https://www.sworldjournal.com/index.php/swj/article/view/swj13-01-001
DOI: 10.30888/2663-5712.2022-13-01-001

УДК 519.21

THE EXISTENCE OF THE SOLUTION OF THE CAUCHI PROBLEM FOR NONLINEAR STOCHASTIC PARTIAL DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATIONS OF NEUTRAL TYPE WITH RANDOM EXTERNAL PERTURBANCES

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ З УРАХУВАННЯМ ВИПАДКОВИХ ЗОВНІШНІХ ЗБУРЕНЬ

Yurchenko I.V. / Юрченко І.В.
cand. of ph.-math. sc., assoc. prof. / к.ф.-м.н., доц.
ORCID: 0000-0001-9929-5758
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University,
Ukraine, Chernivtsi, vul. Universitet'ska, 28, 58000
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Україна, Чернівці, вул. Університетська, 28, 58000

Анотація. *Розглянуто питання існування розв'язку задачі Коші в класі нелінійних стохастичних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу в частинних похідних з урахуванням випадкових зовнішніх збурень, незалежних від вінерового процесу. Одержано достатні умови на коефіцієнти нелінійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу, які гарантують існування з імовірністю одиниця його розв'язку.*

Ключові слова: *стохастичне диференціально-різницеве рівняння, вінерові збурення, пуассонові перемикання, існування розв'язку.*

Вступ.

Питання існування та єдиності розв'язку стохастичних диференцальних рівнянь з деякими початковими та граничними умовами в різних функціональних просторах, зокрема і рівнянь у частинних похідних, досліджувалося багатьма авторами [3, 4, 6, 7, 8, 11, 12]. У працях [9, 10] О.М. Станжицький та А.О. Цуканова одержали теорему існування та єдиності розв'язку задачі Коші для стохастичного диференціального рівняння реакції-дифузії нейтрального типу. Дана робота розглядає питання існування розв'язку задачі Коші в класі нелінійних дифузійних стохастичних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу в частинних похідних з урахуванням випадкових зовнішніх збурень, незалежних від вінерового процесу і продовжує дослідження, розпочаті в роботах [9, 10, 13].

Постановка задачі. Нехай на ймовірнісному базисі $\left(\Omega, F, \{F_t, t \ge t_0, 0\}, \mathbf{P}\right)$ задано нелінійне дифузійне стохастичне диференціально-різницеве рівняння нейтрального типу (НДСДРРНТ) в частинних похідних під дією випадкових зовнішніх збурень, незалежних від вінерового процесу

$$d\left(u(t,x)+\int_{\mathbf{R}^r} b(t,x,y)u(t-\tau,y)dy\right)=\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_j^2}+\sigma\big(t,u(t-\tau,x)\big)dw(t,x)+$$
$$+\int_{\mathbf{Z}} c\big(t,u(t-\tau,x),z\big)\tilde{\nu}(dz,dt), \qquad (1)$$

для $t\in(0,T]$, $x\in\mathbf{R}^r$ за початковими даними

$$u(t,x)=\psi(t,x),\quad \forall t\in[-\tau,0],\tag{2}$$

$u(t,x):[0,T]\times\mathbf{R}^1\to\mathbf{R}^1$ – розв'язок задачі (1), (2); $T\in(0,\infty)$ – фіксований дійсний час, $\tau>0$, r-вимірний оператор Лапласа [1, 4]

$$\Delta_x\equiv\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_j^2},\tag{3}$$

$w(t,x)$ – $L_2(\mathbf{R}^r)$-вимірний Q-вінеровий процес [2];

$\tilde{\nu}(A,t)\equiv\nu(A,t)-\mathbf{E}\{\nu^2(A,t)\}$ – центрована пуассонова міра [3],

$\sigma:[0,T]\times\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^r\to\mathbf{R}^1$ і $b:[0,T]\times\mathbf{R}^r\times\mathbf{R}^r\to\mathbf{R}^1$, $c:[0,T]\times\mathbf{R}^r\times\mathbf{R}^1\to\mathbf{R}^1$ – деякі конкретні функції, які будуть визначені під час дослідження;

$\psi:[-\tau,0]\times\mathbf{R}^r\to\mathbf{R}^1$ – функція початкових даних.

Попередні результати та основні означення. Наведемо декілька тверджень з праць [9–12].

Лема 1. [12, с.188]**.** *Оператор*

$$S(t):L_2(\mathbf{R}^r)\to L_2(\mathbf{R}^r)\tag{4}$$

генерує розв'язок однорідної задачі Коші для рівняння тепла (лема 1, [9]) з імовірністю 1

$$d\big(u(t,x)\big)+\int_{\mathbf{R}^r}b(t,x,z)u(t-\tau,z)dz=\Delta_x u(t,x),\tag{5}$$

за початковими даними (2) за правилом

$$u(t,x)=\big(s(t)g(\bullet)\big)(x)=\int_{\mathbf{R}^r}K(t,x-y)g(\bullet)dy,\tag{6}$$

та утворює C_{0-} напівгрупу операторів, інфінітезимальним оператором якої є випадковий лапласіан $\Delta_x(\omega)$ (3). Напівгрупа $S(t)$ є стискаючою, тобто

$$\left\|\big(S(t)g(\bullet)\big)(x)\right\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}\le\left\|g(x)\right\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}.\tag{7}$$

Побудуємо потік (фільтрацію) σ-алгебр $\{F_t, t\ge t_0\ge 0\}$, який породжений $L_2(\mathbf{R}^r)$-значним Q-вінеровим процесом

$$w(t,x)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_n}e_n(x)\beta_n(t)\tag{8}$$

та центрованою пуассоновою мірою $\tilde{\nu}(A,t)\equiv\nu(A,t)-\mathbf{E}\{\nu(A,t)\}$, де $\{\beta_n(t)\equiv\beta_n(t,\omega)\}\subset\mathbf{R}^1$ – незалежні стандартні одновимірні вінерові процеси,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\equiv\lambda<\infty.\tag{9}$$

При цьому система векторів $e_n(x)\equiv\overline{e}_n(x)$ утворює ортонормований базис у $L_2(\mathbf{R}^r)$ такий, що

$$\sup_{n\in\{1,2,\ldots\}} ess\sup_{x\in\mathbf{R}^r}\left|e_n(x)\right|\le 1. \tag{10}$$

Уведемо простір Банаха $\mathfrak{B}_{2,T}$ всіх $L_2\left(\mathbf{R}^r\right)$-значних F_t-вимірних та неперервних з імовірністю одиниця випадкових процесів $\xi(\bullet)\equiv\xi(t,\omega):[0,T]\times\Omega\to L_2\left(\mathbf{R}^r\right)$ з нормою

$$\left\|\xi(\bullet)\right\|_{B_{2,T}}\equiv\sqrt{\sup_{0\le t\le T}\mathbf{E}\left\|\xi(t,\omega)\right\|^2_{L_2\left(\mathbf{R}^r\right)}}. \tag{11}$$

Означення 1. Неперервну випадкову функцію $u\equiv u(t,x,\omega):[-\tau,T]\times\mathbf{R}^r\times\Omega\to\mathbf{D}^1([-\tau,T])$ назвемо м'яким розв'язком задачі (1), (2), якщо виконуються умови:

1) u є F_T-вимірною для майже всіх $t\in[-\tau,T]$ та фіксованих $x\in\mathbf{R}^r$, $\omega\in\Omega$;

2) u задовольняє умову (інтегральне рівняння)

$$\begin{gathered}u(t,x,\omega)=\int_{\mathbf{R}^r}K(t,x-y)\left(\psi(0)+\int_{\mathbf{R}^r}b(0,y,z)\psi(-\tau,z)dz\right)dy-\\
-\int_{\mathbf{R}^r}b(0,x,y)u(t-\tau,y)dy+\\
+\int_{\mathbf{Z}}\int_{\mathbf{R}^r}c(0,y,z,z_1)\psi(-\tau,z_1)\Pi(dz)dz_1dy-\int_{\mathbf{Z}}\int_{\mathbf{R}^r}c(0,x,y,z)u(t-\tau,y)\Pi(dz)dy-\\
-\int_0^t\left(\Delta_x\int_{\mathbf{R}^r}K(t-s,x-y)\times\int_{\mathbf{R}^r}b(s,y,z)u(s-\tau,z)dzdy\right)ds-\\
-\int_0^t\left(\int_{\mathbf{Z}}\Delta_x\int_{\mathbf{R}^r}K(t-s,x-y)\times\int_{\mathbf{R}^r}c(s,y,z_1,z)u(s-\tau,z_1)\Pi(dz)dz_1dy\right)ds+\\
+\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_n}\left(\int_{\mathbf{R}^r}K(t-s,x-y)\times\sigma(s,u(s-\tau),y)e_n(y)dy\right)d\beta_n(s)\end{gathered} \tag{12}$$

для $t\in[0,T]$, $x\in\mathbf{R}^r$ за початковою умовою (2);

3) існує норма

$$E\left\{\int_0^T\left\|u(t,x,\omega)\right\|^2_{L_2\left(\mathbf{R}^r\right)}dt\right\}<\infty. \tag{13}$$

Лема 2 [10]. *Математичне сподівання від квадрату $u(t,x,\omega)$ (див. (13)) є нормою.*

Будемо надалі вважати, що ймовірнісний базис $\left(\Omega,F,\{F_t,t\ge t_0\},\mathbf{P}\right)$ побудований [1–5] для задачі (1), (2), яка є предметом дослідження цієї статті.

Основне твердження. Нехай для задачі (1), (2) виконано умови:

1) коефіцієнти $\sigma\equiv\sigma(t,u,x)$ та $c(t,u,x,z)$ є:

1а) вимірними за всіма аргументами;

1б) задовольняють умову Ліпшиця за другим аргументом

$$\left|\sigma(t,u,x)-\sigma(t,v,x)\right|+\int_{\mathbf{Z}}\left|c(t,u,x,z)-c(t,v,x,z)\right|\Pi(dz)\le L|u-v|$$

для $\forall t \in [0,T]$, $u,v \in \mathbf{R}^1$, $x \in \mathbf{R}^r$;

2) початкова функція $\psi(t,x,\omega)$ є:

2а) F_0-вимірною відносно аргумента $t \in [0,T]$;

2б) незалежною від вінерового процесу $w(t) \equiv w(t,\omega) \in \mathbf{R}^1$ для $\forall t \in [0,T]$ та центрованої пуассонової міри $\tilde{\nu}(t,x,z)$;

2в) має норму

$$\sup_{-\tau \le t \le 0} \mathbf{E} \left\| \psi(t,x,\omega) \right\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} < \infty; \tag{14}$$

3) функції $b \equiv b(t,x,y)$ та $c(t,x,y,z)$ задовольняє умови:

3а)

$$\sup_{0 \le t \le T} \int_{\mathbf{R}^r} \sqrt{\int_{\mathbf{R}^r} b^2(t,x,y)\,dy}\,dx + \sup_{0 \le t \le T} \int_{\mathbf{Z}} \int_{\mathbf{R}^r} \sqrt{\int_{\mathbf{R}} c^2(t,x,y,z) \Pi(dz)\,dy}\,dx = K_1 < \infty; \tag{15}$$

3б)

$$\sup_{0 \le t \le T} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(t,x,y)\,dy\,dx + \sup_{0 \le t \le T} \int_{\mathbf{Z}} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} c^2(t,x,y,z) \Pi(dz)\,dy\,dx = K_2 < \infty; \tag{16}$$

3в) для кожної точки $x \in \mathbf{R}^r$ існують частинні похідні $\partial_{x_i} b$, $\partial_{x_i x_j} b$, де $\{i,j\} \subset \{1,2,...,r\}$;

3г) матриця Гессе $D_x^2 b$ задовольняє умову

$$\left| \nabla_x b(t,x,y) \right| + \left| \nabla_x \int_{\mathbf{Z}} c(t,x,y,z) \Pi(dz) \right| +$$

$$+ \left\| D_x^2 b(t,x,y) \right\| + \left\| D_x^2 \left(\int_{\mathbf{Z}} c(t,x,y,z) \Pi(dz) \right) \right\| \le \Phi(t,x,y), \tag{17}$$

для $\forall t \in [0,T] \subset [0,\infty)$, $\{x,y\} \subset \mathbf{R}^r$, де функція $\Phi : [0,T] \times \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^r \to [0,\infty)$ задовольняє умову обмеженості подвійного просторового інтегралу

$$\sup_{0 \le t \le T} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} \Phi(t,x,y)\,dx\,dy = K_3 < \infty; \tag{18}$$

4) для функції $\Phi(t,x,y)$ виконується аналог умови Ліпшиця за другим аргументом

$$\left| \Phi(t,x,z) - \Phi(t,x_0,z) \right| \le \zeta(t,z,x_0,\delta) \left| x - x_0 \right|, \tag{19}$$

де для кожної точки $x_0 \in \mathbf{R}^r$ існує її окіл $B_\delta(x_0)$ та невід'ємна функція $\zeta \equiv \zeta(t,z,x_0,\delta)$ для $\forall t \in [0,T]$, $|x - x_0| < \delta$; $z \in \mathbf{R}^r$, де $\sup\limits_{0 \le t \le T} \zeta(t,\cdot,x_0,\delta) \in L_2(\mathbf{R}^r)$, $\delta \in \mathbf{R}_+$;

Тоді задача (1), (2) для НСДРНТ має єдиний м'який розв'язок $u \equiv u(t,x,\omega) \in \mathfrak{B}_{2,T}$ з імовірністю одиниця для $\forall t \in [0,T]$, якщо

$$\sup_{0\le t\le T}\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} b^2\left(t,x,y\right)dxdy \equiv K_5 < \frac{1}{4}. \qquad (20)$$

Доведення основного твердження. Доведення розіб'ємо на етапи, що містяться в теоремі Банаха [1,2], яка застосована для встановлення з імовірністю одиниця єдиного розв'язку задачі (1),(2) (задачі Коші). Будемо використовувати методику, викладену в працях [9,10]. Проведемо доведення методом кроків. Спочатку одержимо невідому функцію на відрізку $\left[0,\tau\right]$. Одержану невідому функцію продовжимо – на першому відрізку за початкову функцію приймемо знайдену невідому функцію і повторюємо доведення для знаходження розв'язку на другому відрізку і т.д.

Розглянемо оператор $S:\mathfrak{B}_{2,T}\to\mathfrak{B}_{2,T}$, який діє за правилом для $t\in\left[0,T\right]$, $x,y\in\mathbf{R}^r$

$$\left(Su\right)\left(t\right)=\int_{\mathbf{R}^r} K\left(t,x-y\right)\left[\psi\left(0\right)+\int_{\mathbf{R}^r} b\left(0,y,z\right)\psi\left(-\tau,z\right)dz\right]dy-$$
$$-\int_{\mathbf{R}^r} b\left(t,y,z\right)u\left(t-\tau,y\right)dy-\int_{\mathbf{Z}}\int_{\mathbf{R}^r} c\left(t,y,z,z_1\right)u\left(t-\tau,y\right)dy\Pi\left(dz\right)-$$
$$-\int_{\mathbf{Z}}\int_0^t\left[\Delta_x\int_{\mathbf{R}^r}\left(K\left(t-s,x-y\right)\int_{\mathbf{R}^r} c\left(s,y,z,z_1\right)u\left(s-\tau,z_1\right)\Pi\left(dz\right)dz_1\right)dy\right]ds+$$
$$-\int_0^t\left[\Delta_x\int_{\mathbf{R}^r}\left(K\left(t-s,x-y\right)\int_{\mathbf{R}^r} b\left(s,y,z\right)u\left(s-\tau,z\right)dz\right)dy\right]ds+$$
$$+\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_n}\left[\int_{\mathbf{R}^r} K\left(t-s,s-y\right)\sigma\left(s,u\left(s-\tau\right),y\right)e_n\left(y\right)dy\right]d\rho_n\left(s\right)\equiv\sum_{j=0}^{4} I_j\left(t\right) \qquad (21)$$

за початковими даними (2).

Доведемо, що цей оператор є стискаючим. По-перше, треба довести, що $Su\in\mathfrak{B}_{2,T}$ для $\forall u\in\mathfrak{B}_{2,T}$. Для цього потрібно оцінити п'ять норм $\left\|I_j\left(s\right)\right\|^2_{\mathfrak{B}_{2,T}}\equiv\sup\mathbf{E}\left\|I_j\left(s\right)\right\|^2_{L_2\left(\mathbf{R}^r\right)}$, $j=0,1,2,3,4.$ Використаємо нерівність (7) леми 1, нерівність Коші-Шварца [4] та умови (14), (20) і одержимо оцінку для супремума математичного сподівання $I_0\left(s\right)$ з оператора $\left(Su\right)\left(t\right)$ (див. (21)), а саме:

$$\left\|I_0\left(s\right)\right\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}}\equiv\sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\left\|I_0\left(s\right)\right\|^2_{L_2\left(\mathbf{R}^d\right)}\equiv$$
$$=\sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\left\|\int_{\mathbf{R}^r} K(s,x-y)\left(\psi(0)+\int_{\mathbf{R}^r} b(0,y,z)\psi(-\tau,z)dz)dy+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int_{\mathbf{Z}}\int_{\mathbf{R}^r} c\left(0,y,z_1,z\right)\psi\left(-\tau,z_1\right)dz_1\right)dy\right\|^2_{L_2\left(\mathbf{R}^r\right)}\le$$

$$\leq 3\mathbf{E}\,\|\psi(0)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} + 3\Big(\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} b^2(0,x,z)dzdx\Big)\mathbf{E}\,\|\psi(-\tau)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} +$$

$$+3\int_{\mathbf{Z}}\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} c^2(0,x,z_1,z)dz_1\Pi(dz)dx\mathbf{E}\,\|\psi(-\tau)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} = C < \infty .$$

Застосуємо нерівність Коші-Шварца [4] та припущення (14), (20) при оцінюванні супремума математичного сподівання $I_1(s)$, а саме:

$$\|I_1(s)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} \equiv \sup_{0\leq s\leq t} \mathbf{E}\,\|I_1(s)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \equiv \sup_{0\leq s\leq t}\mathbf{E}\,\Big\|\int_{\mathbf{R}^r} b(s,x,y)u(s-\tau)dy\Big\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \leq$$

$$\leq \sup_{0\leq s\leq t}\mathbf{E}\,\|u(s-\tau)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \cdot \sup_{0\leq s\leq t}\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} b^2(s,x,y)dydx.$$

Далі спрацьовує очевидна нерівність на першому кроці відрізка $[0,\tau]$ для розв'язку $u(t)$ рівняння (1) для $t\in[0,T]$:

$$\mathbf{E}\,\|u(s-\tau)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \leq \sup_{0\leq s\leq \tau}\mathbf{E}\,\|u(s-\tau)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} + \sup_{\tau\leq s\leq t}\mathbf{E}\,\|u(s-\tau)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} =$$

$$= \sup_{-\tau\leq s-\tau\leq 0} \mathbf{E}\,\|u(s-\tau)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} + \sup_{0\leq s-\tau\leq t-\tau} \mathbf{E}\,\|u(s-\tau)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} . \qquad (22)$$

З урахуванням (22) попередня нерівність дасть оцінку

$$\|I_1(s)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} \leq \left(\sup_{0\leq s\leq t}\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} b^2(s,x,y)dydx\right)\Big(\sup_{-\tau\leq s\leq 0}\mathbf{E}\,\|\psi(s)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} +$$

$$+\sup_{0\leq s\leq t}\mathbf{E}\,\|u(s)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}\Big) = C_1 < \infty.$$

Аналогічно слід оцінити супремум математичного сподівання квадрату інтеграла $I_2(s)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,T}$ з відповідними нормами

$$\|I_2(s)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} \equiv \sup_{0\leq s\leq t} \mathbf{E}\,\|I_2(s)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \equiv$$

$$= \sup_{0\leq s\leq t}\mathbf{E}\,\Big\|\int_0^s\Big(\Delta_x\int_{\mathbf{R}^r} K(s-\tau,x-y)\Big(\int_{\mathbf{R}^r} b(l,y,z)u(l-\tau,z)dz\Big)dl\Big)d\tau\Big\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \leq \mathrm{t}\cdot\varepsilon(s), \qquad (23)$$

$$\varepsilon(s) \equiv \sup_{0\leq s\leq t}\mathbf{E}\int_{\mathbf{R}^r}\left(\int_0^s\left(\Delta_x\int_{\mathbf{R}^r} K(s-\tau,x-y)\left(\int_{\mathbf{R}^r} b(l,y,z)u(l-\tau,z)dz\right)dy\right)^2 dl\right)dx . \qquad (24)$$

Змінюючи порядок інтегрування у $\varepsilon(s)$ (див. (24)), матимемо оцінку для $I_2(s)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,T}$:

$$\|I_2(s)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} \leq \mathrm{t}\cdot\varepsilon(s) =$$

$$= t\cdot\sup_{0\leq s\leq t}\mathbf{E}\int_0^s\left(\int_{\mathbf{R}^r}\left(\Delta_x\int_{\mathbf{R}^r} K(s-\tau,x-y)\left(\int_{\mathbf{R}^r} b(l,y,z)u(l-\tau,z)dz\right)dy\right)^2 dx\right)dl \leq$$

$$\leq Ct\;\mathbf{E}\left\{\int_0^t\int_{\mathbf{R}^r}\left\|D_x^2\int_{\mathbf{R}^r} b(l,x,z)u(l-\tau,z)dz\right\|^2 dxdl\right\}. \qquad (25)$$

У попередній оцінці

$$\nabla_x \equiv \left(\partial_{x_1} ... \partial_{x_r}\right)^T; \; D_x^2 = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}^2 & ... & \partial_{x_1 x_r}^2 \\ ... & ... & ... \\ \partial_{x_r x_1}^2 & ... & \partial_{x_r}^2 \end{pmatrix}; \tag{26}$$

$\|\cdot\|$ – відповідна матрична норма.

Далі слід використати лему 1 [9, лема 4]. Якщо умови цієї леми для

$$u(l,x) = \int_{\mathbf{R}^r} K(s-l, x-y)\left(\int_{\mathbf{R}^r} b(l,y,z)u(l-\tau,z)dz\right)dy,$$

$$g(l,x) \equiv \int_{\mathbf{R}^r} b(l,y,z)u(l-\tau,z)dz \tag{27}$$

виконуються, то оператор $S(\cdot)$ є стискаючим (див. (7)).

Перевіримо умови леми 1, тобто доведемо, що:

1) з імовірністю одиниця для кожного $l \in [0,t]$

$$\int_{\mathbf{R}^r} b(l,\cdot,z)u(l-\tau,z)dz \in L_1\left(\mathbf{R}^r\right); \tag{28}$$

2)

$$|\nabla_x g| \in L_2(\mathbf{R}^r), \; \| D_x^2 g \| \in L_2(\mathbf{R}^r). \tag{29}$$

Перевіримо умову 1). Доведення (28) випливає з використання умов Коші-Шварца та умов 2а), 2б) основного твердження та (20) зі сталою K_5.

$$\mathbf{E}\left\{\int_{\mathbf{R}^r}\left|\int_{\mathbf{R}^r} b(l,x,z)u(l-\tau,z)dz\right|dx\right\} \le$$

$$\le \left(\sup_{0\le l\le t}\int_{\mathbf{R}^r}\sqrt{\int_{\mathbf{R}^r} b^2(l,x,z)dz}dx\right)\left(\sqrt{\sup_{-\tau\le l\le 0}\mathbf{E}\|\psi(l)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}} + \sup_{0\le l\le t}\mathbf{E}\|u(l)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Звідки з імовірністю одиниця умова 1 виконується

$$\int_{\mathbf{R}^r}\left|\int_{\mathbf{R}^r} b(l,x,z)u(l-\tau,z)dz\right|dx = C_1 < \infty.$$

Перевіримо умову 2) леми 1. Умову (29) доведемо для $|\nabla_x g|$. Для $\| D_x^2 g \|$ міркуватимемо аналогічно. Спочатку доведемо диференційовність $g(l,x)$ (дивись (27)) у точці $x = x_0 \in \mathbf{R}^r$.

Нехай $B_\delta(x_0)$ є околом точки $x_0 \in \mathbf{R}^r$. Використовуючи умови (17) та умову (19), матимемо

$$\left|\nabla_x b(t,x,z)u(t-\tau,z)\right| \le \psi(t,x,z)\left|u(t-\tau,z)\right| =$$
$$= (\psi(t,x,z) - \psi(t,x_0,z) + \psi(t,x_0,z))\,|\,u(t-\tau,z)\,| \le$$
$$\le (\delta\varphi(t,z,x_0,\delta) + \psi(t,x_0,z))\,|\,u(t-\tau,z)\,|.$$

Перевіримо включення

$$(\delta\varphi(t,\cdot,x_0,\delta)+\psi(t,x_0,\cdot))\,|\,u(t-\tau,\cdot)\,|\in L_1(\mathbf{R}^r)\ . \tag{30}$$

Використовуючи нерівність Коші-Шварца та умови (17), (18), (20) матимемо

$$\mathbf{E}\int_{\mathbf{R}^r}(\delta\varphi(t_1,z,x_0,\delta)+\psi(t_1,x_0,z))\,|\,u(t_1-\tau,z)\,|\,dz=$$

$$=\delta\mathbf{E}\int_{\mathbf{R}^r}\varphi(t_1,z,x_0,\delta)\,|\,u(t_1-\tau,z)\,|\,dz+\mathbf{E}\int_{\mathbf{R}^r}\psi(t_1,x_0,z)\,|\,u(t_1-\tau,z)\,|\,dz\le$$

$$\le\left(\delta\sqrt{\int_{\mathbf{R}^r}\varphi^2(t_1,z,x_0,\delta)dz}+\sqrt{\int_{\mathbf{R}^r}\psi^2(t_1,x_0,z)dz}\right)\Big(\sup_{-\tau\le t_1\le 0}\mathbf{E}\,\|\,\psi(t_1)\,\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}+$$

$$+\sup_{0\le t_1\le t}\mathbf{E}\,\|\,u(t_1)\,\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}\Big)^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

Звідки з імовірністю одиниця одержимо

$$\int_{\mathbf{R}^r}(\delta\varphi(t_1,z,x_0,\delta)+\psi(t_1,x_0,\zeta))\,|\,u(t_1-\tau,z)\,|\,dz<\infty.$$

Згідно з локальною теоремою про диференційовність інтеграла за параметром, для функції (27) існує градієнт $\nabla_x g$ [4] та

$$\nabla_x\int_{\mathbf{R}^r}b(t,x,z)u(t-\tau,z)dz=\int_{\mathbf{R}^r}\nabla_x b(t,x,z)u(t-\tau,z)dz. \tag{31}$$

Залишилось довести, що

$$\nabla_x\int_{\mathbf{R}^r}b(t,\cdot,z)u(t-\tau,z)dz\in L_2(\mathbf{R}^r)\ . \tag{32}$$

З урахуванням (31), (17), нерівності Коші-Шварца, умов (18) та (14), виконуються співвідношення

$$\mathbf{E}\int_{\mathbf{R}^r}|\,\nabla_x\int_{\mathbf{R}^r}b(t,x,z)u(t-\tau,z)dz\,|^2\,dx=$$

$$=\mathbf{E}\int_{\mathbf{R}^r}(\int_{\mathbf{R}^r}\nabla_x b\big(t,x,z\big)u\big(t-\tau,z\big)dz)^2dx\le\mathbf{E}\int_{\mathbf{R}^r}(\int_{\mathbf{R}^r}|\,\nabla_x b(t,x,z)u(t-\tau,z)\,|\,dz))^2dx\le$$

$$\le\sup_{0\le t_1\le t}\left(\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r}Z^2(t_1,x,z)dzdx\right)\left(\sup_{-\tau\le t_1\le 0}E\,\|\,\psi(t_1)\,\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}+\sup_{0\le t_1\le t}E\,\|\,u(t_1)\,\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}\right)<\infty.$$

Звідки отримуємо, що

$$\int_{\mathbf{R}^r}\left|\nabla_x\int_{\mathbf{R}^r}b(t_1,x,z)u(t_1-\tau,z)dz\right|^2dx<\infty.$$

Остаточно з (25) матимемо оцінку

$$\|\,I_2(s)\,\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}}\le Ct\mathbf{E}\int_0^t\int_{\mathbf{R}^r}\|\,D_x^2\int_{\mathbf{R}^r}b(t_1,x,z)u(t_1-\tau,z)dz\,\|^2\,dxdt_1\le$$

$$\leq Ct^2 \sup_{0\leq t_1\leq t}\left(\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} Z^2(t_1,x,z)dzdx\right)\left(\sup_{-\tau\leq t_1\leq 0}\mathbf{E}\,\|\,\psi(t_1)\,\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}+\right.$$

$$\left.+\sup_{0\leq t_1\leq t}\mathbf{E}\,\|\,u(t_1)\,\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}\right)\leq C_2<\infty. \tag{33}$$

Отримаємо оцінку для $I_3(s)$. Надалі під $\|\cdot\|$ будемо розуміти $\|\cdot\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}$. З урахуванням нерівності Коші-Шварца, теореми Фубіні [4] та умов (7), (14) отримуємо для норми $I_3(s)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,t}$ оцінку

$$\|\,I_3(s)\,\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}}=\sup_{0\leq s\leq t}E\,\|\,I_3(s)\,\|^2\equiv$$

$$=\sup_{0\leq s\leq t}\mathbf{E}\left\|\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_n}\left(\int_{\mathbf{R}^r}K(t-s,x-y)\sigma(s,u(s-\tau),y)e_n(y)dy\right)d\beta_n(s)\right\|^2=$$

$$\leq 2L^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\right)\left(t+\tau\sup_{-\tau\leq y\leq 0}\mathbf{E}\|\psi(y)\|^2+\mathbf{E}\int_0^t\|u(y)\|^2dy\right)=C_3<\infty. \tag{34}$$

Оцінка інтеграла $I_4(s)$, що містить інтеграл за пуассоновою мірою, проводиться аналогічно до $I_2(s)$, оскільки інтеграл Скорохода має аналогічні до інтеграла Вінера-Іто відповідні властивості. Тому $\|I_4(s)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}}\leq C_4<\infty$.

Об'єднавши п'ять вищевикладених оцінок для $I_i(s), i=0,1,2,3,4$, одержимо для $u\in\mathfrak{B}_{2,t}$ нерівність

$$\|\,(\Psi u)(t)\,\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}}\equiv\sup_{0\leq s\leq t}\mathbf{E}\left\|\sum_{j=0}^{4}I_j(t)\right\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}\leq 5\sum_{j=0}^{4}\|\,I_j(t)\,\|^2_{\mathfrak{B}_{2,T}}. \tag{35}$$

Оскільки F_t-вимірність $(\Psi u)(t)$ очевидна, робимо висновок, що Ψ задано.

Доведемо, що оператор Ψ має єдину стискаючу фіксовану точку. Дійсно, слід взяти до уваги чотири вищенаведені нерівності та властивість лінійності r-вимірного інтеграла, в результаті отримаємо для різниці $I_1(s)(u)-I_1(s)(v)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,t}$ оцінку

$$\|\,I_1(s)(u)-I_1(s)(v)\,\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}}\equiv\sup_{0\leq s\leq t}\mathbf{E}\|I_1(s)(u)-I_1(s)(v)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}\equiv$$

$$\equiv\sup_{0\leq s\leq t}\mathbf{E}\left\|\int_{\mathbf{R}^r}b(s,x,y)\big(u(s-\tau)-v(s-\tau)\big)dy\right\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}\leq$$

$$\leq\left(\sup_{0\leq s\leq t}\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r}b^2(s,x,y)dydx\right)\|u-v\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}}. \tag{36}$$

Аналогічно одержимо оцінку для різниці $I_2(s)(u)-I_2(s)(v)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,t}$:

$$\|\,I_2(s)(u)-I_2(s)(v)\,\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}}\leq Ct^2\sup_{0\leq\tau\leq t}\left(\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r}Z^2(\tau,x,y)dydx\right)\sup_{0\leq\tau\leq t}\mathbf{E}\|u(\tau)-v(\tau)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}. \tag{37}$$

Попередні міркування слід провести для оцінки різниці $I_3(s)(u)-I_3(s)(v)$, $I_4(s)(u)-I_4(s)(v)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,t}$, тоді одержимо

$$\| I_3(s)(u)-I_3(s)(v)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} \le L^2 C\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\right)t\|u-v\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}},$$

$$\| I_4(s)(u)-I_4(s)(v)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} \le L^2 C\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\right)t\|u-v\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}}. \quad (38)$$

Врахувавши оцінки (35)-(38), одержимо

$$\|\Psi u-\Psi v\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} \equiv \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E}\|\sum_{j=0}^{4}(I_j(s)(u)-I_j(s)(v))\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \le \gamma(t)\|u-v\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}}, \quad (39)$$

$$\gamma(t)\equiv 4\left(\sup_{0\le s\le t}\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} b^2(s,x,y)\,dydx + Ct^2\sup_{0\le \tau\le t}\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} Z^2(\tau,x,y)\,dydx + \right.$$

$$\left. +\sup_{0\le s\le t}\int_{\mathbf{Z}}\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} c^2(s,x,y,z)\Pi(dz)dydx + L^2Ct^2 + L^2C\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\right)t\right),\ \{u,v\}\subset\mathfrak{B}_{2,t}. \quad (40)$$

Згідно з (20), $K_5 < 1/4$, тобто перший доданок у $\gamma(t)$ (див. (40)) менший за 1. Для наступних трьох доданків можна зауважити, що за рахунок вибору $t_1\in[0,T]$ їх сума може бути рівною $3/16$. Отже, $\gamma(t_1)\in(0,1)$. Це означає, що оператор Ψ, визначений у просторі Банаха $\mathfrak{B}_{2,t_1}$, є стискаючим. А значить, згідно з теоремою Банаха [4] про стискаюче відображення, оператор Ψ має єдину фіксовану точку – м'який розв'язок $u\in\mathfrak{B}_{2,t_1}$ задачі (1), (2) на відрізку $[0,t_1]$. Цю процедуру повторимо скінченну кількість разів на додатних малих інтервалах $[t_1,t_2]$, $[t_2,t_3]$, …, $[t_{n-2},t_{n-1}]$, $[t_{n-1},T]$, які в сумі дають відрізок $[0,T]$, де розв'язується задача (1), (2). У результаті розв'язок отримується як об'єднання розв'язків на малих інтервалах. Основне твердження доведено.

Висновок.

Дана стаття є узагальненням праць [9,10,13] і має теоретичне значення, оскільки вона доводить існування "м"якого розв'язку" НСДРРНТ. В окремих випадках подібні рівняння є математичними моделями реальних процесів, розгляд яких планується у подальших роботах.

Література

1. Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последействием.– М.: Наука, 1992.– 333 с.

2. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер.– М.: Наука, 1977.- 352 с.

3. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применение.– К.: Наук. думка, 1980.– 612 с.

4. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения с частными производными. Сб. научн. тр.– К.: Ин-т математики АН УССР.– 1981.– С.25–59.

5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.– М.: Наука, 1976.–541 с.

6. Перун Г.М., Ясинский В.К. О стабилизации решений задачи Дирихле с разрывными траекториями и оператором Бесселя // Кибернетика и вычисл. математика.– 1991.– № 83.– С.19–25.

7. Перун Г.М., Ясинский В.К. Исследование задачи Коши для стохастических уравнений в частных производных // Укр. мат. журн.– 1993.– Т.45, № 9.– С.1773–1781.

8. Свердан М.Л., Ясинская Л.И,, Ясинский В.К. Стабилизация решений стохастических линейных уравнений в частных производных при наличии пуассоновских возмущений // Кибернетика и вычислительная техника.– 1988.– №81.– С.7-12.

9. Станжицкий А.Н., Цуканова А.О. Существование и единственность решения задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения реакции-диффузии нейтрального типа // Нелінійні коливання.– 2016.– 3, № 3.– С.408–430.

10. Tsukanova A.O. On existence and uniqueness of mild solution to the Cauchy problem for one neutral stochastic differential equation of reaction-diffusion type in hilbert space // Буковинський математичний журнал.– 2016. – Т.4, № 3–4.– С.179–189.

11. Tessitore G., Zabczyk J. Invariant Measures for Stochastic Heat Equations // Probability and Mathematical Statistics.– 1998.– 18.– P.271–287.

12. Zabczyk J., Da Prato G. Ergodicity for Infinite Dimensional Systems // Dynamic Systems and Applications.– Cambridge University Press.– 1996.– 449 p.

13. Ясинський В.К., Юрченко І.В. Про існування розв’язку задачі Коші для нелінійного дифузійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу в частинних похідних з урахуванням випадкових зовнішних збурень // Системні дослідження та інформаційні технології.– 2017.– №2.– С.103-114.

14. Ясинський В.К., Юрченко І.В. Про існування розв’язку задачі Коші для нелінійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу в частинних похідних // Кібернетика та системний аналіз.– 2021.– Т.57, №5.– С.108-119.

Abstract. *The question of the existence of a solution of the Cauchy problem in the class of nonlinear stochastic differential-difference equations of neutral type in partial derivatives with respect to random external perturbations independent of the Wiener process is considered. Sufficient conditions are obtained for the coefficients of the nonlinear stochastic differential-difference equation of the neutral type, which guarantee the existence with probability of the unit of its solution.*

Keywords*: stochastic differential-difference equation, Wiener perturbations, Poisson switchings, existence of a solution.*

Стаття відправлена: 11.04.2022 г.