце тоді, коли вони більші або дорівнюють нулеві:

$$\begin{cases} a + x \geq 0, \\ a - x \geq 0. \end{cases}$$

Перенесемо параметр a в праву сторону нерівності. На даному етапі слід враховувати, що у другій нерівності під час множення на (-1) знак нерівності зміниться на протилежний. Під час розв'язання таких нерівностей учні за неуважністю можуть забути змінити знак нерівності, тому доцільно проговорити перед розв'язанням основні властивості нерівіностей. Отже отримаємо:

$$\begin{cases} x \geq -a, \\ x \leq a. \end{cases}$$

Із останньої системи рівнянь видно, що область визначення нерівності

$x \in [-a; a]$.

Знаючи область визначення нерівності можемо її розв'язувати. Піднесемо обидві частини нерівності до квадрату:

$(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})^2 > a^2.$

Розпишемо ліву частину нерівності за допомогою формули скороченого множення, а саме як квадрат суми:

$a + x + a - x + 2\sqrt{a^2 - x^2} > a^2.$

Скоротимо доданки:

$2a + 2\sqrt{a^2 - x^2} > a^2;$

$2\sqrt{a^2 - x^2} > a^2 - 2a.$

Піднесемо обидві частини нерівності до квадрату. При піднесенні обох частин нерівності до квадрату необхідно врахувати два випадки та область визначень нерівності:

$$\begin{cases} a^2 - 2a \geq 0, \\ 4(a^2 - x^2) > (a^2 - 2a)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 2a < 0, \\ x \in [-a; a]; \end{cases}$$

Оскільки $a \neq 0$, то $\begin{cases} a \in (0; 2), \\ x \in [-a; a] \end{cases}$.

Розв'яжемо задану нерівність із врахуванням області визначення нерівності:

$$\begin{cases} a \in (-\infty; 0) \cup [2; +\infty), \\ 4a^2 - 4x^2 > a^4 - 4a^3 + 4a^2; \end{cases}$$

Після очевидних перетворень отримаємо:

$$\begin{cases} a \in (-\infty; 0) \cup [2; +\infty), \\ x^2 < \frac{4a^3 - a^4}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} a \in (-\infty; 0) \cup [2; +\infty), \\ x \in (-\frac{a}{2}\sqrt{4a - a^2}; \frac{a}{2}\sqrt{4a - a^2}), \\ 4a - a^2 \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \in (-\infty; 0) \cup [2; +\infty), \\ x \in (-\frac{a}{2}\sqrt{4a - a^2}; \frac{a}{2}\sqrt{4a - a^2}), \\ a \in [0; 4]; \end{cases} \quad \begin{cases} x \in (-\frac{a}{2}\sqrt{4a - a^2}; \frac{a}{2}\sqrt{4a - a^2}), \\ a \in [2; 4]. \end{cases}$$

Враховуючи область визначення нерівності та отримані результати запишемо остаточну відповідь.

Відповідь: якщо $a \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$, то $x \in \emptyset$; якщо $a \in (0; 2)$, то $x \cup (-a; a)$; якщо $a \in [2; 4]$, то $x \in (-\frac{a}{2}\sqrt{4a - a^2}; \frac{a}{2}\sqrt{4a - a^2})$.

При розв'язуванні даного прикладу учням необхідно мати певну базу знань про основні методи, та прийоми розв'язування нерівностей, знаходити та грамотно використовувати область визначення нерівності; згадати основи розв'язання квадратних нерівностей та методи визначення їх коренів. Також слід згадати формули скороченого множення, зокрема для конкретного випадку, квадрат суми, уважно слід скорочувати доданки у нерівності, а також не забувати враховувати в етапі розв’язання область визначення нерівності, оскільки це може вплинути на розв’язання.

Найчастіше складності в учнів виникають при домноженні нерівності на від’ємне число, учні забувають змінити знак на протилежний, тому й виникають помилки при подальшому розв’язку, що призводить до неправильної відповіді. Це найтиповіша помилка.

Для уникнення таких типових помилок вчителю необхідно проговорити хід розв’язання та можливі труднощі на деяких етапах, також слід наголосити про уважність при переході від нерівності до розв’язання з урахуванням області визначення нерівності. Бажано заздалегідь попереджати учнів про необхідність повторення матеріалів які необхідно застосувати при розв’язанні завдань з параметром.

1.2. Основні методи розв'язування задач з параметрами.

Загального методу розв'язування задач з параметрами як такого не існує. Проте можна поділити їх на два види, перший – це аналітичний і другий – графічний. Обидва прийоми мають свої методи та тонкощі при розв'язуванні завдань даного типу. Аналітичний − можна сказати універсальний, але найбільш складний, бо він потребує досить високої математичної грамотності та точності. Графічний – виключно красивий легший та наочний, але не завжди доречний, і потребує навиків роботи з графіками, а також громіздкими графіками.

Для того щоб розпочати розв'язувати завдання з параметрами, в першу чергу Необхідно звести задане рівняння до більш простішого: це розкласти його на множники, слід врахувати область визначення, позбавитися модуля, логарифма, тригонометричних виразів, а вже потім необхідно розв'язати окремо кожне із завдань.

Під час розв'язування завдань з параметрами зустрічаються такі завдання, що можна поділити на такі умовні категорії:

1) розв'язати рівняння або нерівність, їх системи для всіх можливих значень параметра;

2) завдання, в яких пропонується знайти лише ті розв'язки, що задовольняють певним умовам.

3) визначити кількість коренів рівняння в залежності від значень параметра. Цей тип завдань в більшості випадків досить зручно і доречно розв'язувати графічним способом.

При розв'язуванні завдань з параметром аналітичним способом, зокрема рівнянь, можна сформулювати деякі загальні етапи, дотримання яких вибудовує певний алгоритм дій. А саме:

1. Встановлюється область допустимих значень змінної, а також область допустимих значень параметра, або параметрів, в залежності від умови.
2. Далі виражають змінну через даний параметр.
3. Наступним етапом є знаходження множини всіх коренів даного рівняння для кожного допустимого значення параметра. Проте якщо, параметрів кілька,

то множину коренів шукають звичайним способом, для певного співвідношення між параметрами.

4. І останнім етапом є дослідження особливостей значення параметра, при яких корені рівняння існують, але не виражаються формулами котрі отримали.

Для прикладу розв'яжемо завдання зі збірника завдань для державної підсумкової атестації з математики за 2012 рік. [6]

Завдання: При яких значеннях параметра а рівняння

$4^x - (a+3) \cdot 2^x + 4a - 4 = 0$ має один дійсний корінь?

Розв'язання:

Помічаємо, що дане рівняння призведе до заміни змінних, а саме

$2^x = y.$

Зведемо рівняння до квадратного за допомогою підстановки введеної заміни в задане рівняння.

$y^2 - (a+3) \cdot y + 4a = 0.$

Дане рівняння звелося до звичайного квадратного типу. Для того, щоб знайти розв'язок такого рівняння, необхідно визначити його дискримінант:

$D = (a+3)^2 - 16a + 16 = a^2 - 10a + 25 = (a-5)^2.$

Оскільки дискримінант не може бути від'ємним, розглянемо наступні випадки.

Якщо $D = 0$, тобто $(a-5)^2 = 0$, звідси $a = 5$,

Тоді, підставивши $a = 5$ у початкове рівняння, отримаємо:

$y = \frac{a+3}{2} = \frac{5+3}{2} = 4$, $2^x = 4$, звідси: $x = 2$.

Якщо $D > 0$, то $y_{1,2} = \frac{a+3 \pm (a-5)}{2}$.

Отже, отримали два корені рівняння: $y_1 = a - 1$ і $y_2 = 4$.

Якщо $y = 4$, то підставивши отримане значення в заміну отримаємо:

$2^x = 4.$

Маємо найпростіше показникове рівняння, розв'язок якого $x = 2$.

Тоді, щоб дане рівняння мало один корінь, необхідно щоб $y_1 \leq 0$, тобто $a - 1 \leq 0$, звідси $a \leq 1$.

Отже рівняння має один корінь при $x = 2$.

Відповідь: при $a \in (-\infty; 1] \cup \{5\}$рівняння має один корінь $x = 2$.

При розв'язуванні даного завдання учням слід згадати основні методи розв'язування квадратних рівнянь за допомогою підстановки заміни змінних, також згадати методи знаходження коренів квадратного рівняння. При розв'язуванні завдання даного типу учням слід наголосити про те, щоб вони не забули повернутися від заміни яку здійснювали в ході розв'язання для отримання вірної відповіді.

Для розв'язування задач з параметрами графічним методом необхідно знати та вміти будувати графіки основних елементарних функцій, здійснювати їх тотожні перетворення, а також володіти методикою перетворень з графіків функцій за модулями. Важливо також оперувати основними властивостями функцій, графіки яких будуються згідно умови задачі. В школярів найчастіше виникають певні труднощі при побудові складних графіків, оскільки в основному вони громіздкі з певною кількістю перетворень. Тому дуже доречним буде, якщо учні будуть виконувати побудову у декілька етапів будуючи деякі перетворення на окремій координатній площині.

Розв'язування задач з параметрами, зокрема рівнянь, графічним методом досить зручно якщо вибудувати певний алгоритмом дій:

1. Перш за все знаходимо область допустимих значень
2. Виражаємо значення параметра a як функцію від x.
3. У прямокутній системі координат будуємо графік функції $a = f(x)$для тих значень x, які входять в область допустимих значень заданого рівняння.
4. Далі знаходимо точку, або точки прямої $a = c$, де $c \in (-\infty; +\infty)$з графіком функції $a = f(x)$. У випадку коли пряма $a = c$ перетинає графік $a = f(x)$, то необхідно знайти абсциси точок їх перетину. Для цього досить розв'язати рівняння $a = f(x)$ відносно x.
5. І останнє, аналізуємо і записуємо відповідь.

Наведемо приклад графічного розв'язання завдання з параметром.

Приклад:*Знайдіть найбільше значення параметра a , при якому рівняння $|x^2 - 3|x| - 4| = a$має тільки чотири корені.*

Розв'язання:

Розглянемо задане рівняння як функцію $y = x^2 - 3x - 4$.

Оскільки це квадратне рівняння, графіком даної функції буде парабола, вітки якої направлені вгору.

Для побудови графіка функції необхідно знайти вершину параболи.

Знайдемо вершину параболи за відомою формулою

$a = 1, \; b = -3, \; c = -4;$

$x_0 = \frac{-b}{2a}; \quad x_0 = \frac{-(-3)}{2\cdot 1} = 1{,}5;$

$y_0 = a(x_0)^2 - bx_0 - c; \; y_0 = 1 \cdot 1{,}5^2 - 3 \cdot 1{,}5 - 4 = -6{,}25.$

Отже, парабола має вершину у точці $(1{,}5; -6{,}25)$.

Знайдемо точки у яких вітки параболи перетинають вісь абсцис. Для цього прирівняємо задане рівняння до нуля і знайдемо нулі функції: $0 = x^2 - 3x - 4$.

За теоремою Вієта маємо:

Нулі функції: $x = 4, \quad x = -1$.

Використовуючи геометричні перетворення графіка функції $y = x^2 - 3x - 4$, отримаємо графік функції $y = |x^2 - 3|x| - 4|$.

Для того щоб визначення кількості коренів рівняння $|x^2 - 3|x| - 4| = a$, знайдемо точки перетину графіків функції $y = |x^2 - 3|x| - 4|$ і $y = a$.

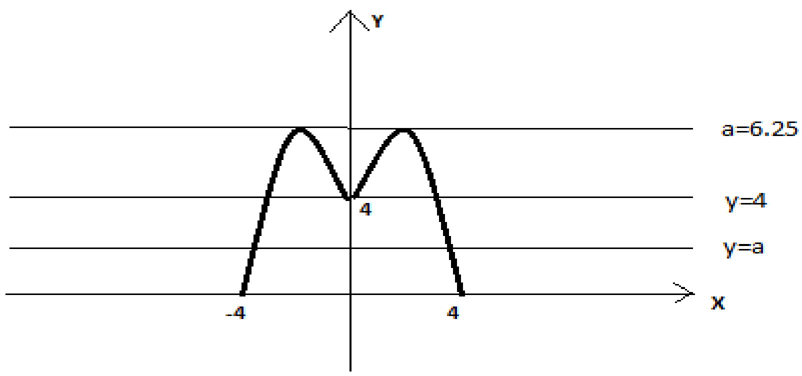

Рис.1. Графік функції $x^2 - 3|x| - 4 = a$.

Використовуючи геометричну інтерпретацію розв'язків рівняння, отримаємо чотири розв'язки рівняння при $a \in (0; 4)$ і отримали, що $a = 6{,}25$.

Відповідь: $a = 6{,}25$.

1.3. Система координат XOY

Нехай рівняння (або нерівність), що містять параметр, приведено до вигляду $f(x) = q(x, a)$ (або $f(x) \leq q(x, a), f(x) \geq q(x, a)$ тощо), де $f(x), q(x, a)$ – це функції, які є достатньо вивченими, графіки яких досить легко будувати. Тоді відношення $y_1 = f(x)$ визначає на координатній площині XOY деяку криву, а відношення $y_2 = q(x, a)$ – сімейство прямих, у якому кожному допустимому значенню параметра відповідає одна крива. Зрозуміло, що у залежності від параметра a криві сімейства $y_2 = q(x, a)$ можуть займати зовсім різні положення відносно кривої $y_1 = f(x)$. Досліджуючи переріз кривої $y_1 = f(x)$ сімейством кривих $y_2 = q(x, a)$ при відповідних значеннях параметра a, можна знайти відповідь на запитання про кількість розв'язків рівняння $f(x) = q(x, a)$ залежно від параметра a, вибрати необхідні розв'язки, використати їх для знаходження нерівностей $f(x) \leq q(x, a)$, $f(x) < q(x, a)$, $f(x) \geq q(x, a)$, $f(x) > q(x, a)$ тощо. Типовими критичними значеннями параметра часто виявляються ті значення, що відповідають точкам дотику графіків. Під час розв'язування зручно використовувати таке міркування: пряма $y = kx + b$ дотикається до параболи (або до гіперболи) $y = \varphi(x)$ ($y = \varphi(x)$ – це відповідно, квадратична або дробово-лінійна функція), якщо рівняння $\varphi(x) = kx + b$ має єдиний розв'язок. Зауважимо, що вирішення завдання, фактично, зводиться до розв'язування квадратного рівняння.

Наприклад 1: *Знайдіть всі значення параметра* a*, при кожному з яких розв'язок нерівності* $|2x - a| + 1 \leq |x + 3|$ *утворює відрізок довжиною 1.*

Розв'язання: *1)* Виконаємо вимогу задачі, використовуючи графічний спосіб. Спочатку перепишемо початкову нерівність у вигляді $|2x - a| \leq |x + 3| - 1$, оскільки так буде зручніше будувати графіки лівої та правої частини нерівності. Зазначимо, що розв'язком початкової нерівності буде множина абсцис точок площини, для яких графік функції $y = |x + 3| - 1$ лежить не нижче графіка функції $y = |2x - a|$.

2) Побудуємо графіки визначених функцій.

Графік функції $y = |x + 3| - 1$ можна побудувати шляхом елементарних перетворень графіка функції $y = |x|$ або шляхом розкриття модуля.

Якщо $x \leq -3$, то $y = (x + 3) - 1 = x + 2$. Якщо $x > -3$, то $y = (-x - 3) - 1 = -x - 4$.

При кожному фіксованому значенні параметра a графік функції $y = |2x - a| = \left|2(x - \frac{a}{2})\right|$ можна отримати за допомогою паралельного перенесення 2

3) Як бачимо на рис.2 , розв'язком заданої нерівності є відрізок, коли графік функції $y = |2x - a|$ перетинає пряму $y = x + 2$ при $x \geq -3$ (на рисунку це відрізок $[x_A; x_B]$) або пряму $y = -x - 4$ при $x \leq -3$ (на рисунку це відрізок$[x_C; x_D]$).

У першому випадку абсциси x_A і x_B точок A і B перетину графіків функцій, можна отримати як розв'язки рівнянь відповідно, $x + 2 = -2x + a$ та $x + 2 = 2x - a$, тобто отримаємо $x_A = \frac{a-2}{3}$, $x_B = a + 2$. Запишемо, що довжина відрізка $[x_A; x_B]$ дорівнює 1: $(a + 2) - \frac{a-2}{3} = 1$, $3a + 6 - a + 2 = 3$, $2a = -5$, звідки $a = -2{,}5$.

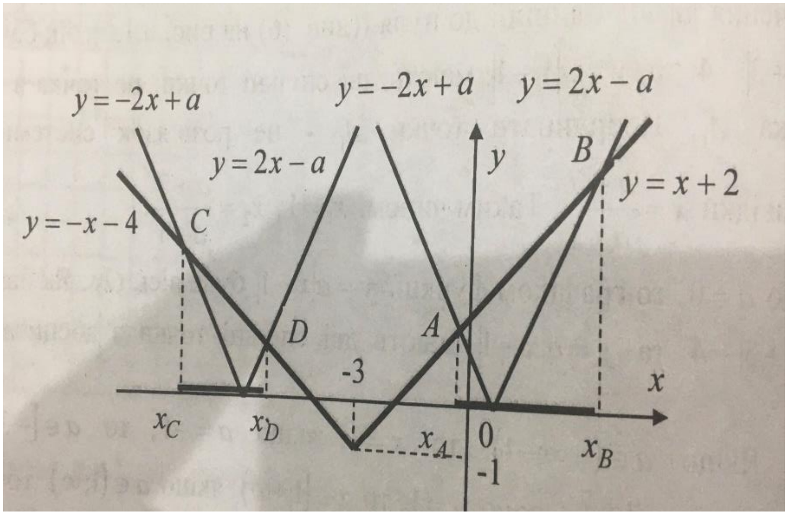

Рис. 2

У другому випадку абсциси x_C і x_D точок C і D перетину графіків функцій, можна отримати як розв'язки рівнянь відповідно, $-x-4=-2x+a$ та $-x-4=2x-a$, тобто отримаємо $x_C=a+4,\ x_D=\frac{a-4}{3}$. Запишемо, що довжина відрізка $[x_C; x_D]$ дорівнює1: $\frac{a-4}{3}-(a+4)=1,\ \ a-4-3a-12=3,\ \ -2a=-19,$ звідки $a=-9{,}5$.

Відповідь: $a=-9{,}5, \quad a=-2{,}5.$

Наприклад 2: *Нехай A – множина точок площини, координати яких при жодному* $a\in R$ *не задовольняють рівняння* $y=\frac{x-a}{ax-1}$, *B – множина точок, координати яких хоча б при одному* $a\in R$ *задовольняють рівняння* $a(1+xy)=x+y$. *Зобразіть графічно множину* $A\cap B$.

Розв'язання:

1. Нехай точка M з координатами $(x;y)$ належить множині $A\cap B$. Це означає, що рівняння $y=\frac{x-a}{ax-1}$ відносно параметра a не має розв'язку, а рівняння $a(1+xy)=x+y$ має розв'язок. Тобто потрібно забезпечити виконання умов такої системи $\begin{cases} a(1+xy)=x+y, \\ ax-1\neq 0. \end{cases}$
2. Розглянемо два випадки.
   2.1. Якщо $1+xy\neq 0$, то $M\in A\cap B$, якщо
   $\begin{cases} a=\frac{x+y}{1+xy}, \\ ax-1\neq 0. \end{cases}, \frac{x+y}{1+xy}x-1=0,$ звідки $x^2=1$.
   2.2. Якщо $1+xy=0$, то вимога $M\in B$ рівносильна $x+y=0,$ тобто або $x=1, y=-1$, або $x=-1, y=1,$ але тоді $M\notin A$.
3. Таким чином, якщо $M\in A\cap B$, то $x^2=1, x=\pm 1$. Графічно множина $A\cap B$ зображена на рис. 3.

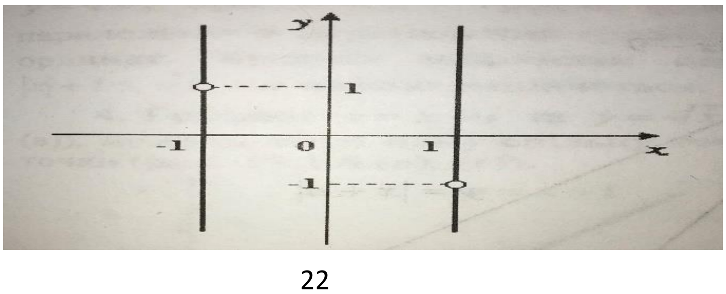

Рис. 3

1.4 Система координат XOA

Для розв'язування вправ з параметрами часто використовують графічний спосіб. Іноді зручно використовувати не звичну для нас систему координат XOY, а систему координат XOA. Це доцільно робити, коли параметр легко «відділяється» від змінної. Також є й інші випадки, коли параметр неможливо відокремити від змінної, однак розв'язування у системі координат ХOA є ефективним.

Нагадаємо, що пару чисел$(x_0; a_0)$ називають розв'язком рівняння $F(x; a) = 0$, коли $F(x_0; a_0) = 0$ – правильна числова рівність. Якщо на координатній площині XOA позначити всі точки, координати яких є розв'язком рівняння $F(x; a) = 0$, то отриману фігуру називають графіком цього рівняння. Пару значень змінних, яка перетворює нерівність із двома змінними на правильну числову нерівність, називають розв'язком нерівності з двома змінними. Графіком нерівності з двома змінними називають геометричну фігуру, яка складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, координати яких є розв'язками даної нерівності. Зрозуміло, що у ролі ще однієї змінної, поряд зі змінною x, виступає параметр a.

Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 1: *Для всіх дійсних значень параметра* a *знайдіть кількість різних коренів рівняння* $(a - x^2)(a + x - 2) = 0$.

Розв'язання. Розв'яжемо завдання графічно в системі координат XOA.

1. Допустимі значення параметра та змінної – будь-які дійсні числа.
2. Рівняння $(a - x^2)(a + x - 2) = 0$ рівносильне сукупності систем

   $$\left[\begin{array}{l} a - x^2 = 0, \\ a + x - 2 = 0. \end{array}\right.$$

   Тому побудова шуканої множини точок – графіка рівнянь – зводиться до побудови графіків $a = x^2$ і $a = 2 - x$ (рис. 1). Зазначимо, що ми не наводимо кроки побудови цих графіків. Окремо визначимо координати точок перетину графіків функцій $a = x^2$ і $a = 2 - x$ як розв'язок системи рівнянь:

$\begin{cases} a = x^2, \\ a = -x + 2 \end{cases}$, $\begin{cases} a = x^2, \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases}$, звідки координати шуканих точок будуть $(-2; 4)$ та (1;1).

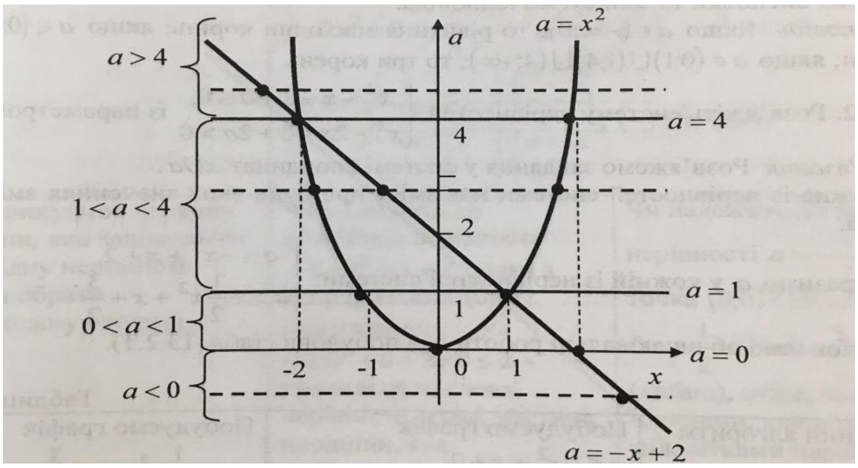

рис.4

3. Зрозуміло, що всі точки параболи і прямої мають координати $(x; a)$, які задовольняють початкове рівняння. Тому кількість різних коренів рівняння за змінною x при кожному значенні параметра $a = a_0$ співпадає з кількістю точок перетину прямої, яка задається рівністю $a = a_0$ з побудованою множиною точок – це сукупність двох графіків функцій $a = x^2$ і $a = 2 - x$.
4. Див. на рисунок 1.
   4.1. Нехай $a < 0$. Для будь-якого фіксованого значення параметра з цього проміжку можна побудувати певну пряму. Проведемо одну з них (будемо називати її «контрольна пряма» - пряма, яку можна побудувати при будь-якому фіксованому значенні параметра із проміжку, який розглядається). Вона перетинає графік початкового рівняння в одній точці.
   4.2. Нехай $a = 0$. Пряма $a = 0$ дотикається параболи $a = x^2$ (тобто має з нею одну спільну точку) і перетинає пряму $a = 2 - x$.
   4.3. Нехай $0 < a < 1$. Контрольна пряма з цього проміжку має дві спільні точки з параболою $a = x^2$ та перетинає пряму $a = 2 - x$.

4.4. Нехай $a = 1$. Пряма $a = 1$ перетинає параболу $a = x^2$ у двох точках, (одна з яких є точкою перетину даної параболи з прямою $a = 2 - x$).

4.5. Нехай $1 < a < 4$. Контрольна пряма з цього проміжку має три спільні точки з графіком рівняння $(a - x^2)(a + x - 2) = 0$.

4.6. Нехай $a = 4$. Пряма $a = 4$ перетинає параболу $a = x^2$ у двох точках (одна з яких є точкою перетину даної параболи з прямою $a = 2 - x$).

4.7. Нехай $a > 4$. Контрольна пряма з цього проміжку має три спільні точки з графіком початкового рівняння.

Робимо висновки та записуємо відповідь.

Відповідь. Якщо $a \in (-\infty; 0)$, то рівняння має один корінь; якщо $a \in \{0; 1; 4\}$, то два корені; якщо $a \in (0; 1) \cup (1; 4) \cup (4; +\infty)$, то три корені.

Приклад 2: *Знайдіть всі значення параметра* a *, при кожному з яких система нерівностей* $\begin{cases} x^2 + 2x + a \le 0, \\ x^2 - 4x - 6a \le 0 \end{cases}$ *має єдиний розв'язок.*

Розв'язання. 1. Кожна з нерівностей системи має зміст при будь-яких значеннях змінної та параметра.

2. Відділимо параметр від змінної у кожній із нерівностей системи

$$\begin{cases} x^2 + 2x + a \le 0, \\ x^2 - 4x - 6a \le 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} a \le -x^2 - 2x, \\ a \le \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x \end{cases}.$$

3. Побудуємо графіки функцій $a(x) = -x^2 - 2x$ (*) та $a(x) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x$ (**) (див. рис.2).

Графік функції (*): а) $x_{\text{верш}} = \frac{2}{-2} = -1$, $a_{\text{верш}} = -1 + 2 = 1$;

б) Ox: $a = 0$, $-x^2 - 2x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -2$;

в) Oa: $x = 0$, $a(0) = -0^2 - 2 \cdot 0 = 0$.

Графік функції (**): а) $x_{\text{верш}} = \frac{2}{3} \div \frac{1}{3} = 2$, $a_{\text{верш}} = \frac{1}{6} \cdot 2^2 - \frac{2}{3} \cdot 2 = -\frac{2}{3}$;

б) Ox: $a = 0$, $\frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 4$;

в) Oa: $x = 0$, $a(0) = \frac{1}{6} \cdot 0 - \frac{2}{3} \cdot 0 = 0$.

4. Знайдемо координати перетину графіків функцій $a(x) = -x^2 - 2x$ та $a(x) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x$: $-x^2 - 2x = \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x$, $\frac{7}{6}x^2 + \frac{4}{3}x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{8}{7}$; $a(0) = 0$, $a(-\frac{8}{7}) = \frac{48}{49}$.

5. Усі розв'язки системи (пари виду $(x; a)$) утворюють область, заштриховану на рисунку 5. Умову єдиності розв'язку даної системи на графічну мову можна перекласти так: горизонтальні прямі повинні мати з отриманою областю тільки одну спільну точку. На рисунку це будуть прямі $a = 0$, $a = 1$, оскільки вони задовольняють вказану умову.

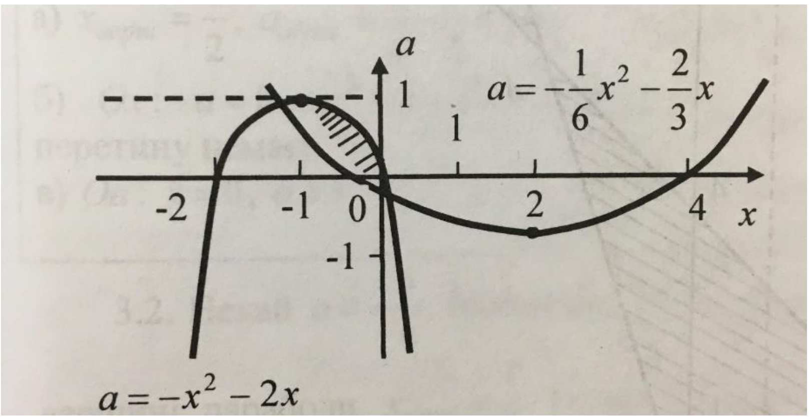

Рис.5

Відповідь: $a \in \{0; 1\}$.

ВИСНОВОК ДО І РОЗДІЛУ

У першому розділі було розглянуто основні відомості про параметри з якими знайомляться учні починаючи з 7 класу. Наведено основні величини які описують та визначають власне значення параметра. Це такі як означення параметра, розв’язок рівняння та інше. Розглядалися основні види та типи рівнянь і нерівностей, методи й способи їх розв’язання. На основі проведеного дослідження можна надати певні рекомендації як для досвідчених, так і для молодих вчителів, щодо методів та способів розв’язання завдань з параметром. Завдання на знаходження параметра, або рівняння відносно параметра доцільніше використовувати тоді, коли буде вивчено необхідний для їх розв’язку матеріал. Оскільки завдання з параметром включають в себе певну низку попередньо засвоєного матеріалу. Так, наприклад, щоб розв’язати квадратну нерівність, учням необхідно освоїти всю базу знань про методи розв’язання таких нерівностей, знати основні властивості рівнянь та нерівностей, грамотно знаходити область визначення та область допустимих значень рівняння чи нерівності; оперувати основними формулами скороченого множення і вчасно помічати де їх доцільно необхідно застосувати.

РОЗДІЛ ІІ. МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДОСЛІДНИЦЬКИХ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРОМ У КУРСІ АЛГЕБРИ СТАРШОЇ ШКОЛИ

2.1. Задачі з параметром у завданнях ЗНО

В останні роки помічаємо тенденцію зростання кількості задач з параметрами у зовнішньому незалежному оцінюванні учнів. Оскільки завдання з параметром дають змогу якісно оцінити знання та навички учнів з певних тем, так як такі завдання включають в себе не тільки базові знання, а низку вивченого матеріалу з застосуванням властивостей та самостійно обирати спосіб розв'язання. Однак через ряд причин не всі учні можуть розв'язати завдання такого типу. Оскільки такі задачі вимагають високого рівня засвоєних попередньо вивчених тем, не всі учні спроможні розв'язати задачу з параметром. Проте згідно з останніми новинами про те, що ЗНО з математики стає обов'язковим іспитом для складання учнями, виникає проблема в його підготовці. Через брак часу вчитель не завжди може приділити належну увагу на розв'язування задач даного типу, оскільки в програмі передбачені задачі з параметром лише в академічному та профільних рівнях. В рівні стандарт час на такі типи задач не виділяється. Але незалежно за якою програмою навчається школярі, у завданнях зовнішнього незалежного оцінювання з математики у розгорнутих завданнях обов'язково є завдання з параметром. Проте такі задачі можна виокремити під час підготовки до ЗНО. Розглянемо для прикладу одне з таких завдань зі збірника ЗНО за 2015 рік. [28]

Завдання № 36 *(поглиблений рівень): При яких значеннях параметра a рівняння* $\frac{(x^2-2(a+1)\cdot x+6a-3)(tg\,\pi x-1)}{\sqrt[4]{49x^2-84xa+36a^2}}=0$ *на проміжку* $[0;1]$ *має рівно два різні корені?*

Розв'язання:

Дане рівняння є дробово-раціональним. Знайдемо область допустимих значень для цього рівняння, тобто знаменник не повинен дорівнювати нулю.

Проте в знаменнику ми маємо корінь парного степеня, який існує, якщо підкореневий вираз невід'ємний. Також слід врахувати вираз $(tg\pi x - 1)$ у чисельнику.

ОДЗ: $\begin{cases} 49x^2 - 84xa + 36a^2 > 0, \\ \cos\pi x \neq 0 \end{cases}.$

Помічаємо у першій нерівності системи квадрат різниці і розпишемо його за формулою:

$$\begin{cases} (7x - 6a)^2 > 0, \\ \cos\pi x \neq 0 \end{cases};$$

Відомо, що квадрат будь-якого виразу є невід'ємним, тому ми можемо переписати першу нерівність системи наступним чином:

$$\begin{cases} (7x - 6a)^2 \neq 0, \\ \cos\pi x \neq 0 \end{cases},$$

Знайдемо значення x з отриманої системи нерівностей

$$\begin{cases} x \neq \frac{6a}{7}, \\ \pi x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Обидві частини другого рівняння системи поділимо на π і отримаємо

$$\begin{cases} x \neq \frac{6a}{7}, \\ x \neq \frac{1}{2} + n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Переходимо до розв'язування рівняння, заданого за умовою. Добуток двох множників дорівнює нулю тоді, коли один з множників дорівнює нулю.

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 2(a+1) \cdot x + 6a - 3 = 0, \\ \operatorname{tg}\pi x - 1 = 0. \end{array}\right.$$

Випишемо перше рівняння сукупності та знайдемо його дискримінант

$x^2 - 2(a+1) \cdot x + 6a - 3 = 0,$

$D = (2(a+1))^2 - 4(6a - 3),$

$D = 4(a^2 + 2a + 1) - 4(6a - 3),$

$D = 4(a^2 + 2a + 1 - 6a - 3),$

$D = 4(a^2 - 4a + 4) = 4(a - 2)^2,$

$D = 4(a - 2)^2 \geq 0$.

Отримали невід’ємне значення дискримінанту, отже рівняння може мати два різні корені, або один. Знайдемо корені рівняння:

$x_{1,2} = \frac{2(a+1)\pm 2(a-2)}{2}$,

Знайдемо корені рівняння окремо і зведемо спільні доданки:

$x_1 = \frac{2a+2+2a-4}{2} = \frac{4a-2}{2} = 2a - 1,$

$x_2 = \frac{2a+2-2a+4}{2} = \frac{6}{2} = 3.$

На даному етапі розв’язання необхідно згадати умову задачі, а саме те, що задано проміжок $[0;1]$. Корінь рівняння $x_2 = 3$ не входить у цей проміжок. Отже, він не є розв’язком. Для першого кореня знайдемо межі на заданому проміжку $[0;1]$ за допомогою подвійної нерівності:

$0 \le 2a - 1 \le 1,$

$1 \le 2a \le 2,$

$\frac{1}{2} \le a \le 1.$

Отже, $a \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Тепер розв’яжемо друге рівняння сукупності:

$\operatorname{tg} \pi x - 1 = 0,$

$\operatorname{tg} \pi x = 1,$

$\pi x = \frac{\pi}{4} + \pi n.$

Поділивши останнє рівняння на π, отримаємо:

$x = \frac{1}{4} + n, \;\; n \in \mathbb{Z}$.

Дане рівняння матиме безліч коренів, проте, враховуючи розглядуваний проміжок, матимемо лише один корінь:

$n = 0, \quad x = \frac{1}{4}.$

Отримавши корені, слід врахувати область допустимих значень. Для першого кореня маємо:

$2a - 1 \ne \frac{6a}{7},$

Домножимо цей вираз на 7, відповідно отримаємо:

$14a - 7 \neq 6a,$

$8a \neq 7,$

$a \neq \frac{7}{8}.$

Отже, значення $a \neq \frac{7}{8}$ необхідно виколоти з проміжку $a \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, тобто

$a \in \left[\frac{1}{2}; \frac{7}{8}\right) \cup \left(\frac{7}{8}; 1\right]$.

Для другого кореня матимемо:

$\frac{1}{4} \neq \frac{6a}{7}$, => $24a \neq 7$, => $a \neq \frac{7}{24} < \frac{1}{2}$.

Розглянемо другу умову сукупності $x \neq \frac{1}{2} + n, \ n \in \mathbb{Z}$. Враховуючи, що корінь заданого за умовою рівняння має бути визначений на проміжку $[0; 1]$, при $n = 0$ матимемо $x \neq \frac{1}{2}$. Підставимо дану умову для першого кореня:

$2a - 1 \neq \frac{1}{2}, \quad a \neq \frac{3}{4}.$

Отже, значення параметра $a = \frac{3}{4}$ слід виключити зі знайденого проміжку

$a \in \left[\frac{1}{2}; \frac{7}{8}\right) \cup \left(\frac{7}{8}; 1\right]$.

Оскільки корені рівняння мають бути різними, то отримаємо:

$2a - 1 \neq \frac{1}{4}, \quad 2a \neq \frac{5}{4}, \quad a \neq \frac{5}{8}.$

Отже, ми отримали $a \neq \frac{7}{8}$, $a \neq \frac{3}{4}$, $a \neq \frac{5}{8}$.

Отже, дане рівняння має два різні корені на $[0; 1]$, якщо

$a \in \left[\frac{1}{2}; \frac{5}{8}\right) \cup \left(\frac{5}{8}; \frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}; \frac{7}{8}\right) \cup \left(\frac{7}{8}; 1\right]$.

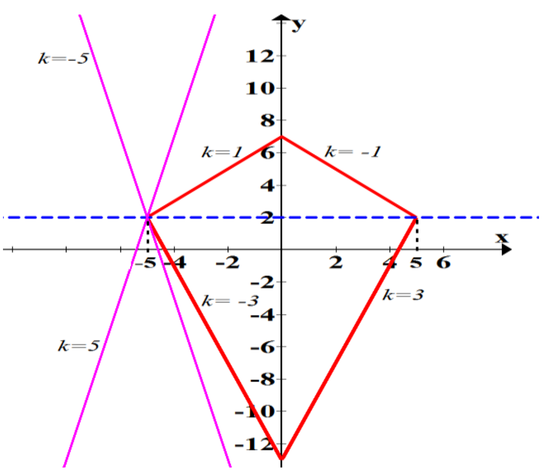

Рис.2.1. Графік функції $\frac{(x^2-2(a+1)\cdot x+6a-3)(\operatorname{tg}\pi x-1)}{\sqrt[4]{49x^2-84xa+36a^2}}=0.$

Відповідь: При $a \in \left[\frac{1}{2};\frac{5}{8}\right) \cup (\frac{5}{8};\frac{3}{4}) \cup (\frac{3}{4};\frac{7}{8}) \cup (\frac{7}{8};1\right]$.

При розв'язуванні даного завдання учням слід задати як розв'язуються дробово-раціональні рівняння, як знайти область допустимих значень рівняння, також необхідно мати навички розв'язування тригонометричних рівнянь. Необхідно наголосити учням про те, що треба враховувати проміжок на якому дійсні розв'язки.

Розглянемо для прикладу ще одне з таких завдань зі збірника ЗНО за 2018 рік. [30]

Завдання №33: *Розв'яжіть нерівність* $\frac{\log_a x}{x^2+(a-4)x+4-2a} \le 0$ *залежно від значення параметра* a.

Розв'язання:

Перш за все необхідно визначити область допустимих значень параметра. Згідно з означення логарифму маємо:

ОДЗ: $\begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1; \end{cases} \quad a \in (0;1) \cup (1;+\infty).$

Знайдемо область допустимих значень для змінної x:

ОДЗ : $\begin{cases} x > 0, \\ x^2+(a-4)x+4-2a \neq 0. \end{cases}$

З другого рівняння системи знайдемо нулі квадратного тричлена. Для цього необхідно обчислити дискримінант:

$$D=(a-4)^2-4(4-2a)=a^2-8a+16-16+8a=a^2,$$

$$D=a^2 \ge 0.$$

Оскільки отримали дискримінант більше або рівне нулю, то ми отримаємо два корені або один. Знайдемо корені для даної нерівності:

$x_{1,2}=\frac{4-a\pm a}{2}$, $x_1=\frac{4-a+a}{2}=2$, $x_2=\frac{4-a-a}{2}=\frac{4-2a}{2}=2-a.$

Позначимо розв’язок даної системи на числовій прямій враховуючи, що $a < 2$ та $a \geq 2$ для точки $x_2 = 2 - a$:

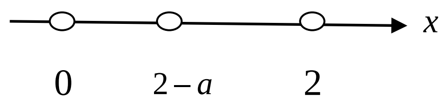

Рис. 2.2. Числова пряма

Отже, маємо:

$$\left[\begin{array}{l} a < 2, \quad x \in (0; 2-a) \cup (2-a; 2) \cup (2; +\infty), \quad y = 5x - 2a, \\ \qquad a \geq 2, \quad x \in (0; 2) \cup (2; +\infty), \quad y = -5x + 2a. \end{array}\right.$$

Переходимо до розв’язання нерівності. Перепишемо дану нерівність, враховуючи області допустимих значень:

$\log_a x(x - (2 - a))(x - 2) \leq 0$

Позначимо нулі функції та область допустимих значень на числовій прямій. Проте треба розглянути де буде знаходитись точка $x_2 = 2 - a$ для цього розглянемо випадки коли $0 \leq a \leq 1$ і визначити який знак набуває нерівність на розбитих проміжках:

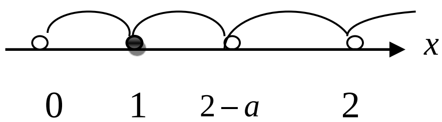

Рис. 2.3. Числова пряма

$x \in [1; 2 - a) \cup (2; +\infty)$.

Далі розглянемо випадок, коли $1 < a < 2$. Розв’яжемо задану нерівність при таких значеннях параметра a, зобразимо область допустимих значень нерівності та отримані точки на числовій прямій:

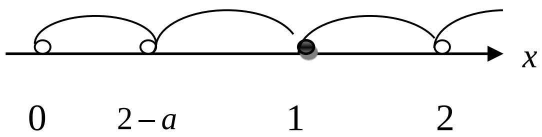

Рис. 2.4. Числова пряма

$x \in (0; 2-a) \cup [1; 2)$.

Розглянемо випадок коли $a \geq 2$ та позначимо на числовій прямій розв'язок, враховуючи область допустимих значень:

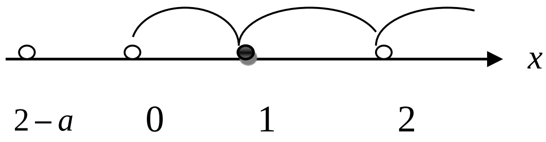

Рис. 2.5. Числова пряма

Так як точка $x = 2 - a$ не входить в область допустимих значень, то будемо розглядати лише три проміжки.

Відповідь: якщо $a \in (0; 1)$, то $x \in [1; 2-a) \cup (2; +\infty)$; якщо $a \in (1; 2)$, то $x \in (0; 2-a) \cup [1; 2)$; якщо $a \in [2; +\infty)$, то $x \in [1; 2)$.

Розв'язуючи задану нерівність учням необхідно пригадати основні методи та властивості розв'язування нерівностей. Згадати як знаходити область допустимих значень. Також слід наголосити учням про те, що необхідно визначити область допустимих значень як для самої нерівності, так і для параметра. Необхідно знати означення логарифмів та методи їх розв'язання. Розв'язок заданої нерівності вимагає також оперуванням вмінь розбивати числову пряму за нулями функції та аналізувати отримані дані. Також типовою помилкою учнів є те, що можуть забувати враховувати область допустимих значень при записуванні остаточної відповіді.

Наведемо ще один приклад розв'язання завдання із зовнішнього незалежного оцінювання за 2019 рік.

Умова задачі [31]. *Задано систему нерівностей*

$$\begin{cases} \pi^2 - x^2 \geq 0, \\ (\log_5 a) \cdot \left(2\sin^2 x - (2a-1)\sin x - a\right) \geq 0, \end{cases}$$ *де x – змінна, a – додатна стала.*

1. *Розв'яжіть першу нерівність цієї системи.*

2. *Знайдіть множину розв'язків другої нерівності залежно від значень a.*

Розв'язання:

Розв’язок даної задачі проведемо синтетичним методом.

1. Знайдемо розв’язки нерівності $\pi^2 - x^2 \geq 0$.

Дана нерівність є квадратичною нерівністю, тому для знаходження розв’язку потрібно розкласти многочлен на лінійні множники та застосувати метод інтервалів.

Отримаємо: $\pi^2 - x^2 \geq 0$, $x^2 - \pi^2 \leq 0$, $(x-\pi)(x+\pi) \leq 0$.

Так, на числовій осі позначимо точки $x = \pi$ та $x = -\pi$. Розіб’ємо числову вісь на проміжки та визначимо знак квадратичного виразу. Проміжки показано на рис.2.6.

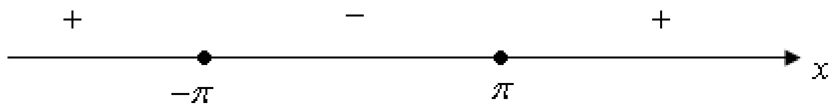

Рис.2.6.

Отже розв’язком нерівності $\pi^2 - x^2 \geq 0$ є проміжок $x \in [-\pi; \pi]$.

2. Знайдемо множину розв’язків нерівності

$(\log_5 a) \cdot (2\sin^2 x - (2a-1)\sin x - a) \geq 0$, залежно від значень параметра a ,тому розглянемо ліву частину .

Так як параметр a є виразом, що стоїть під знаком логарифма, то $a > 0$.

Далі будемо аналізувати кожен множник у лівій частині нерівності. Основою логарифма є число $5 > 1$, тому згідно властивостей логарифмічної функції можливі такі випадки:

1) $0 < a < 1, \log_5 a < 0$; 2)$a = 1$, $\log_5 a = 0$; 3)$a > 1, \log_5 a > 0$.

Розглянемо кожен з випадків почерзі.

1) При $0 < a < 1$, маємо $\log_5 a < 0$, тому другий множник повинен задовольняти умову $(2\sin^2 x - (2a-1)\sin x - a) \leq 0$.

Розв’яжемо цю нерівність залежно від параметра $0 < a < 1$.

Введемо заміну $\sin x = t$, $-1 \leq t \leq 1$.

Підставивши заміну в нерівність отримаємо: $2t^2 - (2a-1)t - a \leq 0$,

$0 < a < 1$. Знайдемо корені квадратичного виразу нерівності та застосуємо метод інтервалів.

$2t^2 - (2a-1)t - a = 0$, $0 < a < 1$.

$D = (2a-1)^2 + 8a = 4a^2 - 4a + 1 + 8a = (2a+1)^2 > 0$, при $0 < a < 1$.

Крім того, $2a + 1 > 0$, при $0 < a < 1$.

Отримали два корені:

$t_1 = \frac{(2a-1)+2a+1}{4} = a, \quad t_2 = \frac{(2a-1)-(2a+1)}{4} = -\frac{1}{2}$.

При $0 < a < 1$, $t_1 = a \in [-1; 1]$ і $t_2 = -\frac{1}{2} \in [-1; 1]$.

Зробимо відповідні позначення на числовій осі, рис. 2.7.

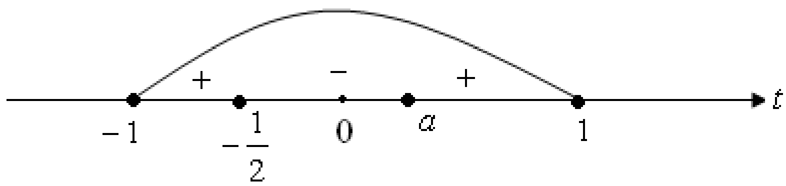

Рис.2.7.

Отже, розв'язком нерівності є проміжок $t \in [-\frac{1}{2}; a]$.

На даному етапі слід повернутися до здійсненої заміни. Отже, матимемо

$-\frac{1}{2} \le \sin x \le a$.

Побудуємо одиничне коло.

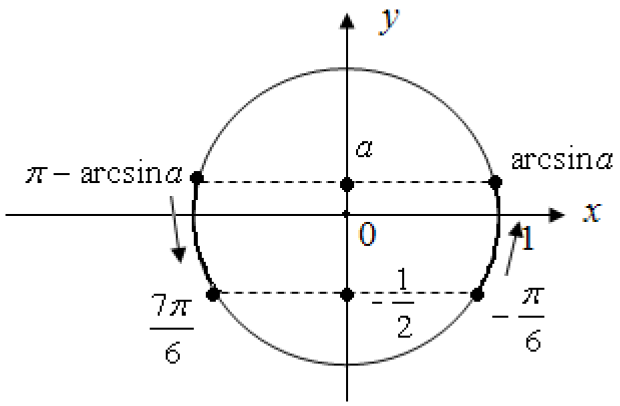

Рис. 2.8.

Очевидно що , при $0 < a < 1$,

$$x \in \left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \arcsin a + 2\pi n\right] \cup \left[\pi - \arcsin a + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right], \quad n \in Z.$$

2) При $a=1$, $\log_5 a=0$. Тому розв’язками у цьому випадку є всі дійсні числа $x\in(-\infty;+\infty)$.

3) При $a>1$, маємо $\log_5 a>0$, тому другий множник початкової нерівності має задовольняти умову $2\sin^2 x-(2a-1)\sin x-a\geq 0$.

Як бачимо, задача звелась до розв’язання тригонометричної нерівності залежно від параметра $a>1$.

1) застосуємо метод заміни $\sin x=t$, $-1\leq t\leq 1$.

Отримаємо: $2t^2-(2a-1)t-a\geq 0$, $a>1$

Знайдемо корені квадратного рівняння:

$$t_1=\frac{(2a-1)+2a+1}{4}=a,\quad t_2=\frac{(2a-1)-(2a+1)}{4}=-\frac{1}{2}.$$

При $a>1$ $t_1=a\notin[-1;1]$ і $t_2=-\frac{1}{2}\in[-1;1]$.

Зобразимо отримані дані на числовій прямій Рис.2.9.

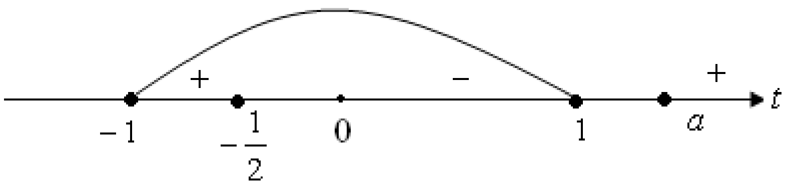

Рис. 2.9.

Отже, розв’язком останньої тригонометричної нерівності є проміжок $t\in\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$.

Повертаємося до заміни, відповідно будемо мати : $-1\leq\sin x\leq-\frac{1}{2}$.

Побудуємо одиничне коло, зробимо відповідні позначення (рис.2.10.) та випишемо проміжки зміни аргумента.

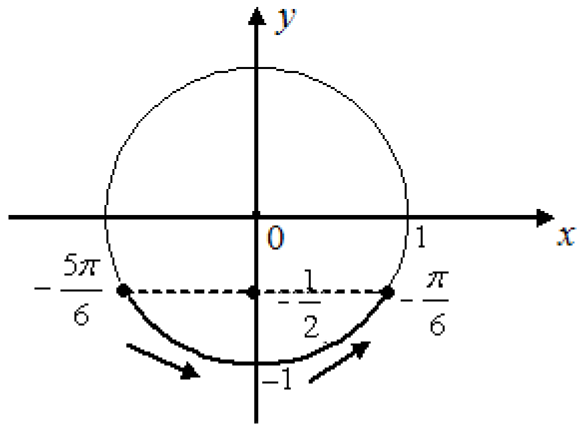

Рис.2.10.

Таким чином, при $a>1$, $x \in \left[-\frac{5\pi}{6}+2\pi n; -\frac{\pi}{6}+2\pi n\right], \quad n \in Z$.

Отже, відповідь до завдання 2 даної задачі: знайдено множину розв’язків нерівності залежно від значень a

Якщо $0<a<1$, то $x \in \left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n; \arcsin a+2\pi n\right] \cup \left[\pi-\arcsin a+2\pi n; \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right], \quad n \in Z$.

Якщо $a=1$, то $x \in (-\infty; +\infty)$.

Якщо $a>1$, то $x \in \left[-\frac{5\pi}{6}+2\pi n; -\frac{\pi}{6}+2\pi n\right], \quad n \in Z$.

Отже, отримали відповідні розв'язки.

Відповідь: 1) розв’язком нерівності $\pi^2 - x^2 \geq 0$ є проміжок $x \in [-\pi; \pi]$; 2) якщо $0<a<1$, то $x \in \left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n; \arcsin a+2\pi n\right] \cup \left[\pi-\arcsin a+2\pi n; \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right], \quad n \in Z$; якщо $a=1$, то $x \in (-\infty; +\infty)$; якщо $a>1$, то $x \in \left[-\frac{5\pi}{6}+2\pi n; -\frac{\pi}{6}+2\pi n\right], \quad n \in Z$.

Для успішного розв’язання даної задачі учні повинні знати та безпомилково оперувати основними властивостями степеневих, тригонометричних, логарифмічних функції; належно демонструвати уміння розв’язувати степеневі та тригонометричні нерівності, застосовувати різні методи.

2.2. Розв’язування задач з параметром при роботі з обдарованими учнями

Більшість сучасних шкіл практикують такий напрямок роботи, як робота з обдарованими дітьми. Дані заняття відбуваються як на уроках так і в позакласні години, або канікулярний період. Основним завданням таких занять у галузі математики є розширення та поглиблення знань, ознайомлення з нестандартними підходами до розв’язування завдань які через брак часу неможливо викласти на уроці. Також дана форма роботи дозволяє вчителю самостійно складати план роботи з обдарованими учнями та підбирати задачі, що дає змогу розглядати задачі підвищеної складності. Найчастіше на таких заняттях розглядаються завдання експериментального, дослідницького та олімпіадного змісту, державної підсумкової атестації, а також зовнішнього незалежного оцінювання.

Ці всі питання досить вдало можна вирішити за допомогою практичних завдань, особливо задач з параметрами. Такі задачі відкривають перед учнями значну кількість різних методів і прийомів розв’язання поставленої задачі як аналітично, так і графічно та дають їм змогу креативно та нестандарто підійти до розв’язку.

Розв’язування задач з параметроми на таких заняттях дають змогу учню самостійно побудувати алгоритм розв’язання та згадати необхідний матеріал. Оскільки задачі такого типу включають в себе велику кількість матеріалу який необхідно пригадати учню, то він ще й додатково закріпить свої знання та вміння при розв’язуванні даних завдань. Для прикладу візьмемо таку задачу:

Завдання: *Знайдіть усі значення параметра а, при якому добуток коренів рівняння* $\log_2^2 x-(2a^2-a)\log_2 x+1-2a=0$*, дорівнює 8.*

Розв'язання:

На початку розв'язання зробимо заміну $\log_2 x=t$, тоді підставивши в початкове рівняння отримаємо:

$$t^2-(2a^2-a)t+1-2a=0$$

Рівняння прийняло вигляд звичайного квадратного рівняння, розв’язки якого знаходять за допомогою дискримінанту.

Загальний вигляд формули дискримінанту $D=b^2-4ac$.

У цьому випадку $a=1$, $b=2a^2-a$, $c=1-2a$. Враховуючи формулу дискримінанта, знайдемо корені рівняння :

$$D=\left(2a^2-a\right)^2-4(1-2a)=a^2\left(2a-1\right)^1+4\left(2a-1\right).$$

Якщо $a>\frac{1}{2}$, то рівняння має два корені:

$$t_{1,2}=\frac{2a^2-a\pm\sqrt{D}}{2}.$$

На даному етапі розв'язання важливо, щоб учень не забув про заміну, вертаємося до заміни та підставляємо отримані дані:

$$\log_2 x=\frac{2a^2-a\pm\sqrt{D}}{2}, \qquad x_{1,2}=2^{\frac{2a^2-a\pm\sqrt{D}}{2}},$$

Обчислимо добуток коренів

$$x_1\cdot x_2=2^{\frac{2a^2-a+\sqrt{D}}{2}}\cdot 2^{\frac{2a^2-a-\sqrt{D}}{2}}.$$

За властивостями показникових рівнянь: при множенні виразів з однаковою основою показники множників додаємо. Отже, можемо перейти до рівняння:

$$x_1\cdot x_2=2^{\frac{2a^2-a+\sqrt{D}}{2}+\frac{2a^2-a-\sqrt{D}}{2}}.$$

Спростивши показники, отримаємо:

$$x_1\cdot x_2=2^{\frac{4a^2-2a}{2}}, \qquad x_1\cdot x_2=2^{2a^2-a}.$$

Оскільки за умовою задачі добуток коренів дорівнює 8, то $2a^{2a^2-a}=8$ <=> $2^{2a^2-a}=2^3$. Отже, маємо показникове рівняння, у лівій та правій частині якого маємо вирази з однаковими основами. На підставі цього можемо переходити до лінійного рівняння

$$2a^2-a=3,$$

За теоремою Вієта знаходимо корені рівняння:

$$\left[\begin{array}{l} a=\frac{3}{2}, \\ a=-1. \end{array}\right.$$

Врахувавши умову $a>\frac{1}{2}$, отримаємо $a=\frac{3}{2}=1{,}5$.

Відповідь: 1,5.

Як видно з задачі учням доведеться пригадати як елементарні знання про розв'язування рівнянь та нерівностей, знаходження коренів рівняння як за дискримінантом так і за теоремою Вієта. Також пригадати необхідно основні властивості логарифма, а також властивості показникових рівнянь.

Також проблематичним етапом є підготовка учнів до математичних олімпіад.

Серед усіх учнівських змагань олімпіади з математики займають особливо важливе місце. По-перше, саме математичні олімпіади започаткували історію будь-яких олімпіад з предметів. По-друге, для того щоб стати переможцем в математичній олімпіаді недостатньо просто знати базовий шкільний матеріал, і, нарешті, втретє, математичні олімпіади залишаються найпрестижнішими серед усіх учнівських олімпіад.

Математична олімпіада – це змагання, метою якого є виявлення найбільш талановитих учнів у галузі математики, підвищення мотивації до вивчення математики та розвитку дослідницьких навичок. Зрозуміло, що цієї мети складно досягнути, а в деяких випадках навіть неможливо, якщо пропонувати учням просто стандартні шкільні задачі, які в більшості є чисто технічними і не дозволяють учням нестандартно та креативно підходити до їх вирішення.. Видатні вчені та педагоги ще понад 60 років тому розробили тематику олімпіадних завдань, яка знаходиться в межах програми з математики, але дозволяє проявити себе талановитим учням. Окрім того, здібності учнів до математики виявляються не лише у вміннях швидко і раціонально знайти розв'язання поставленої задачі, але й у вмінні самостійно опрацювати і осмислити хоча б незначний за обсягом, але абсолютно новий математичний текст. Всі ці наведені фактори обумовлюють зміст завдань математичних олімпіад.

Наведемо приклад одного з завдань олімпіади [20]

Наведемо приклад завдання №3 для 11 класу.

Завдання: *При яких значеннях параметра а рівняння* $\frac{x-1}{|x-1|}x = a$ *має лише один розв'язок? [21]*

Розв'язання:

Задане рівняння можна розв'язати двома способами, як аналітично, так і графічно. Покажимо обидва розв'язки.

1. Аналітичний спосіб.

Помічаємо що задане рівняння можна звести до наступної рівносильної сукупності систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x > 1,\\ x = a\end{cases}\\ \begin{cases}x < 1,\\ x = -a\end{cases}\end{array}\right.$$

Помічаємо, що при $a = 1$ з першої системи сукупності розв'язків немає, але при $a = 1$ з другої системи сукупності умова задачі виконується.

З отриманої сукупності помічаємо єдиний розв'язок за умови $|a| < 1$. Так умова поставленої задачі виконується при $a \in (-1;1]$.

2. Графічний спосіб розв'язання:

Для розв'язання заданого рівняння необхідно побудувати графік функції $y = \frac{x-1}{|x-1|} \cdot x,$

Для побудови даного графіка функції необхідно розглянути цю функцію на проміжках

$$y = \begin{cases} x, & x > 1 \\ -x, & x < 1 \end{cases}.$$

Спочатку побудуємо графік функції $y = a$. Очевидно. Що це рівняння задасть сукупність прямих, які будуть побудовані паралельно до осі Ox. Аналізуючи побудований графік, помічаємо одну точку перетину при $a \in (-1;1]$

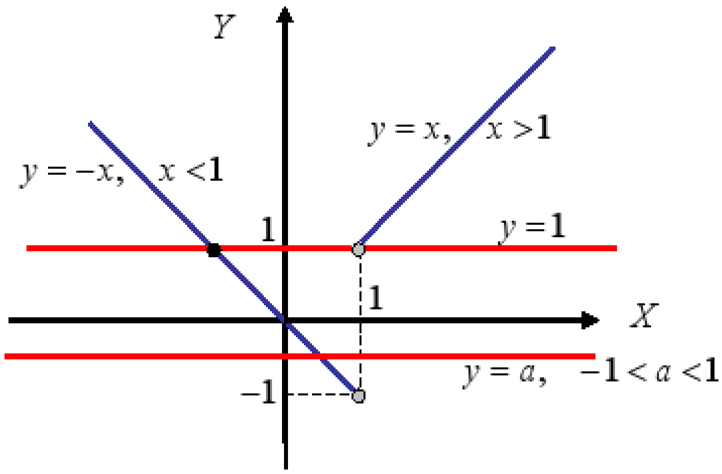

Рис.2.13. Графік функції $\frac{x-1}{|x-1|}x=a$

Отже відповідь: $a\in(-1;1]$.

ВИСНОВОК ДО ІІ РОЗДІЛУ

У другому розділі було розглянуто особливості розв'язання дослідницьких завдань, які містять в собі задачі з параметрами. До таких завдань слід віднести завдання з підвищеною складністю. А саме: завдання для факультативних занять, олімпіадного змісту, а також задачі з зовнішнього незалежного оцінювання. Так як задачі з параметрам є одними з якісних способів узагальнення та систематизації знань, то вони широко застосовуються для перевірки навиків та вмінь учнів. Під час розв'язування дослідницьких завдань в учнів розвивається критичне мислення, здібності аналізувати та систематизувати знання, підвищуються логічні й технічні можливості.

Програма з математики в загальноосвітніх школах не передбачає часу для розв'язування завдань даного типу. Проте учням доводиться зіткатися з необхідністю розв'язувати задачі з параметрами на шкільних олімпіадах, державних підсумкових атестаціях та зовнішньому незалежному оцінюванні. Тому такі завдання повинні входити до програми з математики і розглядатися хоча б в позаурочний час або на факультативних заняттях. Доречним, можна вважати введення в школах роботи з обдарованими дітьми. Оскільки вчитель може самостійно підбирати план роботи та матеріал з такими дітьми, тому на таких заняттях слід враховувати завдання з параметрами.

ВИСНОВОК

Технологічний прогрес не стоїть на місці, тому сучасність вимагає від вчителів та учнів мобілізуватися та підлаштовуватися під реформи освіти. Для творчого та евристичного розвитку учнів є розв'язування завдань з параметром.

Розв'язування математичних задач, як вказував А. Я. Хінчин, виховує правильне мислення, і перш за все вдосконалюється вміння повноцінної аргументації. При розв'язуванні математичних задач в учнів формується особливий тип мислення: виконання формально логічної схеми міркувань, лаконічний вираз думок, чітка розчленованість ходу мислення, точність символіки [23]. Саме наявність задач з параметрами збагачують дослідницьку діяльність учнів. Тому такі задачі повинні бути заплановані до вивчення кожної теми, причому це має бути доречно та аргументовано. Оскільки в багатьох шкільних підручниках зустрічаються лише ті прийоми, коли необхідно розв'язати завдання, маючи числові значення величин, або буквенні, то слід надати учням можливість самостійно обдумувати алгоритм дій, аналізувати та робити висновки.

Не зважаючи на важливу роль у формуванні математичного мислення, в шкільному курсі алгебри та початків аналізу в неспеціалізованих класах, задачі з параметрами не передбачені до вивчення програмою. Аналіз шкільних підручників різних рівнів показав, що на розв'язування задач з параметрами приділяється мало уваги. Так більш доступно учні можуть знайомитись з параметрами за підручниками для профільних класів. Можна зауважити, що в усіх підручниках подані однотипні завдання. Проте завдання на знаходження параметра, розв'язання рівняння чи нерівностей відносно параметра, широко використовуються у завданнях державної підсумкової атестації, учнівських олімпіадах, а також зовнішньому незалежному оцінюванні.

У роботі було розглянемо як основні відомості про параметр з якими зустрічаються учні, так і основні методи і прийоми розв'язання завдань з параметрами. При аналізі методів розв'язання задач з параметрами , було встановлено, що сам хід розв’язання може містити в собі водночас декілька методів. Це залежить від виду та типу рівняння або нерівності, за певних значень параметра. Розв’язуючи задачі з параметрами слід уважно та ретельно підходити до аналізу отриманих результатів. При записі остаточної відповіді необхідно врахувати область допустимих значень, як відносно самого рівняння чи нерівності, так і відносно самого параметра. Оволодівши методами та прийомами розв’язування задач з параметрами, учні можуть успішно розв’язувати й інші задачі різної складності.

У цій роботі ми не змогли розглянути всі типи, методи та прийоми розв’язування задач з параметрами, оскільки їх існує велика кількість. Проте проведене дослідження дозволяє розглянути основні методичні особливості розв’язування задач з параметрами у курсі математики, та дає змогу використовувати отримані результати при роботі з учнями при підготовці до учнівських олімпіад та зовнішнього незалежного оцінювання.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1.Апостолова Галина, Ясінський Василь. Перші зустрічі з параметром. — К.: Факт, 2004. 316 с.
іл. URL:http://matematuka.inf.ua/rizne/apostolova_parametru/param.html

2. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. – К.: РИА »Текст»; МП»ОКЛ», 1992. 290 с.

3. Єфімов Є. А., Коломієць Л.В, Задачі з параметрами, навчальний посібник для факультету довузівської підготовки, Самара. 2006. 64 с.

4. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики: 11 кл./ О.С.Істер, О.І. Глобін, І.Є.Панкратова. - К.: Центр навч.-метод. л-ри. 2012. 110с.

5. Істер О.С., ЄргінаО. В. Алгебра і початки аналізу : (проф. рівень) : підруч. для 10-го кл. закл. Серед. Освіти. К. : Генеза, 2018. 448 с.

6. Істер О. С. Методи розв’язування задач з математики. Теорія. Приклади. Вправи. Книга 1. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2014. 480 с.

7.МерзлякА. Г., НоміровськийД. А., ПолонськийВ. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на погл. рівні з 8 кл. проф.. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Х. : Гімназія, 2018. 312 с.

8. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Х. : Гімназія, 2018. 256 с.

9. Мерзляк А.Г., Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів: профільний рівень. Х. : Гімназія, 2010. 416 с.

10. Навчальні програми з математики для учнів 10-11 класів профільний рівень.

11. Навчальні програми з математики для учнів 10-11 класів академічний рівень.

12. Навчальні програми з математики для учнів 10-11 класів рівень стандарт.

13. Навчальні програми з математики для учнів 5-9 класів профільний рівень.

14. Олімпіадні задачі з математики з розв’язками для учнів середньої школи URL: https://boykoandrey.ucoz.com/_ld/0/25____.pdf

15. Олімпіадні задачі з математики з розв'язками для учнів старшої школи
URL: http://www.slavdpu.dn.ua/fmk/publications/manuals/manual_10.pdf

16. Пирковська О. В. Задачі з параметрами // XIV Всеукраїнська студентська наукова конференція "Перспективи розвитку точних наук, економіки та методики їх викладання" 5-6 грудня 2018 року : матеріали конференції. – Ніжин: НДУ ім. М. Гоголя, 2018. – С. 149 – 150с.

17. Пирковська О.В., Чоренька О.В. Задачі, що містять параметр, в шкільній програмі з алгебри // Сучасний рух науки: тези доп. V міжнародної науково-практичної інтернет-конференції, 7-8 лютого 2019 р. – Дніпро, 2019. – С. 549 – 552с.

18. Сертифікаційна робота з математики. Зовнішнє незалежне оцінювання 2014. Зошит 1. Український центр оцінювання якості освіти. 20 с.
URL: http://ru.osvita.ua/doc/files/news/415/41573/1_math_2014_zadanie.pdf

19. Сертифікаційна робота з математики. Зовнішнє незалежне оцінювання 2015. Зошит 1. Український центр оцінювання якості освіти. 20 с.
URL: http://ru.osvita.ua/doc/files/news/471/47111/1_ZNO_2015_math.pdf

20. Сертифікаційна робота з математики. Зовнішнє незалежне оцінювання 2017. Зошит 1. Український центр оцінювання якості освіти. 20 с.
URL: http://osvita.ua/doc/files/news/558/55886/mathem_test_2017.pdf

21. Сертифікаційна робота з математики. Зовнішнє незалежне оцінювання 2018. Зошит 1. Український центр оцінювання якості освіти. 20 с.
URL: http://osvita.ua/doc/files/news/608/60848/MatematykaOsnovne-ZNO_2018-Zoshyt_1.pdf 552

22.Якушев А. В. Задачі з параметром. /власний досвід. Дніпро, 2010. 23 с.

23. Прус А.В., Швець В.О. Задачі з параметрами в шкільному курсі математики. Навчально-методичний посібник.- Житомир:Вид-во «Рута», 2016. 468с.