Л. П. ЯКИМОВА

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ

Практикум в MS EXCEL

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ Практикум в MS EXCEL
Л. П. ЯКИМОВА

ЧНУ РУТА
ISBN 978-966-423-726-7
9 789664 237267

Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

Л. П. ЯКИМОВА

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ

Практикум в MS EXCEL

Навчально-методичний посібник

Чернівці
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича
2022

УДК 519.863(075.8)
Я 453

Друкується за ухвалою Вченої ради
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича
(протокол № 7 від 30 червня 2022 року)

Рецензенти:
Бакурова А. В., доктор економічних наук, професор, професор кафедри системного аналізу і обчислювальної математики Національного університету «Запорізька політехніка»
Жиглей І. В., доктор економічних наук, професор, професор кафедри інформаційних систем в управлінні та обліку Державного університету «Житомирська політехніка»

Якимова Л.П.
Я 453 Оптимізаційні методи та моделі : практикум в MS Excel : навч.-метод. посіб. Чернівці : Чернівец. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2022. 272 с.
ISBN 978-966-423-726-7

Навчально-методичний посібник розв’язує проблему забезпечення дисципліни «Оптимізаційні методи та моделі» навчально-методичними матеріалами для проведення практичних занять, самостійної роботи і контролю знань студентів. Вісім практичних робіт, які організовано у два змістових модулі (оптимізаційні методи та моделі лінійного програмування; оптимізаційні методи та моделі нелінійного і динамічного програмування та управління запасами), містять теоретичні відомості, методику розв’язання типових економічних оптимізаційних задач у середовищі табличного процесора MS Excel, індивідуальні завдання і контрольні запитання до захисту практичних робіт. Наведено набір тестових завдань і проілюстровано різноманітні типи тестових питань, які реалізовано у системі дистанційного навчання Moodle.

Для студентів економічних спеціальностей та науково-педагогічних працівників.

УДК 519.863(075.8)

ISBN 978-966-423-726-7

ЗМІСТ

ВСТУП

Процес планування й прийняття управлінських рішень в умовах ринкової економіки характеризується вибором найкращого (оптимального) рішення з множини альтернатив, але, як правило, в умовах обмежених ресурсів. Формування спеціальних знань щодо розв'язання задач оптимального планування та вироблення на їх основі науково обґрунтованих рекомендацій щодо прийняття управлінських рішень уможливлюється вивченням навчальної дисципліни «Оптимізаційні методи та моделі». У процесі навчання студенти отримують необхідні теоретичні знання на лекційних заняттях і набувають практичних навичок, виконуючи компетентнісно зорієнтовані завдання на практичних навчальних заняттях і під час самостійної роботи.

Оптимізаційні методи та моделі – це навчальна економіко-математична дисципліна, яка вивчає теорію та інструментарій постановки оптимізаційних задач, побудови їхніх екон оміко-математичних моделей, методів розв'язання та післяоптимізаційного аналізу з метою використання в економіці.

Оптимізаційні задачі – це економіко-математичні задачі, мета яких полягає у знаходженні оптимального (від лат. *optimus* – найкращий) з точки зору деякого критерію або критеріїв варіанта використання наявних ресурсів.

Оптимізаційні задачі розв'язуються за допомогою оптимізаційних економіко-математичних моделей методами математичного програмування.

Економіко-математична модель (ЕММ) – математичний опис досліджуваного економічного процесу чи об'єкта; ЕММ виражає закономірності економічного процесу в абстрактному вигляді за допомогою математичних співвідношень.

Математичне програмування (МП) – це наукова дисципліна, що вивчає теорію і методи розв'язання задач оптимізації. Залежно від процесів, що моделюються, та виду математичних співвідношень, які містить модель, виділяють такі розділи математичного програмування:

– ***лінійне програмування*** – розділ МП, який вивчає теорію і методи розв'язання задач пошуку екстремуму лінійних функцій, на змінні яких накладено лінійні обмеження;

– ***нелінійне програмування*** – розділ МП, який вивчає теорію і методи розв'язання оптимізаційних задач, моделі яких містять хоча б одне нелінійне математичне співвідношення;

– ***динамічне програмування*** – розділ МП, який вивчає математичний апарат оптимального планування багатокрокових керованих процесів та процесів, які залежать від часу;

– ***стохастичне програмування*** – розділ МП, який вивчає теорію і методи розв'язання задач оптимізації, у яких функції, крім керованих параметрів, залежать і від випадкових величин.

Крім задач математичного програмування, у сучасній економіці широкого застосування набули оптимізаційні задачі ***управління запасами***.

Структура математичного програмування як методу оптимізації та пріоритетність оптимізаційних задач зумовили відбір і логіку структурування навчально-методичного матеріалу на два змістових модулі:

1) оптимізаційні методи та моделі лінійного програмування;

2) оптимізаційні методи та моделі нелінійного і динамічного програмування та управління запасами.

Зміст модулів розкривається у восьми практичних роботах, які мають універсальну структуру: основні теоретичні відомості, розв'язання типових задач, завдання до практичної роботи, контрольні запитання до захисту практичної роботи. Така структура виконує одночасно три взаємопов'язаних навчально-методичних завдання:

1) тлумачення категорійно-понятійного апарату та методології за кожною темою;

2) навчання аналітичному та автоматизованому способам розв'язання оптимізаційних задач із застосуванням MS Excel;

3) мотивація студентів до свідомої самостійної праці через розв'язання компетентністно зорієнтованих індивідуальних завдань.

Навчально-методичний посібник містить покрокове розв'язання прикладних економічних задач широкого спектра за галузевою та управлінською спрямованістю: задачі виробничого менеджменту (лінійна і динамічна моделі планування виробництва), фінансового менеджменту (моделі заміни обладнання, моделі управління запасами), інвестиційного менеджменту (нелінійна модель формування портфелю інвестицій, динамічна модель розподілу інвестицій), маркетингу (ігрова модель конкуренції на ринках збуту, нелінійна модель планування структури реалізації готової продукції), логістики (транспортна задача), а також задачі планування у сільськогосподарській сфері (лінійні та ігрова моделі).

Для проведення контролю знань, у тому числі на платформі дистанційного навчання Moodle, у посібнику наведено набір тестових завдань. У додатках проілюстровано різноманітні типи тестових питань, які реалізовано у системі Moodle, що мотивуватиме студентів і слугуватиме інструкцією викладачам.

Навчально-методичний посібник написано насамперед для викладачів і студентів економічних спеціальностей, але він буде корисним усім, хто цікавиться моделюванням з використанням засобів MS Excel у сфері економіки, фінансів, підприємництва і торгівлі.

ЗАГАЛЬНІ ЗАСАДИ КОМП'ЮТЕРНОГО ПРАКТИКУМУ З ДИСЦИПЛІНИ «ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ»

Метою навчальної дисципліни «Оптимізаційні методи та моделі» є опанування студентами основних принципів та інструментарію постановки оптимізаційних задач, побудови економіко-математичних моделей, методів їх розв'язання та післяоптимізаційного аналізу з метою використання під час прийняття управлінських рішень у майбутній професійній діяльності. Для поглиблення знань, умінь та навичок, здобутих на лекційних заняттях проводяться практичні заняття.

Практичне заняття – це вид навчального заняття, на якому студенти під керівництвом викладача шляхом виконання певних відповідно сформульованих завдань закріплюють теоретичні положення навчальної дисципліни, набувають умінь і навичок їх практичного застосування [25].

Комп'ютерний практикум – вид практичного заняття, на якому викладач організовує індивідуальну роботу студентів на ПЕОМ з метою формування умінь і навичок практичного використання певних програм [25].

Алгоритм проведення комп'ютерного практикуму

1. Попереднє опитування (доказовість готовності)

При незадовільних відповідях студент не допускається до практичної роботи, проте залишається у комп'ютерному класі та повторно готується до відповіді на контрольні запитання. За успішної повторної здачі, якщо до кінця заняття залишається достатньо часу, викладач може допустити студента до виконання роботи, інакше студент виконує роботу у додатковий час.

2. Виконання практичної роботи (розв'язання задач)

Студент має виконувати практичну роботу усвідомлено: знати мету роботи, алгоритм і метод розв'язання задачі, необхідні інструменти та функції MS Excel.

3. Оформлення звіту з практичної роботи

Практична робота вважається виконаною лише у тому випадку, коли звіт по ній прийнятий. Чим швидше складено звіт після проведення роботи, тим менше буде витрачено праці і часу на її оформлення.

4. Захист практичної роботи

Захист відбувається на практичних заняттях.

Зауваження. Студент може бути допущеним до наступної практичної роботи лише у разі, коли у нього *є незахищених не більше 2-х попередніх робіт*. Студенти, які здали в установлений термін усі практичні роботи, можуть бути звільненими від заліку.

Окремі правила, яких потрібно дотримуватись викладачеві при проведенні комп'ютерного практикуму

1. Проявляти почуття міри при висуванні студентам вимог до знань теоретичної сторони частини дисципліни, що «ілюструє» практична робота. Основне призначення цього виду навчання – набуття практичних навиків з розв'язання оптимізаційних задач, у тому числі з використанням засобів MS Excel.
2. Особливо наполягати на попередньому знанні методів і алгоритмів розв'язання задач, та очікуваних результатів практичної роботи.
3. Незрозумілості, що виникають у студентів під час виконання практичної роботи та проблеми з не отримуваними результатами, студенти мають розв'язувати самі за допомогою лише вказівок викладача. Викладачеві при цьому треба переконатися в налагодженості комп'ютерів.
4. Якщо при виконанні практичної роботи потрібен поділ на підгрупи, то необхідно слідкувати за тим, щоб члени підгрупи брали на себе роль лідера по черзі, не залишаючись лише пасивними спостерігачами.

Успіх та ефективність практичних навчальних занять досягається лише наполегливою, ретельною підготовкою як викладача, так і студентів.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Практична робота № 1: Побудова економіко-математичних моделей задач лінійного програмування

Мета роботи: поглиблення теоретичних знань та формування практичних навичок щодо формалізації оптимізаційних задач планування і побудови економіко-математичних моделей цих задач.

Основні теоретичні відомості

Оптимізаційні методи це ефективний інструмент розв’язання економічних задач, але його застосування можливе лише до практичних задач, у яких:

1) необхідно вибрати оптимальний розв’язок з множини можливих відповідно до обраного критерію – ***критерію оптимізації***;

2) розв’язок можна виразити як набір значень деяких змінних величин;

3) обмеження, які накладаються на допустимі розв’язки специфічними умовами задачі, формулюються у вигляді рівностей або нерівностей;

4) мета задачі (критерій оптимізації) виражається у формі функції основних змінних – ***цільової функції***.

Варіант, за яким обраний критерій набуває оптимальне значення, називається ***оптимальним***.

Задача, розв’язання якої зводиться до пошуку максимуму чи мінімуму цільової функції, називається ***задачею оптимізації***.

Три етапи розв’язання оптимізаційних задач

1. Побудова економіко-математичної моделі задачі.

2. Знаходження оптимального розв’язку задачі одним із математичних методів.

3. Післяоптимізаційний аналіз і рекомендації щодо практичного впровадження.

Для практичного розв’язання економічної задачі математичними методами перш за все її необхідно записати за допомогою математичних виразів, тобто скласти економіко-математичну модель.

Економіко-математична модель (ЕММ) – математичний опис досліджуваного економічного процесу або об’єкта. ЕММ виражає закономірності економічного процесу в абстрактному вигляді за допомогою математичних співвідношень.

Загальний алгоритм побудови економіко-математичної моделі оптимізаційної задачі

1. Вербальне (словесне) формулювання досліджуваного явища; за необхідності записати умови задачі у вигляді таблиці; з’ясувати мету розв’язання задачі.

2. Вибрати змінні величин, сукупність числових значень яких однозначно визначає один з можливих станів досліджуваного явища; увести позначення змінних: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

3. Побудувати цільову функцію, яка у математичній формі відбиває критерій вибору оптимального варіанта (мета задачі) і містить невідомі змінні: $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

4. Побудувати за текстом задачі у логічній і математичній формах систему обмежень, яким шукані змінні мають відповідати.

5. Математичне формулювання задачі як задачі пошуку екстремуму цільової функції за умови виконання обмежень, які накладаються на шукані змінні:

$$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to optimum, \quad (1.1)$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D, \quad (1.2)$$

де D – область допустимих значень.

Розв'язання типових задач

Задача 1.1. Задача про оптимальне використання ресурсів (планування виробництва)

Постановка задачі. Для виробництва трьох видів продукції P_1, P_2 та P_3 використовують три основні види ресурсів. Запаси ресурсів, норми витрати ресурсів на виробництво одиниці продукції, а також дохід від реалізації одиниці продукції наведено в табл. 1.1. Необхідно скласти такий план виробництва продукції, при якому дохід від її реалізації буде максимальним.

Таблиця 1.1

Задача про оптимальне використання ресурсів (планування виробництва): вихідні дані

Вид ресурсу	Норма витрати ресурсів на одиницю продукції			Запас ресурсу
	P_1	P_2	P_3	
Трудові ресурси, людино-год.	15	20	25	1200
Напівфабрикати, т	2	3	2,5	150
Верстатне устаткування, верст.-год.	35	60	60	3000
Дохід від реалізації одиниці продукції, грн.	300	250	450	

Розв'язання

1. ***Мета розв'язання задачі***. Визначити, скільки одиниць продукції P_1, P_2 та P_3 треба виробляти, щоб одержати максимальний дохід від її реалізації за умови, що запас ресурсів обмежений.

2. ***Вибір змінних.*** Позначимо x_1, x_2 та x_3 – число одиниць продукції відповідно P_1, P_2 та P_3 відповідно, запланованих до виробництва.

3. ***Побудова цільової функції.*** Дохід від реалізації продукції P_1 складатиме $300x_1$ грн., від реалізації продукції P_2 – $250x_2$ грн., від реалізації продукції P_3 – $450x_3$ грн.

Цільова функція – сумарний дохід від реалізації продукції:

$$Z = 300x_1 + 250x_2 + 450x_3 \rightarrow \max. \qquad (1.3)$$

4. ***Побудова системи обмежень.*** У моделі повинні бути враховані обмеження на запас ресурсів, тобто

$$\begin{pmatrix} \textit{Витрати ресурсів} \\ \textit{на виробництво} \\ \textit{продукції} \end{pmatrix} \le (\textit{Запас ресурсів})$$

Для виробництва x_1 одиниць продукції P_1 потрібно трудових ресурсів $15x_1 + 20x_2 + 25x_3$ (людино-год). Водночас споживання ресурсів не повинно перевищувати їх запас 1200 людино-год, отже, маємо нерівність, що відображає це обмеження:

$$15x_1 + 20x_2 + 25x_3 \le 1200.$$

Аналогічно складаються обмеження для решти ресурсів. Система обмежень задачі має вигляд:

$$\begin{array}{r} Тр.р. \\ Н/ф \\ В.у. \end{array} \begin{cases} 15x_1 + 20x_2 + 25x_3 \le 1200; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2{,}5x_3 \le 150; \\ 35x_1 + 60x_2 + 60x_3 \le 3000. \end{cases} \qquad (1.4)$$

Крім того, необхідно додати природні обмеження: обсяги виробництва продукції не можуть бути від’ємними, отже, вимагається на всі змінні накласти обмеження невід’ємності:

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \qquad (1.5)$$

5. ***Економіко-математична модель задачі***: знайти такий план виробництва продукції $X=(x_1,x_2,x_3)$, за якого досягається максимальне значення лінійної функції доходу від реалізації (1.3) за обмежень (1.4) і умов (1.5), тобто

$$Z=300x_1+250x_2+450x_3 \to \max$$

за обмежень

$$\begin{cases}15x_1+20x_2+25x_3 \le 1200;\\ 2x_1+3x_2+2{,}5x_3 \le 150;\\ 35x_1+60x_2+60x_3 \le 3000.\end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Задачу нескладно узагальнити на випадок випуску n видів продукції з використанням m видів ресурсів. Позначимо:

x_j $(j=\overline{1;n})$ – число одиниць продукції P_j, запланованої до виробництва;

b_i $(i=\overline{1;m})$ – запас ресурсу S_i;

a_{ij} – число одиниць ресурсу S_i, затрачуваного на виготовлення одиниці продукції P_j (числа a_{ij} називаються технологічними коефіцієнтами);

c_j – дохід від реалізації одиниці продукції P_j.

Економіко-математична модель задачі про оптимальне використання ресурсів у загальній постановці: знайти такий план виробництва продукції $X=(x_1, x_2, ..., x_n)$, за якого цільова функція досягає максимуму

$$Z=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n \to \max \qquad (1.6)$$

за обмежень

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\
.... \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m
\end{cases}
\tag{1.7}
$$

$$
x_1 \ge 0\ ,\ x_2 \ge 0, ...,\ x_n \ge 0\ , \tag{1.8}
$$

У короткому запису (за допомогою знаку суми Σ – Sigma) модель (1.6-1.8) має вигляд:

$$
\mathrm{Z} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{1.6*}
$$

за обмежень

$$
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\ ,\ i = \overline{1;m}\ ; \tag{1.7*}
$$

$$
x_j \ge 0,\ j = \overline{1;n}\ . \tag{1.8*}
$$

Задача 1.2. Задача складання раціону (задача про дієту, задача оптимального складу суміші)

Постановка задачі. Є два види комбікорму I і II, що містять поживні речовини (вуглеводи, жири, клейковину, протеїн). Вміст кількості одиниць поживних речовин в 1 кг кожного виду комбікорму та необхідний мінімум поживних речовин наведено у табл. 1.2 (значення умовні). Вартість 1 кг корму I і II видів дорівнює 50 грн і 70 грн відповідно Необхідно скласти денний раціон, який має мінімальну вартість, при цьому вміст кожного виду поживних речовин був би не меншим від установленої межі.

Таблиця 1.2

Задача складання раціону: вихідні дані

Поживна речовина	Необхідний мінімум поживних речовин	Число одиниць поживних речовин в 1 кг комбікорму	
		I	II
Вуглеводи	8	2	3
Жири	7	3	2
Клейковина	12	1	4
Протеїн	10	2	5

Розв'язання

Побудуємо економіко-математичну модель задачі.

1. ***Мета розв'язування задачі.*** Визначити кількість комбікормів виду I і II, що входять до денного раціону, так щоб його вартість була мінімальною, а тварини отримували необхідний мінімум поживних речовин.

2. ***Вибір змінних.*** Позначимо через x_1 і x_2 – кількість (кг) комбікормів I і II видів відповідно, що входять у денний раціон.

3. ***Побудова цільової функції***. Мета задачі – мінімальна вартість денного раціону, тому загальна вартість раціону – це лінійна функція 2-х змінних:

$$Z = 50x_1 + 70x_2 \to \min \tag{1.9}$$

4. ***Побудова системи обмежень***. Денний раціон буде включати $(2x_1 + 3x_2)$ одиниць вуглеводів, $(3x_1 + 2x_2)$ одиниць жирів $(x_1 + 4x_2)$ одиниць клейковини і $(2x_1 + 5x_2)$ одиниць протеїну. Оскільки вміст живильних речовин у раціоні має бути не менше 8, 7, 12 і 10 одиниць відповідно, то система обмежень має вигляд:

$$\begin{array}{l} В. \\ Ж. \\ К. \\ П. \end{array} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 8 \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 7 \\ x_1 + 4x_2 \ge 12 \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 10 \end{cases} \qquad (1.10)$$

Крім того, на змінні накладаються умови невід'ємності:

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \qquad (1.11)$$

5. ***Економіко-математична модель задачі складання раціону***: скласти денний раціон $X = (x_1, x_2)$, що задовольняє системі обмежень (1.10) і умовам невід'ємності (1.11), а функція його вартості (1.9) набуває мінімального значення.

Для формулювання завдання в загальній постановці позначимо:

x_j ($j = \overline{1;n}$) – число одиниць корму n -го виду;

b_i ($i = \overline{1;m}$) – необхідний мінімум вмісту в раціоні живильної речовини S_i ;

a_{ij} – число одиниць поживної речовини S_i в одиниці корму j-го виду;

c_j – вартість одиниці корму j-го виду.

Економіко-математична модель задачі складання раціону у загальній постановці: знайти такий раціон $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, який забезпечує мінімум функції його вартості

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \to \min \qquad (1.12)$$

за обмежень

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \qquad (1.13)$$

$$x_1 \ge 0\ ,\ x_2 \ge 0, ...,\ x_n \ge 0\ . \qquad (1.14)$$

Задача 1.3. Задача планування посівів

Задача планування посівів (або вибору оптимальної структури посівних площ кількох сільськогосподарських культур) є аналогом задачі оптимального розподілу ресурсів, що виникає при виробництві широкого асортименту продукції.

Постановка задачі. Сільськогосподарське підприємство намагається знайти оптимальне сполучення посівів пшениці та гречки на ділянках різної родючості, щоб отримати максимум валової продукції в грошовому вираженні. Реалізаційна ціна пшениці 7 грн/ц, гречки – 9 грн/ц. Крім того, за плановим завданням необхідно зібрати не менше 2800 ц пшениці й 6500 ц гречки. Дані про урожайність наведено у табл. 1.3.

Таблиця 1.3

Задача про планування посівів: вихідні дані

Сільськогосподарська культура	Урожайність, ц/га	
	I ділянка	II ділянка
Пшениця	30	25
Гречка	45	40
Площа ділянки, га	200	300

***Розв'язання*.**

Побудуємо економіко-математичну модель задачі.

1. ***Мета розв'язування задачі***. Визначити площі, що відводяться під посів пшениці та гречки на першій та другій

ділянках, які максимізують обсяги валової продукції у грошовому вираженні і гарантують виконання плану.

2. ***Вибір змінних***. Введемо такі позначення:
x_{11} – площа під посів пшениці на I ділянці,
x_{12} – площа під посів пшениці на II ділянці,
x_{21} – площа під посів гречки на I ділянці,
x_{22} – площа під посів гречки на II ділянці.

3. ***Побудова цільової функції***. Дохід від реалізації пшениці, що планується зібрати з обох ділянок, складе $7(30x_{11} + 25x_{12})$ грн, гречки – $9(45x_{21} + 40x_{22})$ грн, а загальний дохід від реалізації валової продукції виразиться сумою $210x_{11} + 175x_{12} + 405x_{21} + 360x_{22}$. Отже, цільова функція:

$$Z = 210x_{11} + 175x_{12} + 405x_{21} + 360x_{22} \to \max \qquad (1.15)$$

4. ***Побудова системи обмежень***. Оскільки на I ділянці планується x_{11} га засіяти пшеницею і x_{21} га – гречкою, то має виконуватися рівність:

$$x_{11} + x_{21} = 200.$$

Для II ділянки аналогічна умова запишеться в такий спосіб:

$$x_{12} + x_{22} = 300.$$

З I ділянки передбачається зібрати $30x_{11}$, а з II – $25x_{12}$ ц пшениці. Валовий збір має бути не меншим за 2800 ц пшениці. Це обмеження можна виразити записом:

$$30x_{11} + 25x_{12} \geq 2800.$$

Аналогічно формується вимога до валового збору гречки:

$$45x_{21} + 40x_{22} \geq 6500.$$

Отже, система обмежень має вигляд:

$$\begin{array}{r} \text{І д.} \\ \text{ІІ д} \\ \text{Пш.} \\ \text{Гр.} \end{array} \begin{cases} x_{11} + x_{21} = 200; \\ x_{12} + x_{22} = 300; \\ 30x_{11} + 25x_{12} \geq 2800; \\ 45x_{21} + 40x_{22} \geq 6500. \end{cases} \qquad (1.16)$$

Крім того, на розміри посівних площ накладаються умови невід'ємності:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0. \qquad (1.17)$$

5. ***Економіко-математична модель задачі планування посівів***: визначити оптимальні розміри площ, що відводяться під посіви пшениці та гречки $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, що задовольняють систему обмежень (1.16) і умову (1.17) та забезпечують максимальне значення функції (1.15).

Задача 1.4. Задача про використання потужностей (задача про завантаження обладнання)

Постановка задачі. Підприємству заданий план виробництва продукції за часом і номенклатурою: потрібно за час T випустити n_1, n_2, ..., n_k одиниць продукції P_1, P_2, ..., P_k. Продукція виробляється на верстатах S_1, S_2, ..., S_m. Для кожного верстата відомі продуктивність (тобто число одиниць продукції P_j яке можна зробити на верстаті S_i) і витрати b_{ij} на виготовлення продукції P_j на верстаті S_i в одиницю часу.

Необхідно скласти такий план роботи верстатів (тобто так розподілити випуск продукції між верстатами), щоб витрати на виробництво всієї продукції були мінімальними.

Розв'язання

Побудуємо економіко-математичну модель задачі.

Позначимо через x_{ij} – час, протягом якого верстат S_i буде зайнятий виготовленням продукції P_j ($i=\overline{1;m}$ $j=\overline{1;k}$)

Цільова функція – сумарні витрати на виробництво:

$$Z = b_{11}x_{11} + b_{12}x_{12} + ... + b_{mk}x_{mk} \rightarrow \min \qquad (1.18)$$

Оскільки час роботи кожного верстата обмежений і не перевищує T, то справедливі нерівності:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + ... + x_{1k} \leq T \\ x_{21} + x_{22} + ... + x_{2k} \leq T \\ .... \\ x_{m1} + x_{m2} + ... + x_{mk} \geq T \end{cases} \qquad (1.19)$$

Для виконання плану випуску за номенклатурою необхідно, щоб виконувалися такі рівності:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} + ... + a_{m1}x_{m1} = n_1 \\ a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} + ... + a_{m2}x_{m2} = n_2 \\ .... \\ a_{1k}x_{1k} + a_{2k}x_{2k} + ... + a_{mk}x_{mk} = n_k \end{cases}. \qquad (1.20)$$

Крім того, на обсяги виробництва накладаються умови невід’ємності:

$$x_{ij} \geq 0, \ i=\overline{1;m}, \ j=\overline{1;k}. \qquad (1.21)$$

Економіко-математична модель задачі про використання потужностей у загальній постановці: знайти план роботи верстатів $X = (x_{11}, x_{12}, ..., x_{mk})$, який забезпечує мінімальні виробничі витрати (1.19) та задовольняє обмеженням (1.19-1.20) і умовам (1.21).

Задача 1.5. Задача про розкрій матеріалів

Постановка задачі. На розкрій (розпив, обробку) надходить матеріал одного зразка у кількості a одиниць. Потрібно виготовити з нього різних комплектуючих виробів у кількостях пропорційних числам b_1, b_2, …, b_i, …, b_n (умова комплектності). Кожна одиниця матеріалу може бути розкроєна n різними способами, причому використання i-того способу ($i = \overline{1;n}$) дає a_{ik} одиниць k-того виробу ($k = \overline{1;n}$). Необхідно знайти план розкрою матеріалу, який забезпечує максимальне число комплектів.

Розв'язання

Побудуємо економіко-математичну модель задачі.

Позначимо x_i – обсяг (число одиниць) матеріалу, що розкраюється i-м способом, x – кількість комплектів виробів, що виготовляються.

План розкрою має забезпечувати максимальне число комплектів, тому цільова функція має вигляд

$$Z = x \to \max \tag{1.22}$$

Оскільки загальний обсяг матеріалу дорівнює сумі його одиниць, що розкраюються різними способами, то

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = a \tag{1.23}$$

Вимога комплектності виразиться рівнянням:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ik} = b_k x, \quad k = \overline{1;n}. \tag{1.24}$$

Очевидно, що на змінні накладаються умови невід'ємності:

$$x_i \geq 0, \ i = \overline{1;n} \tag{1.25}$$

Економіко-математична модель задачі про розкрій матеріалів у загальній постановці: знайти план розкрою матеріалу $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, який забезпечує максимальне число комплектів (1.22) та задовольняє систему обмежень (1.23-1.24) і умові (1.25).

Чисельний приклад побудови моделі задачі про розкрій матеріалів. Для виготовлення брусів довжиною 1,3 м, 2 м і 4 м у співвідношенні 3:1:4 на розпил надходять 220 колод довжиною 6 м. Визначити план розпилу, що забезпечує максимальне число комплектів.

Розв'язання

Насамперед визначимо всілякі способи розпилу колод, указавши відповідне число одержуваних при цьому брусів (табл. 1.4)

Таблиця 1.4

Задача про розкрій матеріалів: вихідні дані

Спосіб розпилу	Число одержуваних брусів за довжиною, м		
	1,3	2,0	4,0
1	4	-	-
2	3	1	-
3	1	2	-
4	-	1	1

Позначимо: x_1 – число колод, розпиляних i-м способом $(i=\overline{1;n})$; x – число комплектів брусів.

З огляду на те, що всі колоди повинні бути розпиляні, а число брусів кожного розміру має задовольняти умову комплектності, економіко-математична модель завдання набуде виду:

$$Z = x \to \max .$$

за обмежень

$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 + \ x_3 + x_4 = 220 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad = 3x \\ x_2 \qquad + x_3 + x_4 = x \\ \qquad\qquad x_4 = 4x \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1;4} \cdot$$

Задачу про розкрій легко узагальнити на випадок n матеріалів, які розкраюються.

Нехай кожна одиниця j-го матеріалу($j=\overline{1;m}$) може бути розкроєна n різними способами, причому використання i-го способу ($i=\overline{1;n}$) дає a_{ijk} одиниць k-го виробу ($k=\overline{1;n}$), а запас j-го матеріалу дорівнює a_j одиниць.

Позначимо через x_{ij} – число одиниць j-го матеріалу, що розкривається i-м способом.

Економіко-математична модель задачі про розкрій у загальній постановці (n матеріалів): знайти такий план розкрою матеріалу $X=(x_{11},x_{12},...,x_{nm})$, що забезпечує максимум функції

$$Z = x \to \max \tag{1.26}$$

за обмежень

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le a_j, \quad j = \overline{1;m} \\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} a_{jk} = b_k x, \quad k = \overline{1;n} \end{cases}, \tag{1.27}$$

$$x_{ij} \ge 0, i = \overline{1;n}, \ j = \overline{1;m} \tag{1.28}$$

Задача 1.6. Перевезення вантажів (транспортна задача)

Ефективність функціонування сучасної економіки залежить від раціональної організації транспортних потоків. Задачі планування перевезення вантажів щоденно розв'язуються логістичними компаніями, автотранспортними підприємствами, а також виробничими, сільськогосподарськими та торговельними підприємствами. Знання методів оптимізації вантажопотоків за певними економічними критеріями дозволить мінімізувати транспортні витрати, фінансові та часові втрати від простоїв, порожніх пробігів тощо.

Постановка задачі. Певний однорідний продукт, що знаходиться у m постачальників A_i в обсягах a_i ($i = \overline{1;m}$) одиниць відповідно необхідно перевезти n споживачам B_j в обсягах b_j ($j = \overline{1;n}$) одиниць (табл. 1.5).

Таблиця 1.5

Матриця планування перевезень

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потреби	b_1	b_2	…	b_n	

Відома вартість c_{ij} перевезень одиниці вантажу від кожного постачальника A_i до кожного споживача B_j. Необхідно скласти оптимальний план, тобто знайти такі значення обсягу перевезень вантажів x_{ij} від постачальників A_i до споживачів B_j, щоб вивезти всі вантажі від постачальників, задовольнити заявки кожного споживача й забезпечити мінімальні транспортні витрати на перевезення вантажів.

Економіко-математична модель транспортної задачі у загальній постановці: знайти план перевезень $X = (x_{ij})$ ($i = \overline{1;m}$, $j = \overline{1;n}$), який забезпечує мінімум функції транспортних витрат

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \qquad (1.28)$$

за обмежень

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1;m}; \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1;n}; \end{cases} \qquad (1.29)$$

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1;m},\ j = \overline{1;n}. \qquad (1.30)$$

Задача 1.7. Розподіл по посадах

В операційному менеджменті та управлінні персоналом часто постає завдання призначення виконавців на певні ділянки робіт або посади так, щоб продуктивність праці в колективі була максимальною.

Постановка задачі. На промисловому підприємстві є m працівників: A_1, A_2, ..., A_i, …, A_m, кожний з яких має виконувати одну з наявних n видів робіт: B_1, B_2, ..., B_j, …, B_n

Для кожного працівника A_i на робочому місці B_j відома продуктивність праці c_{ij}. Необхідно визначити, кого й на яку роботу варто призначити, щоб домогтися максимальної сумарної продуктивності за умови, що кожний працівник може бути призначений тільки на одну роботу.

Позначимо x_{ij} призначення i-го працівника на j-у роботу. Змінні x_{ij} є бінарними змінними, оскільки можуть приймати тільки два значення: 1, якщо i-й працівник призначений на виконання j-ї роботи; 0, якщо не призначений. При призначенні i-го працівника на j-у роботу продуктивність дорівнює $c_{ij}\,x_{ij}$.

Економіко-математична модель задачі про розподіл по посадах (призначення) у загальній постановці: знайти такий розв'язок-матрицю $X = (x_{ij})$ ($i = \overline{1;m}$, $j = \overline{1;n}$), який забезпечує максимум функції

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \max. \qquad (1.31)$$

за обмежень

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1;m} \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1;n} \end{cases} \qquad (1.32)$$

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1;m},\ j = \overline{1;n} \qquad (1.33)$$

Множенням лінійної функції на «-1» задача розподілу по посадах зводиться до транспортної, у якій сума запасів кожного постачальника й сума потреб кожного споживача дорівнюють одиниці.

Завдання до практичної роботи № 1

Згідно з індивідуальним варіантом побудувати економіко-математичні моделі задач оптимального управління і планування.

Варіант №1

Задача 1. Ви працюєте економістом на бавовняно-паперовому комбінаті «Українська мануфактура». Відділ дизайну розробив два нових види твіду, і керівництво поставило перед Вами завдання: скласти оптимальний місячний план виробництва твіду, що максимізує загальний дохід від його реалізації, з урахуванням обмежень на ресурси. Виробництво 1 м твіду артикулу А2145 вимагає 0,8 вагових одиниць сірої вовни, 0,25 – червоної вовни, і 0,2 – зеленої вовни; виробництво 1 м твіду артикулу А2149 вимагає 1,0 вагових одиниць сірої вовни, 0,1 – червоної, і 0,4 – зеленої вовни. Умови постачань матеріалів і складські приміщення дозволяють мати наступні місячні запаси вовни: 8000 вагових одиниць сірої, 2000 – червоної і 3000 вагових одиниць зеленої вовни. Обидва види тканини виготовляються на однакових ткацьких верстатах і швидкість їхнього виробництва однакова – 12 м за годину. Місячний ліміт машинного часу складає 750 машино-годин. Плановий дохід від реалізації 1 м твіду артикулу А2145 складає 130 грн, твіду артикулу А2149 – 120 грн.

Задача 2. Підприємство виробляє три моделі електронних реле. Кожна модель вимагає двостадійної збірки. Час, необхідний для збірки на кожній стадії, наведено у таблиці.

Вид продукції	Час збірки, хв.	
	Стадія №1	Стадія №2
Модель *A*	2,5	2,0
Модель *B*	1,8	1,6
Модель *C*	2,0	2,2

Устаткування на кожній стадії працює 7,5 годин на день. Менеджер хоче максимізувати прибуток за робочий тиждень (5 днів). Дохід від реалізації одного реле моделі *A* складає 82,5 грн, моделі B – 70,0 грн, моделі C – 78,0 грн. Підприємство реалізує всю готову продукцію і, крім того, має на наступний тиждень оплачене замовлення на 60 реле, по 20 реле кожного типу. Складіть план виробництва продукції, який забезпечує підприємству максимальний дохід від реалізації.

Задача 3. У районі є два піщаних кар’єри, з яких пісок вивозиться на 5-тонних вантажівках. Підприємства-постачальники S_1 і S_2, що розробляють кар’єри, можуть поставляти відповідно 100 і 200 вантажівок з піском у день. Крім того, у цьому районі розташовано три заводи залізобетонних конструкцій – споживачі піску D_1, D_2 і D_3, яким потрібно відповідно 80, 90 і 130 вантажівок з піском у день. Вартість перевезення піску однією вантажівкою від кар'єру постачальника до заводу споживача (у грн) наведені в таблиці. Скласти план перевезень, який мінімізує транспортні витрати.

Заводи / Кар’єри	D_1	D_2	D_3	Запаси
S_1	4	6	3	100
S_2	8	4	5	200
Замовлення	80	90	130	

Варіант №2

Задача 1. Фермер відвів два земельних масиви розміром 5000 і 10000 га на посіви жита й пшениці. Середня врожайність у центнерах на 1 га по масивах зазначена у таблиці:

Земельні масиви / Зернові культури	I	II
Жито	12	14
Пшениця	14	10

За 1 ц жита фермер одержує 2 грн, за 1 ц пшениці – 3 грн. Скільки гектарів і на яких масивах фермер повинен відвести на кожну культуру, щоб одержати максимальний виторг, якщо за планом він зобов'язаний здати не менше 4800 т жита і 14200 т пшениці?

Задача 2. Два типи літаків варто розподілити між двома авіалініями. Дані про організацію процесу перевезень наведені в наступній таблиці:

Тип літака	Кількість літаків, од.	Місячний обсяг перевезень одним літаком по авіалініях, од.		Експлуатаційні витрати на 1 літак по авіалініях, грн.	
		I	II	I	II
1	50	15	17	19	22
2	20	20	24	21	23

Необхідно розподілити літаки по авіалініях так, щоб при мінімальних сумарних експлуатаційних витратах забезпечити перевезення по кожній з двох авіаліній не менше 500 і 520 од. вантажу відповідно.

Задача 3. Цех випускає трансформатори двох видів. Для виготовлення трансформаторів обох видів використовуються залізо й дріт. Загальний запас заліза – 3 т, дроту – 18 т. На один трансформатор першого виду витрачаються 5 кг заліза й 3 кг дроту, а на один трансформатор другого виду витрачаються 3 кг заліза й 2 кг дроту. За кожний реалізований трансформатор першого виду завод має прибуток 3 грн, другого – 4 грн. Складіть план випуску трансформаторів, що забезпечує заводу максимальний прибуток.

Варіант №3

Задача 1. Торговельний центр збирається замовити нову колекцію костюмів для весняного сезону. Вирішено замовити чотири типи костюмів. Три типи –костюми широкого вжитку: костюми з поліестерових сумішей, вовняні костюми та костюми з бавовни. Четвертий тип – це дорогі імпортні модельні костюми з різних тканин. Досвід менеджерів магазину і спеціальні дослідження дозволили оцінити середні витрати робочого часу продавців на продаж одного костюма кожного типу, витрати на рекламу та площі у розрахунку на один костюм кожного типу.

Усі ці дані, а також прибуток від реалізації одного костюма кожного типу наведено у таблиці:

Тип костюма	Прибуток від реалізації 1 костюма, грн	Робочій час продавців на продаж 1 костюма, люд.-год	Витрати на рекламу на 1 костюм, грн	Торговельна площа на 1 костюм, кв м
Поліестер	35	0,4	2	1,00
Вовна	47	0,5	4	1,50
Бавовна	30	0,3	3	1,25
Імпорт	90	1,0	9	3,00

Передбачається, що весняний сезон буде тривати 90 днів. Магазин відкритий 10 годин на день 7 днів у тиждень. Два продавці постійно будуть у відділі костюмів. Виділена відділу костюмів площа являє собою прямокутник 10м на 6м. Бюджет, виділений на рекламу всіх костюмів на весняний сезон, становить 15 тис. грн. Скільки костюмів кожного типу потрібно закупити, щоб максимізувати прибуток?

Задача 2. Виробничий цех виготовляє металеві деталі (шківи, втулки і клапани) на верстатах з ЧПУ. Кожна деталь обробляється трьома верстатами. Складіть план завантаження верстатів, що забезпечує цехові одержання максимального прибутку, якщо організація виробництва в цеху характеризується такою таблицею:

Верстат	Тривалість обробки деталі, хв.			Фонд часу, год.
	Шків	Втулка	Клапан	
I	12	10	9	220
II	15	18	20	400
III	6	4	4	100
Відпускна ціна за одну деталь, грн	30	32	30	

Задача 3. Холдинг планує робити 300 тис. однотипних виробів на 4-х своїх підприємствах щомісяця. Для освоєння цього нового виду продукції виділено 18000 грн. Розроблені для кожної філії проекти освоєння нової продукції характеризуються

визначеними значеннями собівартості одного виробу і необхідних питомих капіталовкладень. Витрати виробництва і капіталовкладення можна вважати пропорційними кількості продукції, що випускається. Визначити такий план розміщення щомісячних обсягів виробництва по філіях, при якому сумарні витрати виробництва будуть мінімальними.

Показники	Філії холдингу			
	№1	№2	№3	№4
Витрати на од. продукції, грн.	83	89	95	98
Інвестиції на од. продукції, грн.	120	80	50	40

Варіант №4

Задача 1. Із двох сортів бензину утворяться дві суміші – А і В. Суміш А містить бензину 60% 1-го сорту й 40% 2-го сорту; суміш В – 80% 1-го сорту й 20% 2-го сорту. Ціна 1 кг суміші А – 10 грн, а суміші В – 12 грн. Складіть план утворення сумішей, при якому буде отриманий максимальний дохід, якщо в наявності є бензину 50 т 1-го сорту та 30 т 2-го сорту.

Задача 2. Мале приватне підприємство проектує, виготовляє на замовлення і продаж садові меблі. Необхідно запропонувати місячний план виробництва садових меблів трьох видів, який забезпечив би підприємству максимальний прибуток від їхньої реалізації. Організація виробництва на підприємстві характеризується такою таблицею:

Сировина для виготовлення меблів	Витрати сировини на виробництво од. продукції, кг			Запас сировини, кг
	Столи	Стільці	Крісла-качалки	
Лоза	2,4	1,8	2,2	90
Техноротанг	2,3	1,9	2,1	80
Комплектуючі	0,9	0,8	0,85	30
Прибуток від реалізації 1 од, грн	1100	700	980	

Задача 3. Сільськогосподарське підприємство планує посів зернових і зернобобових культур на посівних площах двох ґрунтово-кліматичних зон (площі яких відповідно рівні 0,8 і 0,6 млн. га). Необхідно визначити такий план посіву (розміри посівних площ) зернових і зернобобових, який забезпечив би сільськогосподарському підприємству максимальний дохід від реалізації зерна. Дані про урожайність зернових культур наведено у таблиці:

Сільськогосподарські культури	Урожайність, ц/га		Вартість, грн/ц
	I зона	II зона	
Зернові	20	25	8
Зернобобові	25	20	7

Варіант №5

Задача 1. У тваринницькому господарстві на потоку стоїть відгодівля бичків м'ясних порід. При відгодівлі кожна тварина має одержати не менше ніж 10 од. білків, 9 од. вуглеводів і 11 од. протеїну. Для складання раціону використовують два види корму. Вартість 1 кг корму I виду – 6 грн, а II виду – 9 грн. Складіть денний раціон поживності, що має мінімальну вартість, за наведеної у таблиці кількості одиниць живильних речовин на 1 кг кожного виду корму:

Живильні речовини	Кількість одиниць живильних речовин на 1 кг корму	
	корм I виду	корм II виду
Білки	3	1
Вуглеводи	2	2
Протеїн	1	6

Задача 2. МПП «ЕлектрА» випускає трансформатори двох видів. Для виготовлення трансформаторів обох видів використовуються залізо й дріт. Загальний запас заліза – 100 т, дроту – 150 т. На один трансформатор першого виду витрачаються 5 кг заліза й 3 кг дроту, а на один трансформатор другого виду витрачаються 4 кг заліза й 2 кг дроту. За кожний реалізований трансформатор першого виду завод отримує дохід 130 грн, другого – 110 грн. Складіть план випуску

трансформаторів, що забезпечує підприємству максимальний дохід.

Задача 3. На трьох борошномельних заводах щодня виробляється 70, 50 і 90 т борошна. Це борошно споживається чотирма мініпекарнями, щоденні потреби яких дорівнюють відповідно 40, 70, 50 і 50 т. Тарифи перевезень 1 т борошна з борошномельних заводів до кожної з мініпекарень наведено у таблиці. Необхідно побудувати економіко-математичну модель для планування перевезення борошна до міні-пекарень за критерієм мінімізації загальних транспортних витрат.

Борошномельні заводи	Мініпекарні			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	8	2	3
A_2	4	7	5	2
A_3	5	3	4	1

Варіант №6

Задача 1. Фермер відвів два земельних масиви розміром 8600 і 4020 га на посіви жита та пшениці. Середню урожайність у центнерах на 1 га по масивах наведено у таблиці:

Зернові культури	Земельні масиви	
	I	II
Жито	15	13
Пшениця	13	14

За 1 ц жита фермер отримує 3 грн, за 1 ц пшениці – 3,5 грн. Скільки гектарів і на яких масивах фермер повинен відвести на кожну культуру, щоб отримати максимальну виручку, якщо за планом він зобов'язаний здати не менше 3600 т жита, 12500 т пшениці?

Задача 2. На меблевій фабриці виготовляється п’ять видів продукції: столи, шафи, диван-ліжка, крісла-ліжка і тахти. Норми витрат трудових ресурсів, сировини і матеріалів на виробництво одиниці продукції кожного виду наведено у таблиці. Необхідно визначити обсяги виробництва продукції меблевою фабрикою протягом робочого дня, що забезпечують максимальний прибуток від її реалізації. Водночас при плануванні необхідно врахувати обмеження на запаси ресурсів і максимально можливі обсяги виробництва продукції на підприємстві.

Ресурси	Норми витрати ресурсів на одиницю продукції					Запаси ресурсів
	стіл	шафа	диван-ліжко	крісло-ліжко	тахта	
Трудові ресурси, людино-год.	4	9	12	11	10	3850
Деревина, кв. м	0,4	0,6	0,16	0,13	0,15	550
Тканина, м	-	-	17	14	16	2700
Граничний обсяг виробництва, шт.	150	80	90	90	70	
Прибуток від реалізації, грн/шт.	200	350	520	510	480	

Задача 3. Два типи літаків треба розподілити між двома авіалініями так, щоб при мінімальних сумарних експлуатаційних витратах перевезти по кожній із двох авіаліній відповідно не менше 490 і 518 од. вантажу. Дані про організацію процесу перевезень наведено в наступній таблиці:

Тип літака	Кількість літаків, од.	Місячний обсяг перевезень одним літаком по авіалініях, од.		Експлуатаційні витрати на 1 літак по авіалініях, грн	
		I	II	I	II
1	48	13	9	12	26
2	22	21	26	50	28

Варіант №7

Задача 1. Консультантові з економічних питаннях надійшло розпорядження директора підприємства зайнятися важливою проблемою щодо мінімізації внутрішньозаводських транспортних витрат. Завод має три цехи №1, №2 і №3 і чотири склади I, II, III і IV. Цех №1 робить 30, цех №2 робить 40, цех №3 робить 20 тис. виробів. Пропускна здатність складів за те ж час характеризується наступними показниками: склад I – 25, склад II – 30, склад III – 35 і склад IV – 15 тис. виробів. Вартість перевезення із цеху №1 відповідно в склади I, III, IV однієї тисячі виробів дорівнює 2, 3, 0,5 і 4 грн, із цеху №2 – 4, 3, 2 і 6 грн., із цеху №3 – 3, 2, 5 і 1 грн. Скласти такий план перевезення виробів із цехів на склади, що мінімізує транспортні витрати.

Задача 2. Меблевий цех може випускати два види продукції: шафи та тумби для телевізорів. На кожну шафу витрачається 3,5 м стандартних ДСП, 1 кв. м листового скла та 1 людино-день трудовитрат. На тумбу – 1 м ДСП, 2 кв. м листового скла та 1 людино-день трудовитрат. Прибуток від продажу однієї шафи становить 200 грн., а однієї тумби – 100 грн. Матеріальні та трудові ресурси обмежені: у цеху працюють 150 робітників, у день не можна витрачати більше 350 м ДСП і більше 240 м скла. Яку кількість шаф і тумб повинен випускати цех, щоб загальний прибуток від реалізації продукції був максимальним?

Задача 3. Сільськогосподарське підприємство, яке спеціалізується на вирощуванні зернових культур, планує посів сорго, проса і гречки. Площа земель, яку орендує підприємство, дорівнює 900 га. При визначенні структури посівних площ необхідно забезпечити максимальний чистий прибуток від реалізації зернових культур. Для кожної культури відомі витрати праці на вирощування культури на одиницю площі всього; замовлення та граничний попит на культуру. Трудові ресурси, які може задіяти підприємство, становлять 45 000 людино-днів.

Культура	Сорго	Просо	Гречка
Урожайність, ц/га	39,9	26,8	16,3
Замовлення, ц	15000	6000	8000
Максимальний попит, ц	20000	7000	10000
Трудові ресурси, людино-дні/га	140	138	346
Чистий прибуток, грн/ц	90	95	110

Варіант №8

Задача 1. Кондитерська фабрика планує виробляти три нових види карамелі. Скласти оптимальний план виробництва, який забезпечив би максимальний дохід від реалізації готової продукції за калькуляції, яка наведена у таблиці.

Вид сировини	Норми витрат сировини на 1 кг карамелі			Запас сировини
	Апельсиновий смак	Лимонний смак	Персиковий аромат	
Цукор, кг	5,0	1,5	2,0	100
Патока, кг	4,0	2,2	1,5	500
Фруктове пюре, кг	1,2	4,0	2,5	200
Дохід від реалізації, грн/кг	80	95	98	

Задача 2. Ви працюєте старшим фінансовим менеджером у холдинговій компанії. Кожне з трьох підприємств може виробляти по три види продукції. Виробничі потужності підприємств дозволяють забезпечити випуск продукції кожного виду в обсягах 50, 70 і 40 тис. шт., а планове завдання складає відповідно 30, 80 і 60 тис. шт. Необхідно знайти оптимальний розподіл планового завдання між підприємствами, якщо матриця, яка характеризує собівартість одиниці i-го виду продукції при виробництві його на j-му підприємстві має вигляд:

$$\begin{pmatrix} 14 & 12 & 11 \\ 15 & 14 & 17 \\ 12 & 17 & 16 \end{pmatrix}$$

Задача 3. Із двох сортів бензину утворяться дві суміші – A і B. Суміш A містить бензину 55% 1-го сорту та 45% 2-го сорту; суміш B – 78% 1-го сорту та 22% 2-го сорту. Ціна 1 кг суміші A – 14 грн, а суміші B – 16 грн. Складіть план утворення сумішей, при якому буде отриманий максимальний дохід, якщо є 120 т бензину 1-го сорту та 96 т бензину 2-го сорту.

Варіант №9

Задача 1. В овочівницькому господарстві планується вирощування капусти, огірків, помідорів і буряку. Площа земель, яку орендує господарство, дорівнює 313 га. При визначенні структури посівних площ необхідно забезпечити максимальний прибуток від реалізації вирощених овочів. Для кожної культури відомі витрати праці (людино-дні/га) на вирощування культури на одиницю площі всього; замовлення та граничний попит на культуру (у центнерах). Трудові ресурси для виробництва овочів протягом року дорівнюють 45000 людино-днів.

Культура	Капуста	Огірки	Помідори	Буряк
Урожайність, ц/га	325	92	176	206
Замовлення, ц	15000	5000	7500	6000
Максимальний попит, ц	25000	7000	10000	9500
Трудові ресурси, людино-дні/га	75	138	346	158
Прибуток, грн/ц	90	95	110	70

Задача 2. Комерційне підприємство реалізує три групи товарів: світильники стельові, лампи настільні, торшери. Визначте плановий обсяг продажу і структуру товарообігу так, щоб дохід торгівельного підприємства був максимальним. Планові норми витрат ресурсів, дохід від продажу товарів та обсяг ресурсів задані в таблиці:

Вид ресурсу	Норми витрат ресурсів на одиницю товару			Запас ресурсів
	Світильники	Лампи	Торшери	
Робочий час продавців, люд.-год.	0,1	3	0,4	1100
Площа торговельних залів, кв. м	0,05	0,2	0,02	120
Площа складських приміщень, кв. м	3	0,02	2	8000
Дохід від реалізації, грн	410	154	450	

Задача 3. Підприємець розглядає бізнес-ідею «Вироби з дерева для дому», а саме виробництво 4-х видів продукції: декор з дерева, ключниці, штори з дерева і масажери з дерева. Виробництво цієї продукції вимагає закупівлі спеціального обладнання для роботи з деревом, сировини, найму працівників, а також витрат на рекламу. Розробити оптимальний план виробництва на місяць, який максимізує дохід від реалізації готової продукції за наведених у таблиці технологічних коефіцієнтів і можливостей підприємця.

Вид ресурсів	Витрати ресурсів на одиницю продукції				Запас ресурсів
	Декор	Ключниця	Штора	Масажер	
Сировина, кг	1,3	1,2	5,2	1,3	300
Трудові ресурси, людино-год.	5,0	5,5	9,5	6,0	800
Обладнання, верстато-год.	0,5	0,8	1,2	1,0	320
Витрати на рекламу, грн	13	14	12	14	1000
Дохід від реалізації, грн	110	155	480	170	

Варіант №10

Задача 1. Бройлерне господарство налічує 20 000 курчат, для годування яких як кормова добавка використовується суміш, що складається з вапняку, зерна і соєвих бобів, яка має задовольняти певним вимогам. Суміш повинна містити (за вагою): не менше 22% білка; не більше 5% клітковини; не менше 0,8% та не більше 1,2% кальцію. Крім того, частка білка, що забезпечується за рахунок соєвих бобів, не повинна більш ніж удвічі перевищувати частку білка, що забезпечується за рахунок зерна. Тижнева витрата суміші на одне курча – не менше 445 г. Тривалість періоду годівлі – 2 тижні. Відомості про компоненти кормової суміші, включаючи значення їхніх запасів, що використовуються при пробному рішенні, наведено у таблиці:

Сировина для суміші	Вміст інгредієнтів (у кг на 1 кг сировини)			Ціна, грн/кг	Запас сировини, т
	кальцій	білок	клітковина		
Вапняк	0,380	-	-	1,0	0,4
Зерно	0,001	0,120	0,020	6,0	8,1
Соєві боби	0,002	0,420	0,080	5,1	4,5

Необхідно визначити склад кормової суміші (вагу кожного компонента у розрахунку на весь період годування), що відповідає зазначеним вимогам і має мінімальну вартість.

Задача 2. Для вантажних перевезень створюється автоколона. На придбання автомашин виділено 12 млн. грн. Можна замовити машини трьох марок – *A, B, C,* що характеризуються даними, які наведено в таблиці. Кількість машин не може перевищувати 10, а загальна кількість водіїв в автоколоні повинна бути не більше 40 чол. Скільки автомашин кожної марки треба замовити, щоб автоколона мала максимально можливу продуктивність у розрахунку на одну добу? Вважати, що кожна машина буде використовуватися протягом усіх трьох змін, а водії будуть працювати по одній зміні в добу.

Марка машини	Вартість машини, тис. грн.	Кількість водіїв, що обслуговують машину за зміну	Кількість змін у добу	Продуктивність машини за зміну, т/км
A	980	1	3	4500
B	850	2	3	3800
C	950	2	3	4000

Задача 3. МПП «Світло+» випускає трансформатори двох видів. Для виготовлення трансформаторів обох видів використовуються залізо та дріт. Загальний запас заліза – 40 т, дроту – 10 т. На один трансформатор першого виду витрачаються 4,8 кг заліза та 2,1 кг дроту, а на один трансформатор другого виду витрачаються 3,5 кг заліза та 1,8 кг дроту. За кожний реалізований трансформатор першого виду завод отримує чистий прибуток 90 грн, другого – 80 грн. Складіть план випуску трансформаторів, який забезпечить заводу максимальний прибуток.

Варіант №11

Задача 1. Тваринницьке господарство спеціалізується на свинарстві. При відгодівлі кожна тварина повинна одержати не менше 11 од. білків, 8 од. вуглеводів і 11 од. протеїну. Для складання раціону використовують два види концентрату. Вартість 25-кілограмової пачки концентрату «АВА Здорова» – 860 грн., Вартість 10-кілограмової пачки концентрату «Purina»– 395 грн. Складіть денний раціон поживності, що має мінімальну вартість, за потреб у поживних речовинах, які наведені у таблиці:

Поживні речовини	Кількість одиниць поживних речовин на 1 кг корму	
	АВА Здорова	Purina
Білки	2,1	1,8
Вуглеводи	1,5	1,9
Протеїн	3,5	4,2

Задача 2. На ринку побутової хімії миючі засоби оцінюють за трьома основними показниками: очищувальна властивість, дезінфікуюча властивість і подразнююча дія на шкіру. Для продажу миючий засіб повинен мати не менше ніж 55 ум. од. очищаючого та не менше 60 ум. од. дезінфікуючих властивостей за шкалою оцінок. Дратівливий вплив на шкіру має бути мінімальним. Підприємство має запаси трьох видів очищувачів з характеристиками у відносних одиницях, які наведено у таблиці:

Очищувачі	Очищувальна властивість	Дезінфікуюча властивість	Подразнююча дія
Поверхнево-активна речовина	80	25	70
Кислота	55	70	40
Окислювач	40	65	20

Розробіть модель складу миючого засобу, який є сумішшю трьох очищувачів і задовольняє вимоги ринку.

Задача 3. Для виготовлення взуття 4-х моделей на фабриці використовується 2 сорту шкіри. Ресурси робочої сили і матеріалу, витрати праці і матеріалу для виготовлення кожної пари взуття, а також прибуток від реалізації одиниці продукції наведені в таблиці. Скласти план випуску взуття за асортиментом, що максимізує прибуток.

Ресурси	Витрати ресурсів на одну пару взуття за моделями				Запас ресурсів
	№1	№2	№3	№4	
Шкіра 1-го сорту, кг	0,82	0,95	0	0	500
Шкіра 2-го сорту, кг	0	0,85	0,97	0,15	1200
Робочий час, люд.-год.	1,3	2,5	2,4	1,8	1000
Прибуток, грн	220	250	280	295	

Варіант №12

Задача 1. Цех випускає три види деталей Д-11, Д-12, Д-13. Кожна деталь обробляється трьома верстатами. Складіть план завантаження верстатів, що забезпечує цеху одержання максимального прибутку, якщо організація виробництва в цеху характеризується таблицею:

Верстат	Тривалість обробки 1 деталі, хв			Фонд робочого часу, год.
	Д-11	Д-12	Д-13	
I	25	10	9	350
II	15	18	20	400
III	6	10	4	290
Відпускна ціна, грн	90	92	95	

Задача 2. Мініпекарня виробляє три види хлібобулочних виробів. Скласти оптимальний план виробництва, який забезпечив би максимальний дохід від реалізації готової хлібопекарної продукції за калькуляції, яка наведена у таблиці.

Вид сировини	Норми розходу сировини, кг/т			Запас сировини, т
	Батон особливий	Батон нарізний	Сайка	
Борошно, кг	8	16	20	200
Дріжджі, кг	30	22	15	600
Маргарин, кг	10	40	20	300
Дохід від реалізації продукції, грн/т	200	300	450	

Задача 3. Автотранспортне підприємство перевозить глину з трьох кар'єрів до чотирьох керамічних заводів. Необхідно спланувати перевезення глини на керамічні заводи так, щоб транспортні витрати були мінімальними. Потужність кар'єрів, потреби заводів і витрати на перевезення 1 т глини (в грн.) з кожного кар'єру до кожного заводу наведено у таблиці:

Кар'єри	Керамічні заводи				Потужність кар'єрів
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	3	3	9	50
A_2	8	7	5	4	120
A_3	6	6	4	5	90
Потреби керамічних заводів	80	40	100	40	

Варіант №13

Задача 1. Ви працюєте фінансовим менеджером у холдинговій компанії. Чотири підприємства компанії можуть випускати кожен по чотири види продукції. Виробничі потужності підприємств дозволяють забезпечити випуск продукції кожного виду в обсягах 50, 70, 100 і 30 тис. шт., а планове завдання складає відповідно 30, 80, 20 і 100 тис. шт. Необхідно знайти оптимальний розподіл планового завдання між підприємствами, якщо матриця, яка характеризує собівартість одиниці i-го виду продукції при виробництві його на j-му підприємстві, має такий вигляд:

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 & 8 \\ 5 & 7 & 9 & 4 \\ 6 & 4 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Задача 2. Підприємець планує побудувати бізнес на канцелярських товарах. Підприємець знає, що всі канцелярські товари розподіляються на дві групи – шкільні і офісні – та розглядає виробництво блокнотів. Технологія виробництва передбачає закупівлю офсетного паперу, фарби для логотипів, високотехнологічного обладнання, а також найму робочої сили. Складіть місячний план виробництва продукції, який забезпечує максимум доходу від її реалізації, за відомих нормативів витрат ресурсів і прогнозованого їх запасу.

Вид ресурсу	Норми витрат ресурсів на 1 умовний блокнот		Запас ресурсу
	офісний	шкільний	
Офсетний папір, ум. арк.	3,5	2,8	2000
Краска для логотипів, мл	0,9	0,85	10000
Обладнання, верстато-год.	1,2	0,9	320
Трудові ресурси, людино-год.	1,8	2,1	480
Дохід від реалізації продукції, грн/шт.	180	106	

Задача 3. Сільськогосподарське підприємство планує вирощування зернових бобових культур: гороху, квасолі, нуту і сої. Площа земель, що орендує господарство, дорівнює 1 500 га. При визначенні структури посівних площ необхідно забезпечити максимальний чистий прибуток від реалізації цих бобових. Для кожної культури відомі витрати праці (людино-дні/га) на вирощування культури на одиницю площі всього; замовлення та граничний попит на культуру (у центнерах). Трудові ресурси для виробництва бобових культур протягом року дорівнюють 50 000 людино-днів.

Культура	Горох	Квасоля	Нут	Соя
Урожайність, ц/га	40,5	41,0	41,5	42,5
Замовлення, ц	600	400	200	300
Максимальний попит, ц	1000	700	800	850
Трудові ресурси, людино-дні/га	220	240	225	245
Чистий прибуток, грн/ц	70	65	85	80

Варіант №14

Задача 1. Мале приватне підприємство проектує, виготовляє на замовлення і продаж садові меблі. Необхідно запропонувати місячний план виробництва садових меблів трьох видів, який забезпечив би підприємству максимальний прибуток від їхньої реалізації. Організація виробництва на підприємстві характеризується такою таблицею:

Сировина для виготовлення меблів	Витрати сировини на виробництво одиниці продукції, кг			Запас сировини, кг
	Столи	Стільці	Крісла-качалки	
Лоза	2,4	1,8	2,2	100
Штучний ротанг	2,3	1,9	2,1	110
Комплектуючі	0,9	0,8	0,85	50
Прибуток від реалізації 1 од, грн	1100	700	980	

Задача 2. Одна з тваринницьких ферм Групи HarvEast розробляє раціон відгодівлі племінної породи корів. При відгодівлі кожна тварина повинна одержати не менше 12 од. білків, 9 од. вуглеводів і 11 од. протеїну. Вартість 1 кг корму першого виду – 6 грн, другого – 9 грн. Складіть денний раціон, який має мінімальну вартість, за даними, що наведено у таблиці:

Живильні речовини	Кількість одиниць живильних речовин на 1 кг корму	
	Корм I виду	Корм II виду
Білки	2,3	3,0
Вуглеводи	2,5	2,2
Протеїн	1,6	1,8

Задача 3. На ринку побутової хімії миючі засоби оцінюють за трьома основними показниками: очищувальна властивість, дезінфікуюча властивість і подразнююча дія на шкіру. Для продажу миючий засіб повинен мати не менше ніж 60 ум. од. очищаючого та не менше 60 ум. од. дезінфікуючих властивостей за шкалою оцінок. Дратівливий вплив на шкіру має бути мінімальним. Підприємство має запаси трьох видів очищувачів з характеристиками у відносних одиницях, які наведено у таблиці:

Очищувачі	Очищувальна властивість	Дезінфікуюча властивість	Подразнююча дія
Поверхнево-активна речовина	90	35	70
Кислота	65	80	50
Окислювач	43	70	10

Розробіть модель складу миючого засобу, що є сумішшю трьох очищувачів і задовольняє вимоги ринку.

Варіант №15

Задача 1. Цех випускає тротуарну плитку двох видів. Для виготовлення плитки обох видів використовуються цемент та пісок. Загальний запас цементу – 28 т, піску – 34 т. На одну плитку першого виду витрачаються 7 кг цементу та 3 кг піску, а на одну плитку другого виду витрачаються 1,5 кг цементу та 0,5 кг піску. За кожну реалізовану плитку першого виду завод отримує прибуток 5 грн, другого – 4 грн. Складіть план випуску тротуарної плитки, що забезпечує заводу максимальний прибуток.

Задача 2. У сільськогосподарському підприємстві відведено два земельних масиви під посіви зернобобових: нуту та гороху. Сільськогосподарське підприємство реалізує зернобобові за закупівельними цінами. Скільки гектарів і на яких масивах підприємство має відвести на кожну культуру, щоб отримати максимальний виторг, якщо за плановим завданням необхідно здати не менше 7 тис. ц нуту та 10 тис. ц гороху? Середню урожайність по масивах, їхню площу та закупівельні ціни на зернобобові наведено у таблиці:

Зернобобові культури	Урожайність, ц/га		Закупівельні ціни, грн./ц
	Масив I	Масив II	
Нут	13,5	12,4	1300
Горох	30,6	28,4	1100
Площа, га	1200	1400	

Задача 3. Для вантажних перевезень створюється автоколона. На придбання автомашин виділено 10 млн. грн. Можна замовити машини трьох марок: А, В, С (умовно), що характеризуються даними, які наведено у таблиці. Кількість машин не повинна перевищувати 10, а загальна кількість водіїв в автоколоні має бути не більше за 50. Скільки автомашин кожної марки треба замовити, щоб автоколона мала максимально можливу продуктивність у розрахунку на одну добу? Вважати, що кожна машина буде використовуватися протягом усіх трьох змін, а водії будуть працювати по одній зміні в добу.

Марка машини	Вартість машини, тис. грн	Кількість водіїв, що обслуговують машину за зміну	Кількість робочих змін у добу	Продуктивність машини за зміну, т/км
A	970	1	3	2100
B	820	2	3	3600
C	950	2	3	3780

Варіант №16

Задача 1. Підприємству заданий добовий план виробництва продукції за часом і номенклатурою: потрібно випустити 50 одиниць деталей виду 001, 25 одиниць деталей виду 002, випустити 30 одиниць продукції виду 003, випустити 35 деталей продукції виду 004. Продукція виробляється на верстатах 3-х типів. Для кожного верстата відомі технологічні коефіцієнти: продуктивність і витрати сировини на виготовлення продукції в годину одиницю часу. Підприємство працює у двозмінному режимі. Тривалість однієї зміни – 8 годин. Необхідно скласти такий план роботи верстатів (тобто розподілити випуск продукції між верстатами), щоб витрати на виробництво всієї продукції були мінімальні.

Тип верстату	Продуктивність верстатів, шт./год.				Виробничі витрати, грн/год.			
	001	002	003	004	001	002	003	004
Верстат I типу	4	5	3	2	8,0	7,0	7,5	9,0
Верстат II типу	6	2	6	3	8,5	9,5	7,0	8,0
Верстат III типу	2	4	4	3	7,5	7,5	8,0	8,5

Задача 2. В овочівницькому господарстві планується вирощування квасолі, гороху, моркви і буряку. Площа земель, що орендує господарство, дорівнює 500 га. При визначенні структури посівних площ необхідно забезпечити максимальний прибуток від реалізації вирощених овочів. Для кожної культури відомі витрати праці (людино-дні/га) на вирощування культури на одиницю площі всього; замовлення та граничний попит на

культуру. Трудові ресурси для виробництва овочів протягом року дорівнюють 55000 людино-днів.

Культура	Квасоля	Горох	Морква	Буряк
Урожайність, ц/га	250	85	150	212
Замовлення, ц	20000	4000	8000	7000
Максимальний попит, ц	25000	7000	10000	9500
Трудові ресурси, люд.-дні/га	85	142	350	150
Прибуток, грн/ц	85	65	70	50

Задача 3. Визначення стратегічного товарного асортименту є першочерговим завданням торговельного підприємства. Допоможіть оптимізувати товарний асортимент побутової великогабаритної техніки за критерієм максимуму доходу від її реалізації за наведеними у таблиці параметрами організації торгівлі (грн/шт.):

Вид товару	Закупівельні витрати	Складські витрати	Реалізаційні витрати	Роздрібна ціна
Кухонні плити	5000	100	900	9000
Холодильники	10000	120	1000	15000
Пральні машини	4000	100	800	8000
Посудомийні машини	11000	120	1500	16000
Граничні витрати	900000	13200	125000	

Варіант №17

Задача 1. Цеху металообробки потрібно виконати термінове замовлення на виробництво деталей. Кожна деталь обробляється на 4-х верстатах В-1, В-2, В-3 та В-4. На кожному верстаті може працювати будь-який із чотирьох робочих Р-1, Р-2, Р-3, Р-4, однак кожен з них має на кожному верстаті різний відсоток браку (наведено у таблиці). З документації ВТК (відділу технічного контролю) є дані про відсоток браку кожного робітника кожному верстаті. Необхідно так розподілити робітників по верстатах, щоб сумарний відсоток браку (який дорівнює сумі відсотків браку всіх 4-х робітників) був мінімальним.

Коди верстатів / Коди робочих	В-1	В-2	В-3	В-4
Р-1	1,9	2,2	2,7	2,3
Р-2	2,3	1,8	1,9	2,2
Р-3	2,0	2,4	2,8	2,4
Р-4	2,4	2,1	2,9	1,9

Задача 2. Підприємець планує побудувати бізнес на канцелярських товарах. Підприємець знає, що всі канцелярські товари розподіляються на дві групи – шкільні й офісні, – та розглядає виробництво ручок. Технологія виробництва передбачає закупівлю комплектуючих, пасти, високотехнологічного обладнання, а також найму робочої сили. Складіть місячний план виробництва продукції, який забезпечує максимум доходу від її реалізації, за відомих нормативів витрат ресурсів і прогнозованого їх запасу.

Вид ресурсу	Норми витрат ресурсів на 100 умовних ручок		Запас ресурсу
	офісна	шкільна	
Комплектуючі, кг	3,5	2,8	200
Паста, мл	20	22	1500
Обладнання, верстато-год.	5,0	4,5	320
Трудові ресурси, людино-год.	15	13	480
Дохід від реалізації продукції, грн/шт.	14,70	19,50	

Задача 3. У сільськогосподарському підприємстві відведено два земельних масиви розміром 1000 і 12000 га на посіви зернобобових: сочевиці та гороху. Сільськогосподарське підприємство реалізує зернобобові за закупівельними цінами. Скільки гектарів і на яких масивах підприємство має відвести на кожну культуру, щоб отримати максимальний виторг, якщо за плановим завданням необхідно здати не менше 8 тис. ц сочевиці та 10 тис. ц гороху? Середню урожайність по масивах і закупівельні ціни на зернобобові наведено у таблиці:

Зернобобові культури	Урожайність, ц/га		Закупівельні ціни, грн/ц
	Масив I	Масив II	
Сочевиця	11,5	10,8	1800
Горох	30,6	28,4	1100

Варіант №18

Задача 1. МПП «Меблі для саду» проектує, виготовляє на замовлення і продаж садові меблі. Необхідно запропонувати місячний план виробництва садових меблів трьох видів, який забезпечив б підприємству максимальний дохід від їхньої реалізації. Організація виробництва на підприємстві характеризується такою таблицею:

Сировина для виготовлення меблів	Витрати сировини на виробництво одиниці продукції, кг			Запас сировини, кг
	Стіл	Стілець	Крісло	
Лоза	-	1,9	2,3	200
Штучний ротанг	2,3	2,0	2,1	300
Комплектуючі	0,85	0,78	0,80	100
Дохід від реалізації продукції, грн/шт	1100	820	980	

Задача 2. Підприємству заданий добовий план виробництва продукції за часом і номенклатурою: потрібно випустити 45 одиниць деталей виду 001, 40 одиниць деталей виду 002, випустити 30 одиниць продукції виду 003, випустити 35 деталей продукції виду 004. Продукція виробляється на верстатах 3-х типів. Для кожного верстата відомі технологічні коефіцієнти: продуктивність і витрати сировини на виготовлення продукції в годину одиницю часу. Підприємство працює у двозмінному режимі. Тривалість однієї зміни – 8 годин. Необхідно скласти такий план роботи верстатів (тобто розподілити випуск продукції між верстатами), щоб витрати на виробництво всієї продукції були мінімальні.

Тип верстату	Продуктивність верстатів, шт./год.				Виробничі витрати, грн/год.			
	001	002	003	004	001	002	003	004
Верстат I типу	5	5	3	4	9,0	7,0	8,5	9,0
Верстат II типу	6	2	6	3	8,5	7,5	7,0	8,0
Верстат III типу	4	3	-	3	6,5	6,5	-	6,0

Задача 3. У сільськогосподарському підприємстві відведено два земельних масиви розміром 1000 і 1500 га на посіви зернобобових: сочевиці та нуту. Сільськогосподарське підприємство реалізує зернобобові за закупівельними цінами. Скільки гектарів і на яких масивах підприємство має відвести на кожну культуру, щоб отримати максимальний виторг, якщо за плановим завданням необхідно здати не менше 6 тис. ц сочевиці та 8 тис. ц нуту? Середню урожайність по масивах і закупівельні ціни на зернобобові наведено у таблиці:

Зернобобові культури	Урожайність, ц/га		Закупівельні ціни, грн/ц
	Масив I	Масив II	
Сочевиця	10,5	10,0	1450
Нут	13,5	12,5	1100

Варіант №19

Задача 1. Тваринницька ферма Групи AgroEast розробляє раціон відгодівлі племінної породи корів з двох видів комбікормів: К-І і К-ІІ При відгодівлі кожна тварина має одержати не менше 12 од. білків, 9 од. вуглеводів і 11 од. протеїну. Вартість 1 кг комбікорму першого виду – 8,50 грн., другого – 10,20 грн. Розробіть денний раціон, який має мінімальну вартість, за даними, що наведено у таблиці:

Живильні речовини	Кількість одиниць живильних речовин на 1 кг комбікорму	
	Комбікорм К-І	Комбікорм К-ІІ
Білки	2,35	3,10
Вуглеводи	2,50	2,20
Протеїн	1,55	1,75

Задача 2. Оптимальний план видавництва. Видавничий будинок «Геоцентр-Медіа» видає два журнали: «Автомеханік» і «Інструмент», що друкуються в трьох друкарнях: «Київ-Принт», «Технодрук», «DrukarnyaPlus». Попит на журнал «Автомеханік» складає 12 тисяч примірників, а на журнал «Інструмент», не більше 7,5 тисяч примірників на місяць. Визначте оптимальну кількість видаваних журналів, що забезпечує максимальний виторг від продажів. Загальна кількість годин, відведених для друку, і продуктивність друку 1 тис. примірників обмежені і наведені у таблиці:

Друкарня	Час друку 1 тис. примірників, год.		Фонд робочого часу, год.
	Автомеханік	Інструмент	
Київ-Принт	2,0	1,4	112
Технодрук	4,5	6,1	70
DrukarnyaPlu	5,8	5,5	80
Гуртова ціна, грн/примірник	30,0	35,50	

Задача 3. Підприємство виробляє три моделі електронних реле. Кожна модель вимагає двостадійної збірки. Час, необхідний для збірки на кожній стадії, наведено у таблиці. Устаткування на кожній стадії працює 7,5 годин на день. Менеджер хоче максимізувати прибуток за 5-денний робочий тиждень. Дохід від реалізації одного реле моделі *A* складає 80,0 грн, моделі *B* – 70,0 грн, моделі *C* – 75,0 грн. Підприємство реалізує всю готову продукцію і, крім того, має на наступний тиждень вже оплачене замовлення на 20 реле моделі Р-001, на 10 реле моделі Р-002, 15 реле моделі Р-003. Необхідно розробити план виробництва продукції, який забезпечує підприємству максимальний дохід від реалізації.

Моделі реле	Час збірки, хв.	
	Стадія №1	Стадія №2
Р-001	10,5	20,5
Р-002	11,8	10,6
Р-003	20,0	20,2

Варіант №20

Задача 1. У фермерському господарстві відведено дві земельні ділянки розміром 5000 і 10000 га на посіви кукурудзи та ячменю, але ділянки відрізняються середньою урожайністю, як наведено у таблиці. Скільки гектарів і на яких масивах фермер повинен відвести на кожну культуру, щоб отримати максимальний виторг та виконати планове завдання?

Культура	Урожайність, ц/га		Вартість, грн /ц	Планове завдання, ц
	Ділянка №1	Ділянка №2		
Кукурудза	44,7	40,3	750	1200
Ячмінь	55,4	39,8	600	4800

Задача 2. Плановий відділ малого науково-виробничого підприємства «Електрон» розробляє добовий план виробництва продукції за часом і номенклатурою: потрібно виробити 80 зносостійких деталей виду Зд-1, 50 деталей виду Зд-2, 40 деталей виду Зд-3, 30 деталей виду Зд-4. Продукція виробляється на верстатах 3-х типів. Для кожного верстата відомі технологічні коефіцієнти: продуктивність і витрати сировини на виготовлення продукції в годину одиницю часу. Підприємство працює у двозмінному режимі. Ефективна тривалість однієї робочої зміни – 7,5 годин. Необхідно скласти такий план роботи верстатів (тобто розподілити випуск продукції між верстатами), щоб витрати на виробництво всієї продукції були мінімальні.

Тип верстату	Продуктивність верстатів, шт./год.				Виробничі витрати, грн/год.			
	Зд-1	Зд-2	Зд-3	Зд-4	Зд-1	Зд-2	Зд-3	Зд-4
Верстат I типу	4	5	3	4	8,2	7,5	8,0	9,5
Верстат II типу	6	2	6	5	8,4	9,5	7,8	9,3
Верстат III типу	5	3	4	3	7,5	7,9	8,0	8,5

Задача 3. ХБК готовить до виробництва два види твіду. Виробництво 1 м твіду артикулу А2145 вимагає 0,8 вагарень одиниць сірої вовни, 0,25 – червоної вовни, і 0,2 – зеленої вовни; виробництво 1 м твіду артикулу А2149 вимагає 1,0 вагарень

одиниць сірої вовни, 0,1 – червоної, і 0,4 – зеленої вовни. Умови поставок матеріалів і складські приміщення дозволяють мати наступні місячні запаси вовни: 8000 вагарень одиниць сірої, 2000 – червоної та 3000 вагових одиниць зеленої вовни. Обидва види тканини виготовляються на однакових ткацьких верстатах і швидкість їхнього виробництва однакова – 12 м за годину. Місячний ліміт машинного часу становить 750 машинних годин. Плановий прибуток від реалізації 1 м твіду артикулу А2145 становить 8,50 грн., твіду артикулу А2149 – 7 грн. Комбінат уклав контракт зі своїми постійними замовниками – швейною фабрикою, відповідно до якого обсяг виробництва твіду артикулу А2145 повинен бути не менш 3000 м. Скласти оптимальний місячний план виробництва твіду, що максимізує загальний прибуток від його реалізації.

Варіант №21

Задача 1 Бройлерне господарство налічує 30 000 курчат, для годування яких як кормова добавка використовується суміш, що складається з вапняку, зерна і соєвих бобів, яка має задовольняти певним вимогам. Суміш повинна містити (за вагою): не менше 22% білка; не більше 5% клітковини; не менше 0,8% та не більше 1,2% кальцію. Крім того, частка білка, що забезпечується за рахунок соєвих бобів, не повинна більш ніж удвічі перевищувати частку білка, що забезпечується за рахунок зерна. Тижнева витрата суміші на одне курча – не менше 450 г. Тривалість періоду годівлі – 2 тижні. Відомості про компоненти кормової суміші, включаючи значення їхніх запасів, що використовуються при пробному рішенні, наведено у таблиці:

Сировина для суміші	Вміст інгредієнтів (у кг на 1 кг сировини)			Ціна, грн/кг	Запас сировини, т
	кальцій	білок	клітковина		
Вапняк	0,380	-	-	1,5	2,0
Зерно	0,001	0,120	0,020	6,2	7,5
Соєві боби	0,002	0,420	0,080	5,5	5,0

Необхідно визначити склад кормової суміші (вагу кожного компонента у розрахунку на весь період годування), що відповідає зазначеним вимогам і має мінімальну вартість.

Задача 2. Торговельне підприємство реалізує три групи товарів: бра, лампи настільні, торшери. Визначте плановий обсяг продажу і структуру товарообігу так, щоб дохід торговельного підприємства був максимальним. Планові норми витрат ресурсів, дохід від продажу товарів та обсяг ресурсів задані в таблиці:

Вид ресурсу	Норми витрат ресурсів на одиницю товару			Запас ресурсу
	Бра	Лампа настільна	Торшер	
Робочий час продавців, людино-год.	0,1	3	0,4	1200
Площа торговельних залів, кв. м	0,05	0,2	0,02	100
Площа складських приміщень, кв. м	3	0,02	2	9000
Дохід від реалізації, грн	450	260	550	

Задача 3. Мале приватне підприємство проектує, виготовляє на замовлення і продаж садові меблі. Необхідно запропонувати місячний план виробництва садових меблів трьох видів, який забезпечив би підприємству максимальний дохід від їхньої реалізації. Організація виробництва на підприємстві характеризується такою таблицею:

Сировина для виготовлення меблів	Витрати сировини на виробництво одиниці продукції, кг			Запас сировини, кг
	Столи	Стільці	Крісла-качалки	
Лоза	2,4	1,8	2,2	100
Штучний ротанг	2,3	1,9	2,1	110
Комплектуючі	0,9	0,8	0,85	50
Дохід від реалізації, грн/шт.	1100	700	980	

Варіант №22

Задача 1. Автотранспортне підприємство (АТП 12536) здійснює вантажні перевезення транспортом двох видів за двома напрямами. Необхідно розподілити машини по напрямах так, щоб при мінімальних сумарних експлуатаційних витратах забезпечити перевезення по кожному з напрямів не менше ніж 500 і 4500 од. вантажу відповідно. Дані про організацію процесу перевезень наведено у таблиці:

Вид машини	Кількість машин	Місячний обсяг перевезень однією машиною, од.		Експлуатаційні витрати на 1 машину, грн	
		Напрям I	Напрям II	Напрям I	Напрям II
1	10	150	170	500	520
2	15	200	240	480	450

Задача 2. На меблевій фабриці виготовляється чотири види корпусних меблів: шафа, шафа-купе, комод, тумба. Норми витрат трудових ресурсів, матеріалів і комплектуючих на виробництво одиниці продукції кожного виду наведено у таблиці. Необхідно визначити обсяги виробництва продукції меблевою фабрикою протягом робочого дня, що забезпечують максимальний прибуток від її реалізації. Водночас при плануванні необхідно врахувати обмеження на запаси ресурсів і максимально можливі обсяги виробництва продукції на підприємстві.

Ресурси	Норми витрати ресурсів на одиницю продукції				Запаси ресурсів
	Шафа	Шафа-купе	Комод	Тумба	
Деревина, кв. м	10,40	20,50	4,20	3,50	9000
Дзеркало, кв. м	1,00	4,30	-	-	2700
Комплектуючі, кг	1,80	2,10	0,80	0,65	200
Трудові ресурси, людино-год.	12,00	15,20	10,50	9,80	3850
Граничний обсяг виробництва, шт.	100	90	150	150	
Прибуток від реалізації, грн/шт.	420	650	300	250	

Задача 3. Підприємство «БудТех» спеціалізується на виробництві сухих тонкошарових клейових сумішей. Суміші складаються з мінеральних сполучних, мінеральних заповнювачів та добавок, що модифікують, але відрізняються структурою. Клейова суміш КС-01 містить бензину 45% мінеральних сполучних, 40% мінеральних заповнювачів і 15% добавок. Клейова суміш КС-02 містить бензину 40% мінеральних сполучних, 40% мінеральних заповнювачів і 20% добавок. Суміші реалізуються у мішках по 25 кг за ціною: суміш КС-01 – 115,79 грн, суміш КС-02 – 105,26 грн. Складіть план утворення сумішей, при якому буде отриманий максимальний дохід від реалізації, якщо плановий запас мінеральних сполучних – 100 т, мінеральних заповнювачів – 150 т, добавок, що модифікують, – 60 т.

Варіант №23

Задача 1. На будівництво чотирьох об'єктів цегла надходить із трьох заводів. Заводи мають на складах відповідно 50, 100 і 50 тис. шт. цегли. Об'єкти потребують відповідно 50, 70, 40, 40 тис. шт. цегли. Складіть план перевезень, що мінімізує сумарні транспортні витрати, якщо тарифи (в тис. грн.) наведено у таблиці:

Цегляні заводи	Будівельні об'єкти			
	1	2	3	4
1	2	6	2	3
2	5	2	1	7
3	4	5	7	8

Задача 2. Підприємець розглядає бізнес-ідею «Вироби з дерева для дому», а саме виробництво 4-х видів продукції: декор з дерева, ключниці, штори з дерева і масажери з дерева. Виробництво цієї продукції вимагає закупівлі спеціального обладнання для роботи з деревом, сировини, найму працівників, а також витрат на рекламу. Розробити оптимальний план виробництва на місяць, який максимізує дохід від реалізації

готової продукції за наведених у таблиці технологічних коефіцієнтів і можливостей підприємця.

Вид ресурсів	Витрати ресурсів на одиницю продукції				Запас ресурсів
	Декор	Ключниця	Штора	Масажер	
Сировина, кг	1,3	1,2	5,2	1,3	500
Трудові ресурси, людино-год.	5,0	5,5	9,5	6,0	800
Обладнання, верст.-год.	0,5	0,8	1,2	1,0	320
Витрати на рекламу, грн	15	15	12	14	1000
Дохід від реалізації, грн/шт	100	150	450	180	

Задача 3. МПП спеціалізується на вирощуванні бройлерних кролів й налічує 20 000 кролів, для годування яких як кормова добавка використовується суміш, що складається з вапняку, зерна і соєвих бобів, яка має задовольняти певним вимогам. Суміш має містити (за вагою): не менше 22% білка; не більше 5% клітковини; не менше 0,8% та не більше 1,2% кальцію. Крім того, частка білка, що забезпечується за рахунок соєвих бобів, не повинна більш ніж удвічі перевищувати частку білка, що забезпечується за рахунок зерна. Тижнева витрата суміші на одного кроля – не менше 600 г. Тривалість періоду годівлі – 2 тижні. Необхідно визначити склад кормової суміші (вагу кожного компонента у розрахунку на весь період годування), що відповідає зазначеним вимогам і має мінімальну вартість. Відомості про компоненти кормової суміші, включаючи значення їхніх запасів, що використовуються при пробному рішенні, наведено у таблиці:

Сировина для суміші	Вміст інгредієнтів (у кг на 1 кг сировини)			Ціна, грн/кг	Запас сировини, т
	кальцій	білок	клітковина		
Вапняк	0,350	-	-	1,50	0,5
Зерно	0,001	0,120	0,020	6,40	8,0
Соєві боби	0,002	0,420	0,080	5,10	5,0

Варіант №24

Задача 1. Підприємству заданий добовий план виробництва продукції за часом і номенклатурою: потрібно виробити 60 деталей виду Д-1, 30 деталей виду Д-2, 40 деталей виду Д-3, 35 деталей виду Д-4. Продукція виробляється на верстатах 3-х типів. Для кожного верстата відомі технологічні коефіцієнти: продуктивність і витрати сировини на виготовлення продукції в годину одиницю часу. Підприємство працює у двозмінному режимі. Тривалість однієї зміни – 8 годин. Необхідно скласти такий план роботи верстатів (тобто розподілити випуск продукції між верстатами), щоб витрати на виробництво всієї продукції були мінімальні.

Тип верстату	Продуктивність верстатів, шт./год.				Виробничі витрати, грн/год.			
	Д-1	Д-2	Д-3	Д-4	Д-1	Д-2	Д-3	Д-4
Верстат І типу	4	5	3	4	8,5	7,3	7,5	9,2
Верстат ІІ типу	6	2	6	5	8,5	9,5	7,8	8,3
Верстат ІІІ типу	2	3	4	3	7,8	7,5	8,0	8,5

Задача 2. У сільськогосподарському підприємстві відведено два земельних масиви розміром 800 і 1000 га на посіви зернобобових: сочевиці та нуту. Сільськогосподарське підприємство реалізує зернобобові за закупівельними цінами. Скільки гектарів і на яких масивах підприємство має відвести на кожну культуру, щоб отримати максимальний виторг, якщо за плановим завданням необхідно здати не менше 5 тис. ц сочевиці та 7 тис. ц нуту? Середню урожайність по масивах і закупівельні ціни на зернобобові наведено у таблиці:

Зернобобові культури	Урожайність, ц/га		Закупівельні ціни, грн./ц
	Масив І	Масив ІІ	
Сочевиця	10,5	9,8	1500
Нут	13,5	12,4	1200

Задача 3. На ринку побутової хімії миючі засоби оцінюють за трьома основними показниками: очищувальна властивість, дезінфікуюча властивість і подразнююча дія на шкіру. Для

продажу миючий засіб повинен мати не менше ніж 60 ум. од. очищаючого та не менше 60 ум. од. дезінфікуючих властивостей за шкалою оцінок. Дратівливий вплив на шкіру має бути мінімальним. Підприємство має запаси трьох видів очищувачів з характеристиками у відносних одиницях, які наведено у таблиці:

Очищувачі	Очищувальна властивість	Дезінфікуюча властивість	Подразнююча дія
Поверхнево-активна речовина	85	35	70
Кислота	65	80	65
Окислювач	45	70	20

Розробіть модель складу миючого засобу, що є сумішшю трьох очищувачів і задовольняє вимоги ринку.

Варіант №25

Задача 1. Фахівець планового відділу кондитерської фабрики працює над розширенням асортименту продукції, що виробляється, на наступний місяць з сировини, яка є на підприємстві. Допоможіть скласти план виробництва, що забезпечує фабриці одержання максимального чистого доходу. Запаси та норми витрат кожного виду сировини для виробництва одиниці продукції, а також чистий дохід від реалізації наведено у таблиці:

Вид сировини	Норми витрат сировини на 1 кг продукції					Запаси сировини
	Горіховий дзеньківт	Райський смак	Батончик	Білочка	Ромашка	
Темний шоколад	0,8	0,5	1,0	2,0	-	1410
Світлий шоколад	0,2	0,1	-	-	0,2	149
Цукор	0,3	0,4	0,6	1,3	0,05	820
Карамель	0,2	0,3	-	-	0,5	466
Горіхи	0,9	0,1	0,7	1,5	-	1080
Чистий дохід, грн	1,0	0,7	1,1	2,0	0,6	

Задача 2. Менеджер-координатор аудиторської фірми повинен розподілити аудиторів для роботи на наступний місяць.

Є заявки від 10 клієнтів на 75 аудиторів. В 4-х аудиторських фірмах є 90 аудиторів, 25 «зайвих» аудиторів можна відправити на планове навчання. Аудитори розрізняються по кваліфікації та досвіду роботи. Перш ніж приступити до аудиту конкретної фірми, вони повинні затратити певний час на підготовку та консультації. Менеджер-координатор, з огляду на досвід роботи аудиторів кожної фірми, оцінив час, необхідний «середньому» аудиторові кожної контори для підготовки до аудиту конкретного клієнта. Результати – у таблиці.

Необхідно розподілити аудиторів по фірмах-клієнтах так, щоб сумарні часові витрати на підготовку були мінімальні. Знаки питання в деяких клітках таблиці означають, що аудитори даної контори не мають досвіду роботи в галузі, до якої ставиться даний клієнт, і їх не повинні до нього надсилати.

Аудиторські фірми	Клієнти										Резерв
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
ФінАудит	8	21	15	13	9	17	18	7	26	9	23
Фінанстаун	14	18	17	19	12	6	0	15	24	13	17
Аудитбург	9	15	18	16	16	15	11	13	21	19	25
Нью-Баланс	11	?	14	7	23	9	6	18	?	7	10
Заявки	4	9	2	12	7	6	9	3	18	5	

Задача 3. Тваринницьке господарство спеціалізується на молочному скотарстві. При відгодівлі кожна тварина повинна одержати не менше 11 од. білків, 8 од. вуглеводів і 11 од. протеїну. Для складання раціону використовують два види комбікорму, який пакується у 25-кілограмові мішки. Вартість концентрату «АВА Здорова» – 875 грн., вартість концентрату «Purina» – 500 грн.

Складіть денний раціон поживності, що має мінімальну вартість, за потреб у поживних речовинах, які наведені у таблиці:

Поживні речовини	Кількість одиниць поживних речовин на 1 кг комбікорму	
	АВА Здорова	Purina
Білки	2,1	1,8
Вуглеводи	1,5	1,9
Протеїн	3,5	4,2

Контрольні запитання та завдання до захисту практичної роботи

1. За яких умов можна застосовувати методи лінійного програмування до практичних задач?
2. Яка задача називається оптимізаційною?
3. Дайте визначення поняттю «економіко-математична модель».
4. Сформулюйте алгоритм побудови економіко-математичної моделі задачі лінійного програмування.
5. Наведіть приклади критеріїв оптимізації.
6. Чи може система обмежень економіко-математичної моделі містити рівність? Наведіть приклад, якщо так?
7. Чи може система обмежень економіко-математичної моделі містити рівність? Наведіть приклад, якщо так?
8. Назвіть три складові економіко-математичної моделі задачі про оптимальне використання ресурсів.
9. Що означає: «побудувати цільову функцію»?
10. Що означає: «побудувати систему обмежень»?

Практична робота № 2: Симплексний метод розв'язання задач лінійного програмування

Мета роботи: поглиблення теоретичних знань і формування практичних умінь для розв'язання задач лінійного програмування симплексним методом у середовищі табличного процесора MS Excel

Основні теоретичні відомості

Модель задачі лінійного програмування (ЛП-задачі) може бути записана в одній з трьох форм (табл. 2.1): канонічній, стандартній, загальній.

Таблиця 2.1

Форми запису моделі ЛП-задачі

Канонічна	Стандартна	Загальна
1) Мета задачі		
max Z	*max* Z або *min* Z	*max* Z або *min* Z
2) Обмеження		
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i=\overline{1;m}$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ i=\overline{1;m}$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \begin{Bmatrix} \le \\ \ge \\ = \end{Bmatrix} b_i,\ i=\overline{1;m}$
3) Умови невід'ємності		
Усі змінні $x_j \ge 0,\ j=\overline{1;n}$	Усі змінні $x_j \ge 0,\ j=\overline{1;n}$	Частина змінних $x_j \ge 0,\ j=\overline{1;s},\ s<n$

Канонічна модель ЛП-задачі у векторному вигляді:

$$Z = C \cdot X \to \max \qquad (2.1)$$

$$X_1 \cdot x_1 + X_2 \cdot x_2 + ... + X_n \cdot x_n = X_0 \qquad (2.2)$$

$$X \geq 0, \tag{2.3}$$

де $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$ – вектор коефіцієнтів цільової функції;

$X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – вектор невідомих змінних;

$C \cdot X$ – скалярний добуток векторів *C* та *X*;

$X_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{pmatrix}$,..., $X_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix}$, $X_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$ – вектори коефіцієнтів при змінних (технологічних коефіцієнтів) і вільних членів.

Векторна нерівність (2.3) означає, що всі компоненти вектору *X* невід'ємні, тобто $x_j \geq 0,\ j = \overline{1;n}$.

Планом (= ***допустимим розв'язком***) ЛП-задачі називається вектор $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, що задовольняє умовам (2.2) і (2.3).

План $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ називається ***опорним*** (= ***допустимим базисним розв'язком***), якщо вектори, що входять до розкладання (2.2) є лінійно незалежними.

Кількість додатних компонент опорного плану не може перевищувати *m* (розмірність векторів X_j = кількість обмежень задачі).

Опорний план називається ***невиродженим***, якщо він містить *m* додатних компонент, в іншому випадку план – ***вироджений***.

Оптимальним планом (= ***оптимальним розв'язком***) ЛП-задачі називається опорний план $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, при якому цільова функція (2.1) набуває оптимального значення (*max Z* або *min Z*).

Структурно-логічна схема (рис. 2.1) візуалізує наведені означення.

План	⇔	Виконуються умови (2) і (3)
Опорний план	⇔	Кількість додатних компонент $\leq m$
Невироджений опорний план	⇔	Кількість додатних компонент $= m$
Вироджений опорний план	⇔	Кількість додатних компонент $< m$
Оптимальний план	⇔	План опорний і z = optimum

Рис. 2.1. Структурно-логічна схема означень планів ЛП-задачі

Для розв'язання загальної задачі лінійного програмування у 1947 році Джордж Б. Данциг (на той час входив у дослідницьку групу ВПС США, відому як проект SCOOP – Наукове обчислення оптимальних програм) розробив так званий симплексний метод [4].

Симплексний метод (simplex method) – ефективний метод перебору опорних планів ЛП-задачі з метою знаходження її оптимального плану. Симплексний метод або його подальші модифікації лежать в основі всіх комп'ютерних алгоритмів для розв'язання ЛП-задач. Алгоритм симплексного методу схематично представлено на рис. 2.2.

Отже, процес розв'язання задачі симплексним методом має *ітераційний характер*: однотипні обчислювальні процедури (ітерації) повторюються у певній послідовності доти, доки, починаючи з певного опорного плану, за скінченну кількість кроків, не буде отримано оптимальний план задачі або з’ясовано, що його не існує.

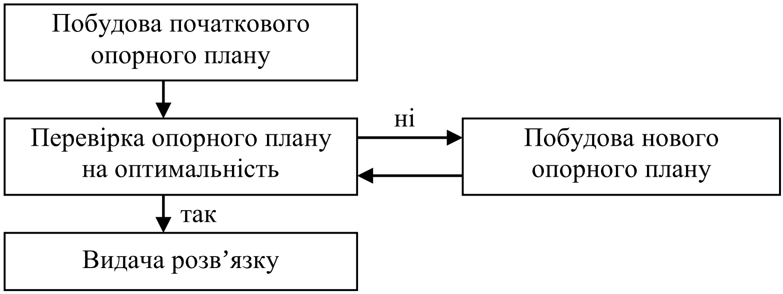


Рис. 2.2. Алгоритм розв’язання ЛП-задачі симплексним методом

Алгоритм симплексного методу розв’язання задачі лінійного програмування в симплексних таблицях

1. Приведення системи обмежень ЛП-задачі до канонічного вигляду

2. Побудова початкового опорного плану

3. Перевірка оптимальності опорного плану в симплексній таблиці

3.1. Побудова симплексної таблиці

3.2. Перевірка опорного плану за критерієм оптимальності

Щоб опорний план задачі на відшукання *максимуму* був оптимальним, необхідно і достатньо, щоб його оцінки були Δ_j невід’ємні:

$$Z \to \max \Leftrightarrow \Delta_j = z_j - c_j \geq 0 \qquad (2.4)$$

Щоб опорний план задачі на відшукання *мінімуму* був оптимальним, необхідно та достатньо, щоб його оцінки Δ_j були недодатні:

$$Z \to \min \Leftrightarrow \Delta_j = z_j - c_j \leq 0 \qquad (2.5)$$

Умови (2.4) і (2.5) називаються ***умовами оптимальності*** опорного плану задачі лінійного програмування.

Якщо хоча б одна оцінка не задовольняє умові оптимальності, то опорний план неоптимальний і необхідно побудувати новий план у новому базисі.

4. Побудова нового базису

4.1. Вибір вектора, що вводиться в базис (вибір спрямовуючого стовпця)

Вибір вектора, що вводиться в базис, здійснюється:

– за мінімальним значенням від'ємної оцінки, якщо задача розв'язується на відшукання максимуму:

$$\min\{\Delta_j, \Delta_j < 0\}, \quad \textit{якщо} \quad Z \to \max \tag{2.6}$$

– за максимальним значенням додатної оцінки, якщо задача розв'язується на відшукання мінімуму:

$$\max\{\Delta_j, \Delta_j > 0\}, \quad \textit{якщо} \quad Z \to \min \tag{2.7}$$

4.2. Вибір вектора, що виводиться з базису (вибір спрямовуючого рядка)

Вибір вектору, що виводиться, *завжди* здійснюється по мінімальному значенню оцінного відношення:

$$\theta = \min\{\theta_i\} = \min\left\{\frac{x_{i0}}{x_{ij}}, x_{ij} > 0\right\}, \tag{2.8}$$

де x_{i0} – компоненти вектора X_0;

x_{ij} – *додатні* компоненти вектору, що вводиться в базис.

5. Побудова нового опорного плану в новій симплексній таблиці

6. Перевірка правильності виконаних обчислень

Контроль обчислень здійснюється шляхом розрахунку значень оцінок Δ_j в симплексній таблиці як скалярних добутки векторів:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Z}(X_0) = Z_0 = C_б \cdot X_0; \\ &\Delta_j = Z_j - C_j = C_б \cdot X_j - c_j. \end{aligned} \tag{2.9}$$

де $C_б \cdot X_0$, $C_б \cdot X_j$ – скалярні добутки відповідних векторів.

Ідентифікація оптимальних розв'язків ЛП-задачі за симплексними таблицями

1. Якщо серед оцінок Δ_j оптимального плану нульові тільки оцінки, відповідні базисним векторам, то оптимальний план – *єдиний*.

2. Якщо нульова оцінка оптимального плану відповідає вектору, що не входить в базис, то оптимальний план – не єдиний (*альтернативний оптимум*).

3. Якщо всі компоненти направляючого стовпця не додатні, то задача лінійного програмування *не має оптимального розв'язку через необмеженість цільової функції* ($Z \to \infty$).

4. Якщо при побудові симплексної таблиці один з рядків з'явився у вигляді а) або б) (рис. 2.5), то задача лінійного програмування *не має розв'язків через несумісність системи обмежень* ($Z = \varnothing$).

X_0	X_1	X_2	…	X_n
$x_{i0} > 0$	0	0	…	0

а)

X_0	X_1	X_2	…	X_n
$x_{i0} > 0$	$x_{i1} < 0$	$x_{i2} < 0$	…	$x_{in} < 0$

б)

Рис. 2.5. Ілюстрація відсутності розв'язків ЛП-задачі

Розв'язання типових задач

Задача 5.1. Розв'язати симплексним методом задачу 1.1 про оптимальне використання ресурсів: знайти такий план виробництва продукції $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, за якого досягається максимальне значення лінійної функції доходу від реалізації:

$$Z = 300x_1 + 250x_2 + 450x_3 \to \max$$

за обмежень

$$\begin{cases} 15x_1 + 20x_2 + 25x_3 \le 1200; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2{,}5x_3 \le 150; \\ 35x_1 + 60x_2 + 60x_3 \le 3000; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$$

Розв'язання

1. Приведення системи обмежень до канонічного вигляду

Введемо додаткові невід'ємні змінні у кожну нерівність системи обмежень:

$$\begin{cases} 15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + x_4 = 1200; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2{,}5x_3 + x_5 = 150; \\ 35x_1 + 60x_2 + 60x_3 + x_6 = 3000; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1;6}.$$

Тоді цільова функція набуде вигляду:

$$Z = 300x_1 + 250x_2 + 450x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to \max$$

2. Побудова початкового опорного плану

Запишемо систему обмежень у векторній формі:

$$X_1 \cdot x_1 + X_2 \cdot x_2 + X_3 \cdot x_3 + X_4 \cdot x_4 + X_5 \cdot x_5 + X_6 \cdot x_6 = X_0$$

$$X \ge 0,$$

де $X_1 = \begin{pmatrix} 15 \\ 2 \\ 35 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 20 \\ 3 \\ 60 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 25 \\ 2{,}5 \\ 60 \end{pmatrix}$, $X_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$X_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, X_0 = \begin{pmatrix} 1200 \\ 150 \\ 3000 \end{pmatrix};$

$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ – вектор невідомих змінних.

Одиничні ортогональні вектори X_4, X_5, X_6 виберемо як базис, отже, змінні x_4, x_5, x_6 – базисні змінні.

Тоді вектори X_1, X_2, X_3 – вільні вектори, а змінні x_1, x_2, x_3 – вільні змінні.

Прирівняємо вільні змінні до нуля: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, тоді $x_4 = 1200, x_5 = 150, x_6 = 3000$.

Отже, початковий опорний план:

$$X_{op}^0 = (0;0;0;1200;150;3000),\ Z_0 = 0.$$

Отриманий план невироджений, оскільки містить 3 = m додатних компонент.

3. ***Перевірка оптимальності опорного плану***

3.1. Побудова симплексної таблиці

Розв'язання задачі здійснюється в середовищі табличного процесора MS Excel (рис. 2.3). Заповнення першої симплексної таблиці здійснюється так:

– у стовпці «***і***» записуються номери рядків 1, 2, 3, ..., *m*, *m+1*, де *m* – кількість обмежень;

– у стовпці «***Базис***» записуються в заданому порядку базисні вектори: X_1, X_2, X_3;

– у стовпці «$\boldsymbol{C_б}$» записуються коефіцієнти цільової функції при базисних змінних: 0,0,0.

– у стовпці «$\boldsymbol{X_0}$» записуються компоненти вектору X_0, тобто первинний опорний план, у цьому ж стовпці у результаті обчислень в останній симплексній таблиці буде отримано оптимальний план X*.

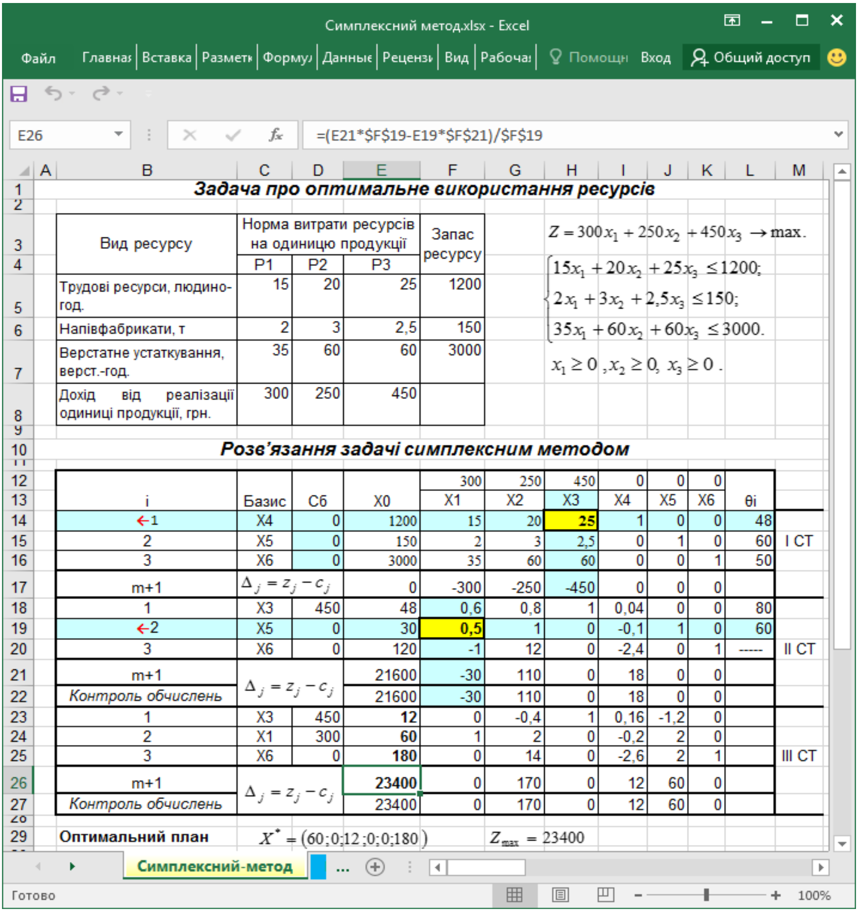
– у стовпцях «$\boldsymbol{X_1}$**,** $\boldsymbol{X_2}$**,** $\boldsymbol{X_3}$**,** $\boldsymbol{X_4}$**,** $\boldsymbol{X_5}$**,** $\boldsymbol{X_6}$» записуються компоненти відповідних векторів, а над стовпцями ─ коефіцієнти цільової функції при відповідних змінних;

– у стовпці «$\boldsymbol{\Theta_i}$» ─ розраховується оцінне відношення на наступній ітерації;

– у рядку «***m*+1**» ─ у стовпці «$\boldsymbol{X_0}$» записується значення цільової функції, яке вона набуває при знайденому опорному плані; у стовпцях X_j, $j = \overline{1;6}$ значення оцінок Δ_j цього плану. Рядок *m*+1 називається ***індексним***, або ***оцінюючим рядком***.

Значення оцінок Δ_j в симплексній таблиці визначаються за формулами (2.9), які у подальших симплексних таблицях використовуються для *контролю обчислень*.

Для базисних векторів оцінки Δ_j завжди дорівнюють 0.



Задача про оптимальне використання ресурсів

Вид ресурсу	Норма витрати ресурсів на одиницю продукції			Запас ресурсу
	P1	P2	P3	
Трудові ресурси, людино-год.	15	20	25	1200
Напівфабрикати, т	2	3	2,5	150
Верстатне устаткування, верст.-год.	35	60	60	3000
Дохід від реалізації одиниці продукції, грн.	300	250	450	

$$Z = 300x_1 + 250x_2 + 450x_3 \to \max.$$

$$\begin{cases} 15x_1 + 20x_2 + 25x_3 \le 1200; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2{,}5x_3 \le 150; \\ 35x_1 + 60x_2 + 60x_3 \le 3000. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Розв'язання задачі симплексним методом

i	Базис	Сб	X0	X1	X2	X3	X4	X5	X6	θi	
				300	250	450	0	0	0		
←1	X4	0	1200	15	20	25	1	0	0	48	
2	X5	0	150	2	3	2,5	0	1	0	60	I СТ
3	X6	0	3000	35	60	60	0	0	1	50	
m+1	$\Delta_j = z_j - c_j$		0	-300	-250	-450	0	0	0		
1	X3	450	48	0,6	0,8	1	0,04	0	0	80	
←2	X5	0	30	0,5	1	0	-0,1	1	0	60	
3	X6	0	120	-1	12	0	-2,4	0	1	-----	II СТ
m+1	$\Delta_j = z_j - c_j$		21600	-30	110	0	18	0	0		
Контроль обчислень			21600	-30	110	0	18	0	0		
1	X3	450	12	0	-0,4	1	0,16	-1,2	0		
2	X1	300	60	1	2	0	-0,2	2	0		
3	X6	0	180	0	14	0	-2,6	2	1		III СТ
m+1	$\Delta_j = z_j - c_j$		23400	0	170	0	12	60	0		
Контроль обчислень			23400	0	170	0	12	60	0		

Оптимальний план $X^* = (60;0;12;0;0;180)$ $Z_{\max} = 23400$

Рис. 2.3. Розв'язання ЛП-задачі симплексним методом у MS Excel

3.2. Перевірка опорного плану за критерієм оптимальності

Згідно з критерієм оптимальності опорний план задачі на відшукання максимуму буде оптимальним тоді і тільки тоді, коли в індексному рядку всі оцінки $\Delta_j \ge 0$ (2.4), але в задачі всі початкового опорного плану $\Delta_j \le 0$, тому опорний план неоптимальний і його треба поліпшити. Перехід до наступного кроку.

4. Побудова нового базису

4.1. Вибір вектора, що вводиться в базис (вибір спрямовуючого стовпця)

Оскільки задача розв'язується на відшукання максимуму, то вибір вектору, що вводиться в базис, здійснюється за мінімальним значенням від'ємної оцінки. Згідно з (2.6) знаходимо $\min\{-300,-250,-450\} = -450$, тому вектор X_3 вводиться в базис, тобто стовпець X_3 – спрямовуючий, його доцільно виділити заливкою (і стрілкою ↑ у паперовому варіанті).

4.2. Вибір вектора, що виводиться з базису (вибір спрямовуючого рядка)

Вибір вектора, що виводиться з базису, *завжди* здійснюється по мінімальному значенню оцінного відношення (2.8), тобто:

$$\theta = \min\{\theta_i\} = \min\left\{\frac{1200}{25}, \frac{150}{2{,}5}, \frac{3000}{60}\right\} = \min\{48{,}60{,}50\} = 48\,.$$

Отже, вектор X_4 виводиться з базису, тобто 1-й рядок – спрямовуючий, його доцільно виділити заливкою (і стрілкою ← у паперовому варіанті).

На перетині 1-го рядка і стовпця X_3 стоїть ключовий елемент, його доцільно виділити – $\boxed{25.}$

Отже, отриманий новий базис: $\{X_3, X_5, X_6\}$.

5. Побудова нового опорного плану

Для отримання нового опорного плану будується нова симплексна таблиця.

Алгоритм переходу до нової симплексної таблиці

1) У стовпець «*Базис*» записуються в заданому порядку нові базисні вектори.

2) У стовпець «$C_б$» записуються коефіцієнти цільової функції при нових базисних змінних.

3) На місці ключового елементу записується 1, вся решта елементів спрямовуючого стовпця замінюється нулями. Аналогічно заповнюються стовпці, відповідні решті базисних векторів.

4) Усі елементи спрямовуючого рядка діляться на ключовий елемент.

5) Уся решта елементів x'_{ij} симплексної таблиці розраховується за формулою повних виключень Жордана-Гауса:

$$x'_{ij} = \frac{x_{ij} \cdot x_{lk} - x_{lj} \cdot x_{ik}}{x_{lk}}, \tag{2.10}$$

яку зручно застосовувати з використанням мнемонічного правила прямокутника (рис. 2.4).

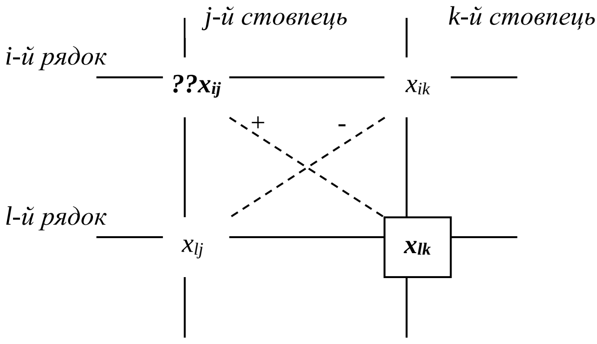


Рис. 2.4. Правило прямокутника

6. Перевірка правильності виконаних обчислень

Перевірка правильності розрахунків за формулами контролю (2.9) у рядку *Контроль обчислень* підтвердила правильність розрахунків.

Отже, у 2-й симплексній таблиці отримано новий опорний план:

$$X_{op}^{1} = (0;0;48;0;30;120),\ Z_1 = 21600\,.$$

Згідно з ітераційним характером симплексного методу (див. рис. 2.2) подальші ітерації повторюються (а саме, кроки алгоритму симплексного методу з 3-го по 6-й) доти, доки за скінчену кількість кроків не буде отримано оптимальний план задачі або з'ясовано, що його не існує.

3*. Перевірка оптимальності опорного плану

У 2-й симплексній таблиці в індексному рядку є одна від'ємна оцінка, тому цей опорний план не оптимальний. Переходимо до наступного кроку.

4*. *Побудова нового базису*

4.1* ***Вибір вектора, що вводиться в базис (вибір спрямовуючого стовпця)***

Оскільки від'ємна оцінка Δ_1 = -30 – єдина, то вектор X_1 вводиться в базис, тобто стовпець X_1 – спрямовуючий.

4.2* ***Вибір вектора, що виводиться з базису (вибір спрямовуючого рядка)***

У 2-й симплексній таблиці $\theta = \min\{\theta_i\} = \min\left\{\frac{48}{0,6}, \frac{30}{0,5}\right\} = \min\{80,60\} = 60$, тому вектор X_5 виведемо з базису, тобто 2-й рядок – спрямовуючий.

На перетині 2-й рядка і стовпця X_5 розташовано ключовий елемент – $\boxed{0{,}5}$

Отже, отриманий новий базис: $\{X_3, X_1, X_6\}$.

5* *Побудова нового опорного плану.*

Для отримання нового опорного плану побудуємо третю симплексну таблицю за алгоритмом, наведеним вище (див. рис. 2.3).

6* *Перевірка правильності виконаних обчислень*

Перевірка правильності розрахунків у рядку *Контроль обчислень* підтверджує відсутність помилок (див. рис. 2.3).

У 3-й симплексній таблиці отримано новий опорний план, який є оптимальним, оскільки всі оцінки індексного рядка – невід’ємні:

$$X^* = X_{op}^2 = (60;0;12;0;0;180),\ Z_{\max} = Z_2 = 23400.$$

Отриманий оптимальний план – невироджений, оскільки містить 3 = m додатних компонент.

Економічний аналіз оптимального плану задачі про оптимальне використання ресурсів

Згідно з оптимальним планом підприємству треба виробляти:

– продукцію P_1 в обсязі 60 од. ($x_1^* = 60$) – це рентабельний вид продукції;

– продукцію P_2 не виробляти ($x_2^* = 0$) – це нерентабельний вид продукції;

– продукцію P_3 в обсязі 12 од. ($x_3^* = 12$) – це рентабельний вид продукції;

При реалізації оптимального плану виробництва ресурси будуть використані так:

– трудові ресурси використовуються повністю (залишок дорівнює $x_4^* = 0$) – це дефіцитний ресурс;

– напівфабрикати використовуються повністю (залишок дорівнює $x_5^* = 0$) – це дефіцитний ресурс;

– верстатне устаткування використовується не повністю (залишок дорівнює $x_6^* = 180$ верст.-год.) – це надмірний ресурс;

За реалізації оптимального плану підприємство отримає дохід від реалізації продукції: $Z_{\max} = 23400$ грн.

Розв'язання ЛП-задачі симплексним методом у середовищі табличного процесора MS Excel

Для розв'язання ЛП-задачі симплексним методом на листі MS Excel формується таблиця вихідних даних:

– матриця коефіцієнтів системи обмежень у масиві **A5:F7**;

– вектор вільних членів системи обмежень у масиві **F5:F7;**

– вектор коефіцієнтів цільової функції в масиві **C8:E8**.

Далі відповідно до правил заповнення І симплексної таблиці у діапазоні **B12:K17** будується та заповнюється І таблиця з використанням посилань на вихідні данні. Рядок m+1 заповнюється за формулами (2.9):

– у комірку **E17** вводиться формула **=СУММПРОИЗВ($D$14:$D$16;E14:E16)**;

– у комірку **F15** вводиться формула **=СУММПРОИЗВ ($D$14:$D$16;F14:F16)-F12** і копіюється у решту комірок цього рядка.

Після визначення за мінімальною від'ємною оцінкою $(Z \to \max)$ спрямовуючого стовпця **H** у комірку **K12** вводиться формула обчислення оцінного відношення **=E14/H14**, яка копіюється у решту комірок цього стовпця. На підставі мінімального значення оцінного відношення 48 (**L14)** визначається ключовий елемент ***25*** **(H12)**.

Друга симплексна таблиця заповнюється відповідно до ***алгоритму переходу до нової симплексної таблиці*** (с. 74):

– стовбці «*Базис*», «$C_{Базис}$» заповнюються за допомогою посилань на відповідні комірки;

– у комірку **E18** вводиться формула **= E14/$H$14** (це направляючий рядок I симплексної таблиці) та копіюється у решту комірок цього рядка;

– у комірку **E19** вводиться формула **=(E15*$H$14-E14*$H$15)/$H$14** та копіюється у решту комірок цього рядка;

– у комірку **E20** копіюється формула **=(E16*$H$14-E15*$H$15)/$H$14**, у якій перетворений другий добуток у дужках **E1<u>5</u>*$H$1<u>5</u>** замінюється на **E1<u>4</u>*$H$1<u>6</u>**; отримана формула **=(E16*$H$14-E14*$H$16)/$H$14** копіюється у решту комірок цього рядка;

– аналогічно заповнюються комірки m+1-го рядка;

– рядок *Контроль обчислень* заповнюється за формулами контролю (2.9), тобто аналогічно рядку m+1 першої симплексної таблиці.

Аналогічно виконуються подальші ітерації до отримання оптимального плану. Згідно з критерієм оптимальності у діапазоні **E23:E25** отримано компоненти оптимального плану $X^* = (60;0;12;0;0;180)$, а в комірці **E26** – максимальне значення цільової функції $Z_{\max} = 23400$ (див. рис. 2.3).

Для перевірки отриманого розв'язку, а також проведення післяоптимізаційного аналізу розв'язку задачі про оптимальне використання ресурсів здійснюється розв'язок задачі за допомогою надбудови **Пошук рішення**.

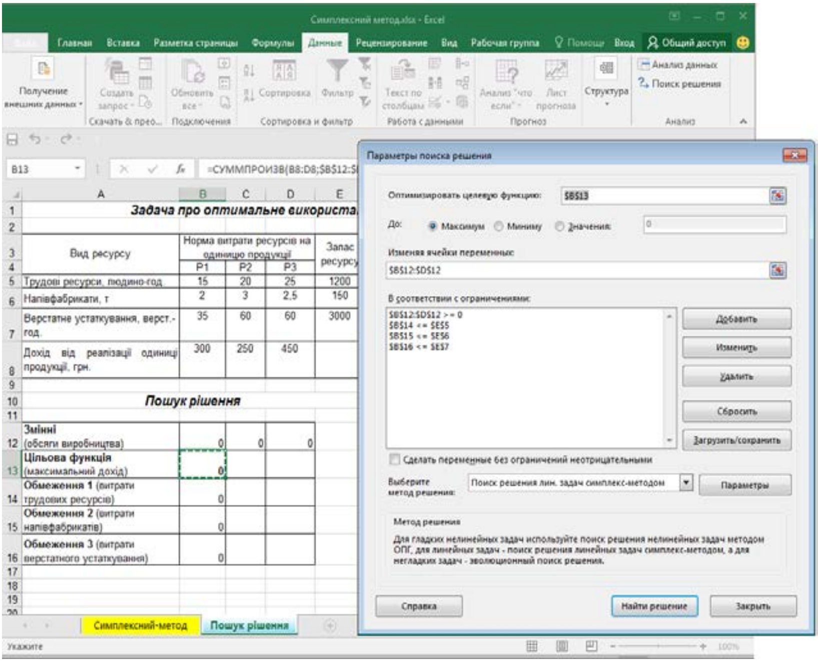
Розв'язання ЛП-задачі з використанням надбудови «Пошук рішення»

1. Формування таблиці вихідних даних на новому аркуші MS Excel (лист назвати: ***Пошук рішення***) аналогічно рис. 2.3.

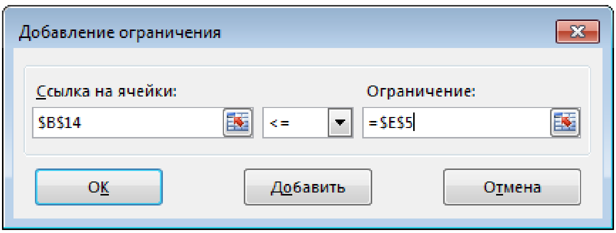
2. Формування економіко-математичної моделі задачі

Для формування економіко-математичної моделі (рис. 2.4):

– у діапазон **B12:D12** вводяться початкові значення невідомих змінних x_1, x_2, x_3: 0, 0, 0;



а) діалогове вікно «Параметри пошуку рішення»



б) діалогове вікно «Додавання обмеження»

Рис. 2.4. Розв’язання ЛП-задачі з використанням надбудови «Пошук рішення»

– у комірку **B13** вводиться цільова функція, тобто формула **=СУММПРОИЗВ(B8:D8;$B$12:$D$12)**;

– у комірку **B14** вводиться ліва частина 1-го обмеження, тобто формула **=СУММПРОИЗВ(B5:D5;$B$12:$D$12)**, яка копіюється у решту комірок, що відповідають обмеженням моделі.

3. Установка надбудови **Пошук рішення**

Для розв’язання задачі за сформованою моделлю в меню **Дані** обирається надбудова **Пошук рішення.**

Якщо надбудова **Пошук рішення** в меню **Дані** відсутня, то в меню **Файл** обирається пункт **Параметри,** у вікні **Параметри Excel** обирається **Надбудови** і у полі **Управління** – *Надбудови Excel* натиснути **Перейти**, у вікні діалогу **Надбудови** зі списку надбудов обрати – **Пошук рішення**).

4. Заповнення вікна діалогу **Параметри пошуку рішення**:

– **Оптимізувати цільову функцію**: введіть посилання на комірку, де введена цільова функція (**B13**);

– **До**: згідно з умовою задачі відзначається відповідна мета (за умовами задачі – *Максимум*);

– **Змінюючи комірки змінних**: установити курсор на поле й ввести посилання на діапазон невідомих змінних x_1, x_2, x_3 **(B12:D12);**

– **У відповідності до обмежень**: поставити курсор на поле і натиснути кнопку **Додати**. З’явиться вікно діалогу **Додавання обмеження:**

у поле **Посилання на комірки** ввести посилання на комірку, де введена ліва частина 1-го обмеження (**B14)**;

вибрати знак обмеження зі списку відповідно до моделі ≤;

у поле **Обмеження** ввести посилання на комірку, де введена права частина 1-го обмеження **(E5)**;

натиснути кнопку **Додати;**

аналогічним чином ввести послідовно всі обмеження;

натиснути кнопку **Додати**;

ввести умови невід’ємності змінних: в поле **Посилання на комірки** ввести посилання на діапазон невідомих змінних (**B12:D12)**, обрати знак $\geq$, у поле **Обмеження** ввести 0; введення умов невід’ємності змінних можна зробити в інший спосіб: у вікні діалогу **Параметри пошуку рішення** встановити прапорець **Зробити змінні без обмежень невід'ємними;**

натиснути кнопку **ОК;**

– з'явиться вікно діалогу **Параметри пошуку рішення;**

– у полі **Оберіть метод рішення** обрати **Пошук рішення лінійних задач симплекс-методом;**

– натиснути кнопку **Знайти рішення;**

– з'явиться вікно **Результати пошуку рішення**, яке містить інформацію про результати розв'язання (рис. 2.5):

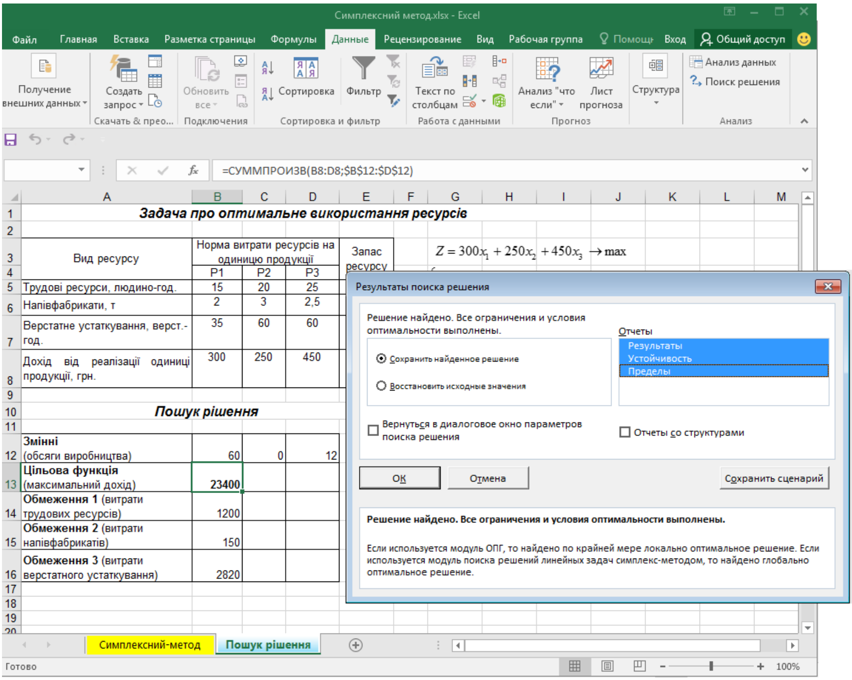


Рис. 2.5. Результати пошуку рішення

якщо отримано повідомлення **«Рішення знайдено. Всі обмеження і умови оптимальності виконано»**, то задача лінійного програмування має оптимальний розв'язок, тому далі відзначити **Зберегти знайдене рішення** та всі три звіти **Результати**, **Стійкість**, **Границі** (для отримання звітів на окремих листах), натиснути **ОК;** якщо задача має не єдиний розв'язок (альтернативний оптимум), то повторні запуски програми **Пошук рішення** дадуть інші оптимальні плани, при цьому значення цільових функцій залишатимуться незмінними;

якщо отримано повідомлення **«Значення цільової функції не сходяться»**, то ЛП-задача не має оптимального розв'язку через необмеженість цільової функції ($z \to \infty$);

якщо отримано повідомлення **«У ході пошуку не вдалося знайти допустимого розв'язку»**, то ЛП-задача не має розв'язків через несумісність системи обмежень (z = Ø).

Зауваження. Повідомлення про відсутність розв'язків можуть з'явитися й у разі технічної помилки. У такому випадку необхідно ретельно перевірити вихідні дані задачі, формат комірок, формули моделі та параметри **Пошуку рішення** і запустити програму повторно.

Отже, в комірках **B12:D12** отримано значення основних змінних оптимального плану $x_1 = 60$ $x_2 = 0$, $x_3 = 12$, в комірці **B13** – максимальне значення цільової функції $Z_{\max} = 23400$, в комірках **B14:B16** – значення лівих частин системи обмежень, тобто величини витрат ресурсів.

Звіт про результати (рис. 2.6) містить три таблиці: у 1-й наведено відомості про цільову функцію (вихідне значення і отримане у результаті розв'язання задачі), у 2-й – значення основних змінних (вихідні та отримані в результаті розв'язання задачі), у 3-й – результати оптимального рішення для обмежень, у тому числі інформацію про параметри обмежень: **Стан** і **Допуск**. Стан набуває значення «*Прив'язка*», якщо обмеження, що вводяться, збігаються з обмеженнями, отриманими у результаті розв'язку, та значення «*Без прив'язки*» в іншому випадку. За значеннями стовпця **Допуск** можна зробити висновок про додаткові змінні задачі (залишки ресурсів). У задачі трудові ресурси і напівфабрикати були використані повністю (значення в стовпці Допуск дорівнюють 0), верстатне устаткування використано не повністю (невикористаними виявилися 180 верст.-год).

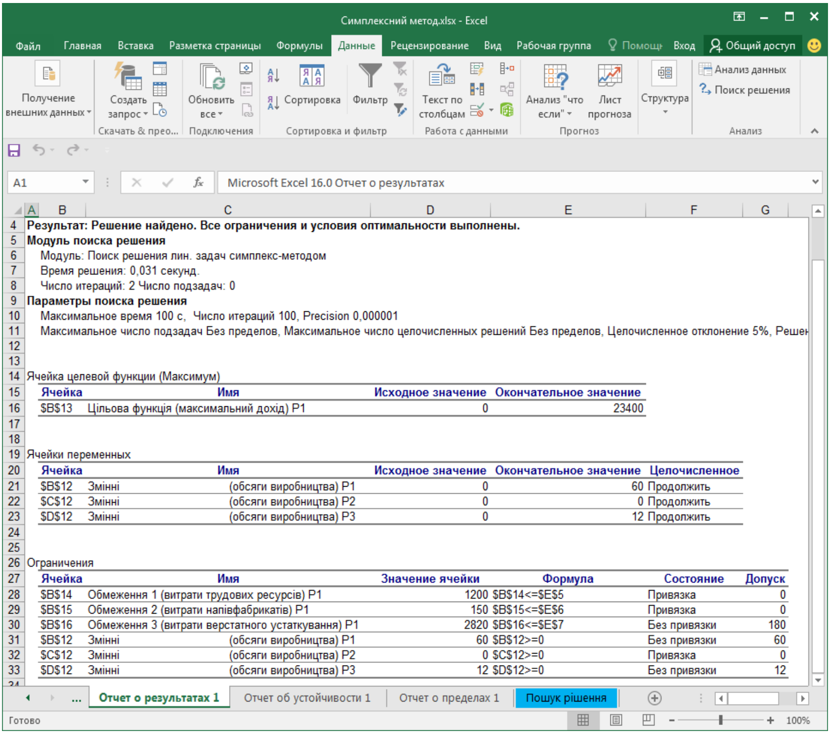
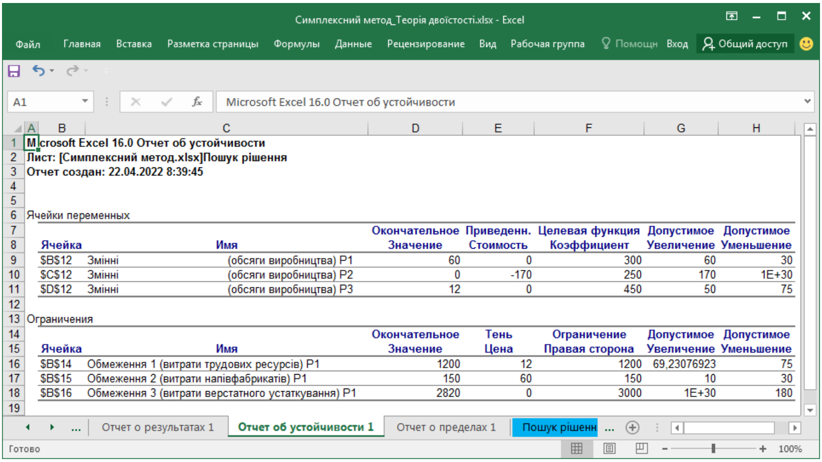


Рис. 2.6. Звіт про результати

Звіт про стійкість (рис. 2.7) містить дві таблиці: **Комірки змінних** та **Обмеження**. Перша таблиця, окрім остаточних значень основних змінних, містить інформацію щодо допустимого збільшення та зменшення коефіцієнтів цільової функції за умови, що структура оптимального плану не зміниться. У другій таблиці аналогічна інформація щодо обмежень. Стовпці **Приведена вартість** і **Тіньова ціна** містять так звані двоїсті оцінки, що детально розглядається у наступній темі (Практична робота №3).



Microsoft Excel 16.0 Отчет об устойчивости
Лист: [Симплексний метод.xlsx]Пошук рішення
Отчет создан: 22.04.2022 8:39:45

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$12	Змінні (обсяги виробництва) P1	60	0	300	60	30
$C$12	Змінні (обсяги виробництва) P2	0	-170	250	170	1E+30
$D$12	Змінні (обсяги виробництва) P3	12	0	450	50	75

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$14	Обмеження 1 (витрати трудових ресурсів) P1	1200	12	1200	69,23076923	75
$B$15	Обмеження 2 (витрати напівфабрикатів) P1	150	60	150	10	30
$B$16	Обмеження 3 (витрати верстатного устаткування) P1	2820	0	3000	1E+30	180

Рис. 2.7. Звіт про стійкість

Звіт про границі (рис. 2.8) містить інформацію про те, у яких межах значення комірок, що змінюються, можуть бути збільшені або зменшені без порушення обмежень задачі. Для кожної комірки, що змінюється, цей звіт містить оптимальне значення, а також найменші значення, які комірка може набувати без порушення обмежень.

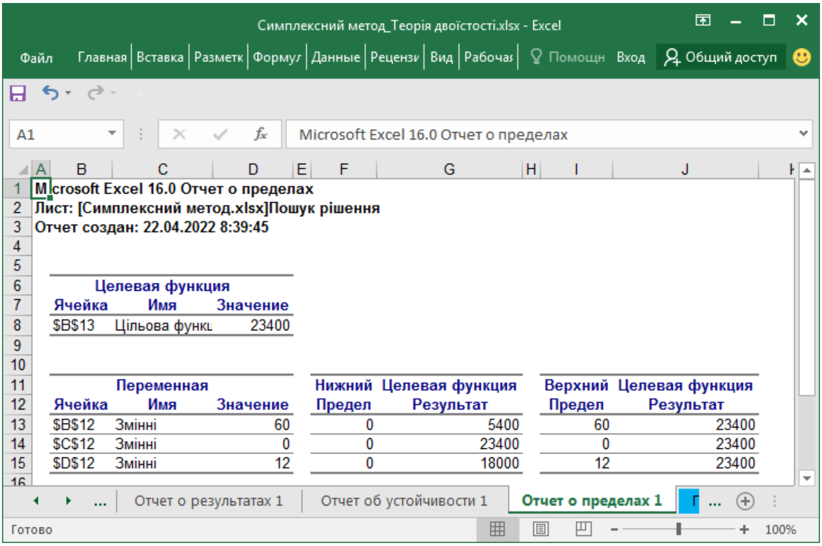


Рис. 2.8. Звіт про границі

За збереження книги Excel після пошуку рішення всі значення, які було введено у вікнах діалогу **Пошук рішення**, зберігаються разом із даними робочого листа. З кожним робочим листом у робочій книзі можна зберегти набір значень параметрів **Пошуку рішення**. Кнопка **Зберегти сценарій** вікна **Результати пошуку рішення** (див. рис. 2.5) дозволяє зберегти сценарій поточної моделі. Усі сценарії доступні у **Диспетчері сценаріїв**, який відкривається командою **Дані → Прогноз → Аналіз що якщо → Диспетчер сценаріїв**.

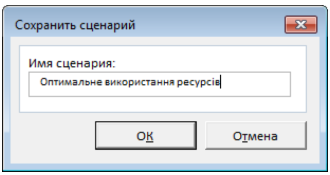


Рис. 2.9. Діалогове вікно Зберегти сценарій

Завдання до практичної роботи № 2

Згідно з варіантом (табл. 2.2), необхідно:

1) розв'язати задачу лінійного програмування симплексним методом;

2) перевірити отриманий розв'язок шляхом розв'язання задачі за допомогою опції **Пошук рішення** MS Excel.

Таблиця 2.2

Завдання до практичної роботи № 2: Симплексний метод розв'язання задач лінійного програмування

Варіант №1 $z=10x_1+5x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3 \le 5 \\ 5x_1+x_2-x_3 \le 4 \\ 8x_1 \le 5 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$	**Варіант №2** $z=x_1-2x_2-3x_3 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3 \le 2 \\ -2x_1-3x_2+4x_3 \le 1 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$
Варіант №3 $z=x_1-x_2-3x_3 \to \min$ $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3 \le 1 \\ 4x_1+2x_2-x_3 \le 2 \\ 3x_1+x_3 \le 5 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$	**Варіант №4** $z=x_1-4x_2-2x_3 \to \min$ $\begin{cases} 2x_1-2x_3 \le 3 \\ 3x_1+x_2-x_3 \le 6 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$
Варіант №5 $z=2x_1+x_2+8x_3 \to \max$ $\begin{cases} 3x_1-x_2-3x_3 \le 5 \\ 4x_1+3x_2+2x_3 \le 7 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$	**Варіант №6** $z=2x_1+x_2+3x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3 \le 8 \\ 4x_1-x_2+x_3 \le 5 \\ 2x_2+2x_3 \le 3 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$

Варіант №7	Варіант №8
$z = 12x_1 + 10x_2 + x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \le 9 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$	$z = x_1 - x_2 - 3x_3 \to \min$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2 \\ 3x_1 + x_3 \le 5 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$
Варіант №9 $z = x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \le 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 3 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$	**Варіант №10** $z = x_1 - 2x_2 - 3x_3 \to \min$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 5 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 6 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$
Варіант №11 $z = 2x_1 + 3x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 5 \\ x_2 + 3x_3 \le 6 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$	**Варіант №12** $z = x_1 + x_2 + x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \le 8 \\ x_2 + x_3 + x_4 \le 5 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \quad x_4 \ge 0$
Варіант №13 $z = 5x_1 - x_2 - 3x_3 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 6 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 3 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$	**Варіант №14** $z = x_1 - 12x_2 - x_3 \to \min$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ x_2 + 3x_3 \le 8 \\ x_1 - x_2 - x_3 \ge -5 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$

Продовження табл. 2.2

Варіант №15	Варіант №16
$z=-5x_1+4x_2-x_3\to\min$ $\begin{cases}x_1+x_2+x_3\le 2\\3x_1+2x_2\le 5\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$	$z=2x_1+x_2+x_3\to\max$ $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3\le 1\\3x_2+4x_3\le 2\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$
Варіант №17 $z=-5x_1+4x_2-x_3\to\max$ $\begin{cases}x_1+x_2+x_3\le 2\\3x_1+2x_2\le 5\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$	**Варіант №18** $z=4x_1-5x_2-3x_3\to\min$ $\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3\le 15\\x_2+x_3\le 2\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$
Варіант №19 $z=2x_1-13x_2-6x_3\to\max$ $\begin{cases}x_1-x_2+3x_3\le 1\\x_1-2x_2+x_3\le 5\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$	**Варіант №20** $z=x_1+2x_2+3x_3\to\max$ $\begin{cases}5x_1+2x_2-x_3\le 3\\2x_1-x_2+3x_3\le 4\\x_1+2x_3\le 5\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$
Варіант №21 $z=4x_1-5x_2-3x_3\to\max$ $\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3\le 15\\x_2+x_3\le 2\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$	**Варіант №22** $z=3x_1+4x_2+x_3\to\min$ $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3\le 5\\2x_1+3x_2+3x_3\le 3\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$
Варіант №23 $z=9x_1+8x_2+4x_3\to\min$ $\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3\le 1\\3x_1+x_2-x_3\le 2\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$	**Варіант №24** $z=x_1+3x_2+x_3\to\min$ $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3\le 5\\2x_1+3x_2-x_3\le 4\end{cases}$ $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0$

Контрольні запитання та завдання до захисту практичної роботи

1. Дайте визначення понять: план, опорний план, оптимальний план задачі лінійного програмування.
2. Який опорний план називається невиродженим? Який виродженим?
3. Опишіть алгоритм розв’язання ЛП-задачі симплексним методом.
4. Сформулюйте критерій оптимальності опорного плану задачі на відшукання максимуму.
5. Сформулюйте критерій оптимальності опорного плану задачі на відшукування мінімуму.
6. Як будується новий базис, якщо опорний план виявився неоптимальним?
7. За яким правилом розраховуються елементи симплексної таблиці?
8. Чи відрізняються формули розрахунку елементів індексного і контрольного рядків симплексної таблиці?
9. У якому випадку план задачі є єдиним?
10. Як визначити з симплексної таблиці, що оптимальний план не єдиний (альтернативний оптимум)?
11. Як визначити з симплексної таблиці, що ЛП-задача не має оптимального розв’язку через необмеженість цільової функції?
12. Опишіть процес використання надбудови **Пошук рішення** для розв’язання ЛП-задачі.
13. Які типи звітів автоматично формує надбудови **Пошук рішення?**

Практична робота № 3: Теорія двоїстості та двоїсті оцінки в аналізі розв'язків лінійних оптимізаційних моделей

Мета роботи: поглиблення теоретичних знань з теорії двоїстості та формування практичних умінь з проведення післяоптимізаційного аналізу розв'язків лінійних оптимізаційних моделей

Основні теоретичні відомості

Кожній задачі лінійного програмування можна поставити у відповідність іншу задачу, яка називається ***двоїстою***, або ***зв'язаною***. Первинна задача називається ***початковою***, або ***прямою***.

Розглянемо на прикладі задачі про оптимальне використання ресурсів, як можна інтерпретувати поняття двоїстої задачі на підставі певних економічних ситуацій.

Існує два підприємства ТОВ «Альфа» і ТОВ «Омега». На підприємстві «Альфа» для виробництва трьох видів продукції P_1, P_2, P_3 використовують три основні види ресурсів (див. табл. 1.1). Необхідно скласти такий план виробництва продукції, при якому дохід від її реалізації буде максимальним (*початкова* задача).

Нехай підприємство «Омега» вирішило закупити всі ресурси підприємства «Альфа». Треба встановити ціну кожного виду ресурсу так, щоб:

1) витрати підприємства «Омега» були мінімальні;

2) підприємство «Альфа» хоче одержати дохід не менший, ніж воно мало б від реалізації виробленої з наявних ресурсів продукції (*двоїста* задача).

ЕММ початкової задачі: знайти план виробництва продукції $X=(x_1,x_2,...,x_n)$, при якому досягається максимальне значення лінійної функції доходу від реалізації (3.1), при обмеженнях (3.2) та умовах (3.3), тобто

$$Z = 300x_1 + 250x_2 + 450x_3 \to \max \tag{3.1}$$

за обмежень

$$\begin{cases} 15x_1 + 20x_2 + 25x_3 \le 1200; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2{,}5x_3 \le 150; \\ 35x_1 + 60x_2 + 60x_3 \le 3000; \end{cases} \tag{3.2}$$

$$x_1 \ge 0\,, x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0\,. \tag{3.3}$$

Побудуємо ЕММ двоїстої задачі.

1. Мета: визначити такі ціни на ресурси, які забезпечать мінімум витрат на їх придбання.

2. Позначимо шукані ціни на ресурси:

y_1 – «ціна» (двоїста оцінка) одиниці трудових ресурсів, грн/людино-годин;

y_2 – «ціна» (двоїста оцінка) одиниці напівфабрикатів, грн/т;

y_3 – «ціна» (двоїста оцінка) одиниці верстатного устаткування, грн/верст.-год.

Ціни ресурсів y_i в економічній літературі одержали різні назви: умовні, облікові, неявні, тіньові, маргінальні, фіктивні. Зміст назв полягає у тому, що це умовні «несправжні» ціни, на відміну від зовнішніх цін на готову продукцію c_j, є внутрішніми і визначаються в результаті розв'язку задачі оптимізації, тому їх називають ***оцінками ресурсів***.

3. Цільова функція. Очевидно, що підприємство «Омега», яке купує, зацікавлене у тому, щоб витрати на всі ресурси у кількості b_i за ціною y_i були мінімальні. Отже, цільова функція витрат має вигляд:

$$F = 1200y_1 + 150y_2 + 3000y_3 \to \min. \tag{3.4}$$

4. Система обмежень. Підприємство «Альфа», що продає ресурси, зацікавлене в тому, щоб набута виручка була не менша від тієї суми, яку підприємство може одержати при переробці ресурсів у готову продукцію, тобто підприємство відмовиться від

виробництва того виду продукції, для якого виконується нерівність:

$$\begin{pmatrix} \textit{Вартість ресурсів, що} \\ \textit{витрачаються на виробництво} \\ 1\, \textit{од. продукції} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \textit{Дохід} \\ \textit{від реалізації} \\ 1\, \textit{од. продукції} \end{pmatrix}.$$

Отже, відповідно до вимог підприємства-продавця, система обмежень набуде вигляду:

$$\begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{matrix} \begin{cases} 15y_1 + 2y_2 + 35y_3 \geq 300; \\ 20y_1 + 3y_2 + 60y_3 \geq 250; \\ 25y_1 + 2{,}5y_2 + 60y_3 \geq 450. \end{cases} \tag{3.5}$$

Додамо природні обмеження – умови невід'ємності, що накладаються на ціни ресурсів:

$$y_1 \geq 0\,,\, y_2 \geq 0,\; y_3 \geq 0\,. \tag{3.6}$$

5. ЕММ двоїстої задачі до задача (3.1)-(3.3): знайти такий набір цін $Y = (y_1, y_2, y_3)$, за якого досягається мінімальне значення лінійної функції витрат на ресурси (3.4), при обмеженнях (3.5) та умовах (3.6), тобто

$$F = 1200y_1 + 150y_2 + 3000y_3 \to \min$$

за обмежень

$$\begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{matrix} \begin{cases} 15y_1 + 2y_2 + 35y_3 \geq 300; \\ 20y_1 + 3y_2 + 60y_3 \geq 250; \\ 25y_1 + 2{,}5y_2 + 60y_3 \geq 450; \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0\,,\, y_2 \geq 0,\; y_3 \geq 0\,.$$

Аналогічні міркування дозволяють записати ЕММ двоїстої задачі до задачі про використання m видів ресурсів під час виробництва n видів продукції (див. модель (1.6)-(1.8)): знайти такий набір цін $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$, за якого загальні витрати на ресурси будуть мінімальні:

$$F = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m \to \min \tag{3.7}$$

за обмежень

$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + ... + a_{m1} y_m \ge c_1; \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + ... + a_{m2} y_m \ge c_2; \\ .... \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + ... + a_{mn} y_m \ge c_n; \end{cases} \tag{3.8}$$

$$y_i \ge 0, i = \overline{1; m}. \tag{3.9}$$

Економіко-математичні моделі пари взаємно двоїстих задач у короткому записі і економічний зміст їхніх додаткових змінних ілюструє табл. 3.1.

Економічний зміст основних і додаткових змінних початкової та двоїстої задач дозволяє встановити відповідність між змінними цих задач (табл. 3.2).

Компоненти оптимального розв’язку двоїстої задачі називаються ***оптимальними двоїстими оцінками*** початкової задачі. Канторович Л.В. (лауреат Нобелівської премії з економіки, рік присудження 1975, тематика досліджень – Теорія оптимального розподілу ресурсів) назвав їх ***об’єктивно зумовленими оцінками***.

Післяоптимізаційний аналіз економічних задач базується на властивостях об’єктивно зумовлених оцінок.

Таблиця 3.1

Економічний зміст додаткових змінних пари взаємно двоїстих задач

I. Початкова задача	II. Двоїста задача
Математична модель	
$z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i=\overline{1;m}$ $x_j \ge 0,\ j=\overline{1;n}$	$F=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j,\ j=\overline{1;n}$ $y_i \ge 0,\ i=\overline{1;m}$
Система обмежень в канонічному вигляді	
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i,\ i=\overline{1;m}$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - y_{m+j} = c_j,\ j=\overline{1;n}$
Економічний зміст додаткових змінних	
$\underbrace{x_{n+i}}_{\text{залишок } i\text{-го ресурсу}} = \underbrace{b_i}_{\text{запас } i\text{-го ресурсу}} - \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}_{\text{витрати } i\text{-го ресурсу}}$ $i=\overline{1;m}$	$\underbrace{y_{m+j}}_{\text{збиток від виробництва од. продукції виду } j} = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i}_{\text{витрати на виробництво од. продукції виду } j} - \underbrace{c_j}_{\text{доход від реалізації од. продукції виду } j}$ $j=\overline{1;n}$

Властивості об'єктивно зумовлених оцінок

***Властивість* 1.** Оцінки як інструмент балансування сумарних витрат і результатів

***Властивість* 2.** Оцінки як міра дефіцитності ресурсів

***Властивість* 3.** Оцінки як міра рентабельності продукції

***Властивість* 4.** Оцінки як інструмент визначення ефективності нових варіантів виробництва

***Властивість* 5.** Оцінки як міра впливу зміни запасів ресурсів на фінансовий результат.

Таблиця 3.2

Відповідність між змінними початкової та двоїстої задач

Змінні початкової задачі	
Основні змінні	Додаткові змінні
Обсяг виробництва продукції *j*-го виду	Залишок ресурсу *i*-го виду
$x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_j \quad \ldots \quad x_n$ $\updownarrow \quad \updownarrow \quad \ldots \quad \updownarrow \quad \ldots \quad \updownarrow$ $y_{m+1} \quad y_{m+2} \quad \ldots \quad y_{m+j} \quad \ldots \quad y_{m+n}$	$x_{n+1} \quad x_{n+2} \quad \ldots \quad x_{n+j} \quad \ldots \quad x_{n+m}$ $\updownarrow \quad \updownarrow \quad \ldots \quad \updownarrow \quad \ldots \quad \updownarrow$ $y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_j \quad \ldots \quad y_m$
Збиток від виробництва продукції *j*-го виду	Двоїста оцінка (умовна ціна) ресурсу *i*-го виду
Додаткові змінні	Основні змінні
Змінні двоїстої задачі	

Властивості об’єктивно зумовлених оцінок випливають із трьох теорем двоїстості.

***Перша (основна) теорема двоїстості*:**

1. Якщо одна з пари взаємно двоїстих задач має розв’язок, то його має і друга, причому оптимальні значення їх цільових функцій збігаються:

$$Z(X^*) = F(Y^*) \qquad (3.10)$$

або

$$Z_{\max} = F_{\min} \quad (Z_{\min} = F_{\max})$$

де X^*, Y^* – оптимальні плани початкової та двоїстої задач.

2. Якщо одна із задач не розв’язується через необмеженість цільової функції, то друга не має розв’язку через несумісність системи обмежень:

$$Z \to \infty \Leftrightarrow F = \varnothing;$$
$$F \to \infty \Leftrightarrow Z = \varnothing.$$

Економічний зміст І теореми двоїстості (Властивість 1). За оптимальних виробничої програми $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ та векторі оцінок ресурсів $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ виробничі втрати дорівнюють нулю; для всіх інших неоптимальних планів $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ та $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ обох задач фінансовий результат завжди менший від витрат на ресурси:

$$Z(X) < F(Y), \tag{3.11}$$

де *X, Y* – неоптимальні плани початкової та двоїстої задач.

Нерівність (3.11) називається *основною нерівністю* двоїстості, а різниця $F(Y) - Z(X)$ – виробничими втратами.

Зміст І теореми двоїстості можна інтерпретувати й так:

1) для підприємства рівноцінно (фінансово) виробляти продукцію за отриманим планом *X** і отримати максимальний прибуток чи продати всі ресурси за оптимальним планом *Y**;

2) якщо витрати ресурсів більші від запасу хоча б одного ресурсу, підприємство не може виробляти продукцію (система обмежень несумісна і *Z* = Ø), тому за безцінок продає ресурси; витрати покупця у цьому випадку необмежені знизу і стають доходом ($F \to \infty$).

Друга теорема двоїстості: додатним (ненульовим) компонентам оптимального плану однієї зі взаємно двоїстих задач відповідають нульові компоненти оптимального плану іншої задачі.

Зауваження. За допомогою теорем двоїстості можна, розв’язавши симплексним методом початкову задачу, знайти оптимум та оптимальний розв’язок двоїстої задачі:

– якщо початкова задача розв’язується на відшукування максимуму, то оптимальний розв’язок двоїстої задачі відповідає оцінкам індексного рядка останньої симплексної таблиці початкової задачі;

– якщо початкова задача розв'язується на відшукання мінімуму, то оптимальний розв'язок двоїстої задачі відповідає оцінкам індексного рядка останньої симплексної таблиці початкової задачі.

Економічний зміст II теореми двоїстості розкривається у властивостях 2, 3, 4 об'єктивно зумовлених оцінок.

Властивість 2. Оцінки як міра дефіцитності ресурсів.

Основні двоїсті оцінки визначають ступінь дефіцитності ресурсів:

– ресурс, використовуваний повністю в оптимальному плані виробництва, є *дефіцитним* і його двоїста оцінка (умовна ціна) – *додатна*; подальше збільшення ресурсу доцільне;

– ресурс, використовуваний не повністю в оптимальному плані виробництва, є надмірним і його двоїста оцінка (умовна ціна) дорівнюють нулю; подальше збільшення ресурсу не вплине на фінансовий результат.

Властивість 3. Оцінки як міра рентабельності продукції.

Додаткові двоїсті оцінки чисельно дорівнюють збитку, який принесе підприємству виготовлення одиниці продукції, що не увійшла до оптимального плану; така продукція називається *нерентабельною*:

– якщо $x_j^* > 0 \Rightarrow y_{m+j}^* = 0$, продукція виду j рентабельна;

– якщо $x_j^* = 0 \Rightarrow y_{m+j}^* > 0$, продукція виду j нерентабельна, якщо підприємство все ж таки вироблятиме нерентабельну продукцію, то виробництво кожної її одиниці принесе збиток y_{m+j}^*.

Властивість 4. Оцінки як інструмент визначення ефективності нових варіантів виробництва.

Об'єктивно зумовлені оцінки можна застосовувати для визначення рентабельності нових видів продукції при розширенні асортименту виробництва.

Нехай необхідно прийняти рішення про доцільність виробництва нового виду продукції P_j. Характеристикою рентабельності служить різниця між витратами і доходом від реалізації:

$$\Delta_j = \underbrace{y^*_{m+j}}_{\substack{\textit{збиток від} \\ \textit{виробництва} \\ j-\textit{го виду прод.}}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y^*_i}_{\substack{\textit{витраты на} \\ \textit{производство} \\ j-\textit{го виду прод.}}} - \underbrace{c_j}_{\substack{\textit{дохід від} \\ \textit{реалізації} \\ j-\textit{го виду прод.}}} \qquad (3.12)$$

– якщо $\Delta_j > 0$, то виробляти продукцію P_j невигідно, вона нерентабельна;

– якщо $\Delta_j < 0$, то виробляти продукцію P_j вигідно, вона рентабельна;

– якщо $\Delta_j = 0$, то немає однозначного розв'язку, витрати дорівнюють доходу.

***Третя теорема двоїстості*:** компоненти оптимального розв'язку двоїстої задачі дорівнюють значенням частинних похідних лінійної цільової функції за відповідними аргументами, тобто

$$y_i^* = \frac{\partial Z_{\max}}{\partial b_i}, \quad i = \overline{1; m}. \qquad (3.13)$$

Якщо $b_i \to 0$, то правильна наближена рівність:

$$y_i^* \approx \frac{\Delta_i Z_{\max}}{\Delta b_i}, \quad i = \overline{1; m}, \qquad (3.14)$$

$$\Delta_i Z_{\max} \approx y_i^* \Delta b_i, \quad i = \overline{1; m}. \qquad (3.15)$$

Якщо $\Delta b_i = 1$, то

$$\Delta_i Z_{\max} \approx y_i^*, \quad i = \overline{1;m}. \qquad (3.16)$$

Економічний зміст III теореми двоїстості розкривається у властивості 5 об’єктивно зумовлених оцінок.

Властивість 5. Оцінки як міра впливу зміни запасів ресурсів на фінансовий результат.

Об’єктивно-обумовлені оцінки ресурсів показують, на скільки грошових одиниць зміниться максимальний фінансовий результат (дохід (виручка) від реалізації продукції) при зміні запасу відповідного ресурсу на одну одиницю.

Зауваження 1. Об'єктивно-обумовлена оцінка y_i^* $(i = \overline{1;m})$ характеризує цінність *і*-го ресурсу:

– якщо y_i^* $(i = \overline{1;m})$ велике, то незначній зміні *і*-го ресурсу відповідатиме істотне збільшення фінансового результату, тобто цінність *і*-го ресурсу висока;

– чим менше y_i^* $(i = \overline{1;m})$, тим нижча цінність *і*-го ресурсу;

– якщо y_i^* $(i = \overline{1;m})$, то при зміні цього ресурсу фінансовий результат не зміниться, тобто цінність ресурсу нульова.

Зауваження 2. Об’єктивно зумовлені оцінки ресурсів дозволяють оцінювати ефект не будь-яких, а лише порівняльно невеликих змін ресурсів усередині так званих ***інтервалів стійкості*** (постійності) – інтервалів можливої зміни обсягів дефіцитних ресурсів.

В інтервалі стійкості двоїстої змінної структура оптимального плану не зміниться, тобто збережеться набір базисних і вільних змінних. Межі сталості змінюються стрибкоподібно, різкі зміни ресурсів приводять до зміни їхніх оцінок.

Під час розрахунку інтервалів стійкості основних двоїстих оцінок, тобто інтервалів допустимих змін запасів ресурсів (компонент вектору обмежень) виділяються два випадки.

1-й випадок – додаткова змінна в оптимальному плані небазисна, тобто дорівнює нулю і ресурс дефіцитний.

Інтервали стійкості дефіцитних ресурсів визначаються з умови невід'ємності компонент оптимального плану, які змінюються за рахунок приросту запасу таких ресурсів. Тобто для кожного k-го ($k = \overline{1;m}$) дефіцитного ресурсу за даними останньої симплексної таблиці розв'язується система нерівностей виду:

$$x_{i0}^{*} + x_{i,n+k}\Delta b_k \ge 0, \quad i = \overline{1;m}. \tag{3.17}$$

де Δb_k – приріст k-го ресурсу ($k = \overline{1;m}$);

x_{i0}^{*} – i-та компонента оптимального плану;

$x_{i,n+k}$ – i-та компонента стовпця $n+k$ (відповідає k-му ресурсу) останньої симплексної таблиці.

2-й випадок – додаткова змінна в оптимальному плані базисна, тобто більше віднуля і ресурс надлишковий.

Інтервали стійкості надлишкових ресурсів розраховуються із розуміння того, що нульова цінність таких ресурсів не зміниться за їхнього зменшення на величину залишку, а збільшення до нескінченності. Отже, для розрахунку інтервалу стійкості надлишкового k-го ресурсу розв'язується одна нерівність:

$$-x_{n+k}^{*} \le \Delta b_k \le +\infty. \tag{3.18}$$

Зауваження. Визначені інтервали стосуються лише тих випадків, коли змінюється запас тільки одного ресурсу, за умови незмінності запасів решти ресурсів. У разі одночасної зміни запасів усіх або кількох ресурсів для визначення інтервалів стійкості розв'язується система:

$$x_{i0}^{*} + \sum_{k=1}^{m} x_{i,n+k}\Delta b_k \ge 0, \quad i = \overline{1;m}. \tag{3.19}$$

Розрахунок інтервалів стійкості додаткових двоїстих оцінок, тобто інтервалів допустимих змін коефіцієнтів цільової функції, в межах яких структура оптимального плану не змінюється, здійснюється в умовах припущення, що коефіцієнт цільової функції при певній l-ій змінній ($l=\overline{1;n}$) з початковим значенням c_l змінився на величину Δc_l. Отже, цільова функція початкової задачі (1.6) набуде виду:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + (c_l + \Delta c_l) x_l + \ldots + c_n x_n \rightarrow \max \quad (3.20)$$

Зміна коефіцієнта цільової функції при розв'язанні задачі симплексним методом вплине на зміну оцінок індексного рядка. Під час розрахунку інтервалів стійкості також виділяється два випадки.

1-й випадок – змінюється коефіцієнт c_l цільової функції при базисній змінній оптимального плану, тобто відповідає рентабельній продукції.

Інтервали стійкості рентабельних видів продукції визначаються з умови невід'ємності оцінок індексного рядка останньої симплексної таблиці, змінених за рахунок приросту коефіцієнту цільової функції (задача максимізації). Тобто для кожного l-го ($l=\overline{1;n}$) рентабельного виду продукції за даними останньої симплексної таблиці розв'язується система нерівностей виду:

$$\Delta_j + x_{il}\Delta c_l \geq 0, \quad j=\overline{1;n+m}. \quad (3.21)$$

2-й випадок – змінюється коефіцієнт c_l цільової функції при небазисній змінній оптимального плану, тобто відповідає нерентабельній продукції.

Зміна коефіцієнта цільової функції при небазисній змінній впливає лише на оцінку цієї змінної, тому для розрахунку інтервалу стійкості для нерентабельної продукції, виходячи з умови невід'ємності оцінки $\Delta_l - \Delta c_l \geq 0$, розв'язується одна нерівність

$$-\infty \leq \Delta c_l \leq \Delta_l\,. \qquad (3.22)$$

Розв'язання типових задач

Задача 3.1. Комплексний післяоптимізаційний аналіз розв'язку задачі про оптимальне використання ресурсів

Виконати комплексний післяоптимізаційний аналіз розв'язку задачі про оптимальне використання ресурсів (Задачі 1.1-1.2) на підставі теорії двоїстості.

Розв'язання

1. Побудова економіко-математичної моделі задачі про оптимальне використання ресурсів

Економіко-математична модель задачі про оптимальне використання ресурсів: знайти такий план виробництва продукції $X = (x_1, x_2, x_3)$, за якого досягається максимальне значення лінійної функції доходу від реалізації

$$Z = 300x_1 + 250x_2 + 450x_3 \to \max$$

за обмежень

$$\begin{cases} 15x_1 + 20x_2 + 25x_3 \leq 1200; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2{,}5x_3 \leq 150; \\ 35x_1 + 60x_2 + 60x_3 \leq 3000. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0\,, x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0\,.$$

2. Розв'язання задачі симплексним методом

Шляхом розв'язання задачі симплексним методом (рис. 2.3) отримано оптимальний план: $X^* = \left(60;0;12;|\,0;0;180\right)$, який забезпечує максимальний дохід від реалізації готової продукції $Z_{\max} = 23400$ грн.

3. Економічна постановка і побудова економіко-математичної моделі двоїстої задачі, запис її оптимального розв'язку

Постановку двоїстої задачі та побудову її економіко-математичної моделі здійснено у підрозділі «Основні теоретичні відомості» (с. 90-92).

Економіко-математична модель двоїстої задачі: знайти такий набір цін $Y=(y_1, y_2, y_3)$, за якого досягається мінімальне значення лінійної функції витрат на ресурси

$$F = 1200y_1 + 150y_2 + 3000y_3 \rightarrow \min$$

за обмежень

$$\begin{cases} 15y_1 + 2y_2 + 35y_3 \geq 300; \\ 20y_1 + 3y_2 + 60y_3 \geq 250; \\ 25y_1 + 2{,}5y_2 + 60y_3 \geq 450; \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0\ , y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0\ .$$

Згідно з першою теоремою двоїстості розв'язок двоїстої задачі міститься в індексному рядку m+1 останньої симплексної таблиці початкової задачі (рис. 2.3 і рис. 3.1), отже,

$$Y^* = (12;60;0;|\,0;170;0)\ ,\ F_{\min} = Z_{\max} = 23400\ .$$

Перевіримо значення оптимуму цільової функції двоїстої задачі $F_{\min} = 1200 \cdot 12 + 150 \cdot 60 + 3000 \cdot 0 = 23400$. Отриманий результат підтверджує *Властивість 1*.

Крім того, **Звіт про стійкість** (див. рис. 2.7), отриманий за розв'язання початкової задачі **Пошуком рішення**, також містить оптимальний план двоїстої задачі, а саме: основні змінні (12; 60; 0) у стовпчику **Тіньова ціна** таблиці **Обмеження**, додаткові змінні (0; 170; 0) у стовпчику **Приведена вартість** таблиці

Комірки змінних. Значення додаткових змінних наводяться зі знаком «-», це збитки від виробництва нерентабельної продукції.

i	*Базис*	$C_Б$	X_0	300 X_1	250 X_2	450 X_3	0 X_4	0 X_5	0 X_6	θ_i
1	X_4	0	1200	15	20	25	1	0	0	48
2	X_5	0	150	2	3	2,5	0	1	0	60
3	X_6	0	3000	35	60	60	0	0	1	50
m+1	$\Delta_j = z_j - c_j$		0	-300	-250	-450	0	0	0	
1	X_3	450	**12**	0	-0,4	1	0,16	-1,2	0	
2	X_1	300	**60**	1	2	0	-0,2	2	0	
3	X_6	0	**180**	0	14	0	-2,6	2	1	
m+1	$\Delta_j = z_j - c_j$		**23400**	**0**	**170**	**0**	**12**	**60**	**0**	

y_4^* y_5^* y_6^* | y_1^* y_2^* y_3^*

Рис. 3.1. Перша й остання симплексні таблиці

Відповідність між основними та додатковими компонентами оптимальних планів початкової та двоїстої задач, що розв’язуються, наведено у табл. 3.3.

Таблиця 3.3

Відповідність між компонентами оптимальних планів початкової та двоїстої задач

Компоненти оптимального плану початкової задачі					
Обсяг виробництва продукції			Залишок ресурсу		
P_1	P_2	P_3	Трудові ресурси	Напів-фабрикати	Верстатне устаткування
$x_1^* = 60$ ↕	$x_2^* = 0$ ↕ $y_5^* = 170$	$x_3^* = 12$ ↕	$x_4^* = 0$ ↕	$x_5^* = 0$ ↕ $y_2^* = 60$	$x_6^* = 180$ ↕ $y_3^* = 0$

$y_4^* = 0$		$y_6^* = 0$	$y_1^* = 12$		
Збиток від виробництва одиниці продукції			Умовна ціна (оцінка) ресурсу		
Компоненти оптимального плану двоїстої задачі					

4. Оцінювання дефіцитності ресурсів, використовуючи двоїсті оцінки

Згідно з *Властивістю 2* (випливає з ІІ теореми двоїстості), об’єктивно зумовлені оцінки є мірою дефіцитності ресурсів.

Оцінимо дефіцитність ресурсів, підставивши компоненти оптимального плану початкової задачі в систему обмежень:

– трудові ресурси використовуються повністю, це дефіцитний ресурс, його оцінка більша від нуля:

$$15 \cdot 60 + 20 \cdot 0 + 25 \cdot 12 = \underset{\textit{витрати}}{1200} = \underset{\textit{запас}}{1200};$$

Залишок = x_4^*= 1200 – 1200 = 0 ↔ Умовна ціна = y_1^*= 12 > 0;

– напівфабрикати використовуються повністю, це дефіцитний ресурс, його оцінка більша від нуля:

$$2 \cdot 60 + 3 \cdot 0 + 2{,}5 \cdot 12 = \underset{\textit{витрати}}{150} = \underset{\textit{запас}}{150};$$

Залишок = x_5^*= 150 – 150 = 0 ↔ Умовна ціна = y_2^*= 60 > 0;

– верстатне устаткування використовується не повністю, це надмірний ресурс, його оцінка дорівнює нулю:

$$35 \cdot 60 + 60 \cdot 0 + 60 \cdot 12 = \underset{\textit{витрати}}{2820} < \underset{\textit{запас}}{3000};$$

Залишок = x_6^*= 3000 – 2820 = 180 ↔ Умовна ціна = y_3^*= 0;

Отже, отримані витрати ресурсів та їхні умовні ціни збігаються зі значеннями стовпців **Остаточне значення** та **Тіньова ціна** таблиці **Обмеження Звіту про стійкість** (див. рис. 2.7).

5. Оцінювання рентабельності готової продукції та збитків від виробництва нерентабельної продукції, використовуючи двоїсті оцінки

Згідно з *Властивістю 3* (випливає з ІІ теореми двоїстості), об’єктивно зумовлені оцінки є мірою рентабельності продукції.

Оцінимо рентабельність продукції, підставивши компоненти оптимального плану двоїстої задачі у її систему обмежень:

– продукція P_1 увійшла до оптимального плану виробництва, це рентабельна продукція:

$$15 \cdot 12 + 2 \cdot 60 + 35 \cdot 0 = \underset{витрати}{300} = \underset{очікуваний\ дохід}{300};$$

Збиток = y_4^*= 300 – 300 = 0 ↔ Обсяг виробництва = x_1^*= 60 > 0;

– продукція P_2 не увійшла до оптимального плану виробництва, це нерентабельна продукція:

$$20 \cdot 12 + 3 \cdot 60 + 60 \cdot 0 = \underset{витрати}{420} > \underset{очікуваний\ дохід}{250};$$

Збиток = y_5^*= 420 – 250 = 170 ↔ Обсяг виробництва = x_2^*= 0;

– продукція P_3 увійшла до оптимального плану виробництва, це рентабельна продукція:

$$25 \cdot 12 + 2{,}5 \cdot 60 + 60 \cdot 0 = \underset{витрати}{450} = \underset{очікуваний\ дохід}{450};$$

Збиток = y_6^*= 450 – 450 = 0 ↔ Обсяг виробництва = x_3^*= 12 > 0;

Отже, отримані відповідності збитків (у т.ч. нульових) і обсягів виробництва продукції збігаються зі значеннями стовпців **Остаточне значення** та **Приведена вартість** таблиці **Комірки змінних Звіту про стійкість** (див. рис. 2.7.).

6. Прийняття рішення щодо доцільності розширення асортименту виробництва

Згідно з *Властивістю 4* (випливає з ІІ теореми двоїстості) об'єктивно зумовлені оцінки являють собою інструмент визначення ефективності нових варіантів виробництва.

Нехай в умовах задачі необхідно прийняти рішення щодо доцільності виробництва нового виду продукції P_4 (табл. 3.4).

Таблиця 3.4

Вихідні дані щодо прийняття рішення про доцільність виробництва нового виду продукції P_4

Вид ресурсу	Норми витрат ресурсів на виробництво одиниці продукції	Запас ресурсу
Трудові ресурси, люд.-год.	14	1200
Напівфабрикати, т	3	150
Верстатне устаткування, верст.-год.	70	3000
Дохід від реалізації одиниці продукції, грн	350	

Обчислимо об'єктивно зумовлену оцінку продукції P_4 за формулою (2.13):

$$\Delta_4 = y^*_{3+4} = \left(14 \cdot y^*_1 + 3 \cdot y^*_2 + 70 \cdot y^*_3\right) - 350 =$$
$$= \left(14 \cdot 12 + 3 \cdot 60 + 70 \cdot 0\right) - 350 = -2 < 0,$$

отже продукція P_4 рентабельна, її доцільно виробляти.

7. Оцінювання величини зміни максимального доходу від реалізації за зміни запасів ресурсів на одну одиницю. Обґрунтувати, чим зумовлені ці зміни

Згідно з *Властивістю 5* (випливає з ІІІ теореми двоїстості), об'єктивно зумовлені оцінки слугують мірою впливу зміни запасів ресурсів на фінансовий результат, тому у задачі:

– приріст трудових ресурсів на 1 людино-год. призведе до збільшення доходу на 12 грн, оскільки $\Delta_1 Z_{max} = y_1^* = 12$;

– приріст напівфабрикатів на 1 т призведе до збільшення доходу на 60 грн, оскільки $\Delta_2 Z_{max} = y_2^* = 60$;

– приріст верстатного устаткування на 1 верст.-годину не вплине на фінансовий результат, оскільки $\Delta_3 Z_{max} = y_3^* = 0$, це надмірний ресурс.

Проаналізуємо, за рахунок чого відбуваються вищеназвані зміни доходу.

По трудових ресурсах маємо наступну відповідність оцінок оптимального плану $\Delta Z_{max1} = 12 = y_1^* \leftrightarrow x_4^*$. В останній симплексній таблиці (див. рис. 3.1) у стовпці X_4 знаходиться вектор $X_4 = (0{,}16; -0{,}2; -2{,}6)$, всі елементи якого відбивають зміну значень базисних змінних за збільшення 1-го ресурсу на одну одиницю. Отже, якщо збільшити трудові ресурси на 1 людино-год., то:

– обсяг виробництва продукції P_3 збільшиться на 0,16 од. і складе: $x_3' = x_3^* + 0{,}16 = 12 + 0{,}16 = 12{,}16$ од.;

– обсяг виробництва продукції P_1 скоротиться на 0,2 од. і складе: $x_1' = x_1^* - 0{,}2 = 60 - 0{,}2 = 59{,}8$ од.;

– резерв з верстатного устаткування скоротиться на 2,6 верст.-год. і складе: $x_6' = x_6^* - 2{,}6 = 180 - 2{,}6 = 177{,}4$ верст.-год.

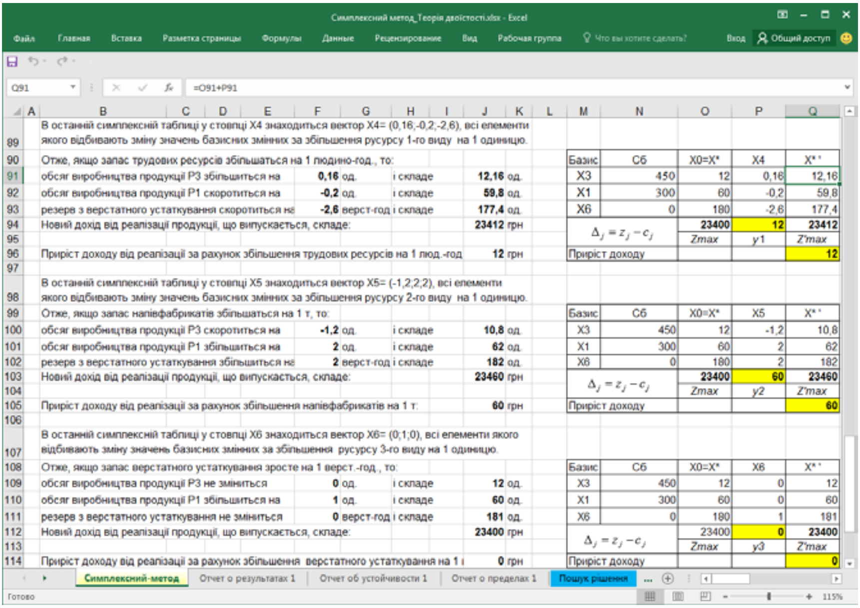
Отже, новий дохід від реалізації продукції, що випускається, складе (грн):

$$Z'_{\max} = 300 \cdot x'_1 + 250 \cdot x'_2 + 450 \cdot x'_3 =$$
$$= 300 \cdot 59{,}8 + 250 \cdot 0 + 450 \cdot 12{,}16 = 23412.$$

Тобто приріст доходу від реалізації за рахунок збільшення трудових ресурсів на 1 люд.-год. дорівнює:

$$\Delta_1 Z_{\max} = Z'_{\max} - Z_{\max} = 23412 - 23400 = 12 \text{ грн.}$$

Аналогічно обґрунтовуються зміни доходу за рахунок зміни решти ресурсів (рис. 3.2).



Симплексний метод_Теорія двоїстості.xlsx - Excel

Q91 =O91+P91

	B	F	G	H	J	K
89	В останній симплексній таблиці у стовпці X4 знаходиться вектор X4= (0,16;-0,2;-2,6), всі елементи якого відбивають зміну значень базисних змінних за збільшення русурсу 1-го виду на 1 одиницю.					
90	Отже, якщо запас трудових ресурсів збільшаться на 1 людино-год., то:					
91	обсяг виробництва продукції P3 збільшиться на	**0,16**	од.	і складе	**12,16**	од.
92	обсяг виробництва продукції P1 скоротиться на	**-0,2**	од.	і складе	**59,8**	од.
93	резерв з верстатного устаткування скоротиться на	**-2,6**	верст-год	і складе	**177,4**	од.
94	Новий дохід від реалізації продукції, що випускається, складе:				**23412**	грн
95						
96	Приріст доходу від реалізації за рахунок збільшення трудових ресурсів на 1 люд.-год				**12**	грн
97						
98	В останній симплексній таблиці у стовпці X5 знаходиться вектор X5= (-1,2;2;2), всі елементи якого відбивають зміну значень базисних змінних за збільшення русурсу 2-го виду на 1 одиницю.					
99	Отже, якщо запас напівфабрикатів збільшаться на 1 т, то:					
100	обсяг виробництва продукції P3 скоротиться на	**-1,2**	од.	і складе	**10,8**	од.
101	обсяг виробництва продукції P1 збільшиться на	**2**	од.	і складе	**62**	од.
102	резерв з верстатного устаткування збільшиться на	**2**	верст-год	і складе	**182**	од.
103	Новий дохід від реалізації продукції, що випускається, складе:				**23460**	грн
104						
105	Приріст доходу від реалізації за рахунок збільшення напівфабрикатів на 1 т:				**60**	грн
106						
107	В останній симплексній таблиці у стовпці X6 знаходиться вектор X6= (0;1;0), всі елементи якого відбивають зміну значень базисних змінних за збільшення русурсу 3-го виду на 1 одиницю.					
108	Отже, якщо запас верстатного устаткування зросте на 1 верст.-год., то:					
109	обсяг виробництва продукції P3 не зміниться	**0**	од.	і складе	**12**	од.
110	обсяг виробництва продукції P1 збільшиться на	**1**	од.	і складе	**60**	од.
111	резерв з верстатного устаткування не зміниться	**0**	верст-год	і складе	**181**	од.
112	Новий дохід від реалізації продукції, що випускається, складе:				**23400**	грн
113						
114	Приріст доходу від реалізації за рахунок збільшення верстатного устаткування на 1				**0**	грн

Базис	Сб	X0=X*	X4	X*'
X3	450	12	0,16	12,16
X1	300	60	-0,2	59,8
X6	0	180	-2,6	177,4
$\Delta_j = z_j - c_j$		23400	12	23412
		Zmax	y1	Z'max
Приріст доходу				12

Базис	Сб	X0=X*	X5	X*'
X3	450	12	-1,2	10,8
X1	300	60	2	62
X6	0	180	2	182
$\Delta_j = z_j - c_j$		23400	60	23460
		Zmax	y2	Z'max
Приріст доходу				60

Базис	Сб	X0=X*	X6	X*'
X3	450	12	0	12
X1	300	60	0	60
X6	0	180	1	181
$\Delta_j = z_j - c_j$		23400	0	23400
		Zmax	y3	Z'max
Приріст доходу				0

Симплексний-метод | Отчет о результатах 1 | Отчет об устойчивости 1 | Отчет о пределах 1 | Пошук рішення

Рис. 3.2. Оцінювання впливу зміни запасів ресурсів на фінансовий результат

8. Оцінювання інтервалів стійкості щодо змін запасів ресурсів (допустимі зміни запасів ресурсів)

Після проведеного аналізу постає логічне запитання: оскільки збільшення напівфабрикатів на одиницю приводить до найбільшого підвищення значення доходу, то чи можна збільшити цей дефіцитний ресурс на 50 т, 100 т, тим значно збільшуючи дохід підприємства?

Для однозначної відповіді на це запитання необхідно розрахувати інтервали стійкості, у межах яких двоїсті оцінки y_i залишаються на рівні оптимальних значень.

Перший ресурс – трудові ресурси – дефіцитний, тому межі інтервалу стійкості визначаються за формулою (3.17). Якщо приріст запасу трудових ресурсів позначити через Δb_1, тоді з останньої симплексної таблиці (рис. 3.3) новий оптимальний план можна записати у такий спосіб:

$$X^* = (60 - 0{,}2\Delta b_1; 0; 12 + 0{,}16\Delta b_1; 0; 0; 180 - 2{,}6\Delta b_1)\ .$$

i	*Базис*	$C_Б$	X_0	300	250	450	0	0	0
				X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
1	X_4	0	$1200 + 1\Delta b_1$	15	20	25	1	0	0
2	X_5	0	$150 + 0\Delta b_1$	2	3	2,5	0	1	0
3	X_6	0	$3000 + 0\Delta b_1$	35	60	60	0	0	1
m+1	$\Delta_j = z_j - c_j$		0	-250	-450	0	0	0	
1	X_3	450	$12 + 0{,}16\Delta b_1$	0	-0,4	1	0,16	-1,2	0
2	X_1	300	$60 - 0{,}2\Delta b_1$	1	2	0	-0,2	2	0
3	X_6	0	$180 - 2{,}6\Delta b_1$	0	14	0	-2,6	2	1
m+1	$\Delta_j = z_j - c_j$		$23400 + 12\Delta b_1$	0	170	0	12	60	0
				y_4^*	y_5^*	y_6^*	y_1^*	y_2^*	y_3^*

Рис. 3.3. Оцінювання інтервалів допустимих змін запасів ресурсів

Єдина вимога, яку можна поставити до можливих нових оптимальних значень, – це умова невід'ємності змінних, тобто:

$$\begin{cases} 12 + 0{,}16\Delta b_1 \ge 0; \\ 60 - 0{,}2\Delta b_1 \ge 0; \\ 180 - 2{,}6\Delta b_1 \ge 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta b_1 \ge -75; \\ \Delta b_1 \le 300; \\ \Delta b_1 \le 69{,}23077; \end{cases} \Rightarrow\ -75 \le \Delta b_1 \le 69{,}23\,.$$

Звіт про стійкість (див. рис. 2.7) містить саме такі значення у стовпцях **Допустиме збільшення** та **Допустиме зменшення** для обмеження 1 (витрати трудових ресурсів).

Це означає, що коли запас трудових ресурсів збільшиться на 69,23 людино-години або зменшиться на 75 людино-годин, то на цьому інтервалі його оптимальна двоїста оцінка залишиться такою ж: y_1 = 12. Отже, запас трудових ресурсів може змінюватись у межах:

$$1200 - 75 \le b_1 \le 1200 + 69{,}23\,;$$
$$1125 \le b_1 \le 1269{,}23\,.$$

Згідно з цим, максимально можливі зміни обсягів виручки підприємства залежно від змін у обсягах трудових ресурсів на такому інтервалі будуть у межах:

$$23400 - 75 \cdot 12 \le Z_{\max} \le 23400 + 69{,}23 \cdot 12\,;$$
$$22500 \le Z_{\max} \le 24230{,}77\,,$$

а відповідні критичним значенням діапазону доходу оптимальні плани виробництва продукції будуть такими:

(75; 0; 0; 0; 0; 375) = X* = (46,15; 0; 23,077; 0; 0; 0).

Перевірка. Нижня межа: Z_{max} = 75·300 = 22500; верхня межа: Z_{max} = 46,15·300 + 23,077·450 = 24230,77.

Аналогічно розраховується інтервал стійкості двоїстої оцінки y_2 = 60 для дефіцитного ресурсу напівфабрикати: $-30 \le \Delta b_2 \le 10$. **Звіт про стійкість** (див. рис. 2.7) містить саме такі значення у стовпцях **Допустиме збільшення** та **Допустиме зменшення** для обмеження 2 (витрати напівфабрикатів).

Третій ресурс – верстатне устаткування – надлишковий, тому для визначення інтервалу стійкості досить розв’язати одну нерівність (3.18). Відомо, що за оптимального плану виробництва буде залишок цього ресурсу в обсязі $x_6^* = 180$ верст.-год. Отже, зменшення верстатного устаткування в обсязі до 180 верст.-год. не змінить структуру оптимального плану. Якщо зміну загального запасу цього ресурсу позначити через Δb_3, то інтервал можливої зміни його обсягів записується так:

$$-180 \le \Delta b_3 \le +\infty .$$

Звіт про стійкість (див. рис. 2.7) містить саме такі значення у стовпцях **Допустиме збільшення** та **Допустиме зменшення** для обмеження 3 (витрати верстатного устаткування).

Отже, інтервалом зміни запасів недефіцитного ресурсу, у межах якого структура оптимального плану залишиться постійною, буде:

$$2820 \le b_3 \le +\infty .$$

9. Оцінювання інтервалів стійкості щодо змін доходу від реалізації готової продукції (максимально допустимі зміни коефіцієнтів функції доходу)

Під впливом різних обставин дохід від реалізації одиниці готової продукції може змінюватися (збільшуватися чи зменшуватися). Тому постає запитання: у межах яких змін доходів від реалізації одиниці продукції кожного виду структура оптимального плану виробництва не змінюється?

Якщо дохід від реалізації одиниці продукції виду P_1 зміниться на Δc_1, то інтервал допустимих змін визначається за формулою (3.21), оскільки це рентабельна продукція, вона увійшла в оптимальний план. Початкове значення доходу 300 грн у симплексній таблиці подається як $300 + \Delta c_1$ (рис. 3.4).

i	*Базис*	$C_Б$	X_0	$300+\Delta c_1$	250	450	0	0	0
				X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
1	X_3	450	12	0	-0,4	1	0,16	-1,2	0
2	X_1	$300+\Delta c_1$	60	1	2	0	-0,2	2	0
3	X_6	0	180	0	14	0	-2,6	2	1
m+1	$\Delta_j = z_j - c_j$		$23400+60\Delta c_1$	0	$170+2\Delta c_1$	0	$12-0,2\Delta c_1$	$60+2\Delta c_1$	0

Рис. 3.4. Оцінювання інтервалів допустимих змін коефіцієнтів цільової функції

Нові значення оцінок мають задовольняти умову оптимальності задачі максимізації цільової функції, тобто бути невід'ємними: $\Delta_j \geq 0$. Тому інтервал допустимих змін Δc_1 визначається з такої системи нерівностей:

$$\begin{cases} 170 + 2\Delta c_1 \geq 0; \\ 12 - 0{,}2\Delta c_1 \geq 0; \\ 60 + 2\Delta c_1 \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta c_1 \geq -85; \\ \Delta c_1 \leq 60; \\ \Delta c_1 \geq -30; \end{cases} \Rightarrow \ -30 \leq \Delta c_1 \leq 60 .$$

Отже, дохід від реалізації одиниці продукції виду P_1 може зменшуватися на 30 грн. або збільшуватися на 60 грн., але оптимальним планом виробництва продукції залишається X^* = (60; 0; 12). Лише максимальна виручка зміниться на max $60\Delta c_1$. Якщо ж коливання доходу вийдуть за визначені межі, то план X = (60; 0; 12) вже не буде оптимальним, і його необхідно буде поліпшити згідно з алгоритмом симплекс-методу, тобто продовжити розв'язання задачі.

Аналогічно інтервал допустимих змін для рентабельної продукції P_3: $-75 \leq \Delta c_3 \leq 50$.

За зміни доходу від реалізації 1 од. продукції P_2 на Δc_2 грн, яка не увійшла в оптимальний план, остання симплексна таблиця набуває вигляду, наведеному на рис. 3.5.

i	*Базис*	$C_Б$	X_0	300	250+Δc_2	450	0	0	0
				X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
1	X_3	450	12	0	-0,4	1	0,16	-1,2	0
2	X_1	300	60	1	2	0	-0,2	2	0
3	X_6	0	180	0	14	0	-2,6	2	1
m+1	$\Delta_j = z_j - c_j$		23400	0	170-Δc_2	0	12	60	0

Рис. 3.5. Оцінювання інтервалів допустимих змін коефіцієнтів цільової функції

Використовуючи умову оптимальності визначаємо інтервал стійкості (допустимих змін) для цього коефіцієнта:

$$170 - \Delta c_2 \geq 0;$$
$$-\infty < \Delta c_2 \leq 170.$$

Звіт зі стійкості (див. рис. 2.7) містить саме такі значення у стовпцях **Допустиме збільшення** та **Допустиме зменшення** для змінних (обсяги виробництва P_1, P_2 і P_3 відповідно) таблиці **Комірки змінних**.

Завдання до практичної роботи № 3

Кондитерський цех для виробництва 3-х видів карамелі «Фантазія», «Ласунка», «Янтарна» використовує три види основної сировини: цукор, патоку, фруктове пюре. Запаси сировини, норми витрат сировини на виготовлення 1 т карамелі та дохід від реалізації 1 т карамелі за видами, наведено у табл. 3.5.

Таблиця 3.5

Завдання до практичної роботи № 3: вихідні дані

Вид сировини	Норми витрат сировини на 1т карамелі, т			Запас сировини
	Фантазія	Ласунка	Янтарна	
Цукор, т	a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1
Патока, т	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2
Фруктове пюре, т	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3
Дохід від реалізації 1т карамелі, грн	c_1	c_2	c_3	

На підставі вихідних даних за варіантами (табл. 3.6) необхідно:

1. Побудувати економіко-математичну модель задачі оптимального використання сировини (планування виробництва) кондитерського цеху.

2. Розв'язати задачу симплексним методом. Виконати економічний експрес-аналіз оптимального рішення задачі (записати оптимальний план виробництва карамелі, максимальний дохід від реалізації, дефіцитні/недефіцитні види сировини).

3. Сформулювати двоїсту задачу. Побудувати економіко-математичну модель двоїстої задачі, записати її оптимальний розв'язок.

4. Оцінити дефіцитність сировини, використовуючи двоїсті оцінки.

5. Оцінити рентабельність кожного виду карамелі та збитки від виробництва нерентабельних видів карамелі, використовуючи двоїсті оцінки.

6. Прийняти рішення про доцільність виробництва 4-го виду карамелі «Фантазія-Нова» (норми витрат сировини на 1 т карамелі та дохід від реалізації 1 т карамелі виписати з наступного варіанта).

7. Оцінити величину зміни максимального доходу від реалізації за зміни запасів кожного виду сировини на 1 т. Обґрунтувати, чим зумовлені ці зміни.

8. Оцінити інтервали стійкості щодо змін запасів сировини кожного виду (допустимі зміни запасів сировини).

9. Оцінити інтервали стійкості щодо змін доходу від реалізації кожного виду карамелі (допустимі зміни коефіцієнтів функції доходу).

10. Перевірити отримані результати за допомогою надбудови MS Ecxel **Пошук рішення**

Таблиця 3.6

Завдання до практичної роботи № 3: Вихідні дані за варіантами

Варіант	b_1	b_2	b_3	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	c_1	c_2	c_3
1	10	5	8	0,1	0,3	0,6	0,3	0,4	0,2	0,6	0,3	0,2	5	4	6
2	12	3	4	0,2	0,4	0,1	0,3	0,4	0,4	0,5	0,2	0,5	4	6	5
3	15	8	12	0,6	0,3	0,2	0,2	0,3	0,2	0,2	0,4	0,6	4	8	6
4	20	25	30	0,6	0,2	0,1	0,1	0,4	0,4	0,3	0,4	0,5	5	6	7
5	30	35	17	0,4	0,3	0,2	0,2	0,3	0,2	0,4	0,4	0,4	3	4	4
6	15	18	10	0,3	0,2	0,6	0,3	0,4	0,2	0,4	0,4	0,2	7	4	5
7	10	12	7	0,4	0,2	0,3	0,4	0,2	0,3	0,2	0,6	0,4	6	7	4
8	12	16	8	0,1	0,2	0,5	0,4	0,3	0,2	0,5	0,5	0,3	11	8	11
9	9	14	10	0,2	0,4	0,3	0,3	0,4	0,4	0,5	0,2	0,3	7	6	9
10	8	13	12	0,3	0,4	0,3	0,2	0,4	0,3	0,5	0,5	0,4	9	4	8
11	7	10	13	0,4	0,2	0,5	0,1	0,4	0,2	0,5	0,4	0,3	4	8	9
12	4	8	14	0,5	0,3	0,3	0,2	0,2	0,4	0,3	0,5	0,3	8	9	4
13	7	9	10	0,6	0,7	0,2	0,3	0,3	0,6	0,5	0,8	0,3	7	9	12
14	8	19	7	0,6	0,2	0,1	0,2	0,1	0,1	0,6	0,1	0,2	7	5	4
15	9	18	10	0,7	0,3	0,2	0,3	0,3	0,2	0,5	0,2	0,3	8	7	6
16	10	17	11	0,2	0,4	0,3	0,4	0,4	0,3	0,4	0,3	0,4	9	7	9
17	11	16	13	0,9	0,5	0,4	0,5	0,5	0,4	0,3	0,3	0,5	10	8	4
18	12	15	15	0,2	0,1	0,5	0,4	0,6	0,5	0,2	0,5	0,6	7	8	7
19	13	14	12	0,6	0,2	0,1	0,3	0,4	0,2	0,1	0,5	0,3	8	6	9
20	14	13	9	0,7	0,3	0,7	0,2	0,2	0,2	0,7	0,1	0,1	9	7	4
21	15	12	8	0,7	0,4	0,8	0,1	0,2	0,1	0,2	0,2	0,3	10	8	7
22	16	11	7	0,6	0,5	0,4	0,2	0,3	0,1	0,2	0,3	0,2	7	5	9
23	17	10	9	0,3	0,1	0,2	0,3	0,2	0,3	0,1	0,1	0,1	4	5	8

Контрольні запитання та завдання до захисту практичної роботи

1. Які оцінки оптимальними двоїстими оцінками початкової задачі?
2. Назвіть п’ять властивостей об’єктивно зумовлених оцінок.
3. Сформулюйте першу (основну) теорему двоїстості.
4. У чому полягає економічний зміст першої теореми двоїстості?
5. Чи можна знайти розв’язок двоїстої задачі, розв’язавши лише початкову задачу?
6. Сформулюйте другу теорему двоїстості.
7. У чому полягає економічний зміст другої теореми двоїстості?
8. Сформулюйте третю теорему двоїстості.
9. У чому полягає економічний зміст третьої теореми двоїстості?
10. Розкрийте економічний зміст основних змінних початкової задачі до задачі про оптимальне використання ресурсів?
11. Поясніть економічну сутність додаткових змінних початкової задачі до задачі про оптимальне використання ресурсів?
12. У чому полягає економічний зміст основних змінних двоїстої задачі до задачі про оптимальне використання ресурсів?
13. Розкрийте економічний зміст додаткових змінних двоїстої задачі до задачі про оптимальне використання ресурсів?
14. Які інтервали називаються інтервалами стійкості?
15. Який зі звітів надбудови **Пошук рішення** містить відомості про двоїсті оцінки?
16. Поясніть економічну сутність значень, які містяться у стовпчику **Приведена вартість Звіту про стійкість**.
17. Який економічний зміст мають числові значення стовпчика **Тіньова ціна Звіту про стійкість**?
18. Що означають значення стовпчиків **Допустиме збільшення** і **Допустиме зменшення Звіту про стійкість**?
19. У комірці стовпчика **Допустиме збільшення** отримано 1E+30. Поясніть, що це означає.

Практична робота № 4: Транспортна задача

Мета роботи: поглиблення теоретичних знань і формування практичних навичок з розв'язання транспортної задачі в MS Excel

Основні теоретичні відомості

Економічна постановка транспортної задачі. Деякий однорідний продукт, що знаходиться у m постачальників A_i в обсягах a_i ($i=\overline{1;m}$) одиниць відповідно необхідно перевезти n споживачам B_j в обсягах b_j ($j=\overline{1;n}$) одиниць. Відома вартість C_{ij} перевезень одиниці вантажу від кожного A_i-го постачальника до кожного B_j-го споживача.

Необхідно визначити план перевезень, за якого:

1) запаси всіх постачальників вивозяться повністю;

2) потреби всіх споживачів цілком задовольняються;

3) сумарні витрати на перевезення всіх вантажів – мінімальні.

У такій постановці задачі ефективність плану перевезень визначається його вартістю і така задача має назву ***транспортної задачі за критерієм вартості перевезень***. Умови задачі у вигляді матриці планування (табл. 4.1)

Таблиця 4.1

Матриця планування перевезень

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потреби	b_1	b_2	…	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i$ / $\sum_{j=1}^{n} b_j$

Припустимо, що 1) постачальники A_i ($i=\overline{1;m}$) постачають свою продукцію лише споживачам B_j ($j=\overline{1;n}$), а споживачі задовольняють свої потреби лише у цих постачальників; 2) загальні запаси дорівнюють загальним потребам, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (4.1)$$

Транспортна задача називається ***закритою,*** або ***збалансованою***, якщо виконується умова рівності запасів і потреб, у протилежному випадку транспортної задачі називається ***відкритою,*** або ***незбалансованою.***

Алгоритм розв'язання транспортної задачі

1. Запис транспортної задачі у вигляді матриці планування. Визначення типу транспортної задачі, якщо відкрита, то звести до закритого типу.
2. Побудова ЕММ транспортної задачі.
3. Побудова початкового опорного плану транспортної задачі трьома методами. Вибір плану з найменшою вартістю.
4. Пошук оптимального плану за методом потенціалів.
5. Перевірка оптимального плану в середовищі табличного процесору MS Excel.

Побудова економіко-математичної моделі транспортної задачі здійснюється за стандартним алгоритмом побудови ЕММ задач лінійного програмування.

1. Мета розв'язання задачі

Необхідно розробити такий план перевезень, за якого: 1) запаси всіх постачальників вивозяться повністю; 2) потреби всіх споживачів цілком задовольняються; 3) сумарні витрати на перевезення всіх вантажів – мінімальні.

2. Вибір змінних

x_{ij} ($i=\overline{1;m}$, $j=\overline{1;n}$) – обсяги перевезень одиниці вантажу від постачальника A_i до споживача B_j

3. Цільова функція

$c_{ij}x_{ij}$ – витрати на перевезення вантажу x_{ij} від постачальника A_i

до споживача B_j, тоді цільова функція – функція сумарних витрат на перевезення всіх вантажів:

$$\begin{aligned} Z = & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + \\ & + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{2n}x_{2n} + \\ & \ldots \\ & + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn} \to \min, \end{aligned} \qquad (4.2)$$

або у короткому запису:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min . \qquad (4.2^*)$$

4. Побудова системи обмежень

а) сумарний обсяг продукції, що вивозиться з кожного i-го пункту, має дорівнювати запасу продукції в даному пункті:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1; \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2; \\ \ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m; \end{cases} \qquad (4.3)$$

або у короткому запису:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \,, \; i = \overline{1; m} \,, \qquad (4.3^*)$$

б) сумарний обсяг продукції, що ввезений кожному j-му споживачеві, має дорівнювати його потребам:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1; \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2; \\ \ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n; \end{cases} \qquad (4.4)$$

або у короткому запису:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = \overline{1;n}. \qquad (4.4^*)$$

Умова невід'ємності обсягів перевезень:

$$x_{ij} \geq 0, \ i = \overline{1;m}, \ j = \overline{1;n}. \qquad (4.5)$$

5. Економіко-математична модель транспортної задачі: знайти план перевезень $X = (x_{ij})$ ($i = \overline{1;m}$, $j = \overline{1;n}$), який забезпечує мінімум функції транспортних витрат

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

за обмежень

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = \overline{1;m}; \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = \overline{1;n}; \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, \ i = \overline{1;m}, \ j = \overline{1;n}.$$

Планом транспортної задачі називається будь-який невід'ємний розв'язок системи обмежень (4.3)-(4.4), який позначають матрицею $X = (x_{ij})$ ($i = \overline{1;m}$, $j = \overline{1;n}$).

Оптимальним планом транспортної задачі називається план $X^* = (x_{ij}^*)$ ($i = \overline{1;m}$, $j = \overline{1;n}$), для якого цільова функція (4.2) набирає найменшого значення.

Умова існування розв'язку транспортної задачі. Необхідною і достатньою умовою існування розв'язку транспортної задачі (4.2) – (4.5) є її збалансованість.

Якщо під час перевірки збалансованості виявилося, що транспортна задача відкрита, то її необхідно звести до закритого типу:

– якщо сумарні запаси перевищують сумарні потреби, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

то вводиться фіктивний *споживач* B_{n+1} з потребою:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

– якщо сумарні потреби перевищують сумарні запаси, тобто

$$\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i ,$$

то вводиться фіктивний *постачальник* A_{m+1} з запасами:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i .$$

Зауваження.

1. Вартості перевезення одиниці вантажу як від фіктивного постачальника, так і до фіктивного споживача вважають такими, що дорівнюють *нулю*, оскільки вантаж в обох випадках не перевозиться.

2. Перш ніж розв'язувати транспортну задачу, необхідно перевірити, до якого типу вона належить, і за необхідності привести її до закритого типу.

Транспортна задача (4.2)-(4.5) є звичайною ЛП-задачею і може бути розв'язана симплексним методом, однак особливості побудови математичної моделі транспортної задачі дають змогу розв'язати її простіше. Легко помітити, що всі коефіцієнти при змінних у рівняннях (4.3)-(4.4) дорівнюють одиниці, а сама система обмежень (4.3)-(4.4) задана в канонічній формі. Крім того, система обмежень (4.3)-(4.4) складається з mn невідомих та $m + n$ рівнянь, які пов'язані між собою співвідношенням (4.1). Якщо додати відповідно праві та ліві частини систем рівнянь (4.3) та (4.4), то отримаємо два однакових рівняння:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j;$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

Наявність у системі обмежень двох однакових рівнянь свідчить про її лінійну залежність. Якщо одне з цих рівнянь відкинути, то в загальному випадку система обмежень буде містити $m + n - 1$ лінійно незалежне рівняння, отже, їх можна розв'язати відносно $m + n - 1$ базисних змінних.

Отже, ***опорним планом*** транспортної задачі називається такий допустимий її план, що містить не більш ніж $m + n - 1$ додатних компонент, а всі інші його компоненти дорівнюють нулю. Такий план ***невироджений***. Якщо ж кількість базисних змінних менша ніж $m + n - 1$, то опорний план – ***вироджений***.

Якщо умови транспортної задачі та її опорний план записані у вигляді табл. 4.1, то клітини, у яких $x_{ij} > 0$ (ненульові перевезення), називаються ***заповненими***, решта – **незаповненими** (***порожніми)***.

Заповнені клітини відповідають базисним змінним, і для невиродженого плану їх кількість дорівнює $m + n - 1$.

Циклом у транспортній таблиці називається послідовність клітин, з'єднаних замкнутою ламаною лінією, яка робить поворот на 90^0 у заповнених клітинах.

Якщо для певного набору заповнених клітин неможливо побудувати цикл, то така послідовність клітин ***ациклічна***.

Клітині циклу, в яких здійснюється поворот ланки ламаної лінії на 90^0, називаються ***вершинами*** циклу. Найпростіші цикли зображені на рис. 4.2.

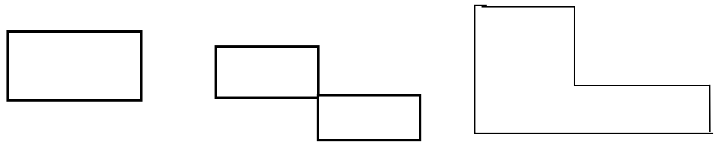


Рис. 4.1. Приклади циклів транспортної задачі

Кількість клітин, які утворюють будь-який цикл транспортної задачі, завжди парна.

Теорема 1. Щоб деякий план ТЗ був опорним, необхідно і достатньо його ациклічності.

Теорема 2. (Наслідок Т.1.) Будь-яка сукупність з $m + n$ клітин матриці транспортної задачі утворює цикл.

Схему ідентифікації планів транспортної задачі наведено на рис. 4.2

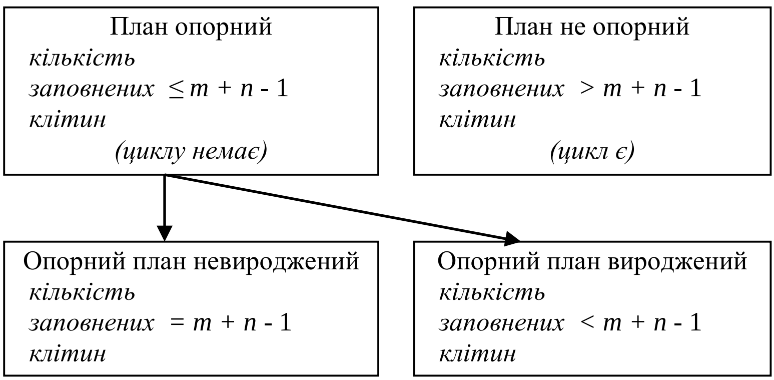


Рис. 4.2. Схема ідентифікації планів транспортної задачі

Теорема 3. Якщо всі запаси a_i ($i = \overline{1;m}$) і потреби b_j ($j = \overline{1;n}$) невід'ємні цілі числа, то будь-який опорний план складається із значень, що є цілими числами.

Методи побудови опорного плану транспортної задачі. Як і в звичайному симплексному методі, розв'язування транспортної задачі полягає в цілеспрямованому переборі та перевірці на оптимальність опорних планів. Початком такого ітераційного процесу є побудова першого опорного плану.

Початковий опорний план транспортної задачі, як і будь-якої ЛП-задачі можна побудувати симплексним методом, що призведе до необхідності надто складних розрахунків. Але існують кілька простих методів побудови початкового опорного плану: методи північно-західного кута, мінімальної вартості, подвійної переваги.

Суть ***методу північно-західного кута*** полягає у тому, що заповнення таблиці починається, не враховуючи вартостей перевезень, з північно-західного, тобто лівого верхнього кута – клітина A_1B_1. У цю клітину записується максимально можливе (необхідне) перевезення, тобто менше з двох чисел a_1 та b_1. Далі аналогічно заповнюється північно-західний кут тієї частини таблиці, що залишилась незаповненою, і так далі до завершення заповнення таблиці у правій нижній клітинці. Значення вантажів будуть розташовані по діагоналі таблиці.

Суть ***методу мінімальної вартості*** полягає у тому, що на кожному кроці заповнюється клітина таблиці, яка має найменшу вартість перевезення одиниці вантажу, доти, доки не будуть розподілені всі перевезення між постачальниками та споживачами.

Якщо розмірність задачі досить велика, для спрощення процедури пошуку мінімальної вартості застосовується ***метод подвійної переваги***. Згідно з цим методом перед початком заповнення матриці планування необхідно позначити будь-яким символом клітинки, які містять найменшу вартість у рядках, а потім – у стовпчиках. Заповнення таблиці починається з клітин, які позначені двома символами (ці клітини містять мінімальні вартості як за рядком, так за стовпчиком). Далі заповнюють клітини, позначені одним символом, решту клітин – за методом мінімальної вартості.

Теорема 4. Опорний план транспортної задачі, знайдений методом північно-західного кута, завжди ациклічний.

Зауваження. Ефективність наведених методів можна оцінювати лише в середньому, оскільки можлива ситуація, що методом мінімальної вартості отримано опорний план транспортної задачі ліпший, ніж методом подвійної переваги.

Початковий опорний план можна було б довести до оптимального симплексним методом, але через громіздкість симплексних таблиць, що містять mn змінних, для отримання оптимального плану ТЗ використовують модифікований розподільчий метод – метод потенціалів

Критерій Канторовича оптимальності опорного плану транспортної задачі. Для того щоб план перевезень $X^* = (x_{ij}^*)$ був оптимальним необхідно і достатньо, щоб існували числа

$u_1, u_2, ..., u_m$ – потенціали постачальників;

$v_1, v_2, ..., v_n$ – потенціали споживачів,

для яких виконуються умови:

1) для кожної ***заповненої*** клітини сума потенціалів повинна дорівнювати вартості одиниці перевезення, що стоїть у цій клітині:

$$u_i + v_j = c_{ij}; \tag{4.6}$$

2) для кожної ***незаповненої*** клітини сума потенціалів повинна бути менша або рівна вартості одиниці перевезення, що стоїть у цій клітині:

$$u_i + v_j \le c_{ij}. \tag{4.7}$$

Алгоритм розв'язання транспортної задачі методом потенціалів

1. Побудова системи потенціалів

Потенціали опорного плану визначають із системи рівнянь (4.6), які записують для всіх заповнених клітин матриці планування.

Систему потенціалів можна побудувати лише для *невиродженого опорного плану.* Кількість заповнених клітин такого плану дорівнює ($m + n$ – 1). Тому для нього можна скласти систему ($m + n$ – 1) лінійно незалежних рівнянь виду (4.6), а кількість невідомих – ($m + n$). Кількість рівнянь на одне менше, ніж невідомих, тому система невизначена, і одному з потенціалів надають нульове значення (потенціалу, який найчастіше зустрічається). Після цього всі інші потенціали розраховуються однозначно.

Щоб позбутися *виродженості* опорного плану, треба доповнити кількість заповнених клітин до ($m + n$ – 1), для цього в деякі клітини таблиці в необхідній кількості вводяться нульові постачання. Обсяги запасів постачальників і потреби споживачів після цього не змінюються, однак клітини зі значенням «нуль» вважаються заповненими і називаються ***фіктивно заповненими***.

Головною умовою при введенні нульової поставки є збереження необхідної та достатньої умови опорності плану транспортної задачі — його ациклічності. Клітина має вибиратись у такий спосіб, щоб неможливо було побудувати замкнений цикл.

2. Перевірка оптимальності опорного плану транспортної задачі

За допомогою розрахованих потенціалів перевіряється виконання умови оптимальності (4.7) для незаповнених клітин.

Якщо хоча б для однієї клітини ця умова не виконується, то поточний план неоптимальний і необхідно побудувати новий опорний план.

3. Побудова нового опорного плану

3.1 Вибір змінної для введення в базис (клітини, яку потрібно завантажити)

Загальне правило переходу від одного опорного плану до іншого полягає в тому, що з попереднього базису виводять певну змінну (вектор), а на її місце вводять іншу змінну (вектор), яка має поліпшити значення цільової функції. Аналогічна операція здійснюється і в алгоритмі методу потенціалів.

Перехід від одного опорного плану до іншого виконують заповненням клітинки, для якої порушено умову оптимальності. Якщо таких клітин кілька, то для заповнення вибирають таку, що має найбільше порушення, тобто

$$\max\left\{\Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij}\right\}. \qquad (4.8)$$

Вибрана клітина підлягає завантаженню і позначається «+Е».

3.2. Побудова циклу та визначення величини вантажу, який перерозподіляється за циклом

Кількість заповнених клітин разом із обраною на попередньому кроці становить $m + n$, тому з цих клітин можна побудувати цикл перерозподілу вантажу. Кожній вершині побудованого циклу (правило, описано вище), починаючи з клітини відзначеної «+Е», за черговістю приписують «–Е» і «+Е».

Значення вантажу Е, що перерозподіляється за циклом, визначається як

$$E = min\ x_{ij}, \tag{4.9}$$

де x_{ij} – перевезення, що стоять у вершинах циклу зі знаком «–Е».

Новий опорний план будується у новій матриці планування шляхом перерозподілу вантажу по циклу, тобто додаванням вантажу Е у клітини з позначкою «+Е» та його відніманням у клітинах з позначкою «–Е». Отже, клітина, що була незаповненою, стає заповненою, а клітина з мінімальним вантажем x_{ij} у новому плані стає порожньою, решта клітин-вершин циклу відповідно перераховані.

Зауваження. Якщо значенню Е відповідає кілька однакових перевезень, то при відніманні треба залишити у відповідних клітинах нульові перевезення у такій кількості, яка дає змогу зберегти невиродженість опорного плану.

4. Перевірка оптимальності опорного плану транспортної задачі

Щоб перевірити новий опорний план на оптимальність, необхідно побудувати нову систему потенціалів (тобто перейти до кроків 1 і 2).

Якщо умова оптимальності виконується для всіх незаповнених клітин – опорний план оптимальний, інакше необхідно побудувати новий опорний план (тобто перейти до кроку 3) з подальшою його перевіркою.

Описані кроки повторюються доти, доки умови оптимальності не будуть задовольняти всі незаповнені клітини матриці планування.

Зауваження. Аналогічно з розв’язуванням загальної ЛП-задачі симплексним методом, якщо за перевірки оптимального плану транспортної задачі для деяких клітин виконується рівність (4.6), то це означає, що задача має альтернативні оптимальні плани. Отримати їх можна, якщо побудувати цикли перерозподілу обсягів перевезень для відповідних клітин.

Розв'язання типових задач

Задача 4.1. Оптимальний план перевезень

Логістична компанія надає послуги з транспортування вантажів, сприяючи своїм клієнтам у процесі просування товарів від виробника (постачальника) до споживача. Фахівець планового відділу вибудовує оптимальну логістику для перевезення вантажів від чотирьох постачальників до п'ятьох споживачів. Вимагається розробити план перевезень, який забезпечує вивезення запасів усіх постачальників і задовольняє потреби всіх споживачів, за мінімальних транспортних витрат. Транспортні витрати з перевезення одиниці вантажу (грн/т) від кожного постачальника до кожного споживача, а також їхні запаси і потреби відомі (табл. 4.2).

Таблиця 4.2

Матриця транспортних витрат

Постачальники	Споживачі					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	7	4	1	4	100
A_2	2	7	10	6	11	250
A_3	8	5	3	2	2	200
A_4	11	8	12	16	13	300
Потреби	200	200	100	100	250	

Розв'язання

1. Запис транспортної задачі у вигляді матриці вартостей. Визначення типу транспортної задачі, якщо відкрита звести до закритого типу.

Транспортна задача закрита, оскільки сума запасів дорівнює сумі потреб 850 т.

2. Побудова економіко-математичної моделі транспортної задачі

Економіко-математична модель транспортної задачі: знайти план перевезень X = (x_{ij}) ($i = \overline{1;m}$, $j = \overline{1;n}$), який забезпечує мінімальні транспортні витрати:

$$
\begin{aligned}
Z = & \; 10x_{11} + 7x_{12} + 4x_{13} + 1x_{14} + 4x_{15} + \\
& + 2x_{21} + 7x_{22} + 10x_{23} + 6x_{24} + 11x_{25} + \\
& + 8x_{31} + 5x_{32} + 3x_{33} + 2x_{34} + 2x_{35} + \\
& + 11x_{41} + 8x_{42} + 12x_{43} + 16x_{44} + 13x_{45} \to \min
\end{aligned}
$$

за обмежень: запаси постачальників мають бути повністю вивезеними:

$$
\begin{cases}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 100; \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 250; \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 200; \\
x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 300;
\end{cases}
$$

а потреби споживачів мають бути повністю задоволеними:

$$
\begin{cases}
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 200; \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 200; \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 100; \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 100; \\
x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 250;
\end{cases}
$$

а також умов невід’ємності обсягів перевезень:

$$x_{ij} \geq 0, \; i = \overline{1;4}, \; j = \overline{1;5}.$$

3. Побудова початкового опорного плану транспортної задачі трьома методами. Вибір плану з найменшою вартістю

3.1. Метод північно-західного кута

Згідно з методом північно-західного кута, заповнення таблиці починається з клітини A_1B_1 (північно-західний кут матриці планування), у яку записується максимально можливий (необхідний) вантаж, що планується до перевезення. Запаси постачальника A_1 дорівнюють 100 т, потреби споживача B_1 – 200 т, тому максимально можливе перевезення – 100 т. Запаси постачальника A_1 повністю вичерпано, тому решта комірок цього рядка прокреслюються.

У частині таблиці, яка залишилась незаповненою, північно-західним кутом є клітина A_2B_1. Залишок потреб споживача B_1 100 т, запаси постачальника A_2 – 250 т, тому максимально можливе перевезення – 100 т. Отже, потреби споживача B_1 повністю задоволено, тому решта комірок цього стовпця прокреслюються.

У частині таблиці, яка залишилась незаповненою, північно-західним кутом є клітина A_2B_2, яка заповнюється аналогічно попереднім міркуванням. Остаточний план наведено на рис. 4.3.

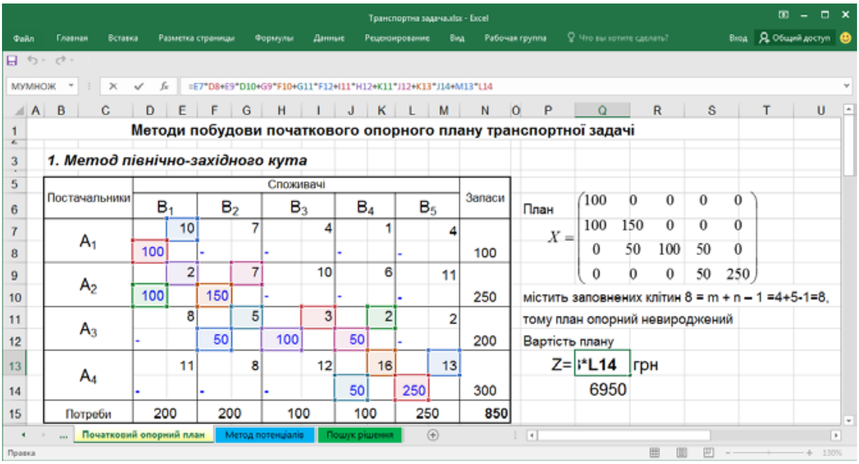


Рис. 4.3. Метод північно-західного кута

3.2. Метод мінімальної вартості

Згідно з методом мінімальної вартості, першою заповнюється клітина таблиці, яка має найменшу вартість перевезення одиниці вантажу. У таблиці мінімальна вартість 1 у клітину A_1B_4, тому у цю клітину записується максимально можливе перевезення 100 т. Запаси постачальника A_1 повністю вивезено, потреби споживача B_4 повністю задоволено, тому решта комірок 1-го рядка і 4-го стовпця прокреслюються.

У частині таблиці, яка залишилась незаповненою, мінімальна вартість 2 міститься у клітинах A_2B_1 і A_3B_5. У клітину A_2B_1 записується максимально можливе перевезення 200 т, потреби споживача B_1 повністю задоволено, тому решта комірок 1-го стовпця прокреслюються. Наступною заповнюється клітина A_3B_5 і так далі. Остаточний план наведено на рис. 4.4. Вартість цього плану 4300 грн. Значення цільової функції менше за попередній варіант, значить, цей план ближчий до оптимального, але, на відміну від попереднього, вироджений.

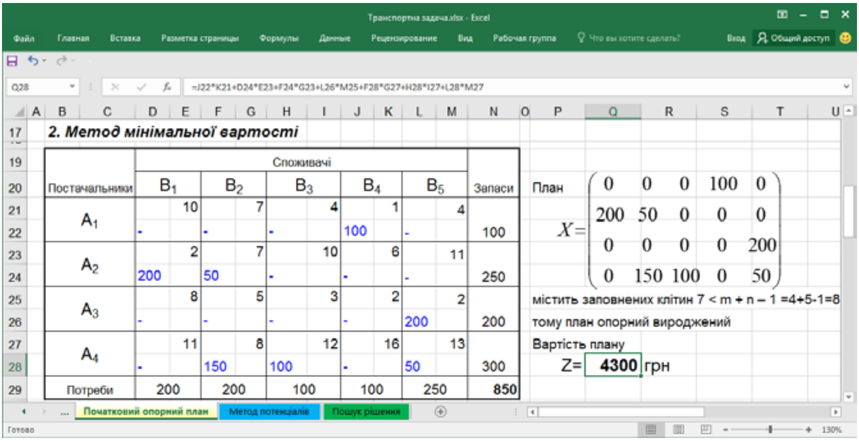


Рис. 4.4. Метод мінімальної вартості

3.3. Метод подвійної переваги

Згідно з методом подвійної переваги перед початком заповнення таблиці розглядається 1-й рядок і клітина з мінімальною вартістю (A_1B_4) позначається певним символом, наприклад, v. Аналогічно розглядаються наступні рядки, а потім стовпчики. Заповнюються спочатку комірки з двома символами (A_1B_4, A_2B_1, A_3B_5), потім з одним символом (A_4B_2, A_2B_3), решта комірок за методом мінімальної вартості (A_4B_3, A_4B_5). Остаточний план наведено на рис. 4.5. Вартість цього плану найменша 4250 грн, але він вироджений.

Отже, опорний план, отриманий методом подвійної переваги, найближчий до оптимального, тому саме він підлягає перевірці на оптимальність методом потенціалів.

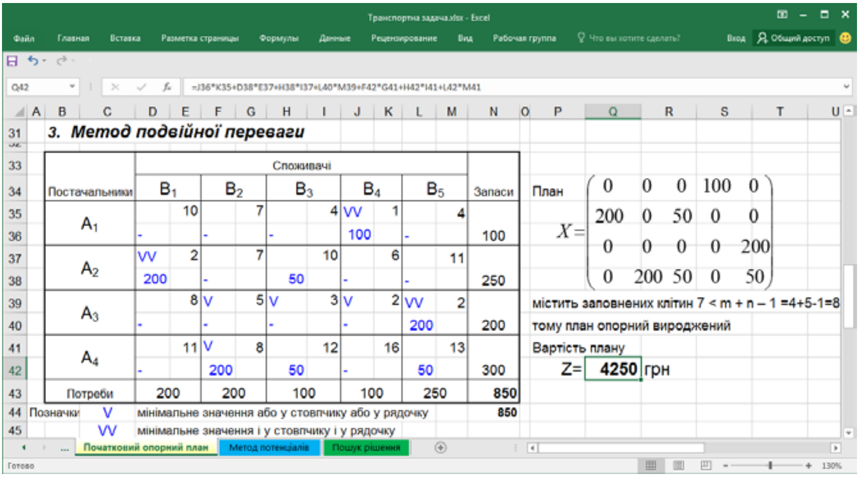


Рис. 4.5. Метод подвійної переваги

4. Пошук оптимального плану за методом потенціалів

4.1. Побудова системи потенціалів

У матрицю планування додати рядок і стовпчик, у яких записуватимуться значення потенціалів (рис. 4.6).

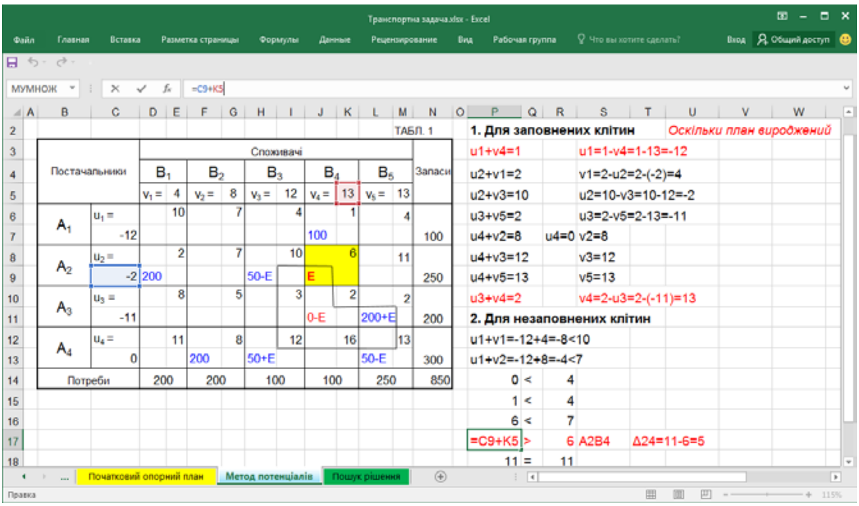


Рис. 4.6. Метод потенціалів: таблиця 1

Для визначення потенціалів опорного плану для всіх заповнених клітин матриці планування записуються рівняння виду (4.6). Для невиродженого плану рівнянь завжди на одне менше, ніж змінних, тому одному із потенціалів (доцільно потенціалу, який найчастіше зустрічається у системі) надається значення 0. У задачі це потенціал u_4, отже, $u_4 = 0$. Решта рівнянь системи розв'язуються однозначно, окрім першого, оскільки план вироджений (заповнених клітин $7 < m + n - 1 = 8$).

Щоб визначити потенціали u_1 та v_4, необхідно зробити фіктивно заповненою клітиною одну із вільних клітин рядка A_1 чи стовпця B_4. Транспортна задача є задачею мінімізації транспортних витрат, тому доцільно зробити фіктивно заповненою клітину з мінімальною вартістю одиниці перевезення. Обираємо клітину A_3B_4, записуємо нуль і вважаємо її зайнятою. Записуємо суму потенціалів для цієї клітини і розв'язуємо систему 2-х рівнянь:

$$\begin{cases} u_3 + v_4 = 2; \quad v_4 = 2 - (-11) = 13; \\ u_1 + v_4 = 1; \quad u_1 = 1 - 13 = -12. \end{cases}$$

Систему потенціалів побудовано. Значення потенціалів записуються у таблицю (див. рис. 4.6) і перевіряються усно.

4.2. Перевірка оптимальності опорного плану транспортної задачі

Умова оптимальності (4.7) перевіряється для незаповнених клітин матриці планування. У задачі умова оптимальності порушується лише для клітини A_2B_4. Отже, опорний план не оптимальний, його необхідно поліпшити.

4.3. Побудова нового опорного плану

4.3.1 Вибір змінної для введення в базис (клітини, яку потрібно завантажити)

Умова оптимальності не виконується для клітини A_2B_4, тому ця клітина підлягає завантаженню, позначаємо її «+Е».

4.3.2. Побудова циклу та визначення величини вантажу, який перерозподіляється за циклом

Починаючи з клітини A_2B_4 будуємо цикл, а потім проставляємо по черзі «-E» та «+E» у його вершинах (див. рис. 4.6).

Величина вантажу, який буде перерозподілятися за циклом, визначається за (4.9). У задачі E = min{0;50;50} = 0, тобто нульове перевезення необхідно перемістити у клітину A_2B_4, решта значень опорного плану не зміняться, оскільки додаємо і віднімаємо нуль.

Новий опорний план записується у новій матриці планування (рис. 4.7).

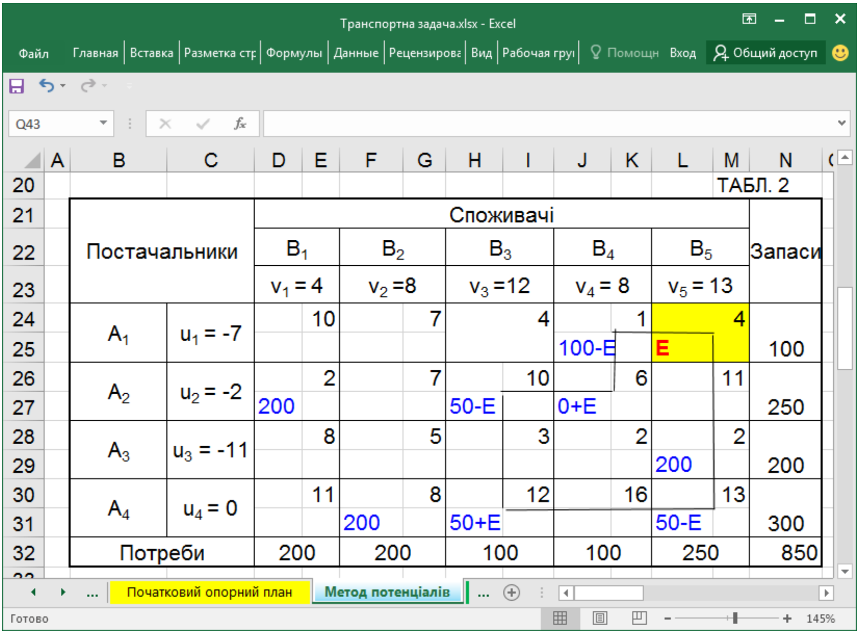


ТАБЛ. 2

Постачальники		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
		$v_1 = 4$	$v_2 = 8$	$v_3 = 12$	$v_4 = 8$	$v_5 = 13$	
A_1	$u_1 = -7$	10	7	4	1 100-E	4 E	100
A_2	$u_2 = -2$	2 200	7	10 50-E	6 0+E	11	250
A_3	$u_3 = -11$	8	5	3	2	2 200	200
A_4	$u_4 = 0$	11	8 200	12 50+E	16	13 50-E	300
Потреби		200	200	100	100	250	850

Рис. 4.7. Метод потенціалів: таблиця 2

4.4. Перевірка оптимальності опорного плану транспортної задачі

Для перевірки нового опорного плану на оптимальність будується нова система потенціалів по заповнених клітинах і перевіряється умова оптимальності для незаповнених клітин. Розрахунки показали (див. рис. 4.7), що план, отриманий у 2-й таблиці, неоптимальний.

Це означає, що необхідно повторити кроки 4.3.1, 4.3.2 і 4.4 до отримання опорного плану, для якого умова оптимальності виконується в усіх незаповнених клітинах. Такий план отримано в 4-й таблиці (рис. 4.8). За реалізації цього плану перевезень логістична компанія зазнає мінімальних витрат 4150 грн.

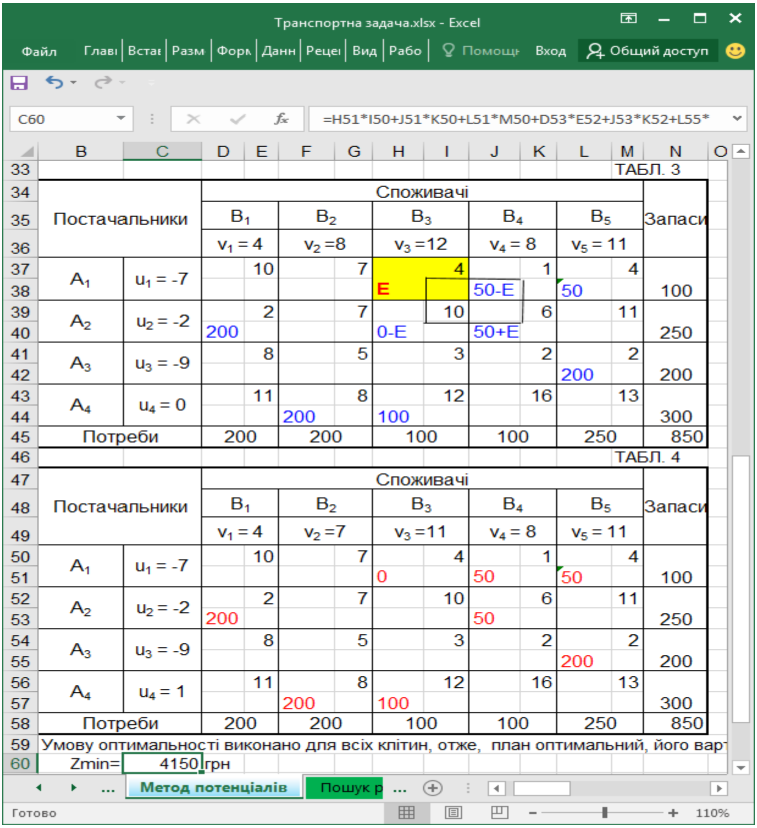


ТАБЛ. 3

Постачальники		Споживачі					Запаси
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
		$v_1 = 4$	$v_2 = 8$	$v_3 = 12$	$v_4 = 8$	$v_5 = 11$	
A_1	$u_1 = -7$	10	7	4 E	1 50-E	4 50	100
A_2	$u_2 = -2$	2 200	7	10 0-E	6 50+E	11	250
A_3	$u_3 = -9$	8	5	3	2	2 200	200
A_4	$u_4 = 0$	11	8 200	12 100	16	13	300
Потреби		200	200	100	100	250	850

ТАБЛ. 4

Постачальники		Споживачі					Запаси
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
		$v_1 = 4$	$v_2 = 7$	$v_3 = 11$	$v_4 = 8$	$v_5 = 11$	
A_1	$u_1 = -7$	10	7	4 0	1 50	4 50	100
A_2	$u_2 = -2$	2 200	7	10	6 50	11	250
A_3	$u_3 = -9$	8	5	3	2	2 200	200
A_4	$u_4 = 1$	11	8 200	12 100	16	13	300
Потреби		200	200	100	100	250	850

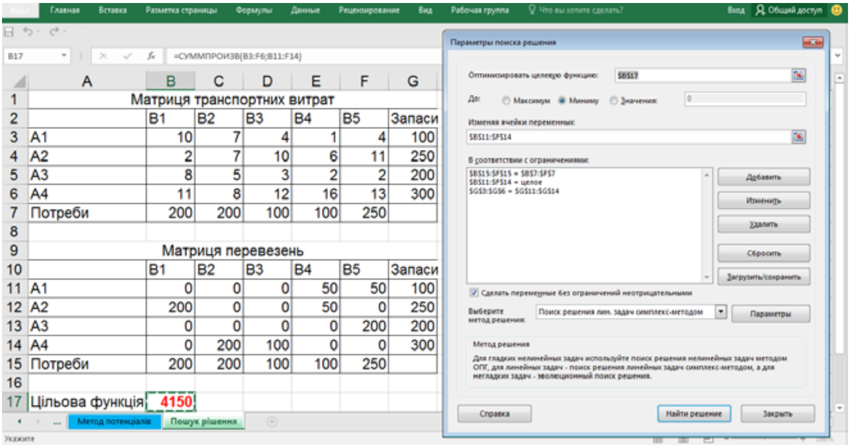
Умову оптимальності виконано для всіх клітин, отже, план оптимальний, його вар

Zmin= 4150 грн

Рис. 4.8. Метод потенціалів: таблиці 3-4

5. Перевірка оптимального плану з використанням надбудови Пошук рішення

Для перевірки оптимального плану з використанням надбудови **Пошук рішення** на новому аркуші формується Матриця транспортних витрати і Матриця перевезень. У комірках стовпчика Запаси і рядка Потреби вводяться формули підсумування відповідних рядків і стовпчиків Матриці перевезень. Формулу цільової функції, діалог **Параметри пошуку рішення** і результати **Пошуку рішення** ілюструє рис. 4.9. Отриманий оптимальний план збігається із розрахованим методом потенціалів.


=СУММПРОИЗВ(B3:F6;B11:F14)

Матриця транспортних витрат

	B1	B2	B3	B4	B5	Запаси
A1	10	7	4	1	4	100
A2	2	7	10	6	11	250
A3	8	5	3	2	2	200
A4	11	8	12	16	13	300
Потреби	200	200	100	100	250	

Матриця перевезень

	B1	B2	B3	B4	B5	Запаси
A1	0	0	0	50	50	100
A2	200	0	0	50	0	250
A3	0	0	0	0	200	200
A4	0	200	100	0	0	300
Потреби	200	200	100	100	250	

Цільова функція 4150

Рис. 4.9. Розв’язання транспортної задачі Пошуком рішення

Завдання до практичної роботи № 4

Ви працюєте у плановому відділі логістичної компанії, яка має власний транспорт, і отримали завдання розробити план транспортування вантажів від трьох постачальників до чотирьох споживачів. Транспортні витрати з перевезення одиниці вантажу (грн/т) від кожного постачальника до кожного споживача, а також їхні запаси і потреби наведено у таблицях за варіантами. Розробіть план перевезень, який забезпечує вивезення запасів усіх постачальників і задовольняє потреби всіх споживачів, за мінімальних транспортних витрат. Побудову плану здійснити за таким алгоритмом:

1. Визначити тип транспортної задачі, якщо задача відкрита, звести до закритого типу.

2. Побудувати економіко-математичну модель транспортної задачі.

3. Побудувати початковий опорний план транспортної задачі трьома методами:

–метод північно-західного кута,

–метод найменшої вартості,

–метод подвійної переваги

та обрати план з найменшою вартістю.

4. Знайти оптимальний план транспортної задачі методом потенціалів.

5. Перевірити отриманий оптимальний план з використанням надбудови **Пошук рішення**.

Варіант №1

Поста-чальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	7	2	5	40
A_2	3	8	4	7	30
A_3	6	3	5	3	100
Потреби	30	50	20	70	

Варіант №2

Поста-чальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	5	2	6	70
A_2	7	7	3	8	120
A_3	5	2	4	5	90
Потреби	50	100	40	90	

Варіант №3

Поста-чальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	6	8	10	50
A_2	3	2	3	5	75
A_3	10	5	1	10	175
Потреби	8	6	7	90	

Варіант №4

Поста-чальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	6	3	4	80
A_2	1	5	6	4	40
A_3	3	4	1	6	30
Потреби	1	7	5	2	

Варіант №5

Поста-чальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	5	3	4	60
A_2	6	1	2	5	100
A_3	3	4	3	8	140
Потреби	7	10	8	5	

Варіант №6

Поста-чальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	3	3	8	60
A_2	8	5	2	6	100
A_3	7	7	3	8	140
Потреби	2	12	6	9	

Варіант №7

Поста-чальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	5	6	8	100
A_2	10	3	2	3	200
A_3	4	10	5	1	120
Потреби	90	150	110	70	

Варіант №8

Поста-чальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	8	2	3	30
A_2	4	7	5	1	50
A_3	5	3	4	1	20
Потреби	10	20	40	30	

Варіант №9

Поста-чальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	3	4	8	100
A_2	5	6	4	7	50
A_3	4	1	6	10	150
Потреби	50	70	80	100	

Варіант №10

Поста-чальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	4	5	1	60
A_2	2	3	9	4	70
A_3	3	4	22	5	20
Потреби	40	30	30	50	

Варіант №11

Поста-чальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	7	5	4	80
A_2	7	8	6	3	120
A_3	6	8	3	2	150
Потреби	130	100	70	50	

Варіант №12

Поста-чальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	6	6	4	20
A_2	3	7	9	5	40
A_3	1	2	2	7	60
Потреби	20	10	40	50	

Варіант №13

Поста-чальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	1	6	3	150
A_2	4	3	4	1	90
A_3	6	5	2	7	110
Потреби	90	110	120	100	

Варіант №14

Поста-чальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	7	6	8	110
A_2	3	2	4	6	130
A_3	8	5	7	4	120
Потреби	120	100	90	100	

Варіант №15

Поста-чальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	4	6	1	60
A_2	5	1	2	2	70
A_3	4	5	8	1	20
Потреби	40	30	30	50	

Варіант №16

Поста-чальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	5	5	7	10
A_2	8	7	5	4	80
A_3	9	6	4	5	100
Потреби	20	75	25	70	

Варіант №17

Поста-чальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	8	6	3	100
A_2	1	2	3	2	100
A_3	3	4	4	2	50
Потреби	30	100	70	50	

Варіант №18

Поста-чальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	3	3	9	50
A_2	8	7	5	4	120
A_3	6	6	4	5	90
Потреби	80	40	100	40	

Варіант №19

Поста-чальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3	9	7	120
A_2	3	4	6	1	130
A_3	5	1	2	2	150
Потреби	80	130	70	120	

Варіант №20

Поста-чальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	4	1	3	30
A_2	5	6	6	4	20
A_3	3	7	9	5	40
Потреби	20	20	35	15	

Варіант №21

Поста-чальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	4	1	5	50
A_2	6	4	8	3	120
A_3	2	4	3	3	90
Потреби	80	40	100	40	

Варіант №22

Поста-чальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	8	1	2	3	100
A_2	1	4	4	1	120
A_3	2	8	5	1	80
Потреби	50	80	70	95	

Варіант №23

Поста-чальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	2	9	7	10
A_2	3	4	5	1	80
A_3	6	4	8	3	100
Потреби	20	75	25	70	

Варіант №24

Поста-чальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	1	4	5	120
A_2	3	6	1	4	130
A_3	2	5	3	8	150
Потреби	80	100	130	90	

Контрольні запитання та завдання до захисту практичної роботи

1. Зробіть економічну постановку транспортної задачі.
2. Яка транспортна задача називається закритою, або збалансованою?
3. Опишіть загальний алгоритм розв'язання транспортної задачі.
4. Сформулюйте економіко-математичну модель транспортної задачі.
5. Дайте визначення оптимального плану транспортної задачі.
6. Як визначити з матриці планування, що опорний план вироджений або невироджений?
7. У чому суть методу північно-західного кута початкового плану транспортної задачі?
8. Поясніть суть методу мінімальної вартості початкового плану транспортної задачі.

9. У чому суть методу мінімальної вартості початкового плану транспортної задачі?

10. Сформулюйте критерій Канторовича оптимальності опорного плану транспортної задачі.

11. З якою метою вводять фіктивних постачальників або фіктивних споживачів при розв’язку транспортної задачі?

12. Чи можна побудувати систему потенціалів, якщо опорний план транспортної задачі вироджений?

13. Дайте визначення циклу в транспортній задачі. Наведіть приклад.

14. У якому випадку транспортна задача має єдиний оптимальний план, а в якому – альтернативний оптимум?

15. Як формується матриця перевезень у MS Excel для розв’язання транспортної задачі з використання надбудови **Пошук рішення**?

Практична робота № 5: Оптимізаційні методи та моделі теорії ігор

***Мета роботи*:** закріплення знань щодо оптимізаційних методів і моделей теорії ігор та набуття навичок розв’язання ігор у середовищі MS Excel

Основні теоретичні відомості

Теорія ігор – це математичний апарат, який розглядає конфліктні ситуації, а також ситуації спільних дій кількох учасників.

Уперше теорія ігор була систематично викладена Джоном фон Нейманом і Оскаром Моргенштерном і оприлюднена у 1944 р. в монографії «Теорія ігор і економічної поведінки», але окремі результати опубліковано ще у 1920-х роках.

Завдання теорії ігор полягає у розробленні рекомендацій щодо раціональної поведінки учасників гри.

Гра – це математична модель конфліктної ситуації; сторони конфліктної ситуації називаються ***гравцями****,* а результат конфлікту – ***виграшем***.

Теорія ігор вивчає ***стратегічні ігри*** – ігри, у яких джерело невизначеності полягає у відсутності інформації про дії противника, його стратегії.

Гра називається ***парною*** (***грою двох осіб***), якщо в ній беруть участь два гравці; якщо кількість гравців більше двох, гра називається ***множинною***.

Гра називається ***грою з нульовою сумою (антагоністичною),*** *я*кщо виграш одного гравця дорівнює програшу іншого, а сума виграшів обох гравців дорівнює нулю:

$$a + b = 0, \qquad (5.1)$$

де a – виграш гравця А, b – виграш гравця В

Звідси $a = - b,$ тому достатньо розглядати, наприклад, a.

Такі ігри характеризуються протилежними інтересами сторін, тобто ситуацією конфлікту. Інші ігри – *з ненульовою сумою*, виникають як за умов конфліктної поведінки гравців, так і за їхніх узгоджених дій.

Гравець приймає рішення, обирає хід по ходу гри. Водночас можливо, що всі рішення прийняті гравцем заздалегідь (у відповідь на будь-яку ситуацію, що склалася), тоді сукупність таких рішень складає ***стратегію гравця***.

Стратегія гравця – це план за яким він здійснює вибір ходу у будь-якій ситуації, що склалася, і за будь-якої можливої фактичної інформації.

Якщо кожен гравець має скінченну кількість стратегій, то гра – ***скінченна***, в іншому разі – ***нескінченна***.

Гра за можливості поєднання інтересів гравців і домовленості між ними про вибір стратегій називається ***кооперативною***, коли ж гравці не мають можливості чи не бажають координувати свої дії, то гра називається ***некооперативною***.

Щоб *розв'язати гру* (іншими словами: *знайти розв'язок гри*), треба для кожного гравця обрати стратегію, яка задовольняє:

– ***умову оптимальності***, тобто один з гравців (1-й) має отримати максимальний виграш, коли 2-й гравець дотримується своєї стратегії; водночас, 2-й гравець має отримати мінімальний програш, якщо 1-й дотримується своєї стратегії; такі стратегії називаються ***оптимальними***;

– ***умову стійкості***, тобто кожному з гравців повинно бути невигідно відмовитися від своєї стратегії в цій грі.

Розглянемо *парну скінченну гру з нульовою сумою,* тобто є два гравці A і B. Позначимо:

$A_1, A_2, ..., A_m$ – стратегії гравця A,

$B_1, B_2, ..., B_n$ – стратегії гравця B,

Гра має розмірність $m \times n$.

Гравець A може обрати будь-яку стратегію A_i ($i = \overline{1;m}$), у відповідь на яку гравець B може обрати будь-яку свою стратегію B_j ($j = \overline{1;n}$). Сполучення цих стратегій (A_iB_j) призведе до деякого числового результату – *платежу*, який позначається a_{ij} – це «виграш» гравця A, якщо він вибрав стратегію A_i, а гравець B – стратегію B_j. Оскільки гра з нульовою сумою, то «виграш» гравця B складе $-a_{ij}$ (ці числа можуть бути і від'ємними, тому слово «виграш» у лапках).

Матриця $P = (a_{ij})$ ($i = \overline{1;m}$, $j = \overline{1;n}$), елементи якої є виграшами, що відповідають стратегіям A_i і B_j, називається

платіжною, або ***матрицею гри*** (табл. 5.1), а гра називається ***матричною***.

Таблиця 5.1

Платіжна матриця (матриця гри)

Стратегії гравця B / Стратегії гравця A	B_1	B_2	…	B_n	$\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	α_2
…	…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	α_m
$\beta_i = \max\limits_j a_{ij}$	β_1	β_2	…	β_n	$\alpha = \max\limits_i \alpha_i$ / $\beta = \min\limits_j \beta_j$

Із багатьох критеріїв, які пропонуються теорією ігор для вибору раціональних варіантів рішень, найпоширеніший песимістичний критерій – ***принцип максиміну-мінімаксу***. Суть цього критерію ось у чому.

Дії гравця А

Нехай гравець A обрав стратегію A_i, тоді у найгіршому разі він отримає виграш

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}\,,\ i = \overline{1;m}\,.$$

Отримані для всіх стратегій гравця А числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ приписуються до платіжної матриці у вигляді правого додаткового стовпчика.

Пояснення. Обираючи стратегію A_i, гравець A може розраховувати на те, що у результаті розумних дій противника (гравця B) він виграє не менше як α_i.

Передбачаючи таку можливість, гравець A обирає стратегію так, щоб максимізувати свій мінімальний виграш, тобто

$$\alpha = \max_i \alpha_i$$

або

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}\,. \tag{5.2}$$

Число α є гарантованим виграшом гравця A за будь-якої стратегії гравця B і називається ***нижньою ціною гри***, або ***максимінним виграшем***.

Принцип вибору стратегії гравця A, заснований на максимізації мінімальних виграшів, називається ***принципом максиміну***, а обрана за цим принципом стратегія A_i* називається ***максимінною***.

Дії гравця В

Гравець B, який програє суми у розмірі елементів платіжної матриці, навпаки, має обрати стратегію, яка мінімізуватиме його максимально можливий програш за всіма варіантами дій гравця A. Тобто гравець B у кожному стовпці матриці A шукає максимальний елемент

$$\beta_j = \max_i a_{ij}, \quad j = \overline{1;n}.$$

Отримані для всіх стратегій гравця B числа β_1, β_2, … , β_n приписуються до платіжної матриці у вигляді нижнього додаткового рядка.

Пояснення. Обираючи стратегію B_j, гравець B розраховує на те, що у результаті розумних дій противника (гравця A) він програє не більше як β_j.

Розглядаючи усі свої стратегії, гравець B, природно, вибере ту, за якої максимальний програш мінімізується:

$$\beta = \min_j \beta_j$$

або

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}. \tag{5.3}$$

Якщо гравець B дотримуватиметься стратегії, обраної описаним способом, то за будь-якої поведінки гравця A гравцеві B гарантовано програш, не більший за β.

Число β називається ***верхньою ціною гри***, або ***мінімаксним виграшем***.

Принцип вибору стратегії гравця B, заснований на мінімізації максимальних програшів, називається ***принципом мінімаксу***, а обрана за цим принципом стратегія B_j* – ***мінімаксною***.

Фактичний виграш гравця A за розумних дій гравців завжди обмежений нижньою і верхньою ціною гри:

$$\alpha \le v \le \beta \,, \tag{5.4}$$

де v – ціна гри.

Якщо $\alpha = \beta$, то ситуація $\{A_i{*}B_j{*},\}$ виявляється *рівноважною*, і жоден з гравців не зацікавлений у тому, щоб її порушити.

Гра називається ***цілком визначеною***, або ***грою з сідловою точкою***, якщо

$$\alpha = \beta = v\,. \tag{5.5}$$

Елемент платіжної матриці a_{ij}, який одночасно є і мінімальним в i-му рядку, і максимальним j-му стовпці, називається ***сідловою точкою***.

Стратегії $A_i{*}$ та $B_j{*}$, що відповідають сідловій точці, називаються ***оптимальними***, а сукупність оптимальних стратегій і ціна гри – ***розв'язком матричної гри в чистих стратегіях***.

Зауваження. Сідлових точок у матричній грі може бути кілька, але всі вони мають одне і те ж значення.

Якщо гра не має сідлової точки, тобто $\alpha \ne \beta$ і $\alpha \le v \le \beta$, то максимінно-мінімаксні стратегії неоптимальні, тобто кожен з гравців може поліпшити свій результат, якщо вибере інший підхід. Оптимальний розв'язок такої гри визначається шляхом застосування ***змішаних стратегій***, які є певними комбінаціями початкових «чистих» стратегій. Тобто змішана стратегія передбачає використання кількох «чистих» стратегій з різною ймовірністю.

Змішаною стратегією гравця A називається застосування ним чистих стратегій A_1, A_2, ..., A_m з імовірностями $x_1, x_2, ..., x_m$, причому $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$. Аналогічне визначення для гравця B.

Змішані стратегії доцільно записувати у векторній формі:

– для гравця A: $X = (x_1, x_2, ..., x_m)$, де $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$, $x_i \ge 0$, $i = \overline{1; m}$;

– для гравця *B*: $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, де $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$, $y_j \geq 0$, $j = \overline{1; n}$.

У цих умовах кожна звичайна ситуація (в чистих стратегіях) $\{A_i, Bj\}$ за визначенням є випадковою подією і, зважаючи незалежності наборів *X* і *Y*, реалізується з імовірністю $x_i y_j$. У цій ситуації $\{A_i, Bj\}$ гравець *A* отримує виграш a_{ij}. Тож математичне сподівання виграшу гравця *A* в умовах ситуації в змішаних стратегіях (*X*, *Y*) дорівнює

$$f(X, Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \ . \tag{5.6}$$

Це число являє собою *середній виграш* гравця *A* за змішаних стратегій.

Функцією виграшу, або ***платіжною функцією*** $f(X, Y)$ гри за застосування гравцем *A* змішаної стратегії *X*, а гравцем *B* змішаної стратегії *Y*, називається математичне очікування виграшу гравця *A* (програшу гравця *B*) і обчислюється за формулою (1).

Стратегії *X** і *Y** називаються ***оптимальними змішаними стратегіями*** гравців *A* і *B* відповідно, якщо виконане таке співвідношення:

$$\underbrace{f(X, Y^*) \leq f(X^*, Y^*)}_{\text{для } A} \underbrace{\leq f(X^*, Y)}_{\text{для } B}, \tag{5.7}$$

Тобто, якщо їх застосування забезпечить гравцю *A* середній виграш не менший, ніж при застосуванні ним будь-якої іншої стратегії *X* і гравцеві *B* – програш, не більший, ніж при застосуванні ним будь-якої іншої стратегії *Y*.

Сукупність оптимальних стратегій (*X**, *Y**) називається оптимальним розв’язком, а значення платіжної функції при цьому – ціною гри:

$$f(X^*, Y^*) = v \ . \tag{5.8}$$

Теорема фон Неймана (**minimax theorem**). Кожна скінченна гра з нульовою сумою має рішення у змішаних стратегіях.

Якщо чиста стратегія входить в оптимальну змішану стратегію з імовірністю, відмітною від нуля, то вона називається ***активною***.

Теорема про активні стратегії. Якщо один із гравців дотримується своєї оптимальної змішаної стратегії, то виграш залишається незмінним і дорівнює ціні гри v, якщо другий гравець не виходить за межі своїх активних стратегій.

Правило домінування

Як правило, задачі теорії ігор, що моделюють реальні ситуації, мають значну розмірність. Тому важливим моментом дослідження платіжної матриці є способи її скорочення. Скоротити матрицю можна, якщо вилучити стратегії, про які наперед відомо, що вони невигідні або повторюють одна одну.

Стратегії, яким відповідають однакові значення платіжної матриці (тобто матриця містить однакові рядки (стовпці)), називаються ***дублюючими***.

Стратегія A_k гравця *А домінує* (має перевагу) над стратегією A_i, якщо всі елементи k-го рядка платіжної матриці *не менші*, ніж елементи i-го рядка, тобто одночасно виконані такі n нерівностей:

$$a_{i1} \le a_{k1},\ \ a_{i2} \le a_{k2},\ \dots,\ \ a_{in} \le a_{kn}.$$

Гравець *А* вчинить розумно, якщо буде уникати домінованих стратегій (таких, що придушуються; невигідних). Якщо в платіжній матриці один з рядків (k-й) домінує над іншим рядком (i-м), то число рядків у матриці можна зменшити шляхом відкидання домінованих рядків (i-го).

Стратегія B_l гравця *В домінує* (має перевагу) над стратегією Bj, якщо всі елементи l-го стовпця платіжної матриці *не більше,* ніж елементи j-го стовпця, тобто одночасно виконані такі m нерівностей:

$$a_{1l} \le a_{1j},\ \ a_{2l} \le a_{2j},\ \dots,\ \ a_{ml} \le a_{mj}.$$

Гравець *В* учинить розумно, якщо буде уникати домінованих стратегій. Якщо у платіжній один зі стовпців (l-й) домінує над іншим стовпцем (j-м), то число стовпців у матриці можна зменшити шляхом відкидання домінованих стовпців (j-го).

Загальна схема розв'язання парних ігор з нульовою сумою

При розв'язанні довільної кінцевої гри розміру m х n рекомендується дотримуватися такої схеми.

1. Формалізація конфлікту. Побудова платіжної матриці.

2. Аналіз платіжної матриці для спрощення гри (виключити з платіжної матриці вочевидь невигідні стратегії).

3. Дослідження гри на наявність сідлової точки:

а) якщо сідлова точка є, то одразу визначається розв'язок гри у чистих стратегіях і ціна гри;

б) якщо сідлова точка відсутня, то рішення слід шукати у змішаних стратегіях:

– ігри розміру $2 \times n$ або $m \times 2$ розв'язуються графічним методом;

– ігри розміру $m \times n$ розв'язуються шляхом зведення до задачі лінійного програмування.

4. Визначення активних чистих стратегій одного з гравців графічним методом.

5. Визначення оптимальних змішаних стратегій і ціни гри.

6. Економічна інтерпретація розв'язку гри.

Розв'язання типових задач

Задача 5.1. Конкуренція на ринках збуту: гра у чистих стратегіях

Два конкуруючих підприємства A і B («новачок» і «старичок») борються за ринки збуту у 3-х регіонах. Підприємство-новачок A намагається потіснити на ринку підприємство-старичок B.

Стратегія A_1 – підприємство A реалізує свою продукцію у 1-му регіоні, тоді вона отримає прибуток:

– 5 тис. грн, якщо підприємство B також обрало 1-й регіон (здійснюється пара стратегій A_1B_1);

– 6 тис. грн, якщо підприємство B обрало 2-й регіон (здійснюється пара стратегій A_1B_2);

– 6 тис. грн, якщо підприємство B обрало 3-й регіон (здійснюється пара стратегій A_1B_3).

Стратегія A_2 – підприємство A реалізує свою продукцію у 2-му регіоні. Значення прибутків 9, 8, 7 тис. грн відповідно присутності підприємства B.

Стратегія A_3 – підприємство A реалізує свою продукцію у 3-му регіоні. Значення прибутків 7, 8, 6 тис. грн відповідно присутності підприємства B.

Розв'язання

1. Формалізація конфлікту. Побудова платіжної матриці

Підприємство-новачок A – гравець A; підприємство-старичок B – гравець B.

У платіжній матриці (рис. 5.1) записуються прибутки (тис. грн) підприємства A (втрати підприємства B) залежно від ринку збуту та присутності конкурента.

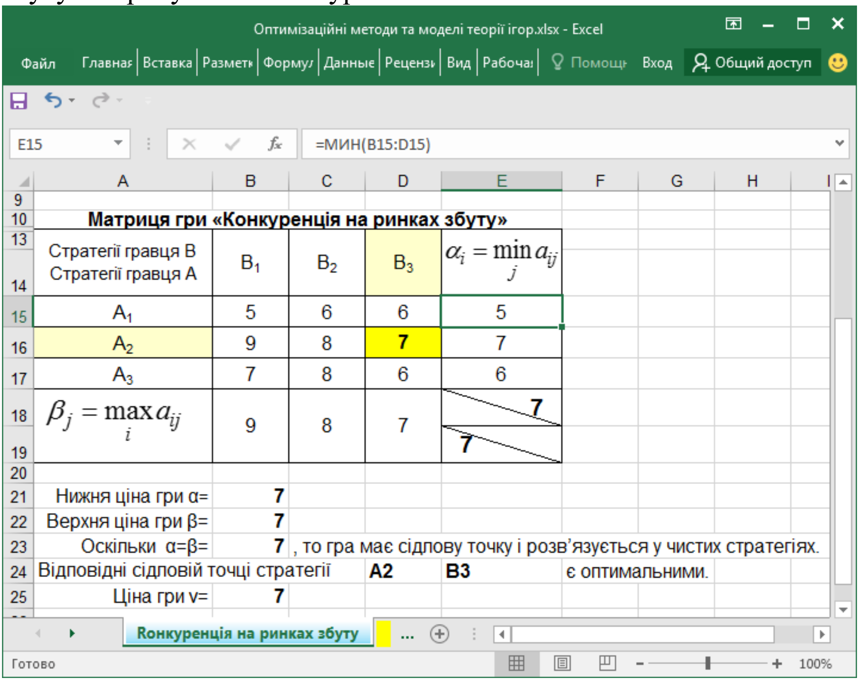


Рис. 5.1. Розв'язання гри в чистих стратегіях у MS Excel

2. Аналіз платіжної матриці для спрощення гри (виключити з платіжної матриці вочевидь невигідні стратегії)

Очевидно, стратегія A_1 завідомо невигідна, але ми її залишимо, щоб ліпше зрозуміти процедуру розв'язання гри.

3. Дослідження гри на наявність сідлової точки

Оцінимо дії розумних обережних менеджерів, які не схильні до ризику. Обравши стратегію A_1, у гіршому випадку підприємство A отримає прибуток $\min\{5;6;6\}=5$ тис. грн, стратегію A_2 – 7 тис. грн, стратегію A_3 – 6 тис. грн. Далі за принципом «ліпший із гірших», тобто за принципом масиміна обирається стратегія A_2, оскільки $\max\{5;7;6\}=7$ – гарантований прибуток, менше від якого підприємство A не отримає за будь-яких дій підприємства B.

Якщо менеджер підприємства A відхилиться від своєї оптимальної (максимінної) стратегії і вибере першу чи третю, то зможе отримати прибуток, що дорівнює лише 5 або 6 тис. грн.

Отже, нижня ціна гри $\alpha = 7$.

Менеджер підприємства B, навпаки, оцінює свої неминучі втрати з приходом на ринок підприємства A. Обравши стратегію B_1 у гіршому випадку підприємство B втратить $\max\{5;9;7\}=9$, стратегію B_2 – 8 тис. грн, стратегію B_3 – 7 тис. грн. Далі за принципом мінімакса обирається стратегія B_3, оскільки $\min\{9;8;7\}=7$ – втрати, більше від яких підприємство B не отримає за будь-яких дій підприємства A.

Якщо менеджер підприємства B відхилиться від своєї оптимальної (мінімаксної) стратегії, то це призведе до більших втрат. Якщо буде вибрано 1-у стратегію, то можливі втрати дорівнюватимуть 9 тис. грн, а якщо буде обрано 2-у стратегію, то можливі втрати становитимуть 8 тис. грн.

Отже, верхня ціна гри $\beta = 7$.

Оскільки $\alpha = \beta = 7$, то гра має сідлову точку і розв'язується у чистих стратегіях.

Тому відповідні сідловій точці стратегії A_2B_3 є оптимальними, ціна гри $v = 7$.

Зауваження. Під час розв'язання в MS Excel використовуються вбудовані функції МІН(.) і МАХ(.), а також відносні посилання для виведення результатів дослідження гри (див. рис. 5.1).

4. Економічна інтерпретація розв'язку гри

Згідно з отриманим розв'язком гри оптимальні стратегії підприємств такі:

– підприємство-новачок *A* реалізує свою продукцію у 1-му регіоні, і тоді за будь-яких дій підприємства *B* воно отримає гарантований прибуток 7 тис. грн;

– підприємство-старичок *B* реалізує свою продукцію у 3-му регіоні, і тоді за будь-яких дій підприємства *A* воно матиме втрати не більші ніж 7 тис. грн.

Задача 5.2. Вибір оптимальної стратегії фермера (ігри з природою): гра у змішаних стратегіях

Фермер займається вирощуванням 3-х видів сільськогосподарських культур: кукурудза, зернові, бобові. Прибуток від реалізації вирощеної культури залежить від врожаю, урожайність – від типу погоди (умовні дані наведено у табл. 5.2).

Вимагається визначити оптимальну стратегію фермера, тобто оптимальні посівні площі, які гарантуватимуть середню величину прибутку за будь-якої погоди, вважаючи її невизначеною.

Таблиця 5.2

Урожайність зернових культур у залежності від типів погоди

Тип погоди / С-г культура	Суха спекотна	Суха прохолодна	Дощова холодна	Дощова прохолодна
Кукурудза	9	4	2	3
Зернові	1	2	12	6
Бобові	0,5	1,5	2	1

Розв'язання

1. Формалізація конфлікту. Побудова платіжної матриці

Введемо позначення:

фермер – гравець *A*;

природа – гравець *B*.

Гравець *A* має 3 чисті стратегії: A_1, A_2, A_3. Гравець *B* має 4 чисті стратегії: B_1, B_2, B_3 B_4.

Платіжну матрицю записано у табл. 5.3.

Таблиця 5.3

Платіжна матриця гри «Вибір оптимальної стратегії фермера»

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	9	4	2	3
A_2	1	2	12	6
A_3	0,5	1,5	2	1

2. Аналіз платіжної матриці для спрощення гри (виключити з платіжної матриці вочевидь невигідні стратегії)

Стратегія A_3 приносить фермеру мінімальний прибуток (всі елементи 3-го рядка менші або дорівнюють відповідним елементам 1-го та 2-го рядків), тому він її застосовувати не буде. Стратегія A_3 – домінована, відкинемо її.

Гравець *B*, вочевидь, не буде застосовувати стратегію з максимальними значеннями програшів. У даній задачі у гравця В домінованих стратегій немає.

3. Дослідження гри на наявність сідлової точки

На наявність сідлової точки перевіряємо отриману скорочену платіжну матрицю (табл. 5.4).

Таблиця 5.4

Платіжна матриця (після аналізу)

	B_1	B_2	B_3	B_4	$\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$
A_1	9	4	2	3	2
A_2	1	2	12	6	1
$\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$	9	4	12	6	$\alpha = 2$ / $\beta = 4$

$\alpha = 2$ – нижня ціна гри, максимінний виграш гравця *A*;

$\beta = 4$ – верхня ціна гри, мінімаксний програш гравця *B*.

Отже, значення ціни гри $2 \le v \le 4$. Оскільки $\alpha \ne \beta$, то сідлової точки немає і гра розв’язується у змішаних стратегіях.

4. Визначення активних чистих стратегій одного з гравців (гравця В) графічним методом

У гри розміром $2 \times n$ активні чисті стратегії визначаються графічним методом для гравця *B*.

У гри розміром $m \times 2$ – для гравця *A*.

У даній задачі ($2 \times n$) активні стратегії гравця *A* відомі: A_1, A_2.

Уведемо позначення:

$X^* = (x_1^*, x_2^*, 0)$ – оптимальна змішана стратегія гравця A (оскільки A_3 неактивна стратегія, $x_3^* = 0$,);

$Y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*)$ – оптимальна змішана стратегія гравця B.

Якщо $X^* = (x_1^*, x_2^*, 0)$ оптимальна стратегія, то за формулою (5.7) (права частина) виграш гравця A буде не меншим від ціни гри, тобто

$$\sum_{i=1}^{2} a_{ij} x_{ij} \geq v\,,\ j = \overline{1;n}\,.$$

Система нерівностей записується з міркувань: якщо гравець B вибере стратегію B_1, то гравець A відповість на це стратегією A_1 з ймовірністю x_1 та стратегією A_2 з ймовірністю x_2 і при цьому отримає виграш $\geq v$, тобто

$$\begin{array}{ll} \begin{array}{l} \qquad\quad A_1 \qquad\quad A_2 \\ B_1{:}\, a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \geq v; \\ B_2{:}\, a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \geq v; \\ B_3{:}\, a_{13}x_1 + a_{23}x_2 \geq v; \\ \ldots \end{array} & \begin{array}{l} \qquad A_1 \qquad A_2 \\ B_1{:}\, 9x_1 + 1x_2 \geq v; \\ B_2{:}\, 4x_1 + 2x_2 \geq v; \\ B_3{:}\, 2x_1 + 12x_2 \geq v; \\ B_4{:}\, 3x_1 + 6x_2 \geq v. \end{array} \end{array} \tag{5.9}$$

Ймовірності x_1 та x_2 утворюють повну групу подій, отже,

$$x_1 + x_2 = 1\,, \tag{5.10}$$

звідки $x_2 = 1 - x_1$.

Добавимо природні обмеження

$$0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq x_2 \leq 1. \tag{5.11}$$

Задача (5.9)-(5.11) розв’язується графічним методом так.

На осі абсцис (вісь OX_1) відкладемо відрізок довжиною, що дорівнює одиниці. Побудуємо дві прямі $x_1 = 0$ і $x_1 = 1$.

Пряма $x_1 = 1$ (відповідно $x_2 = 0$) відповідає вибору гравцем A стратегії A_1.

Пряма $x_1 = 0$ (відповідно $x_2 = 1$) відповідає вибору гравцем A стратегії A_2.

Отже, на прямій $x_1 = 1$ відкладаємо виграші, що відповідають стратегії A_1, а на прямій $x_1 = 0$ – виграші, що відповідають стратегії A_2.

Нехай гравець B вибрав стратегію B_1, їй відповідають на прямих A_1 та A_2 дві точки B_1, причому довжина відрізка на прямій A_2 дорівнює 1, а довжина відрізка на прямій A_1 дорівнює 9. Аналогічно будуємо пряму B_2B_2, яка відповідає стратегії B_2 і так далі. Розв'язання гри графічним методом у MS Excel наведено на рис. 5.2.

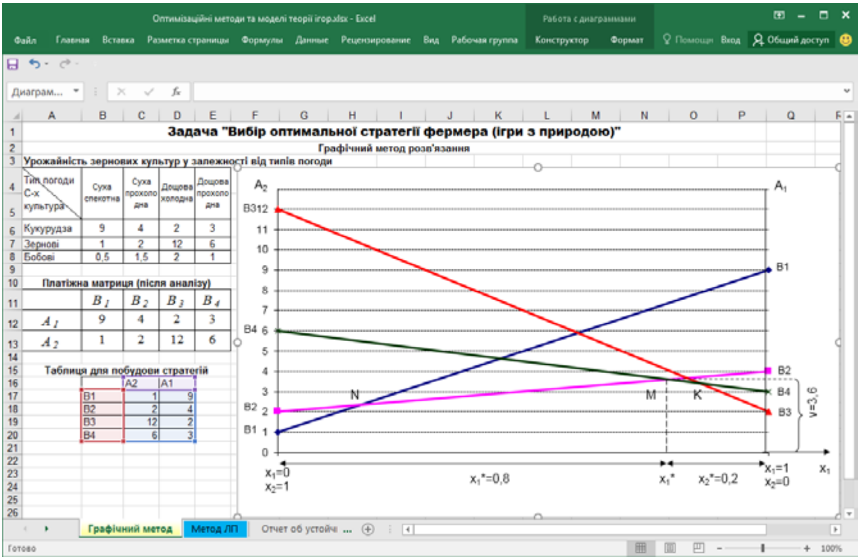


Рис. 5.2. Графічний метод розв'язання гри у MS Excel

Необхідно знайти оптимальну стратегію X^*, за якої мінімальний виграш гравця A буде максимальним. Ординати точок, що лежать на ламаній B_1NMKB_3 характеризують мінімальний виграш гравця A при застосуванні ним будь-якої змішаної стратегії X. Згідно з принципом максиміну, оптимальний розв'язок гри визначає точка M, у якій мінімальний виграш досягає максимуму. На вісі абсцис точці M відповідає оптимальна стратегія $X^* = (x_1^*, x_2^*)$, а на осі ординат – ціна гри.

У точці M перетинаються дві прямі B_2B_2 і B_4B_4. Це означає, що оптимальна стратегія гравця B складається з двох чистих стратегій B_2 і B_4, це активні стратегії, тобто оптимальна змішана стратегія гравця B має таку структуру $Y^* = (0, y_2^*, 0, y_4^*)$.

5. Визначення оптимальних змішаних стратегій і ціни гри

Оскільки серед стратегій гравців A і B лише по дві активні, то платіжну матрицю можна записати як матрицю 2 х 2:

	B_2	B_4
A_1	4	3
A_2	2	6

5.1 Визначення оптимальної змішаної стратегії гравця А і ціни гри

При застосуванні гравцем B однієї із своїх оптимальних стратегій B_2 або B_4, гравець A, застосовуючи свою оптимальну змішану стратегію, отримає виграш, який дорівнює v:

– якщо гравець B застосує стратегію B_2, то виграш гравця A дорівнює v, тобто

$$\begin{array}{l} \quad\;\; A_1 \quad\; A_2 \\ B_2 : 4x_1^* + 2x_2^* = v; \end{array}$$

– якщо гравець B застосує стратегію B_4, то виграш гравця A дорівнює v, тобто

$$\begin{array}{l} \quad\;\; A_1 \quad\; A_2 \\ B_4 : 3x_1^* + 6x_2^* = v. \end{array}$$

Добавимо

$$x_1^* + x_2^* = 1.$$

Отже, отримали систему 3-х рівнянь з 3-ма невідомими:

$$\begin{cases} 4x_1^* + 2x_2^* = v; \\ 3x_1^* + 6x_2^* = v; \\ x_1^* + x_2^* = 1. \end{cases}$$

Розв’язок системи: $x_1^* = \dfrac{1}{5} = 0{,}2 \quad x_2^* = \dfrac{4}{5} = 0{,}8 \quad v = 3{,}6$.

Графічний розв’язок збігається з розв’язком, який отримано аналітично ■

5.2 Визначення оптимальної змішаної стратегії гравця В і ціни гри

При застосуванні гравцем A однієї із своїх оптимальних стратегій A_1 або A_2, гравець B, застосовуючи свою оптимальну змішану стратегію, отримає виграш, який дорівнює v:

– якщо гравець A застосує стратегію A_1, то виграш гравця B дорівнює v, тобто

$$\begin{array}{l} \quad\;\; B_2 \quad\;\; B_4 \\ A_1 : 4y_2^* + 3y_4^* = v; \end{array}$$

– якщо гравець A застосує стратегію A_2, то виграш гравця B дорівнює v, тобто

$$\begin{array}{l} \quad\;\; B_2 \quad\;\; B_4 \\ A_2 : 2y_2^* + 6y_4^* = v. \end{array}$$

Добавимо $y_2^* + y_4^* = 1$ (оскільки $y_1^* = y_3^* = 0$). Звідси система 3-х рівнянь з 3-ма невідомими:

$$\begin{cases} 4y_2^* + 3y_4^* = v; \\ 2y_2^* + 6y_4^* = v; \\ y_2^* + y_4^* = 1. \end{cases}$$

Розв’язок системи: $y_4^* = \dfrac{2}{5} = 0{,}4 \quad y_2^* = \dfrac{3}{5} = 0{,}6 \quad v = 3{,}6$.

Отже, оптимальним розв’язком гри є такі змішані стратегії:

для гравця *А:* $X^* = (0{,}8;0{,}2;0)$,

для гравця *В:* $Y^* = (0;0{,}6;0;0{,}4)$,

ціна гри $v = 3{,}6$.

6. Економічна інтерпретація отриманого розв'язку

Оптимальна стратегія фермера така: фермер повинен 80% своєї посівної площі засіяти кукурудзою і 20% - зерновими. У цьому випадку за будь-яких погодних умов він матиме гарантований прибуток не менший за 3,6 тис. грн.

Задача 5.3. Вибір оптимальної стратегії фермера: зведення матричної парної гри до задачі лінійного програмування

Розв'язати матричну гру «Вибір оптимальної стратегії фермера» із завдання 5.2 методом лінійного програмування.

Розв'язання

1. Побудова економіко-математичної моделі ЛП-задачі для гравця А

Економіко-математична модель задачі лінійного програмування для гравця A будується на підставі платіжної матриці, лівої частини формули (5.7) і (5.8).

ЕММ ЛП-задачі для гравця A: знайти виграш гравця A та його змішану стратегію $X = (x_1, x_2, x_3)$, яка максимізує цей виграш:

$$Z = v \to \max$$

за обмежень

$$\begin{cases} 9x_1 + x_2 + 0{,}5x_3 - v \ge 0; \\ 4x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 - v \ge 0; \\ 2x_1 + 12x_2 + 2x_3 - v \ge 0; \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 - v \ge 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Необхідно зазначити, що на ціну гри умова невід'ємності не накладається.

2. Побудова економіко-математичної моделі ЛП-задачі для гравця В

Економіко-математична модель задачі лінійного програмування для гравця *B* будується на підставі платіжної матриці, правої частини формули (5.7) і (5.8).

ЕММ ЛП-задачі для гравця *B*: знайти програш гравця *B* та його змішану стратегію $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, яка мінімізує цей програш:

$$F = v \to \min$$

за обмежень

$$\begin{cases} 9y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 3y_4 - v \le 0; \\ y_1 + 2y_2 + 12y_3 + 6y_4 - v \le 0; \\ 0{,}5y_1 + 1{,}5y_2 + 2y_3 + y_4 - v \le 0; \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1; \end{cases}$$

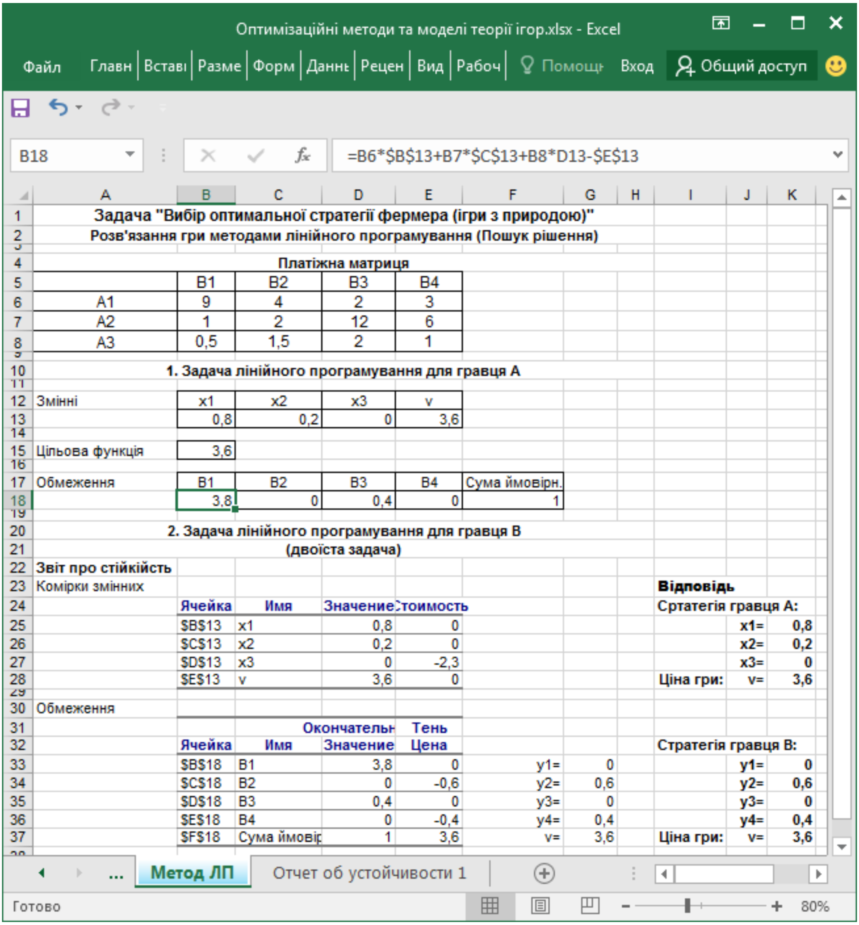
$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,\ y_4 \ge 0.$$

3. Розв'язання ЛП-задачі гравця А з використанням надбудови Пошук рішення

Зразок оформлення аркушу MS Excel для розв'язання ЛП-задачі гравця *A* наведено на рис. 5.3.

За допомогою **Пошуку рішення** отримано оптимальний план ЛП-задачі гравця *A*: x_1 = 0,8; x_2 = 0,2; x_3 = 0 та v = 3,6 у комірках рядка **Змінні** на аркуші **Метод ЛП** та у стовпчику **Значення** у **Звіті про стійкість**. Тобто оптимальний план збігається з отриманим у задачі 5.2.

Оскільки ЛП-задача гравця *B* є двоїстою до задачі гравця *A*, то її розв'язком є двоїсті оцінки задачі гравця *A*. Отже, розв'язок ЛП-задача гравця *B* міститься у стовпчику **Тіньова ціна** у **Звіті про стійкість**, але, як і раніше, зі знаком «-», окрім ціни гри. Тобто розв'язок гри гравця *B* збігається з отриманим у задачі 5.2: y_1 = 0; y_2 = 0,6; y_3 = 0; y_4 = 0,4 та v = 3,6.



Задача "Вибір оптимальної стратегії фермера (ігри з природою)"

Розв'язання гри методами лінійного програмування (Пошук рішення)

Платіжна матриця

	B1	B2	B3	B4
A1	9	4	2	3
A2	1	2	12	6
A3	0,5	1,5	2	1

1. Задача лінійного програмування для гравця А

Змінні	x1	x2	x3	v
	0,8	0,2	0	3,6

Цільова функція: 3,6

Обмеження	B1	B2	B3	B4	Сума ймовірн.
	3,8	0	0,4	0	1

2. Задача лінійного програмування для гравця В (двоїста задача)

Звіт про стійкість

Комірки змінних

Ячейка	Имя	Значение	Стоимость
$B$13	x1	0,8	0
$C$13	x2	0,2	0
$D$13	x3	0	-2,3
$E$13	v	3,6	0

Обмеження

Ячейка	Имя	Окончательн Значение	Тень Цена		
$B$18	B1	3,8	0	y1=	0
$C$18	B2	0	-0,6	y2=	0,6
$D$18	B3	0,4	0	y3=	0
$E$18	B4	0	-0,4	y4=	0,4
$F$18	Сума ймовір	1	3,6	v=	3,6

Відповідь

Сртатегія гравця А: x1= 0,8; x2= 0,2; x3= 0; **Ціна гри:** v= 3,6

Стратегія гравця В: y1= 0; y2= 0,6; y3= 0; y4= 0,4; **Ціна гри:** v= 3,6

Рис. 5.3. Розв'язання гри методами лінійного програмування в MS Excel

Завдання до практичної роботи № 5

Торговельне підприємство може завезти у різних пропорціях товари двох типів (A_1, A_2). Обсяги реалізації товару і, відповідно, прибуток магазину залежать від виду товару і стану попиту.

Передбачається, що попит може бути у п'ятьох станах (B_1, B_2, B_3, B_4, B_5) і не прогнозується. Визначити оптимальні пропорції із закупівлі товарів за умови максимізації середнього гарантованого прибутку за відомої матриці гарантованого прибутку має *H* (значення за варіантами наведено у табл. 5.5).

Розв’язати матричну гру графічним методом.

Здійснити перевірку розв’язку у середовищі табличного процесора MS Excel шляхом зведення гри до задачі лінійного програмування.

Таблиця 5.5

Завдання до практичної роботи № 5:
Оптимізаційні методи та моделі теорії ігор

Варіант №1	Варіант №2
$H=\begin{pmatrix}3 & 5 & 7 & 12 & 6\\ 6 & 4 & 8 & 11 & 5\end{pmatrix}$	$H=\begin{pmatrix}12 & 15 & 13 & 11 & 16\\ 13 & 16 & 10 & 12 & 15\end{pmatrix}$
Варіант №3	**Варіант №4**
$H=\begin{pmatrix}8 & 6 & 7 & 12 & 15\\ 7 & 9 & 10 & 11 & 12\end{pmatrix}$	$H=\begin{pmatrix}11 & 12 & 14 & 10 & 14\\ 9 & 11 & 13 & 12 & 15\end{pmatrix}$
Варіант №5	**Варіант №6**
$H=\begin{pmatrix}8 & 12 & 14 & 15 & 17\\ 10 & 11 & 12 & 14 & 9\end{pmatrix}$	$H=\begin{pmatrix}5 & 8 & 4 & 6 & 7\\ 9 & 7 & 6 & 5 & 9\end{pmatrix}$
Варіант №7	**Варіант №8**
$H=\begin{pmatrix}21 & 20 & 19 & 20 & 16\\ 18 & 19 & 17 & 22 & 19\end{pmatrix}$	$H=\begin{pmatrix}11 & 9 & 10 & 13 & 15\\ 9 & 10 & 11 & 12 & 14\end{pmatrix}$
Варіант №9	**Варіант №10**
$H=\begin{pmatrix}19 & 15 & 16 & 18 & 17\\ 14 & 22 & 20 & 21 & 19\end{pmatrix}$	$H=\begin{pmatrix}12 & 10 & 14 & 16 & 12\\ 10 & 12 & 16 & 18 & 10\end{pmatrix}$
Варіант №11	**Варіант №12**
$H=\begin{pmatrix}5 & 9 & 4 & 6 & 7\\ 8 & 7 & 6 & 5 & 9\end{pmatrix}$	$H=\begin{pmatrix}19 & 12 & 14 & 17 & 13\\ 18 & 16 & 17 & 14 & 15\end{pmatrix}$

Продовження табл. 5.5

Варіант №13	Варіант №14
$H = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 14 & 10 & 12 \\ 14 & 11 & 13 & 12 & 15 \end{pmatrix}$	$H = \begin{pmatrix} 18 & 13 & 14 & 15 & 17 \\ 14 & 15 & 12 & 14 & 15 \end{pmatrix}$
Варіант №15	**Варіант №16**
$H = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 14 & 24 & 12 \\ 16 & 12 & 16 & 22 & 10 \end{pmatrix}$	$H = \begin{pmatrix} 11 & 15 & 17 & 12 & 10 \\ 12 & 16 & 11 & 14 & 15 \end{pmatrix}$
Варіант №17	**Варіант№18**
$H = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 8 & 13 & 15 \\ 8 & 10 & 11 & 12 & 13 \end{pmatrix}$	$H = \begin{pmatrix} 22 & 19 & 25 & 24 & 23 \\ 26 & 24 & 25 & 22 & 19 \end{pmatrix}$
Варіант №19	**Варіант №20**
$H = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 8 & 6 & 10 \\ 8 & 10 & 11 & 9 & 12 \end{pmatrix}$	$H = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 5 & 7 & 3 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$
Варіант №21	**Варіант №22**
$H = \begin{pmatrix} 11 & 14 & 10 & 13 & 12 \\ 12 & 10 & 11 & 12 & 13 \end{pmatrix}$	$H = \begin{pmatrix} 14 & 19 & 15 & 14 & 13 \\ 16 & 14 & 17 & 12 & 19 \end{pmatrix}$
Варіант №23	**Варіант №24**
$H = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 11 & 10 & 12 \\ 11 & 12 & 10 & 13 & 10 \end{pmatrix}$	$H = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 14 & 13 & 10 \\ 11 & 16 & 17 & 14 & 15 \end{pmatrix}$

Контрольні запитання та завдання до захисту практичної роботи

1. Дайте визначення понять: гра, гравець, виграш, стратегія гравця.
2. Яка гра називається грою з нульовою сумою, або антагоністичною?
3. Що значить: розв’язати гру?

4. Яка матриця називається платіжною?
5. Як називається принцип вибору стратегії гравця, заснований на максимізації мінімальних виграшів?
6. Як знайти нижню ціну гри?
7. Як знайти верхню ціну гри?
8. Що таке сідлова точка?
9. Що є розв'язком матричної гри в чистих стратегіях?
10. Наведіть приклад гри, яка розв'язується в чистих стратегіях
11. Яка стратегія називається змішаною?
12. Сформулюйте теорему Неймана.
13. Опишіть процедуру розв'язання гри графічним методом в MS Excel.
14. Опишіть процедуру розв'язання гри зведенням до ЛП-задачі в MS Excel.
15. Як знайти змішану стратегію гравця В за використання надбудови **Пошук рішення**?

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2. ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ НЕЛІНІЙНОГО І ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ

Практична робота № 6: Оптимізаційні методи та моделі нелінійного програмування

***Мета роботи*:** систематизація знань про оптимізаційні методи і моделі нелінійного програмування та набуття навичок розв'язання оптимізаційних нелінійних задач методом множників Лагранжа, у тому числі в середовищі MS Excel

Основні теоретичні відомості

Побудова економіко-математичних моделей задач, розглянутих у першому модулі, ґрунтувалася на припущенні про лінійні залежності між показниками, що відбивалось лінійною цільовою функцією і лінійними обмеженнями. Водночас зв'язки між економічними показниками і факторами, які впливають на критерій оптимальності й обмеження, можуть бути нелінійними. Очевидно, що суттєва нелінійність має враховуватися під час моделювання економічних процесів. Виходячи з цього, загальну задачу математичного програмування можна сформулювати так:

знайти такий план $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, щоб цільова функція набувала оптимального (максимального чи мінімального) значення

$$Z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min) \tag{6.1}$$

за обмежень

$$q_i(x_1, x_2, ..., x_n) \begin{Bmatrix} \le \\ \ge \\ = \end{Bmatrix} b_i, \quad i = \overline{1; m}, \tag{6.2}$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1; s}, \ s < n. \tag{6.3}$$

Якщо всі функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ та $q_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ $(i = \overline{1;m})$ лінійні, то задача (6.1)-(6.3) – задача лінійного програмування, якщо хоча б одна з функцій нелінійна, то це ***задача нелінійного програмування***.

На відміну від ЛП-задач, для задач нелінійного програмування: 1) *не існує універсального методу* розв’язання; 2) існують *кілька локальних оптимумів*, що вимагає пошуку глобального оптимуму серед них;. 3) точка оптимуму не завжди є граничною, а може знаходитися й *усередині допустимої області розв’язків*; 4) множина допустимих планів *не завжди опукла,* а може й бути неопуклою, або навіть складатися з незв’язаних між собою частин. Цей комплекс особливостей задач нелінійного програмування спричинив розроблення значної кількості різних методів розв’язування окремих типів нелінійних задач. Специфічні методи в основному гуртуються на застосуванні диференційного числення і залежать від складових економіко-математичної моделі оптимізаційної задачі.

У теорії дослідження функцій задачі на відшукування екстремумів не містять додаткових умов щодо змінних, тому такі задачі називаються задачами на ***безумовний екстремум*** функції. Локальний та глобальний екстремуми визначаються з необхідних і достатніх умов існування екстремуму функції.

Задачі відшукування локального або глобального екстремуму функції за умови, що на змінні функції накладаються певні обмеження, називаються задачами на ***умовний екстремум*** функції.

Італійськід математик Жозеф-Луї Лагранж запропонував метод розв’язання задач на умовний екстремум функції типу (6.1)-(6.3) – ***метод множників Лагранжа***. Суть методу множників Лагранжа полягає у переході від задачі на умовний екстремум до задачі на безумовний екстремум. Для цього цільова функція (6.1) замінюється функцією, яка у певний спосіб містить умови, що подані як обмеження (6.2). Після цього перетворення подальше розв’язування задачі полягає у відшукуванні екстремуму нової функції, на змінні якої не накладено ніяких обмежень, з використанням методів класичного знаходження екстремуму функції кількох змінних.

Алгоритм методу множників Лагранжа

1. Побудова економіко-математичної модель задачі

Нехай є економіко-математична задачі у канонічній формі:

$$Z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min) \tag{6.4}$$

за обмежень

$$q_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i, \quad i = \overline{1;m}, \tag{6.5}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1;n}, \tag{6.6}$$

де функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ і $q_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ $(i = \overline{1;m})$ мають бути диференційованими.

Отже, задача (6.4)-(6.6) полягає в знаходженні екстремуму функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ за умови виконання обмежень $q_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ $(i = \overline{1;m})$, тобто є задачею пошуку умовного екстремуму.

2. Перехід до задачі пошуку безумовного екстремуму шляхом заміни цільової функції (6.4) функцією Лагранжа такого виду:

$$\begin{aligned} &L(x_1, x_2, ..., x_n; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \\ &= f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(x_1, x_2, ..., x_n)), \end{aligned} \tag{6.7}$$

де λ_i – множники Лагранжа (невідомі змінні).

3. Визначення стаціонарних точок функції Лагранжа

Стаціонарні точки функції Лагранжа визначаються із необхідних умов існування екстремуму функції багатьох змінних. Знайдемо частинні похідні, прирівняємо їх до нуля та розв’яжемо отриману систему:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1;n}; \\
\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0, \quad i = \overline{1;m}.
\end{cases}
\tag{6.8}
$$

Розв'язками системи (6.8) є стаціонарні точки $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ та $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_n^*)$ - стаціонарні точки. Оскільки ці розв'язки отримані з необхідної умови екстремуму, то вони визначають максимум (мінімум) задачі (6.4)-(6.6) або можуть бути точками перегину.

4. Діагностування стаціонарних точок і визначення типу екстремуму

Діагностування стаціонарних точок і визначення типу екстремуму здійснюється за достатньою умовою екстремуму, тобто в околі стаціонарних точок досліджуються диференціали другого порядку (якщо для функцій $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ і $q_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ $(i = \overline{1;m})$ існують другі частинні похідні і вони неперервні).

Для функції *n* змінних достатня умова локального екстремуму узагальнюється так: за функцією Лагранжа (8.8) будується ***матриця Гессе*** розмірністю (*m* + *n*) × (*m* + *n*), яка має таку блочну структуру:

$$
H = \begin{pmatrix} O & | & P \\ - & - & - \\ P^T & | & Q \end{pmatrix},
\tag{6.9}
$$

де *O* – нульова матриця розмірністю (*m* × *m*),

P – матриця розмірністю (*m* × *n*), елементами якої є перші похідні:

$$
P = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial q_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial q_1(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial q_m(x)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial q_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix},
\tag{6.10}
$$

P^T – транспонована матриця *P* розмірністю (*n* × *m*),

Q – матриця розмірністю ($n \times n$) виду:

$$Q = \left(\frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x_i \partial x_j} \right), \; i = \overline{1;m}, \;\; j = \overline{1;n}. \qquad (6.11)$$

Правила ідентифікації типу екстремуму функції

1. Точка X^* є точкою *максимуму*, якщо, починаючи з головного мінору порядку (m + 1), наступні (n – m) головних мінорів матриці Гессе утворюють знакозмінний числовий ряд, знак першого члена якого визначається множником $(-1)^{m+1}$.

2. Точка X^* є точкою *мінімуму*, якщо, починаючи з головного мінору порядку (m + 1), знак наступних (n – m) головних мінорів матриці Гессе визначається множником $(-1)^{m}$.

Зауваження. Метод множників Лагранжа може застосовуватися й до задач, система обмежень яких містить нерівності, з попереднім зведенням до канонічного вигляду (детально особливості розв’язання розглянуто в [22])

Економічний зміст множників Лагранжа: якщо $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ – дохід, отримуваний за реалізації плану $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, а функція $q_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ – витрати i-го ресурсу, за реалізації цього плану, то λ_i – ціна (оцінка) i-го ресурсу, що характеризує зміну екстремального значення цільової функції залежно від зміни розміру i-го ресурсу (тіньова ціна).

Розв’язання типових задач

Задача 6.1. Планування структури реалізації готової продукції

Борошномельний завод реалізує борошно 2-ма способами: у роздріб через магазин і гуртом через торгових агентів. У разі продажу x_1 кг борошна через магазин видатки на реалізацію складають x_1^2 грн, а за продажу x_2 кг борошна через магазин видатки на реалізацію складають x_2^2 грн. Необхідно розробити план реалізації борошна, який забезпечує мінімальні витрати на реалізацію, якщо добові потужності заводу 5000 кг борошна. Розв'язати задачу методом множників Лагранжа.

Розв'язання

1. Побудова економіко-математичної модель задачі

Модель нелінійного (у цьому випадку – квадратичного) програмування має вигляд: знайти мінімум сумарних витрат

$$Z = x_1^2 + x_2^2 \to \min$$

за обмежень

$$x_1 + x_2 = 5000$$

та умов невід'ємності

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

2. Перехід до задачі пошуку безумовного екстремуму шляхом заміни цільової функції функцією Лагранжа

Згідно з формулою (6.7) функція Лагранжа має вигляд:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(5000 - x_1 - x_2).$$

3. Визначення стаціонарних точок функції Лагранжа

Стаціонарні точки функції Лагранжа визначаються із необхідних умов існування екстремуму функції багатьох змінних. Візьмемо частинні похідні, прирівняємо їх до нуля та розв'яжемо отриману систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 5000 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 2500; \\ x_2 = 2500; \\ \lambda = 5000. \end{cases}$$

4. Діагностування стаціонарних точок і визначення типу екстремуму

Перевірка стаціонарної точки на екстремум здійснюється за допомогою достатньої умови існування екстремуму. Для цього будується матриця Гессе, яка має блочну структуру (6.9).

Оскільки у задачі обмежень – m = 1, змінних – n = 2, то матриця має розмірність $(m + n) \times (m + n) = (2+1) \times (2+1) = 3\times3$.

Визначимо необхідні похідні і побудуємо матрицю Гессе:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}=1;\quad \frac{\partial g}{\partial x_2}=1;\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}=2;\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}=2;\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}=\frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1}=0,$$

отже,

$$H=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Визначимо головні мінори, починаючи з 2-го порядку оскільки $m + 1 = 1 + 1 = 2$:

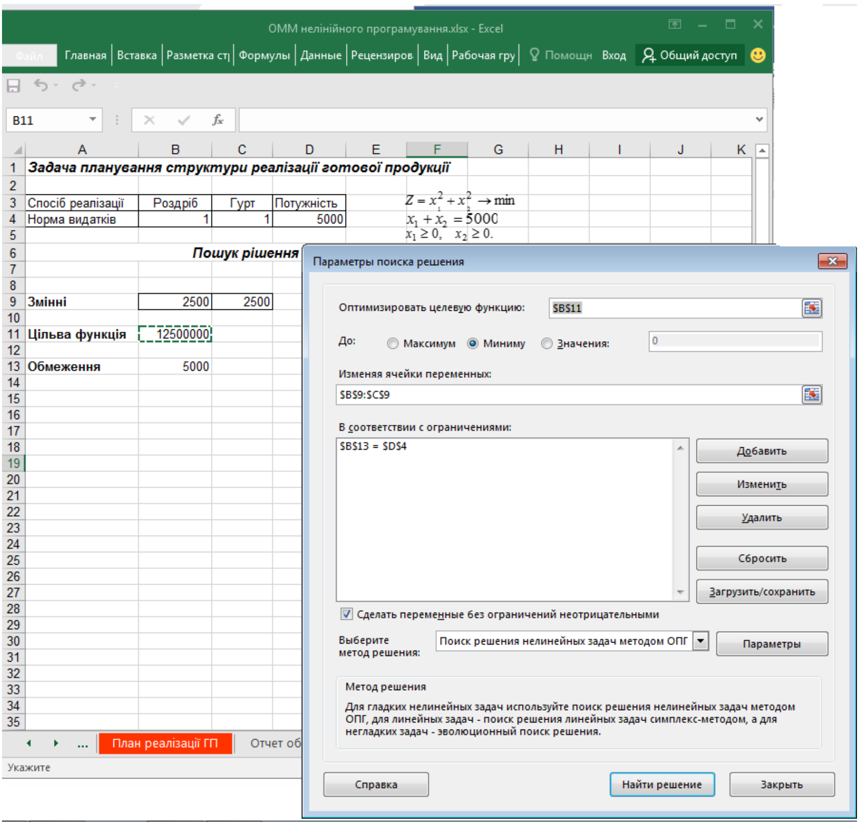
$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-1 \quad \Delta_3=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0+0+0-2-2-0=-4.$$

Точка X = (2500; 2500) є точкою мінімуму, оскільки, починаючи з головного мінору порядку (m + 1), знак наступних (n – m) головних мінорів матриці Гессе H визначається множником $(-1)^m=-1$, тобто мінори від’ємні. Значення цільової функції $Z_{\min}$ = 12 500 000.

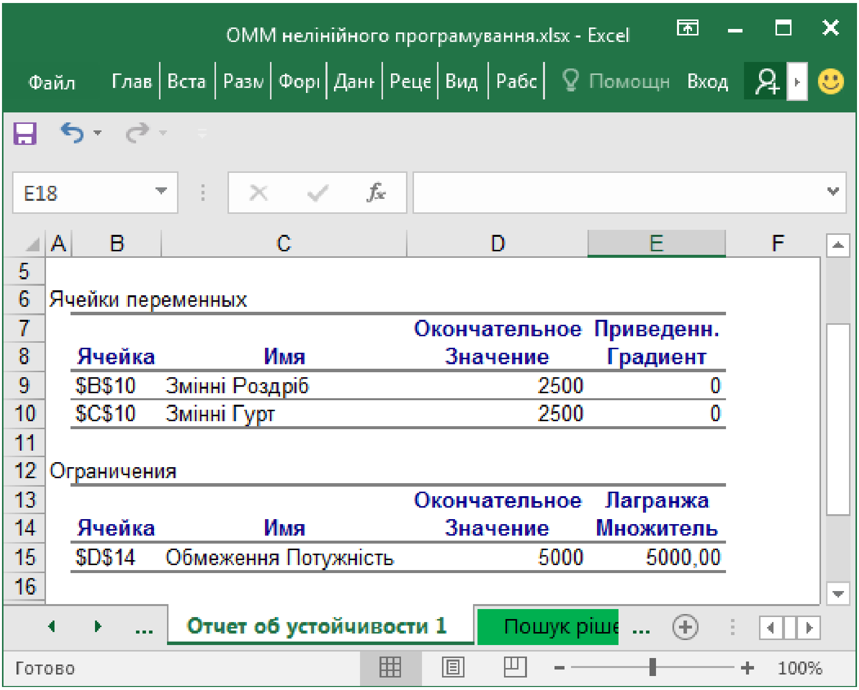
5. Розв’язання задачі планування структури реалізації готової продукції за допомогою надбудови Пошук рішення

Зразок формування аркушу для застосування надбудови Пошук рішення наведено на рис. 6.1 (а). Модель задачі планування структури реалізації готової продукції нелінійна, тому у діалоговому вікні **Параметри пошуку рішення** у полі **Оберіть метод рішення** необхідно вибрати **Пошук рішення** нелінійних задач методом ОПГ (метод загального понижуючого градієнту).

Результати **Пошуку рішення** збігаються з розв'язком, отриманим аналітично, у тому числі значення множника Лагранжа, яке міститься у **Звіті про стійкість** (рис. 6.1 (б)).



а) Параметри пошуку рішення



Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Градиент
$B$10	Змінні Роздріб	2500	0
$C$10	Змінні Гурт	2500	0

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Лагранжа Множитель
$D$14	Обмеження Потужність	5000	5000,00

б) Звіт про стійкість

Рис. 6.1. Розв'язання задачі планування структури реалізації готової продукції за допомогою надбудови Пошук рішення

6. Економічний аналіз розв'язку задачі планування структури реалізації готової продукції

Для отримання мінімальних витрат на реалізацію борошномельний завод має реалізувати борошно так: у роздріб через магазин 2500 кг, гуртом через торгових агентів також 2500 кг, при цьому витрати на реалізацію складуть 12500 тис. грн.

Задача 6.2. Формування портфеля цінних паперів

Інвестор доручив брокерській конторі купити на 1 млн. грн акції трьох відомих йому компаній. Угода укладається на рік. Інвестор зацікавлений з одного боку у максимізації середнього прибутку на вкладений капітал, а з іншого – у мінімізації ризику, оскільки величина прибутку, який буде отримано наприкінці року від акції кожної компанії, є величиною випадковою. Водночас загальновідоме правило інвестування: чим вище доходність акції, тим вищий пов'язаний з нею ризик. Отже, висунуті критерії суперечливі.

Інвестору цю обставину роз'яснили і попросили вказати відносну значимість («ваги») критеріїв. Інвестор, як обережна людина, висловив побажання, щоб ризик ураховувався з вагою втричі більшою, ніж прибуток. Отримавши такі вказівки, аналітики брокерської компанії розробили модель, яка максимізує різницю між очікуваним прибутком та інвестиційним ризиком:

$$Z = \sum_{j=1}^{3} \mu_j x_j - 3 \cdot \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} x_i x_j \to \max \tag{6.12}$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_j = 1000, \tag{6.13}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, 3, \tag{6.14}$$

де x_j – сума коштів, які планується інвестувати в акції типу j (тис. грн);

μ_j – математичне сподівання відсотка прибутку від інвестування 1 тис. грн в акцію типу j;

σ_{ij} – коваріація між відсотками прибутку від інвестування 1 тис. грн в акції типу i и j (σ_j^2 – дисперсія відсотка прибутку).

Перша сума у критерії (цільовій функції) – очікуване значення прибутку, що забезпечується пакетом акцій, друга – дисперсія прибутку пакета акцій, взята з вагою 3. Дисперсія прибутку пакета акцій є мірою ризику.

Крім того, фінансові аналітики прогнозують:

– середні значення відсотків річного прибутку від акцій компаній 8%, 10% та 13% відповідно;

– дисперсії $\sigma_1^2 = 0{,}1$, $\sigma_2^2 = 0{,}15$, $\sigma_3^2 = 0{,}19$;

– коваріації $\sigma_{12} = 0{,}01$, $\sigma_{13} = 0{,}02$, $\sigma_{23} = 0{,}03$.

Розв'язання

1. Побудова економіко-математичної моделі задачі

Модель нелінійного (у цьому випадку – квадратичного) програмування має вигляд:

$$\begin{aligned}
&Z(x_1, x_2, x_3) = 0{,}08x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}13x_3 - \\
&- 0{,}3 \cdot x_1x_1 - 0{,}45 \cdot x_2x_2 - 0{,}57 \cdot x_3x_3 - \\
&- 0{,}06 \cdot x_1x_2 - 0{,}12 \cdot x_1x_3 - 0{,}18 \cdot x_2x_3 \to \max
\end{aligned} \tag{6.15}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1000\,; \tag{6.16}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0\,. \tag{6.17}$$

2. Перехід до задачі пошуку безумовного екстремуму шляхом заміни цільової функції функцією Лагранжа

Згідно з формулою (6.7), функція Лагранжа така:

$$\begin{aligned}
&L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 0{,}08x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}13x_3 - \\
&- 0{,}3 \cdot x_1x_1 - 0{,}45 \cdot x_2x_2 - 0{,}57 \cdot x_3x_3 - \\
&- 0{,}06 \cdot x_1x_2 - 0{,}12 \cdot x_1x_3 - 0{,}18 \cdot x_2x_3 + \\
&+ \lambda(1000 - x_1 - x_2 - x_3).
\end{aligned} \tag{6.18}$$

3. Визначення стаціонарних точок функції Лагранжа

Стаціонарні точки функції Лагранжа визначаються з необхідних умов існування екстремуму функції багатьох змінних:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0{,}08 - 0{,}6x_1 - 0{,}06x_2 - 0{,}12x_3 - \lambda = 0; \\
\dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0{,}1 - 0{,}9x_2 - 0{,}06x_1 - 0{,}18x_3 - \lambda = 0; \\
\dfrac{\partial L}{\partial x_3} = 0{,}13 - 1{,}14x_3 - 0{,}12x_1 - 0{,}18x_2 - \lambda = 0; \\
\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 1000 - x_1 - x_2 - x_3 = 0.
\end{cases} \tag{6.19}$$

Систему (6.19) розв’язується в MS Excel матричним методом (рис. 6.2).

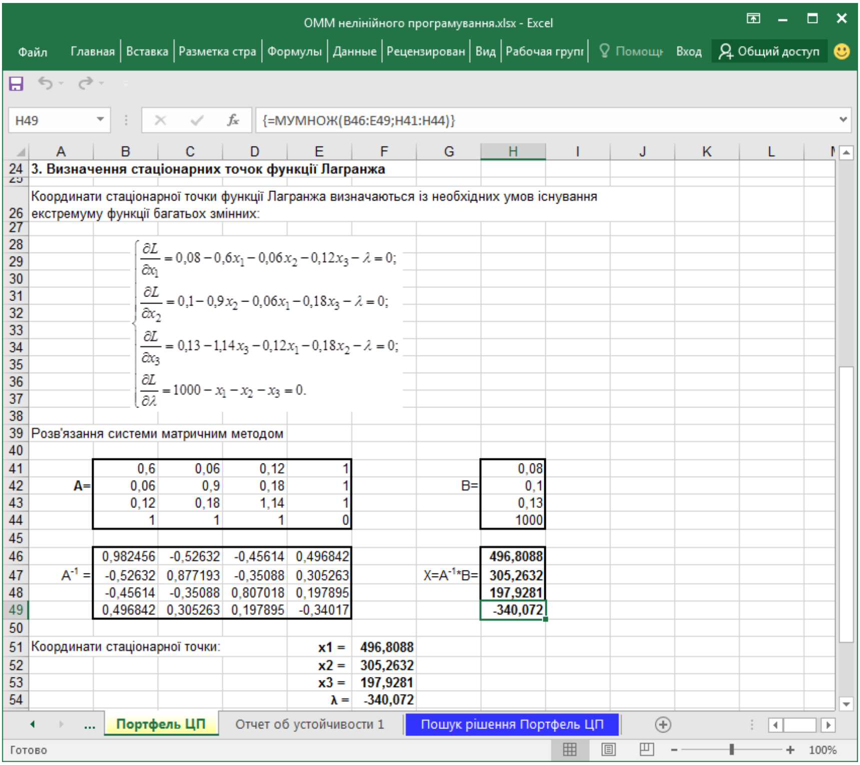


Рис. 6.2. Визначення стаціонарних точок функції Лагранжа

Отже, координати стаціонарної точки: x_1 = 496,8088, x_2 = 305,2632, x_3 = 197,9281 і множник Лагранжа λ = -340,072.

4. Діагностування стаціонарних точок і визначення типу екстремуму

Перевірка стаціонарної точки на екстремум здійснюється за допомогою достатньої умови існування екстремуму. Для цього будується матриця Гессе, яка має блочну структуру (6.9). Оскільки у задачі m = 1 обмежень, n = 3 змінних, то матриця має розмірність ($m + n$) × $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ = (3+1) × (3+1) = 4×4.

Визначимо необхідні похідні (змішані похідні для неперервних функцій рівні між собою):

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = 1; \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} = 1; \quad \frac{\partial g}{\partial x_3} = 1;$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = -0{,}6; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = -0{,}9; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} = -1{,}14;$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = -0{,}06; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} = -0{,}12; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} = -0{,}18.$$

Отже, матриця Гессе має вигляд:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -0{,}6 & -0{,}06 & -0{,}12 \\ 1 & -0{,}06 & -0{,}9 & -0{,}18 \\ 1 & -0{,}12 & -0{,}18 & -0{,}14 \end{pmatrix}$$

Визначимо головні мінори, починаючи з 2-го порядку, оскільки m + 1 = 1 + 1 = 2:

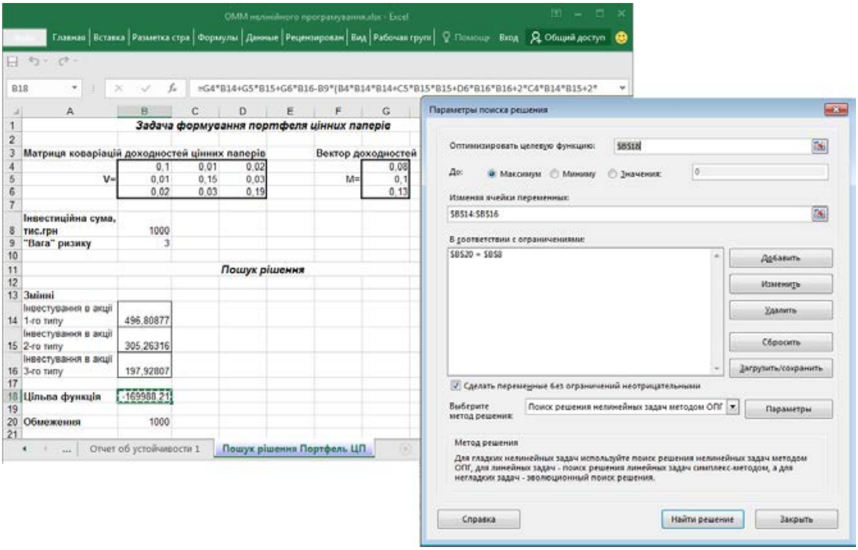
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0{,}06 \end{vmatrix} = -1 \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -0{,}6 & -0{,}06 \\ 1 & -0{,}06 & -0{,}9 \end{vmatrix} = 1{,}38$$

Головні мінори утворюють знакозмінний ряд та, починаючи з головного мінору 2-го порядку, наступний мінор визначається знаком $(-1)^{m+1} = (-1)^2$, тобто X^* = (496,8088; 305,2632; 197,9281) є точкою максимуму. Значення цільової функції в цій точці: Z_{max} = -169 988 – глобальний максимум, оскільки функція строго увігнута.

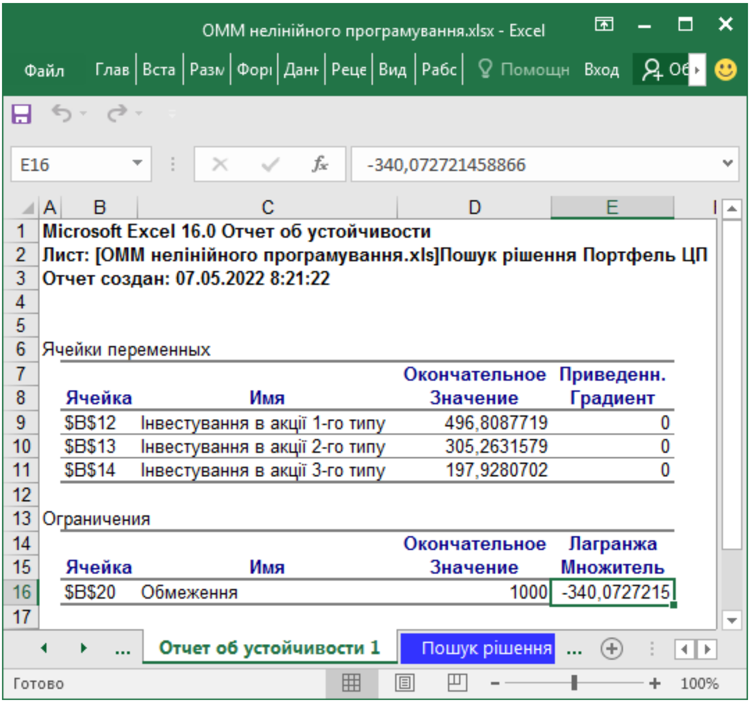
5. Розв’язання задачі формування портфеля цінних паперів за допомогою надбудови Пошук рішення

Зразок формування аркуша для застосування надбудови **Пошук рішення** наведено на рис. 6.3 (а). Модель формування портфеля цінних паперів нелінійна, тому у діалоговому вікні **Параметри пошуку рішення** у полі **Оберіть метод рішення** необхідно вибрати **Пошук рішення нелінійних задач методом ОПГ** (метод загального понижуючого градієнта).

Результати **Пошуку рішення** збігаються з розв’язком, отриманим аналітично, у тому числі значення множника Лагранжа, яке міститься у **Звіті про стійкість** (рис. 6.3 (б)).



а) Параметри пошуку рішення



Microsoft Excel 16.0 Отчет об устойчивости
Лист: [ОММ нелінійного програмування.xls]Пошук рішення Портфель ЦП
Отчет создан: 07.05.2022 8:21:22

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Градиент
$B$12	Інвестування в акції 1-го типу	496,8087719	0
$B$13	Інвестування в акції 2-го типу	305,2631579	0
$B$14	Інвестування в акції 3-го типу	197,9280702	0

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Лагранжа Множитель
$B$20	Обмеження	1000	-340,0727215

б) Звіт про стійкість

Рис. 6.3. Розв’язання задачі формування портфеля цінних паперів за допомогою надбудови Пошук рішення

6. Економічний аналіз розв’язку задачі формування портфеля цінних паперів

За реалізації найбільш песимістичного сценарію, коли ризик утрати вагою втричі більший за інвестиційний прибуток, максимально можливе значення критерію ризику портфеля -169 988 тис. грн забезпечить такий план інвестування:

– в акції 1-го типу – 496,809 тис. грн;
– в акції 2-го типу – 305,263 тис. грн;
– в акції 3-го типу – 197,928 тис. грн.

Крім того, під час прийняття рішення в інвестора з’явилось запитання: як зміниться значення критерію, якщо сума, яка інвестується, збільшиться на 0,2%? Двоїста оцінка обмеження λ = -340,073, тому за збільшення суми, яка інвестується, на 0,2%, тобто на 2 тис. грн, значення критерію зменшиться на 681 тис. грн. Запускаючи **Пошук рішення** за нової інвестиційної суми 1002 тис. грн, отримуємо значення критерію -170669,38.

Завдання до практичної роботи № 6

За планом виробництва продукції підприємству необхідно виготовити *n* виробів. Ці вироби можуть бути зроблені двома технологічними способами, відомі витрати на виробництво x_1 виробів першим способом і x_2 виробів другим способом (значення за варіантами наведено у табл. 6.1). Необхідно визначити оптимальне число виробів, що виготовляються різними способами, так щоб загальні витрати на виробництво продукції були мінімальними. Обчислити економію, одержувану від такого розв’язку задачі оптимізації.

Вказівка. Побудувати економіко-математичну модель задачі і знайти оптимальний план методом множників Лагранжа.

Таблиця 6.1

Завдання до практичної роботи № 6: Оптимізаційні методи та моделі нелінійного програмування

Варіант	Виробничі витрати, грн		Загальний обсяг виробництва, шт.
	I спосіб	II спосіб	
1	$x_1^2+2x_1$	$x_2^2+16x_2$	100
2	$x_1^2+25x_1$	$x_2^2+5x_2$	150
3	$x_1^2+2x_1$	$x_2^2+10x_2$	68
4	$x_1^2+2x_1$	$x_2^2+22x_2$	75
5	$x_1^2+3x_1$	$x_2^2+21x_2$	50
6	$x_1^2+4x_1$	$x_2^2+24x_2$	90
7	$x_1^2+3x_1$	$x_2^2+12x_2$	37
8	$x_1^2+15x_1$	$x_2^2+5x_2$	45
9	$x_1^2+3x_1$	$x_2^2+9x_2$	90
10	$x_1^2+9x_1$	$x_2^2+27x_2$	38
11	$x_1^2+2x_1$	$x_2^2+14x_2$	137
12	$x_1^2+4x_1$	$x_2^2+16x_2$	77
13	$x_1^2+2x_1$	$x_2^2+10x_2$	44

Продовження табл. 6.1

Варіант	Виробничі витрати, грн		Загальний обсяг виробництва, шт.
	I спосіб	II спосіб	
14	$x_1^2+12x_1$	$x_2^2+2x_2$	83
15	$x_1^2+4x_1$	$x_2^2+20x_2$	150
16	$x_1^2+3x_1$	$x_2^2+12x_2$	100
17	$x_1^2+2x_1$	$x_2^2+18x_2$	90
18	$x_1^2+5x_1$	$x_2^2+25x_2$	155
19	$x_1^2+6x_1$	$x_2^2+18x_2$	130
20	$x_1^2+21x_1$	$x_2^2+7x_2$	75
21	$x_1^2+12x_1$	$x_2^2+3x_2$	56
22	$x_1^2+4x_1$	$x_2^2+24x_2$	97
23	$x_1^2+6x_1$	$x_2^2+30x_2$	95
24	$x_1^2+14x_1$	$x_2^2+2x_2$	138
25	$x_1^2+5x_1$	$x_2^2+25x_2$	140

Контрольні запитання та завдання до захисту практичної роботи

1. Дайте означення задачі нелінійного програмування.
2. Чи існує універсальний метод розв’язання задач нелінійного програмування? Обґрунтуйте свою відповідь.
3. У якому випадку задача називається задачею на відшукування умовного екстремуму?
4. У чому полягає суть методу множників Лагранжа?
5. З яких кроків складається алгоритм методу множників Лагранжа?
6. Як будується функція Лагранжа?
7. Як визначаються стаціонарні точки функції Лагранжа?
8. З якою метою будується матриця Гессе?
9. Як ідентифікується тип екстремуму функції?
10. Множники Лагранжа мають економічний зміст чи це суто технічні коефіцієнти?
11. У чому полягає ключова відмітність розв’язання задач лінійного і нелінійного програмування з використанням надбудови **Пошук рішення?**
12. Який звіт надбудови **Пошук рішення** містить значення множників Лагранжа?

Практична робота № 7: Оптимізаційні методи та моделі динамічного програмування

Мета роботи: систематизація знань про оптимізаційні методи і моделі динамічного програмування та набуття навичок розв'язання задач динамічного програмування у середовищі MS Excel

Основні теоретичні відомості

У задачах лінійного та нелінійного програмування розглядаються статичні процеси, і оптимальний розв'язок знаходиться лише на один етап планування. Такі задачі називаються *однокроковими*.

У задачах динамічного програмування процес залежить від часу, і тому розв'язування зводиться до *багатоетапного* або *багатокрокового* процесу прийняття рішень.

Динамічне програмування – математичний апарат, що дозволяє здійснити оптимальне планування багагокрокових керованих процесів і процесів, які залежать від часу.

Метод динамічного програмування розробив у 1953 році американський прикладний математик Ричард Беллман [3].

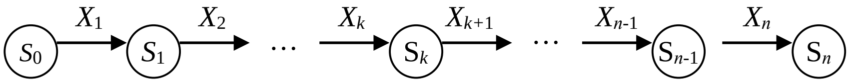
Процес називається ***керованим***, якщо існує можливість виливу на хід його розвитку.

Управлінням Х називається сукупність розв'язків, що приймаються на кожному з етапів з метою впливу на хід процесу.

Випуск продукції підприємством – це керований процес, що визначається змінами попиту ринку, складу обладнання, величиною попереднього прибутку, тенденціями розвитку, відсотком коштів, що спрямовуються у виробництво та на наукову діяльність тощо. Сукупність рішень, що приймаються на початку кожного з відрізків певного періоду (тижнів місяця, місяців року та ін.) з питань забезпечення сировиною, обладнанням, розмірами фінансування, є управлінням. Планування на місяць здійснюється з урахуванням того, що на кінець року повинні бути досягнуті певні цілі.

Загальна постановка задачі динамічного програмування. Нехай деяка керована система S знаходиться в початковому стані S_0. У результаті управління система переходить у кінцевий стан S_n. З процесом зміни стану системи пов'язано деякий критерій ефективності F. Необхідно організувати процес управління так, щоб критерій F набув свого оптимального значення.

Припустимо, що процес управління можна розбити на n кроків, тобто рішення приймається на кожному кроці, а управління, що переводить систему із початкового стану S_0 в кінцевий стан S_n, являє собою сукупність n покрокових управлінь.



Умовні позначення:

X_k – управління на k-му кроці;

$X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ – управління, що переводить систему із початкового стану S_0 в кінцевий стан S_n.

Рис. 7.1. Розбиття процесу управління на *n* кроків

Отже, задача ДП полягає в тому, щоб з множини управлінь знайти таке X^*, яке дозволяє перевести систему із початкового стану S_0 в остаточний стан S_n так, щоб критерій оптимальності F набув свого оптимального значення F^*.

Метод динамічного програмування ґрунтується на принципі оптимальності Ричарда Беллмана, що визначає порядок покрокового розв’язування задачі, яка може бути піддана декомпозиції, за допомогою рекурентних обчислювальних процедур.

Принцип оптимальності Беллмана формулюється наступним чином: оптимальне управління має таку основоположну властивість: яким не були би початковий стан і прийняте початкове рішення, наступні рішення повинні утворювати оптимальне управління відносно стану, що виник у результаті попереднього рішення [3].

Отже, динамічне програмування є поетапним плануванням багатокрокового процесу з оптимізацією на один крок, яке враховує на кожному кроці розвиток процесу загалом, тобто при прийнятті рішення враховується майбутнє. Безпосередньо це зробити неможливо, і саме принцип оптимальності дає нам можливість це зробити. У кожному процесі є останній, n-й крок, прийняття рішення на якому не залежить від майбутнього. Здійснивши планування цього кроку, до нього можна приєднати (n-1)-й крок, до яких (n-2)-й крок, приходячи так до початкового стану S_0. Процес динамічного програмування розгортається з кінця до початку – від останнього стану до початкового.

Для планування n-го кроку необхідно знати стан системи на початку кроку, якщо він невідомий (а так є завжди), то, виходячи з характеристик процесу, робляться припущення про можливі стани системи на цьому кроці. Для кожного припущення визначається оптимальне управління на останньому n-му кроці. Таке оптимальне управління називається ***умовно оптимальним*** (за умови певного значення стану на попередньому кроці). Аналогічні дії на (n-1)-му кроці, але умовно оптимальні управління обирається з урахуванням вже обраних умовно оптимальних управлінь на n-му кроці і так далі. Для 1-го кроку (на відміну від інших) припущень про можливий стан системи робити не треба – стан S_0 відомий, тому визначається оптимальне управління з урахуванням усіх умовно оптимальних управлінь, знайдених на 2-му кроці.

Описаний процес називається ***умовною оптимізацією***. По закінченні його здійснюється ***безумовна оптимізація***: проходячи від S_0 до S_n у прямому напрямку виконання процесу, визначається оптимальне управління для процесу в цілому.

Розв'язання типових задач

Задача 7.1. Динамічна модель оптимізації виробничої програми (модель оптимального виробництва, збуту та зберігання продукції)

Підприємство прагне знайти оптимальний план виробництва продукції протягом n місяців, у кожному з яких необхідно для реалізації d_k одиниць продукції. Запас до початку планованого періоду z_0. У кожному із планованих місяців фірма може виготовити не більш ніж A одиниць продукції. Одночасно на складі може зберігатися не більш ніж B одиниць продукції. $C(x_k)$ – витрати, що пов'язані з виробництвом x_k одиниць продукції в k-й місяць, h – витрати, що зумовлені збереженням протягом одного місяця одиниці продукції. До кінця планового періоду запас продукції повинен дорівнювати нулю.

Використовуючи вихідні дані табл. 7.1-7.2, розробити виробничу програму, при якій загальна сума витрат на виробництво і збереження продукції була б мінімальною, а попит на продукцію вдоволений цілком і вчасно.

Таблиця 7.1

Динамічна модель оптимізації виробничої програми: вихідні дані

Показник	Значення
Період планування (n), місяць	4
Місячний попит на продукцію (d), од.	3
Максимальний місячний обсяг виробництва (A), од.	5
Максимальна місткість складу готової продукції (В), од.	4
Витрати на зберігання 1 од. продукції протягом місяця (h), тис. грн	1
Запас готової продукції на початок планового періоду (z_0), од.	1
Запас готової продукції на кінець планового періоду (z), од.	0

Таблиця 7.2

Виробничі витрати

Обсяг виробництва, x_k, од.	0	1	2	3	4	5
Виробничі витрати, $C(x_k)$, тис. грн	0	5	17	19	21	23

Розв'язання

Розв'язання задачі оптимізації виробничої програми здійснюється за алгоритмом динамічного програмування.

1. Вибір способу розподілу процесу управління на кроки

Процес планування виробництва, збуту і зберігання продукції протягом n місяців дозволяє розглядати його як n-кроковий процес, тобто за номер k-го кроку виберемо номер k-го місяця.

2. Вибір параметрів, що характеризують стан системи, і змінних управління на k-му кроці

z – початковий стан системи – рівень запасу готової продукції на початок $к$-го місяця;

j_k – кінцевий стан системи – рівень запасу готової продукції на кінець $к$-го місяця;

$X^*_k(z)$ – умовно-оптимальне управління на k-му кроці – обсяг продукції, що виробляється в k-й місяць, для забезпечення мінімально можливих витрат на виробництво і зберігання продукції.

3. Формулювання принципу оптимальності Беллмана та побудова цільової функції

Принцип оптимальності Беллмана для поставленої задачі звучить так: оптимальний план виробництва для будь-якого місяця повинен володіти тією властивістю, що яким би не був запас готової продукції в попередні місяці, план для наступних місяців повинен бути оптимальним з точки зору мінімізації витрат на виробництво і зберігання готової продукції.

Оскільки необхідно знайти план виробництва продукції на n місяців, що мінімізує загальні витрати на її виробництво і зберігання, то цільова функція запишеться як сума:

$$F = \sum_{k=1}^{n} \left(C(x_k) + h \cdot j_k \right) \to \min . \tag{7.1}$$

4. Побудова функціонального рівняння Беллмана

Функціональне рівняння Беллмана (основне рекурентне співвідношення) дозволяє знайти умовно оптимальні значення цільової функції на k-му кроці при відомих її умовно оптимальних значеннях на попередньому кроці.

Нехай $F_k^*(z)$ – мінімальні (умовно оптимальні) витрати на виробництво і зберігання продукції за k-й місяць, за умови, що рівень запасів на початок місяця становить z.

Обчислювальний процес будемо виконувати за схемою зворотного ходу (від кінця до початку), враховуючи при цьому, що сумарні витрати в наступні місяці повинні бути мінімальними. Отже, рекурентне співвідношення Беллмана має вигляд:

$$F_k^*(z) = \min_{x_k \in u} \left\{ C(x_k) + h \cdot j_k + F_{k+1}^*(j_k) \right\}, \tag{7.2}$$

де U – множина значень x_k така, що:

$x_k \le A$ – підприємство може виробити не більше ніж A одиниць продукції;

$z(j_k) \le B$ – запас готової продукції не може перевищувати місткість складу B одиниць продукції.

Оскільки рівень запасів на кінець періоду повинен дорівнювати нулю і на n + 1-му кроці нічого не виробляється і не зберігається, то функціональне рівняння Беллмана для останнього кроку набуває вигляду:

$$F_n^*(z) = \min_{x_k \in u} \left\{ C(x_n) + 0 + F_{n+1}^*(0) \right\},$$

тобто

$$F_n^*(z) = \min_{x_n \in u} \left\{ C(x_n) \right\}. \qquad (7.3)$$

5. Умовна оптимізація процесу

Умовна оптимізація проводиться послідовно для кроків n, n-1, n-2, ..., 2, 1 в оптимізаційних таблицях виду табл. 7.3 за формулами (7.3) і (7.2). Для цього необхідно обчислити обсяги виробництва x_k, виходячи з логічної формули стану на k-му кроці (рівень запасу готової продукції (ГП) на кінець k-го місяця):

Запас ГП на кінець k-го місяця	=	Запас ГП на початок k-го місяця	+	Обсяг виробництва у k-й місяць	-	Обсяг продаж у k-й місяць

або

$$j_k = z + x_k - d_k \qquad (7.4)$$

звідки

$$x_k = j_k - z + d_k \qquad (7.5)$$

Зауваження. Під час заповнення оптимізаційних таблиць необхідно звертати увагу на виконання умов формули (7.2).

У задачі, яка розв’язується, попит постійний d_k = 3 од., отже, формула (7.5) набуде вигляду:

$$x_k = j_k - z + 3 .$$

Таблиця 7.3

Оптимізаційна таблиця для *k*-го кроку

$z \backslash j_k$	0		1		…	B		$F_k^*(z)$	$X_k^*(z)$
0	x_k	$F_k(0)$	x_k	$F_k(0)$	…	x_k	$F_k(0)$	$F_k^*(0)$	$X_k^*(0)$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
B	x_k	$F_k(B)$	x_k	$F_k(B)$	…	x_k	$F_k(B)$	$F_k^*(B)$	$X_k^*(B)$

Реалізацію умовної оптимізації процесу в MS Excel наведено на рис. 7.2. Із останньої таблиці визначаємо мінімальні витрати за 4 місяці $F_{\min} = F_1^*(z) = 56$ тис. грн.

6. Безумовна оптимізація процесу

Проведемо безумовну оптимізацію процесу, рухаючись від кінця розрахунків до початку, тобто від останньої таблиці для $k = 1$ до першої таблиці для $k = 4$.

Отже, для досягнення мінімальних витрат на виробництво та зберігання готової продукції у сумі 56 тис. грн та своєчасного й повного задоволення попиту підприємству рекомендується:

– у 1-й місяць виробити 5 од., реалізувати – 3 од. продукції;

– у 2-й місяць виробити 0 од., реалізувати – 3 од. продукції;

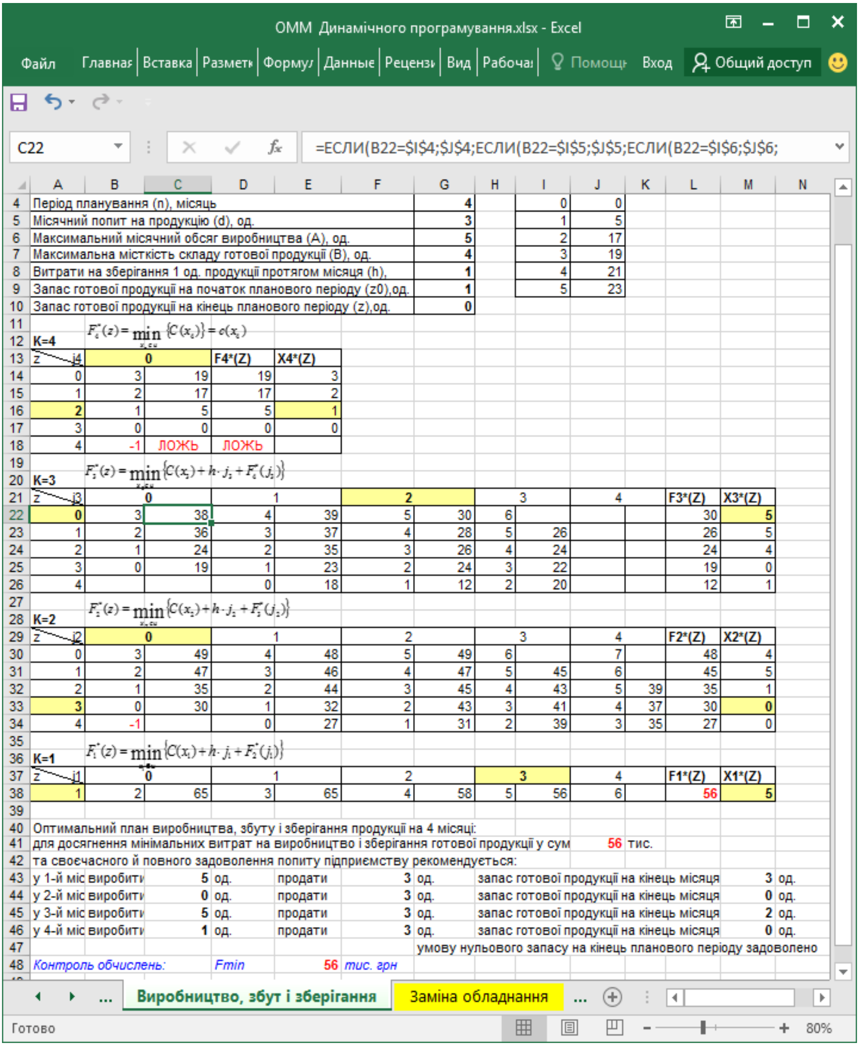
– у 3-й місяць виробити 5 од., реалізувати – 3 од. продукції;

– у 4-й місяць виробити 1 од., реалізувати – 3 од. продукції;

Вимогу нульового запасу на кінець планового періоду виконано.

Зауваження. На завершення необхідно виконати контроль обчислень, використовуючи формулу (7.1):

$$F = \sum_{k=1}^{4}(C(x_k) + h \cdot j_k) = (23 + 1 \cdot 3) + (0 + 0) + (23 + 1 \cdot 2) + (5 + 0) = 56 \text{ од.}$$



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
4	Період планування (n), місяць						4		0	0			
5	Місячний попит на продукцію (d), од.						3		1	5			
6	Максимальний місячний обсяг виробництва (A), од.						5		2	17			
7	Максимальна місткість складу готової продукції (B), од.						4		3	19			
8	Витрати на зберігання 1 од. продукції протягом місяця (h),						1		4	21			
9	Запас готової продукції на початок планового періоду (z0),од.						1		5	23			
10	Запас готової продукції на кінець планового періоду (z),од.						0						
11		$F_4^*(z)=\min\limits_{x_4\in u}\{C(x_4)\}=c(x_4)$											
12	K=4												
13	z \ j4	0		F4*(Z)	X4*(Z)								
14	0	3	19	19	3								
15	1	2	17	17	2								
16	2	1	5	5	1								
17	3	0	0	0	0								
18	4	-1	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ									
19		$F_3^*(z)=\min\limits_{x_3\in u}\{C(x_3)+h\cdot j_3+F_4^*(j_3)\}$											
20	K=3												
21	z \ j3	0		1		2		3		4		F3*(Z)	X3*(Z)
22	0	3	38	4	39	5	30	6				30	5
23	1	2	36	3	37	4	28	5	26			26	5
24	2	1	24	2	35	3	26	4	24			24	4
25	3	0	19	1	23	2	24	3	22			19	0
26	4			0	18	1	12	2	20			12	1
27		$F_2^*(z)=\min\limits_{x_2\in u}\{C(x_2)+h\cdot j_2+F_3^*(j_2)\}$											
28	K=2												
29	z \ j2	0		1		2		3		4		F2*(Z)	X2*(Z)
30	0	3	49	4	48	5	49	6		7		48	4
31	1	2	47	3	46	4	47	5	45	6		45	5
32	2	1	35	2	44	3	45	4	43	5	39	35	1
33	3	0	30	1	32	2	43	3	41	4	37	30	0
34	4	-1		0	27	1	31	2	39	3	35	27	0
35		$F_1^*(z)=\min\limits_{x_1\in u}\{C(x_1)+h\cdot j_1+F_2^*(j_1)\}$											
36	K=1												
37	z \ j1	0		1		2		3		4		F1*(Z)	X1*(Z)
38	1	2	65	3	65	4	58	5	56	6		56	5
39													
40	Оптимальний план виробництва, збуту і зберігання продукції на 4 місяці:												
41	для досягнення мінімальних витрат на виробництво і зберігання готової продукції у сум										56	тис.	
42	та своєчасного й повного задоволення попиту підприємству рекомендується:												
43	у 1-й міс	виробити	5	од.	продати		3	од.	запас готової продукції на кінець місяця				3 од.
44	у 2-й міс	виробити	0	од.	продати		3	од.	запас готової продукції на кінець місяця				0 од.
45	у 3-й міс	виробити	5	од.	продати		3	од.	запас готової продукції на кінець місяця				2 од.
46	у 4-й міс	виробити	1	од.	продати		3	од.	запас готової продукції на кінець місяця				0 од.
47							умову нульового запасу на кінець планового періоду задоволено						
48	*Контроль обчислень:*			*Fmin*	56	*тис. грн*							

Рис. 7.2. Розв'язання задачі оптимізації виробничої програми (виробництва, збуту та зберігання продукції) в MS Excel

Задача 7.2. Динамічна модель оптимальної стратегії оновлення обладнання (модель заміни)

Фінансовий менеджер отримав завдання розробити на n років оптимальну стратегію заміни обладнання віку, не старшого від t років, виходячи з умови максимізації очікуваного прибутку в плановому періоді при таких умовах (табл. 7.4):

– на обладнанні, що аналізується, щорічно виробляється продукція загальною вартістю $r(t)$, тис. грн;

– обладнання вимагає щорічних експлуатаційних витрат $u(t)$, тис. грн;

– залишкова вартість обладнання $S(t)$, тис. грн;

– у будь-який рік обладнання можна або зберегти, або продати і купити нове за ціною P тис. грн, враховуючи витрати на установку і запуск в експлуатацію.

Таблиця 7.4

Динамічна модель оптимальної стратегії оновлення обладнання: вихідні дані

Вік устаткування, t	0	1	2	3	4	5	6
Вартість зробленої продукції, $r(t)$	27	26	26	25	24	23	23
Експлуатаційні витрати, $u(t)$	15	15	16	16	16	17	18
Плановий період, n	10						
Ціна одиниці нового обладнання, $P=const$	13						
Ліквідаційна вартість, $S=const$	4						

Розв'язання

1. Вибір способу розподілу процесу управління на кроки

Внутрішньо властивість процесу заміни обладнання дозволяє розглядати його як n-кроковий процес по тривалості планованого періоду. За номер k-го кроку виберемо номер року планового періоду.

2. Вибір параметрів, що характеризують стан системи, та змінних управління на k-му кроці

t – початковий стан системи – вік обладнання на початку k-го кроку;

Умовно оптимальне управління на k-му кроці – це:

або політика збереження обладнання,

або – його заміна новим обладнанням для забезпечення максимально можливого загального прибутку в плановому періоді.

3. Формулювання принципу Беллмана

Принцип оптимальності Беллмана для поставленої задачі звучить так: оптимальна політика оновлення обладнання для будь-якого планового періоду має володіти такою властивістю, що якою б не була політика щодо обладнання до даного моменту часу майбутня політика має бути оптимальна з точки зору максимізації загального прибутку.

4. Побудова функціонального рівняння Беллмана

Обчислювальний процес виконуватиметься за схемою зворотного ходу, тобто оптимізація починається з кінця планового періоду.

Крок $k = n$.

Нехай на початку останнього року є обладнання віку t років. На розсуд менеджера може бути прийнято одне з таких рішень:

1) зберегти обладнання;

2) продати його і купити нове.

1) якщо обладнання зберегти, то прибуток за останній рік становитиме:

$$r(t) - u(t)\,.$$

2) якщо обладнання продати за залишковою вартістю і купити нове, то прибуток за останній рік становитиме:

$$S(t) - P + r(0) - u(0)\,.$$

Замінювати обладнання буде вигідно лише у тому випадку, коли дохід від експлуатації нового обладнання більший, ніж від старого, тобто якщо

$$S(t) - P + r(0) - u(0) > r(t) - u(t)\,.$$

Позначимо через $F_k^*(t)$ максимально можливий прибуток, одержуваний на k-му кроці, за умови, що на початку кроку є обладнання віку t років.

Функціональне рівняння для останнього кроку ($k = n$):

$$F_n^*(t) = \max_t \begin{cases} r(t) - u(t) & \text{– збереження;} \\ S(t) - P + r(0) - u(0) & \text{– заміна.} \end{cases} \qquad (7.6)$$

Крок $k = n$-1.

1) Якщо на початку передостаннього кроку є обладнання t років і прийнято рішення зберегти його, то до кінця цього кроку буде отримано прибуток $r(t) - u(t)$.

За рік обладнання постаріє і до початку останнього кроку буде мати вік (t + 1) років. Якщо дотримуватися оптимальної політики, то на останньому кроці буде отримано прибуток $F_n^*(t+1)$.

Загальний прибуток за два останні роки (кроки), якщо прийнято рішення обладнання зберегти:

$$r(t) - u(t) + F_n^*(t+1).$$

2) Якщо на початку передостаннього кроку прийнято рішення обладнання замінити, то до кінця цього кроку буде отримано прибуток $S(t) - P + r(0) - u(0)$. За рік нове обладнання постаріє і до початку останнього кроку буде мати вік 1 рік, тому оптимальна політика в останньому році принесе прибуток $F_n^*(1)$.

Загальний прибуток за два останні кроки, якщо прийнято рішення обладнання замінити:

$$S(t) - P + r(0) - u(0) + F_n^*(1).$$

Функціональне рівняння для передостаннього кроку (k=n-1):

$$F_{n-1}^*(t) = \max_t \begin{cases} r(t) - u(t) + F_n^*(t+1) & \text{– збереження;} \\ S(t) - P + r(0) - u(0) + F_n^*(1) & \text{– заміна.} \end{cases} \qquad (7.7)$$

Розмірковуючи й далі аналогічно, отримаємо функціональне рівняння Беллмана для *k*-го кроку

$$F_k^*(t) = \max_t \begin{cases} r(t) - u(t) + F_{k+1}^*(t+1) & \text{– збереження;} \\ S(t) - P + r(0) - u(0) + F_{k+1}^*(1) & \text{– заміна.} \end{cases} \quad (7.8)$$

Зауваження. У разі однаковості прибутків для політик збереження і заміни обладнання, доцільно вибрати політику збереження, оскільки обладнання вже добре відомо, виробник до нього звик, унеможливлюються ризики, пов'язані із придбанням і встановлення нового обладнання.

5 Умовна оптимізація процесу

Умовна оптимізація проводиться послідовно для кроків *n, n*-1, ..., 2, 1 в оптимізаційній таблиці (табл. 7.5), яка являє собою матрицю максимальних прибутків

Таблиця 7.5

Оптимізаційна таблиця (матриця максимальних прибутків)

t / $F_k(t)$	0	1	…	$t_{\max}$
$F_n(t)$	F_n*(0)	F_n*(1)	…	F_n*($t_{\max}$)
…	…	…	…	…
$F_1(t)$	F_1*(0)	F_1*(1)	…	F_1*($t_{\max}$)

Примітка. $t_{\max}$ – граничний строк експлуатації вказаний у паспорті обладнання

Реалізацію умовної оптимізації процесу в MS Excel наведено на рис. 7.3.

6. Безумовна оптимізація процесу

Припустимо, що на початку планового періоду є обладнання віку 4-х років і потрібно виробити оптимальну стратегію оновлення цього обладнання.

В оптимізаційній таблиці на перетині рядка F_1*(*t*) і стовпця *t* = 4 міститься значення максимального прибутку, яке дорівнює 82 тис. грн (див. рис. 7.3). Знайдемо оптимальну стратегію, що забезпечує цей прибуток. Значення F_1*(4) = 82 записано в «області політик збереження». Це означає, що для досягнення в плановому

10-тирічному періоді максимального прибутку в 82 тис. грн треба в першому році обладнання зберегти.

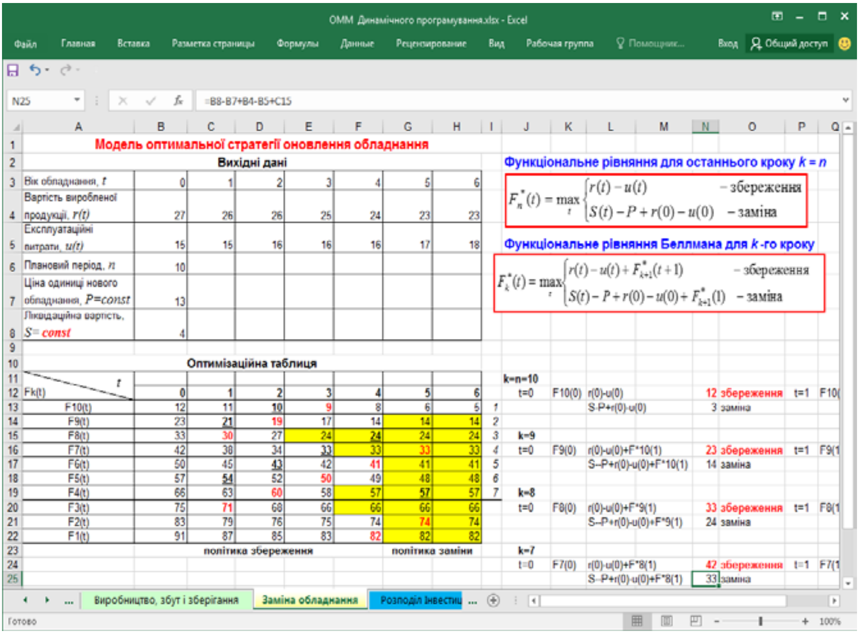


Рис. 7.3. Розв’язання задачі оптимальної стратегії оновлення обладнання в MS Excel

Протягом 1-го року обладнання постаріє на один рік, так що до кінця року його вік складе 5 років. Тепер необхідно діяти оптимально у 9-тирічному періоді, що залишився, з обладнанням віку 5 років. На перетині рядка $F_1{}^*(t)$ і стовпця t = 5 читаємо значення максимального прибутку $F_2{}^*(5)$ = 74, яке записано в "області політик заміни обладнання". Замінивши обладнання та пропрацювавши на ньому черговий рік, ми за 8 років до закінчення планового періоду будемо мати обладнання віку 1 рік. Тепер при наявності обладнання віку 1 рік потрібно діяти оптимально протягом 8 років. Продовжуючи міркувати так же, послідовно знаходимо $F_3{}^*(1)$ = 71, $F_4{}^*(2)$ = 60, $F_5{}^*(3)$ = 50, $F_6{}^*(4)$ = 41 в області політик збереження, що означає, що і в 3-му, і в четвертий, і в п'ятому, і в другому роках наявне обладнання треба зберігати. Діючи і далі оптимально, виявляємо, що $F_7{}^*(5)$ = 33 знаходиться в області політик заміни обладнання. Отже, обладнання на 7-му році рекомендується замінити новим. Далі знаходимо F_8*(1) = 30, F_9*(2) = 19, F_{10}*(3) = 9 в області політик збереження, тому на восьмому, дев'ятому та десятому роках планового періоду обладнання замінюватися не буде.

Розглянутий процес формування оптимальної стратегії оновлення обладнання можна зобразити символічно так:

$$F_1^*(4) \xrightarrow[\text{збереження}]{\text{1–й рік}} F_2^*(5) \xrightarrow[\text{заміна}]{\text{2–й рік}} F_3^*(1) \xrightarrow[\text{збереження}]{\text{3–й рік}} F_4^*(2) \xrightarrow[\text{збереження}]{\text{4–й рік}}$$

$$F_5^*(3) \xrightarrow[\text{збереження}]{\text{5–й рік}} F_6^*(4) \xrightarrow[\text{збереження}]{\text{6–й рік}} F_7^*(5) \xrightarrow[\text{заміна}]{\text{7–й рік}} F_8^*(1) \xrightarrow[\text{збереження}]{\text{8–й рік}}$$

$$F_9^*(2) \xrightarrow[\text{збереження}]{\text{9–й рік}} F_{10}^*(3) \xrightarrow[\text{збереження}]{\text{10–й рік}}$$

Оптимізаційна таблиця на рис. 7.3 розроблена для 10-тирічного планового періоду. Однак хід міркувань не зміниться, якщо буде потрібно скласти політику для планового періоду меншої тривалості. Нехай на початку 7-мирічного планового періоду (n = 7) є обладнання віку 5 років (t = 5) і потрібно сформулювати стратегію щодо цього обладнання. Розмірковуючи, як і вище, отримуємо: максимальний прибуток F_4*(5) = 57 тис. грн досягається завдяки стратегії, що полягає в тому, що в першому році обладнання замінюється, потім протягом 3-х років воно експлуатується, після чого (на 5-му році) знову замінюється і в останні два роки планового періоду зберігається.

Задача 7.3. Динамічна модель оптимального розподілу інвестицій

Інвестиційний менеджер холдингової компанії приймає рішення про виділення коштів трьом дочірнім підприємствам на модернізацію виробництва. Значення можливих приростів чистого прибутку на підприємствах залежно від суми S, що може бути інвестована, представлені у табл. 7.6. Скласти оптимальний план розподілу 100 тис. грн між трьома підприємствами, при якому загальний приріст чистого прибутку в мережі підприємств буде максимальним.

Як зміниться план інвестування, якщо в плановому періоді, можливо, надійде до розгляду ще один інвестиційний проект або зміниться загальна сума інвестицій? Як зміниться при цьому прибуток?

Таблиця 7.6

Приріст чистого прибутку на підприємствах, залежно від інвестицій

Кошти, тис. грн, S	Приріст чистого прибутку на підприємстві, тис. грн			
	$g_1(S)$	$g_2(S)$	$g_3(S)$	додатково $g_4(S)$
0	0	0	0	5
20	10	12	11	16
40	31	26	36	37
60	42	36	45	46
80	62	54	60	63
100	76	78	77	80

1. Вибір способу розподілу процесу управління на кроки

Процес розподілу коштів між n підприємствами дозволяє розглядати його як n-кроковий процес по кількості підприємств. За номер k-го кроку обирається кількість підприємств, у які інвестуються кошти:

- на 1-му кроці всі кошти інвестуються у 1-е підприємство;
- на 2-му кроці – в 2-ге і 1-ше підприємства;
- на 3-му кроці – в 3-тє, 2-ге і 1-ше підприємства;
- ...
- на n-му кроці – в усі n підприємств;

2. Вибір параметрів, що характеризують стан системи, і змінних управління на k-му кроці

S – початковий стан системи – запас коштів на початку k-го кроку;

$X^*_k(S)$ – умовно оптимальне управління на k-му кроці – обсяг коштів, що інвестуються на k-му кроці в k-е підприємство для забезпечення максимально можливого приросту чистого прибутку.

3. Формулювання принципу оптимальності Беллмана та побудова цільової функції

Принцип оптимальності Беллмана для поставленої задачі звучить так: оптимальний план розподілу інвестицій для будь-якої групи підприємств має володіти тією властивістю, що яким би не був обсяг інвестованих коштів у попередні підприємства, розподіл коштів для підприємств, що залишилися, має бути оптимальним з точки зору максимізації загального приросту чистого прибутку.

Цільова функція – функція сумарного приросту чистого прибутку на n підприємствах:

$$F = \sum_{k=1}^{n} g_k(x_k) \to \max, \tag{7.9}$$

де $g_k(x_k)$ – можливий приріст чистого прибутку на k-му підприємстві залежно від обсягу інвестицій $x_к$.

4. Побудова функціонального рівняння Беллмана

$F_k^*(S)$ – умовно оптимальний ефект на k-му кроці, за умови, що до даного кроку рівень запасу коштів дорівнює S.

Обчислювальний процес виконуватимемо за схемою прямого ходу.

Крок k = 1, тобто всі наявні кошти S інвестуються в одне – 1-ше підприємство:

$$X_1^*(S) = S\,. \tag{7.10}$$

Рекурентне співвідношення Беллмана для 1-го кроку:

$$F_1^*(S) = \max\{g_1(S)\} = g_1(S)\,. \tag{7.11}$$

Крок k = 2, тобто всі кошти S розподіляються між 2-ма підприємствами:

– 2-му підприємству виділяється сума x;
– 1-му підприємству виділяється сума S-x.

Загальний приріст чистого прибутку на двох підприємствах:

$$g_2(x) + F_1^*(S-x)\ .$$

Рекурентне співвідношення Беллмана для 2-го кроку:

$$F_2^*(S) = \max_{x \le S}\{g_2(x) + F_1^*(S-x)\}\ . \quad (7.12)$$

Аналогічно, рекурентне рівняння Беллмана для 3-го кроку:

$$F_3^*(S) = \max_{x \le S}\{g_3(x) + F_2^*(S-x)\}\ . \quad (7.13)$$

Аналогічно, рекурентне рівняння Беллмана для *k*-го кроку:

$$F_k^*(S) = \max_{x \le S}\{g_k(x) + F_{k-1}^*(S-x)\}\ . \quad (7.14)$$

5. Умовна оптимізація процесу

Умовна оптимізація проводиться послідовно для кроків 1, 2, …, *n*-1, *n* в оптимізаційних таблицях виду табл. 7.6.

Таблиця 7.6

Оптимізаційна таблиця для *k*-го кроку

S \ *x*	0	…	*S*	F_k*(*S*)	X_k*(*S*)
0	F_k(0)	…	F_k(0)	F_k*(0)	X_k*(0)
…	…	…	…	…	…
S	F_k(*S*)	…	F_k(*S*)	F_k*(*S*)	X_k*(*S*)

У задачі послідовно оптимізуємо кроки k = 1, k = 2, k = 3. Реалізацію умовної оптимізації процесу в MS Excel наведено на рис. 7.4. У результаті 3-го кроку визначено максимальний приріст чистого прибутку $F_{\max} = F_3^*(100) = 79$ тис. грн, який можуть забезпечити три підприємства за умови інвестування в них 100 тис. грн. Умовну оптимізацію виконана.

Зауваження. Під час заповнення оптимізаційних таблиць необхідно звертати увагу на виконання умови рекурентних співвідношень: $x \le S$.

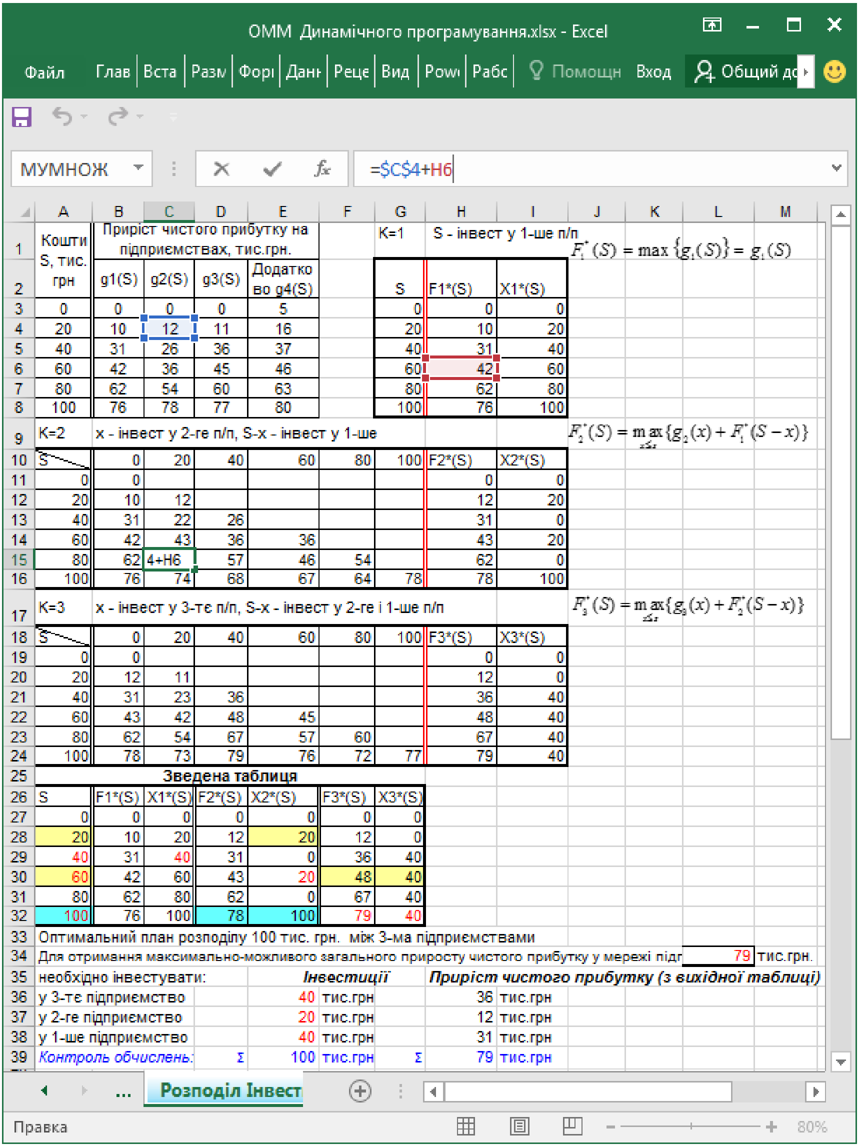


Рис. 7.4. Розв'язання задачі оптимального розподілу інвестицій у MS Excel: базовий сценарій

6. Безумовна оптимізація процесу

Для проведення безумовної оптимізації процесу необхідно побудувати зведену таблицю (див. рис. 7.4).

На підставі аналізу зведеної таблиці для 3-х підприємств можна зробити такий висновок: для отримання максимального приросту чистого прибутку 79 тис. грн необхідно інвестувати:

– у 3-тє підприємство 40 тис. грн (X_3*(100) = 40);

– у 2-ге підприємство 20тис. грн (X_2*(60) = 20);

– у 1-ше підприємство 40 тис. грн (X_1*(40) = 40).

Контроль обчислень за формулою цільової функції: $F_{\max} = g_1(40) + g_2(20) + g_3(40) = 31 + 12 + 36 = 79$ тис. грн.

Отриманий план інвестування це реалізація базового сценарію, водночас за зведеною таблицею можна записати плани для інших сценаріїв розвитку подій.

7. Розширення моделі оптимального розподілу інвестицій між підприємствами (рис. 7.5)

7.1. Сума S на момент інвестування виявилася меншою від раніше прогнозованої, а саме: S = 60 тис. грн

По зведеній таблиці знаходимо: для отримання максимального приросту чистого прибутку $F_{\max} = F_3^*(60) = 48$ тис. грн необхідно інвестувати:

– у 3-тє підприємство 40 тис. грн (X_3*(60) = 40);

– у 2-ге підприємство 20 тис. грн (X_2*(20) = 20);

– у 1-ше підприємство не інвестувати.

Контроль обчислень: $F_{\max} = g_2(20) + g_3(40) = 12 + 36 = 48$ тис. грн.

7.2. Прийнято рішення інвестувати 100 тис. грн лише у два підприємства

По зведеній таблиці знаходимо: для отримання максимального приросту чистого прибутку $F_{\max} = F_2^*(100) = 78$ тис. грн необхідно інвестувати:

– у 2-ге підприємство 100 тис. грн. (X_2*(100) = 100);

– у 1-ше підприємство не інвестувати.

Контроль обчислень: $F_{\max} = g_2(100) = 78$ тис. грн.

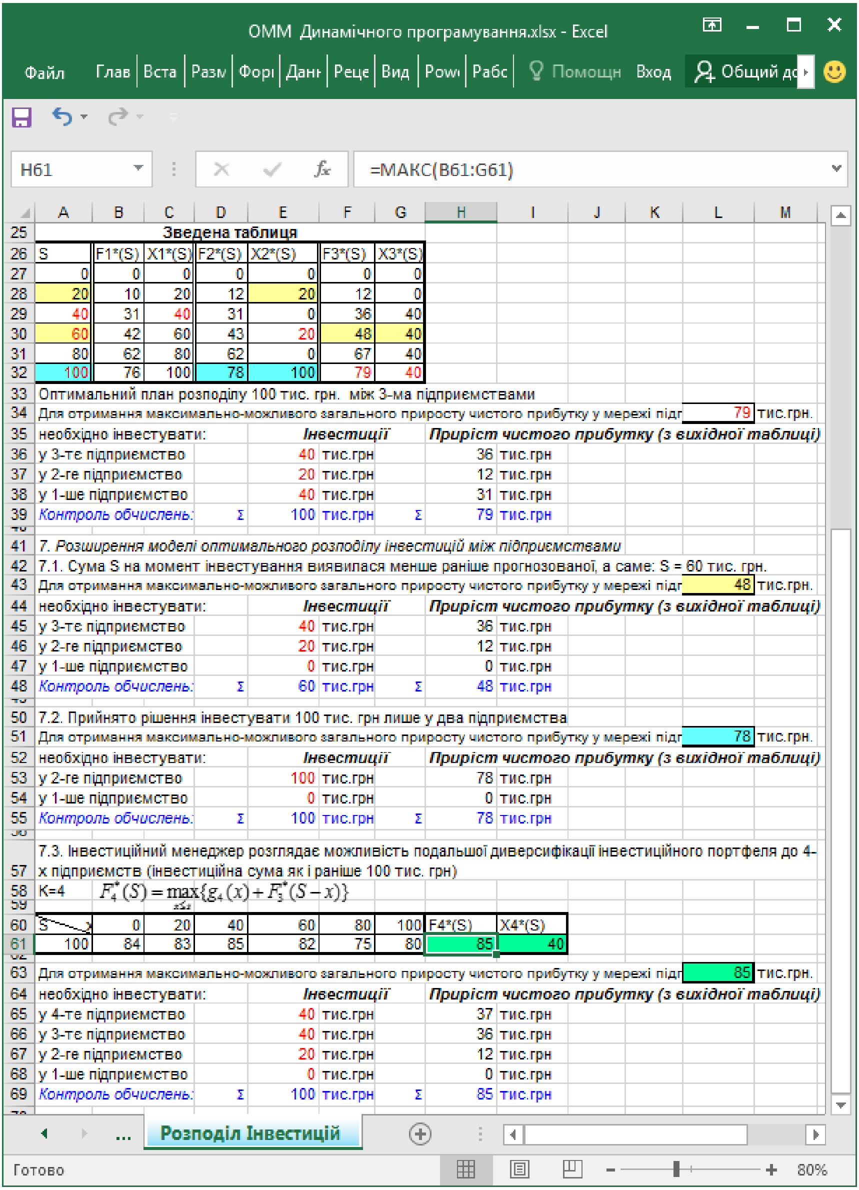


Рис. 7.5. Розв'язання задачі оптимального розподілу інвестицій у MS Excel: розширення моделі

7.3. Інвестиційний менеджер розглядає можливість подальшої диверсифікації інвестиційного портфеля до 4-х підприємств (інвестиційна сума, як і раніше, 100 тис. грн)

У цьому випадку необхідно додатково оптимізувати крок $k = 4$, тобто побудувати ще одну оптимізаційну таблицю, що містить тільки один рядок $S = 100$, і використовувати дані зведеної таблиці.

У результаті безумовної оптимізації маємо: для отримання максимального приросту чистого прибутку на 4-х підприємствах $F_{\max} = F^*_4(100) = 85$ тис. грн необхідно інвестувати:

– у 4-те підприємство 40 тис. грн ($X_4^*(100) = 40$);
– у 3-тє підприємство 40 тис. грн ($X_2^*(60) = 40$);
– у 2-ге підприємство 20 тис. грн ($X_2^*(20) = 20$);
– у 1-ше підприємство не інвестувати.

Контроль обчислень:

$F_{\max} = g_1(0) + g_2(20) + g_3(40) + g_4(40) = 85$ тис. грн.

Завдання до практичної роботи № 7

Завдання 7.1. Необхідно визначити виробничу програму випуску продукції для верстатобудівного заводу, який задовольняє попит d_k верстатів у кожнім з n місяців планованого періоду і забезпечує мінімальні витрати на виробництво та зберігання запасів. Запас на початок планованого періоду складає z_0 верстатів. У кожнім із планованих місяців завод може виготовити не більш ніж A верстатів. Одночасно на складі може зберігатися не більш ніж B верстатів. Витрати, пов'язані з виробництвом x_k верстатів у k-й місяць складаються з умовно-постійних витрат C тис. грн. і змінних витрат V тис. грн. на кожну одиницю продукції. Витрати, зумовлені зберіганням протягом одного місяця одиниці продукції складають h тис. грн.

Використовуючи створену оптимальну виробничу програму скорегувати виробництво для умов перемінного попиту на продукцію заводу. Значення попиту для кожного місяця задати самостійно.

Числові дані (за варіантами) наведено у табл. 7.7.

Таблиця 7.7

Завдання 7.1: вихідні дані

Варіант	Плановий період, місяці	Місячний попит, од.	Максимальний обсяг виробництва, од./місяць	Максимальна місткість складу готової продукції од.	Витрати зберігання одиниці продукції, тис. грн/місяць	Запаси готової продукції на початок / кінець планового періоду, од.	Постійні витрати, тис. грн	Змінні витрати, тис. грн/од.
1	6	10	10	6	5	2/0	4	3
2	6	5	9	5	4	3/0	5	2
3	5	4	6	5	2	3/0	2	8
4	5	5	7	6	3	2/0	3	9
5	6	4	5	4	2	4/0	5	10
6	6	3	7	7	4	3/0	2	6
7	5	8	9	7	2	2/0	4	8
8	5	5	6	5	5	6/0	2	10
9	6	5	6	4	4	4/0	4	9
10	6	8	9	6	7	5/0	5	9
11	5	6	5	7	4	3/0	5	8
12	5	3	4	5	3	5/0	6	8
13	6	6	7	4	5	7/0	3	6
14	6	7	8	6	2	3/0	4	8
15	5	9	10	7	5	2/0	5	10
16	5	9	9	5	6	5/0	8	15
17	6	7	7	6	5	2/0	4	3
18	6	5	6	5	2	2/0	2	5
19	5	6	7	6	4	3/0	1	6
20	5	4	5	4	3	2/0	3	4
21	6	8	8	7	4	4/0	2	7
22	6	5	5	6	2	4/0	1	6
23	5	3	4	4	5	1/0	4	5
24	5	4	5	6	3	5/0	3	7
25	6	6	7	5	4	3/0	5	8

Завдання 7.2. Розробити оптимальну політику щодо устаткування віку, не старшого 10 років, якщо відомі (в тис. грн.):

– вартість $r(t)$ продукції, виробленої протягом року на устаткуванні, що аналізується;

– щорічні витрати $u(t)$, пов'язані з експлуатацією устаткування протягом року;

– ліквідаційна вартість $S(t)$;

– вартість нового обладнання P (сюди ж враховані витрати, пов'язані з установкою, налагодженням і запуском устаткування).

Побудувати матрицю максимальних прибутків на період $n_1 = 10$ років. Розробити оптимальний план оновлення устаткування у плановому періоді тривалості: 1) n_1; 2) n_2.

Числові дані (за варіантами) наведено у табл. 7.8-7.10.

Таблиця 7.8

Завдання 7.2: вихідні дані 1

Варіант	Плановий період, n_1; n_2	Вік устаткування, t_{max}; t_0	Ліквідаційна вартість, $S(t)$	Ціна нового обладнання, P
1	10;8	7;1	2	10
2	10;6	7;4	3	12
3	10;7	8;5	1	11
4	10;9	8;4	4	13
5	10;8	7;6	5	14
6	10;7	6;5	6	12
7	10;6	9;4	4	15
8	10;8	6;8	2	12
9	10;7	8;2	1	10
10	10;9	9;5	2	12
11	10;8	7;4	4	14
12	10;6	7;3	3	12
13	10;7	8;2	4	14
14	10;8	8;5	5	13
15	10;9	6;3	1	15
16	10;6	7;5	2	12
17	10;9	9;3	3	13
18	10;6	7;3	2	16
19	10;7	8;4	3	11
20	10;8	9;2	2	14
21	10;7	8;3	1	11

Продовження табл. 7.8

Варіант	Плановий період, $n_1; n_2$	Вік устаткування, $t_{max}; t_0$	Ліквідаційна вартість, $S(t)$	Ціна нового обладнання, P
22	10;6	8;4	3	15
23	10;8	7;4	3	14
24	10;7	8;5	2	13
25	10;6	7;3	2	12

Примітка. $t_{\max}$ – граничний строк експлуатації вказаний у паспорті устаткування; t_0 – вік устаткування на початку планового періоду

Таблиця 7.9

Завдання 7.2: вихідні дані 2

	Вік устаткування, t										Варіант
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Вартість $r(t)$ продукції, виробленої протягом року на устаткуванні, що аналізується	20	20	20	19	19	18	17	16	16	15	1
	23	22	22	21	21	20	20	19	19	18	2
	25	24	24	23	23	23	22	22	21	21	3
	26	26	26	25	25	25	24	23	22	21	4
	28	28	27	27	27	27	26	26	25	24	5
	27	27	27	27	26	26	26	25	25	25	6
	23	22	22	21	21	20	20	19	19	18	7
	25	25	24	24	23	23	22	22	22	21	8
	23	23	22	22	21	21	20	20	19	19	9
	27	26	26	25	25	25	24	24	24	23	10
	22	22	22	21	21	20	20	20	19	19	11
	28	28	27	27	26	26	25	25	25	24	12
	25	24	24	23	23	23	22	22	21	21	13
	28	28	27	27	26	26	25	25	24	23	14
	21	21	21	20	20	20	19	19	19	18	15
	23	23	23	22	22	21	21	20	20	20	16
	29	28	27	27	26	26	26	25	25	24	17
	20	20	20	19	19	18	17	16	16	15	18
	23	23	22	22	21	21	20	20	19	19	19
	28	27	27	226	26	26	25	25	25	24	20
	28	28	27	27	26	26	25	25	24	23	21
	21	21	21	20	20	20	19	19	19	18	22
	23	22	22	21	21	20	20	19	19	18	23
	25	25	24	24	23	23	22	22	22	21	24
	22	22	22	21	21	20	20	20	19	19	25

Таблиця 7.10

Завдання 7.2: вихідні дані 3

	Вік устаткування, t										Варіант
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Щорічні витрати $u(t)$, пов'язані з експлуатацією устаткування протягом року	10	10	11	11	12	12	13	13	14	14	1
	12	12	12	13	13	14	14	15	15	15	2
	15	15	15	16	16	16	17	17	18	18	3
	9	9	9	10	10	10	11	12	12	13	4
	11	11	12	13	13	14	14	14	15	15	5
	8	8	9	9	9	9	10	10	10	11	6
	16	16	17	17	18	18	19	19	19	20	7
	14	15	15	16	16	17	17	18	19	19	8
	11	11	12	13	13	14	14	14	15	15	9
	9	10	10	11	11	12	13	13	14	14	10
	13	13	14	14	15	15	16	16	17	17	11
	14	14	15	15	16	16	17	17	18	18	12
	10	10	11	12	12	13	14	14	15	15	13
	7	8	8	8	9	9	10	10	10	11	14
	12	12	12	13	13	14	14	15	15	15	15
	15	15	15	16	16	16	17	17	18	18	16
	9	9	9	10	10	10	11	12	12	13	17
	11	11	12	13	13	14	14	14	15	15	18
	15	15	16	16	17	17	18	18	19	19	19
	10	10	11	11	12	12	13	14	14	15	20
	15	16	17	17	18	18	18	19	19	20	21
	14	14	15	16	16	17	17	18	19	19	22
	10	11	12	13	13	14	14	15	15	16	23
	9	9	10	11	11	12	13	13	14	15	24
	12	13	13	14	14	15	15	16	16	17	25

Завдання 7.3. Інвестиційний менеджер компанії приймає рішення про виділення коштів чотирьом дочірнім підприємствам на розширення виробництва. Сума коштів для інвестування складає S = 50n тис. грн (n – номер варіанта). Суми інвестицій у кожне підприємство кратні 10 тис. грн.

По кожному з підприємств відомі можливості прирости чистого прибутку залежно від суми коштів, які інвестуються. Скласти план розподілу коштів між підприємствами, що забезпечує максимальний загальний приріст чистого прибутку для мережі підприємств.

На підставі отриманого оптимального розподілу необхідно:

1) знайти оптимальний план розподілу 40*n* тис. грн між 4-ма підприємствами;

2) знайти оптимальний план розподілу 50*n* тис. грн між 3-ма підприємствами;

3) знайти оптимальний план розподілу 50*n* тис. грн між 5-ма підприємствами (показники ефективності для 5-го підприємства взяти з наступного варіанта).

Числові дані (за варіантами) наведено у табл. 7.11 і 7.12. Вибір варіанта здійснюється за ковзним принципом.

Таблиця 7.11

Завдання 7.3 Вихідні дані (1-13 варіанти)

Кошти в наявності, *S*, тис. грн	Приріст чистого прибутку на *k*-му (*k* =1,2,3,4) підприємстві залежно від суми інвестицій, тис. грн											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
10*n*	8	6	3	4	5	7	3	6	11	9	8	10	12
20*n*	10	9	4	6	9	9	5	8	12	11	12	13	12
30*n*	11	11	7	8	12	11	7	9	13	12	14	15	14
40*n*	12	13	11	13	14	13	11	10	14	13	15	16	15
50*n*	18	15	18	16	15	16	13	14	16	15	16	17	18

Таблиця 7.12

Завдання 7.3. Вихідні дані (14-25 варіанти)

Кошти в наявності, *S*, тис. грн	Приріст чистого прибутку на *k*-му (*k* =1,2,3,4) підприємстві залежно від суми інвестицій, тис. грн											
	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
10*n*	11	14	15	12	11	9	10	12	11	14	16	15	12
20*n*	12	15	16	14	15	14	13	14	14	15	17	18	14
30*n*	15	15	17	15	18	16	17	16	15	17	18	20	16
40*n*	19	17	19	19	20	18	20	19	19	19	19	21	19
50*n*	21	18	20	21	22	19	21	22	20	21	20	22	21

Контрольні запитання та завдання до захисту практичної роботи

1. Закінчіть речення «Динамічне програмування – це …»
2. Сформулюйте принцип оптимальності Р. Беллмана.
3. У чому суть методу динамічного програмування?
4. З яких кроків складається алгоритм розв’язання задачі динамічного програмування?
5. За яким загальним принципом будується рекурентне співвідношення Беллмана?
6. Чи завжди розв’язання задачі динамічного програмування здійснюється за схемою зворотного ходу?
7. Опишіть структуру функціонального рівняння Беллмана для задачі оптимального виробництва, збуту і зберігання продукції.
8. Чи можуть змінні управління на *k*-му кроці бути не кількісними, а якісними? Наведіть приклади.
9. Опишіть структуру функціонального рівняння Беллмана для задачі оптимальної стратегії оновлення обладнання.
10. Як проводиться безумовна оптимізація в задачі оптимальної стратегії оновлення обладнання.
11. Розкрийте суть способу розподілу процесу управління на кроки у задачі оптимального розподілу інвестицій.
12. Чи можна провести умовну оптимізацію розподілу інвестицій за схемою «зворотного ходу»?
13. Опишіть структуру функціонального рівняння Беллмана для задачі оптимального розподілу інвестицій.
14. Для яких альтернативних сценаріїв можна використовувати зведену таблицю базового сценарію розподілу інвестицій?
15. Чи можна розв’язати задачу динамічного програмування з використанням надбудови **Пошук рішення?**

Практична робота № 8: Оптимізаційні методи та моделі управління запасами

Мета роботи: формування практичних навичок формалізації задач управління запасами, їхнього розв'язання та прийняття рішень щодо оптимальної стратегії управління запасами

Основні теоретичні відомості

Задачі управління запасами складають один з найбільш численних класів економічних оптимізаційних задач. Коректне та своєчасне визначення оптимальної стратегії управління запасами, а також раціонального рівня запасів дозволяє визволити значні оборотні кошти, заморожені у запасах.

Виникнення теорії управління запасами пов'язують з працями Ф. Еджуорта і Ф. Харріса, що з'явилися у кінці XIX – на початку XX ст., у яких досліджувалася проста оптимізаційна модель визначення економічного розміру партії поставки для складської системи з постійним рівномірним витрачанням і періодичним надходженням продукту, який зберігається.

Запасами називається будь-який ресурс на складі, який використовується для задоволення майбутніх потреб.

Предмет теорії управління запасами – пошук такої організації поставок або виробництва, за якого загальні витрати на функціонування системи були б мінімальними.

4 основних види витрат, які можуть вплинути на вибір рішення з управління запасами

1) витрати на придбання запасів;
2) витрати на організацію замовлення;
3) витрати зберігання запасів;
4) втрати від дефіциту.

Витрати на придбання запасів доцільно враховувати тільки, якщо ціна одиниці продукції залежить від розміру партії, що зазвичай виражається у вигляді оптових знижок.

Придбання або виготовлення продукції, крім вартості самих товарів, пов'язано зі ще деякими витратами. Так, при виготовленні своєї продукції для створення товарних запасів виникають витрати на наладку, пуск і зупинку обладнання, на складання документації тощо. Закупівля виробничих і товарних запасів пов'язана з виникненням адміністративних витрат на здійснення замовлення, процедуру приймання матеріальних цінностей, обробку документації, транспортування замовлення.

До ***витрат на організацію замовлення*** (розміщення, виконання, ***створення запасу***), які враховуються в аналізі функціонування систем управління запасами відносять постійні витрати з розміщення замовлень:

– витрати на роз'їзди та відрядження;

– поштово-телеграфні витрати;

– транспортні витрати, які не залежать від розміру партії.

Якщо складську систему забезпечує підприємство-постачальник, то за умови серійного випуску продукції вартість переналагодження обладнання перед випуском чергової партії також потрапляє в цю категорію витрат. Витрати, пов'язані з початком випуску чергової партії називаються *витратами на* ***підготовчо-заготівельні операції***.

Витрати виконання замовлення – накладні витрати, пов'язані з реалізацією замовлення. У промисловості такими витратами є витрати на підготовчо-заготівельні операції.

Витрати зберігання – витрати, пов'язані з фізичним утриманням товарів на складі, плюс можливі відсотки на капітал, вкладений у запаси. Зазвичай вони виражаються або в абсолютних одиницях, або у відсотках від закупівельної ціни і пов'язуються з певним проміжком часу.

Витрати зберігання запасів охоплюють:

– вартість капіталу, замороженого в запасах (залежить від поточної ставки відсотка);

– вартість зберігання запасів, враховуючи займаний простір, обладнання, праця обслуговуючого персоналу (виражається, як правило, також у відсотках від вартості матеріалів, що зберігаються, найчастіше становить 5-10% на рік);

– вартість утрат запасу (випадкові поломки, незаплановане перевищення терміну зберігання, старіння запасів, у тому числі моральне, «усушка–утруска», а також крадіжка запасів, виражаються втрати запасу також у відсотках від вартості зберігаються матеріальних ресурсів).

Витрати на зберігання запасів, отже, завжди виражаються у відсотках від їх вартості і в більшості випадків складають 15-30% на рік.

Втрати від дефіциту (штраф за дефіцит, втрачений прибуток) – витрати, пов'язані з незадовільним попитом, що виникає внаслідок відсутності продукту на складі.

На промисловому підприємстві обчислюються як сумарні втрати прибутку в розрахунку на одну одиницю вартості дефіцитних матеріалів. Прибуток при дефіциті може знизитися за рахунок:

• простою виробничих потужностей і робочих;

• переналагодження виробничого процесу;

• заміни дефіцитних матеріалів іншими більш дорогими;

• випуск продукції в надурочний час, після ліквідації причини простою;

• штраф за порушення термінів поставки.

У роботі системи може допускатися дефіцит (***моделі планування дефіциту***) або може висуватися вимога бездефіцитної роботи (***моделі без дефіциту***).

Управління запасами полягає у знаходженні такої стратегії поповнення та витрати запасів, при якій функція сукупних витрат набуває мінімального значення:

$$C = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 \rightarrow \min, \tag{8.1}$$

де C – сумарні витрати системи управління запасами;

C_0 – витрати на придбання запасу (враховується тільки, якщо ціна одиниці продукції залежить від розміру партії, що виражається у вигляді оптових знижок);

C_1 – витрати на оформлення замовлення (створення запасу);

C_2 – витрати на зберігання запасів;

C_3 – втрати від дефіциту (враховується в моделі планування дефіциту).

Розглянемо основні статичні детерміновані моделі управління запасами, тобто моделі, всі параметри яких детерміновані величини, які не змінюються у часі.

1) Модель найбільш економічного розміру замовлення

Передумови:

– інтенсивність споживання запасу відома і постійна;

– отримання замовлення миттєве;

– відсутні кількісні знижки при закупівлі великих партій запасів;

– єдині змінні параметри – витрати замовлення і зберігання;

– виключається дефіцит у разі своєчасного замовлення.

Вихідні дані: інтенсивність споживання запасу, питомі витрати замовлення і зберігання.

Результат: оптимальний розмір замовлення, час між замовленнями і їх кількість за період, витрати управління запасами.

2) Модель оптимального розміру замовлення за умови, що отримання замовлення не миттєве. Необхідно знайти розмір запасів, при якому потрібно робити нове замовлення.

Вихідні дані: інтенсивність споживання запасу, питомі витрати замовлення і зберігання, час виконання замовлення.

Результат: оптимальний розмір замовлення, час між замовленнями. точка відновлення запасу, витрати управління запасами.

3) Модель планування дефіциту **–** модель оптимального розміру замовлення за умови, що допускається дефіцит запасу і пов’язаний з ним упущений прибуток.

Передумови:

– інтенсивність споживання запасу відома і постійна;

– отримання замовлення миттєве;

– відсутні кількісні знижки при закупівлі великих партій запасів;

– єдині змінні параметри – витрати замовлення, зберігання, втрат від дефіциту;

– при відсутності запасу попит зберігається з тією ж інтенсивністю, а споживання відсутнє;

– швидкість накопичення дефіциту дорівнює інтенсивності споживання запасу.

Вихідні дані: інтенсивність споживання запасу, питомі витрати замовлення та зберігання, упущений прибуток.

Результат: оптимальний розмір замовлення; час між замовленнями; точка відновлення запасу, витрати управління запасами.

4) Модель виробництва оптимальної партії продукції (у поєднанні з умовами 1-3). Необхідно розглядати рівень щоденного виробництва і рівень щоденного попиту.

Вихідні дані: інтенсивність споживання запасу, питомі витрати замовлення і зберігання, упущений прибуток, інтенсивність виробництва.

Результат: оптимальний рівень запасів (точка поновлення), витрати управління запасами.

5) Модель з кількісними (оптовими) знижками. З'являється можливість кількісних знижок залежно від розміру замовлення. Розглядається залежність витрат зберігання від ціни товару. Оптимальний рівень замовлення визначається виходячи з умови мінімізації загальних витрат для кожного виду знижок.

Розглянемо докладніше наведені моделі управління запасами.

Модель найбільш економічного розміру замовлення (модель EOQ – Economic order quantity, модель Вілсона) – це статична детермінована модель без дефіциту.

Замовлення, що поповнює запаси, надходить партіями однакового розміру *n*. Якщо відлік часу почати з моменту надходження 1-ї партії, то рівень запасу в початковий момент часу дорівнюватиме: $\gamma(0) = n$. Цей запас витрачається з постійною інтенсивністю *b*, поки не досягне нуля за період *T*. У цій точці надходить замовлення, розмір якого дорівнює *n*, і рівень запасів відновлюється до максимального значення (рис 8.1).

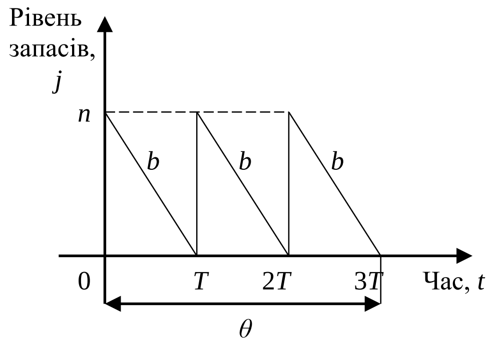
Задача управління запасами полягає у визначенні такого розміру партії поставки (замовлення), за якого загальні витрати на створення і зберігання запасу за період планування θ були б мінімальними (рис. 8.2), тобто

$$C = C_1 + C_2 \to \min, \qquad (8.2)$$

де C – загальні витрати управління запасами;

C_1 – витрати створення (розміщення) запасів;

C_2 – витрати зберігання запасів.



Умовні позначення:
θ – плановий період;
n –розмір партії поставки;
b – інтенсивність витрачання (споживання) запасу.
Т – час витрачання партії поставки.

Рис. 8.1. Динаміка запасів: статична модель без дефіциту

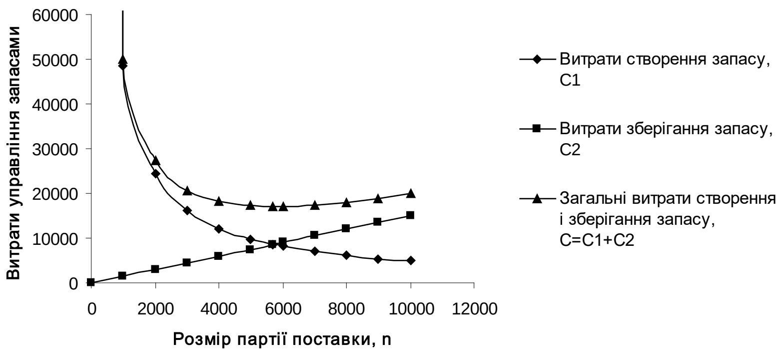


Рис. 8.2. Витрати управління запасами: модель EOQ

Формули розрахунку основних параметрів моделі найбільш економічного розміру замовлення наведено у табл. 8.1.

Таблиця 8.1

Основні параметри моделі найбільш економічного розміру замовлення (моделі EOQ)

Показник	Формула розрахунку
Оптимальний розмір замовлення (партії поставки), EOQ	$n_0 = \sqrt{\dfrac{2c_1N}{c_2\theta}}$
Мінімальні загальні витрати управління запасами	$C_0 = \dfrac{c_1N}{n_0} + \dfrac{c_2\theta \cdot n_0}{2}$
Оптимальна кількість замовлень за період планування	$k_0 = \dfrac{N}{n_0}$
Інтенсивність споживання запасу	$b = \dfrac{N}{\theta}$
Час витрачання оптимальної партії поставки (час між замовленнями)	$T = \dfrac{n_0}{b}$

Примітка. N – загальне споживання запасу за період планування θ; c_1 – середня вартість створення однієї партії (не залежить від розміру партії); c_2 – вартість зберігання однієї одиниці запасу в одиницю часу.

Уведемо припущення про те, що замовлення може бути одержано не миттєво, а з часом (***Модель 2***). Тоді необхідно наперед робити замовлення, щоб у потрібний час мати достатню кількість запасу на складі. Отже, потрібно знайти той рівень запасів, при якому робиться нове замовлення. Цей рівень називається ***точкою поновлення замовлення*** і розраховується за формулою:

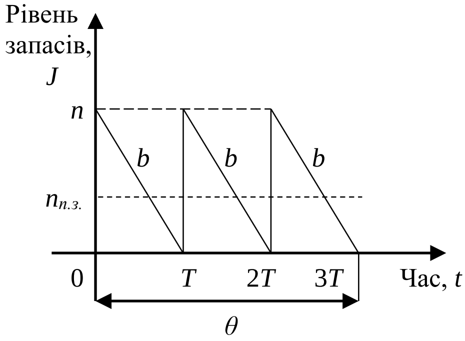
$$n_{\text{п.з.}} = t_{\text{д}} \cdot b\,, \tag{8.3}$$

де $n_{\text{п.з.}}$ – точка поновлення замовлення;

$t_{\text{д}}$ – час доставки замовлення (цикл замовлення);

b – інтенсивність споживання запасу.

Інші характеристики системи визначаються аналогічно до моделі 1. Модель ілюструється рис. 8.3.



Умовні позначення:
θ – плановий період;
n –розмір партії поставки;
b – інтенсивність витрачання (споживання) запасу.
T – час витрачання партії поставки;
$n_{п.з.}$ – точка поновлення замовлення.

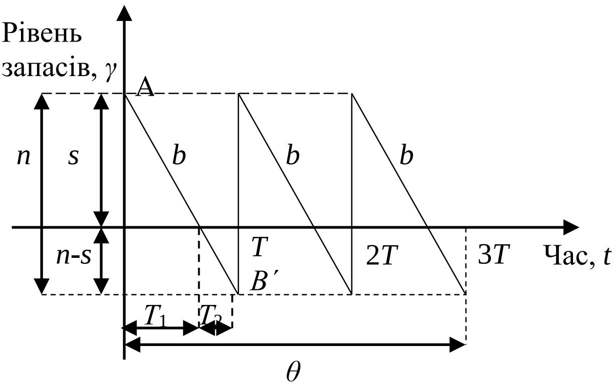
Рис. 8.3. Динаміка запасів: точка поновлення замовлення

Модель планування дефіциту – це модифікація моделі найбільш економічного розміру замовлення, яка стосується управління дорогоцінними товарними запасами, коли звичайна практика ведення складу доповнюється системою замовлень. Ця модель допускає дефіцит запасу і пов'язаний з ним упущений прибуток – штраф за дефіцит (рис. 8.4).

Управління запасами у цьому випадку полягає у відшукуванні такої стратегії поповнення і витрати запасів, за якої функція сукупних витрат набуває мінімального значення:

$$C = C_1 + C_2 + C_3 \rightarrow \min, \qquad (8.4)$$

де C – загальні витрати управління запасами;
C_1 – витрати створення запасу;
C_2 – витрати зберігання запасів;
C_3 – втрати від дефіциту.



Умовні позначення:

θ – плановий період;

n –розмір партії поставки;

b – інтенсивність витрачання (споживання) запасу.

s – максимальний рівень запасу $s < n$;

n-s = x – величина планованого дефіциту – кількість одиниць товару, на яку необхідно приймати замовлення між послідовними прибуттями на склад партій товарів;

$T = T_1 + T_2$ – час між постачаннями;

T_1 – час, протягом якого відбувається споживання запасу;

T_2 – час відсутності запасу та накопичування дефіциту, який буде перекрито у момент надходження наступної партії.

Рис. 8.4. Динаміка запасів: модель планування дефіциту

У табл. 8.2 наведено формули розрахунку основних параметрів моделі планування дефіциту. У моделі планування дефіциту розраховується ***щільність збитків через незадоволення попиту на запас***. Твердження про те, що щільність збитків через незадоволення попиту на запас дорівнює ρ означає, що $(1-\rho)\cdot 100\%$ часу запас товару відсутній.

Таблиця 8.2

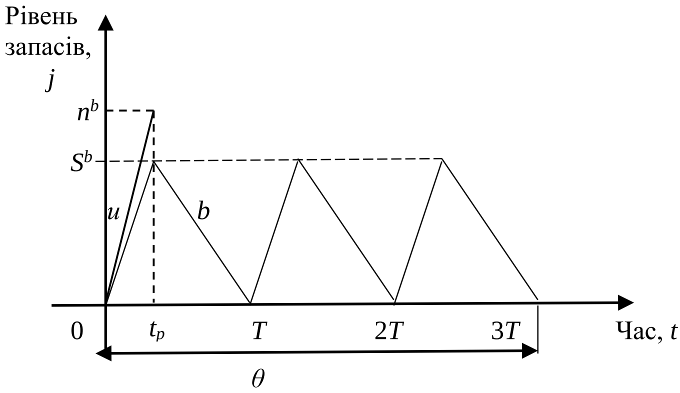
Основні параметри моделі планування дефіциту

Показник	Формула розрахунку
Оптимальний розмір замовлення	$\tilde{n}_0 = \sqrt{\frac{2c_1 N}{c_2 \theta}} \sqrt{\frac{c_2 + c_3}{c_3}}$
Мінімальні загальні витрати управління запасами	$\tilde{C}_0 = \frac{c_1 N}{\tilde{n}_0} + \frac{c_2 \theta \cdot \tilde{s}^2}{2\tilde{n}_0} + \frac{c_3 \theta \cdot (\tilde{n}_0 - \tilde{s})^2}{2\tilde{n}_0}$
Щільність збитків через незадоволення попиту на запас	$\rho = \frac{c_3}{c_2 + c_3}$
Максимальний рівень запасу	$\tilde{s}_0 = \tilde{n}_0 \cdot \rho$
Розмір планованого дефіциту	$\tilde{X}_0 = \tilde{n}_0 - \tilde{s}_0$

Примітка. N – загальне споживання запасу за період планування θ; c_1 – середня вартість створення однієї партії (не залежить від розміру партії); c_2 – вартість зберігання однієї одиниці запасу в одиницю часу; c_3 – упущений прибуток в одиницю часу, виникаючий у результаті дефіциту однієї одиниці запасу.

Модель виробництва оптимальної партії продукції (модель EBQ – Economic batch quantity) – це модифікація моделі EOQ, яка відноситься до буферних запасів, що створюються на виробництві між двома суттєво різними етапами виробничого процесу.

У моделі EOQ було припущення, що поповнення запасу відбувається одноразово. Але у промисловому виробництві для комплектування партії товарів потрібен значний час і виробництво товарів для поповнення запасів відбувається одночасно із задоволенням попиту. Модель ілюструє рис. 8.5.



Умовні позначення:
θ – плановий період;
n^b –розмір партії продукції;
S^b –розмір створеного запасу;
u – інтенсивність виробництва;
b – інтенсивність витрачання (споживання) запасу;
T – час витрачання партії поставки;

Рис. 8.5. Модель виробництва оптимальної партії продукції

Задача управління запасами у цьому випадку полягає в визначенні такого розміру партії виробництва продукції, при якому загальні витрати пов'язані із запуском нової партії (витрати на підготовчо-заготівельні операції, на переналагодження устаткування) і зберігання запасу за період планування θ були б мінімальними, тобто

$$C^b = C_1^b + C_2^b \to \min , \tag{8.5}$$

де C^b – загальні витрати управління виробничими запасами;

C_1^b – витрати на підготовчо-заготівельні операції;

C_2^b – витрати зберігання запасів.

Формули розрахунку основних параметрів моделі виробництва оптимальної партії продукції наведено у табл. 8.3.

Таблиця 8.3

Основні параметри моделі виробництва оптимальної партії продукції (моделі EBQ)

Показник	Формула розрахунку
Оптимальний розмір партії продукції, EBQ	$n_0^b = \sqrt{\frac{2c_1N}{c_2\theta}}\sqrt{\frac{u}{u-b}}$
Витрати пов'язані із запуском нової партії (витрати на переналадку)	$C_1^b = \frac{c_1N}{n^b}$
Витрати зберігання	$C_2^b = \frac{u-b}{u}\cdot\frac{c_2\theta\cdot n^b}{2}$
Мінімальні загальні витрати управління запасами	$C_0^b = \frac{c_1N}{n_0^b}+\frac{u-b}{u}\cdot\frac{c_2\theta\cdot n_0^b}{2}$
Максимальний розмір створеного запасу	$s_0^b = n_0^b\left(1-\frac{b}{u}\right)$

Примітка. u – інтенсивність виробництва; c_1 – питомі витрати на підготовчо-заготівельні операції, не залежать від розміру партії (аналог питомих витрат створення запасів); c_2 – питомі витрати зберігання.

Модель з кількісними (оптовими) знижками. Для збільшення обсягів продажів компанії часто пропонують кількісні знижки своїм покупцям.

Оптова (кількісна) знижка – скорочена ціна на товар у разі покупки великої кількості цього товару.

У цьому випадку при прийнятті рішення до загальних витрат управління запасами додаються витрати на закупку запасів, тобто формула загальних витрат набуває вигляду:

$$C_з = \frac{c_1N}{n} + \frac{(c_2\theta)_з \cdot n}{2} + p_з \cdot N\ , \qquad (8.6)$$

де $C_з$ – загальні витрати управління запасами за умови знижки;

$(c_2\theta)_з$ –витрати зберігання одиниці запасу протягом періоду θ за умови знижки;

$p_з$ – ціна одиниці запасу за умови знижки.

Розв'язання типових задач

Задача 8.1. Оптимізації параметрів системи управління запасами

ПрАТ «Sport» оптовий продавець спортивних шкарпеток, що виготовляються за індивідуальними замовленнями і реалізуються клієнтам, які розташовані по всій території країни. Підприємство займається розробкою моделей та оптовою торгівлею (виробництво товару здійснюється іншим підприємством).

Обчислити параметри системи управління запасами, якщо діяльність ПрАТ «Sport» характеризується такими показниками:

- річний обсяг реалізації – 26 000 пар шкарпеток;
- річний рівень витрат зберігання – 25% вартості товару;
- ціна покупки одиниці товару – 4,92 грн за пару;
- ціна реалізації – 9 грн за пару;
- постійні витрати на виконання одного замовлення – 1000 грн;
- час доставки замовлення – 2 тижні.

Розв'язання

1. Оптимальний розмір партії поставки (EOQ)

EOQ обчислюється за формулою:

$$n_0 = \sqrt{\frac{2c_1 N}{c_2\theta}},$$

де N = 26000 – річний обсяг реалізації;
c_1 = 1000 – постійні витрати на виконання одного замовлення;
$c_2\theta$ =0,25·4,92 – річні витрати зберігання одиниці запасу.

Отже, оптимальний розмір партії поставки дорівнюватиме:

$$n_0 = \sqrt{\frac{2\cdot 1000\cdot 26000}{0{,}25\cdot 4{,}92}} = 6502 \approx 6500 \text{ пар шкарпеток.}$$

2. Оптимальна кількість замовлень на рік

Оптимальна кількість замовлень на рік обчислюється за формулою:

$$k_0 = \frac{N}{n_0},$$

тобто $k_0 = \frac{26000}{6500} = 4$ замовлення на рік.

3. Інтенсивність споживання запасу

Інтенсивність споживання запасу обчислюється за формулою:

$$b = \frac{N}{\theta},$$

де $\theta = 52$ – тривалість планового періоду (1 рік = 52 тижні).

Отже, інтенсивність споживання запасу $b = \frac{26000}{52} = 500$ пар на тиждень.

4. Час витрачання оптимальної партії поставки (час між замовленнями)

Час витрачання оптимальної партії поставки обчислюється дорівнює:

$$T = \frac{n_0}{b} = \frac{6500}{500} = 13 \text{ тижнів}$$

5. Точка поновлення замовлення

Точка поновлення замовлення обчислюється за формулою:

$$n_{\text{п.з.}} = t_{\text{д}} \cdot b,$$

де $t_{\text{д}}$ – час доставки замовлення.

Отже, рівень запасу, при якому робиться нове замовлення $n_{\text{п.з.}} = 2 \cdot 500 = 1000$ пар шкарпеток.

6. Загальні мінімальні річні витрати управління запасами

Загальні мінімальні витрати управління запасами обчислюються за формулою:

$$C_0 = \frac{c_1 N}{n_0} + \frac{c_2 \theta \cdot n_0}{2},$$

отже,

$$C_0 = \frac{1000 \cdot 26000}{6500} + \frac{0{,}25 \cdot 4{,}92 \cdot 6500}{2} = 8000 \text{ грн.}$$

7. Страховий (резервний) запас

Фінансовий менеджер підприємства аналізує доцільність уведення системи підтримки страхового запасу на випадок затримки з отриманням замовлень. Користь резервів очевидна, проте за них треба платити. Як зміняться загальні витрати з підтримки запасів з урахуванням резервного запасу 1000 пар шкарпеток? Чи варто підтримувати резервний запас?

У цьому випадку загальні витрати управління запасами обчислимо з урахуванням зберігання резервного запасу, тобто за формулою:

$$C_0^p = \frac{c_1 N}{n_0} + \frac{c_2 \theta \cdot n_0}{2} + c_2 \theta \cdot n_p,$$

де C_0^p – загальні річні мінімальні витрати управління запасами з урахуванням зберігання резервного запасу;

n_p – розмір резервного (страхового) запасу.

Отже, загальні витрати управління запасами за умови підтримки резервного запасу дорівнюють $C_0^p = 8000 + 0{,}25 \cdot 4{,}92 \cdot 1000 = 9230$ грн.

Рівень запасу, за якого треба робити замовлення, за умови наявності резервного запасу $n^p_{\text{п.з.}} = 1000 + 1000 = 2000$ пар шкарпеток.

Висновок про доцільність підтримки резервного запасу робить особа, яка приймає рішення (ОПР), на підставі кількісних обчислень та якісного аналізу можливостей підприємства заморожувати фінансові кошти у вигляді резервного запасу та місткості складських приміщень.

8. Оптові знижки

Виробник пропонує підприємству оптову знижку у розмірі 2%, за умови закупки товару партіями не менше ніж 10 000 пар. У цьому випадку фінансовий менеджер обирає: економити на закупівельній ціні чи на витратах зі зберігання запасів.

Для прийняття рішення в умовах пропозиції оптових знижок загальні витрати управління запасами обчислюють з урахуванням витрат на закупку запасу, що потрібен у плановому періоді. Спочатку обчислимо загальні витрати за умови знижки за формулою:

$$C_з = \frac{c_1 N}{n} + \frac{(c_2\theta)_з \cdot n}{2} + p_з \cdot N\,,$$

де $C_з$ – загальні витрати управління запасами за умови знижки;

$(c_2\theta)_з$ – річні витрати зберігання одиниці запасу, отриманого зі знижкою;

$p_з = 4{,}92 \cdot 0{,}98 = 4{,}89$ грн – «нова» ціна одиниці запасу.

За розмір партії поставки у цьому випадку беремо розмір мінімальної партії, для якої пропонується знижка, тобто n = 10000 пар. Отже, загальні витрати за умови знижки дорівнюють:

$$C_з = \frac{1000 \cdot 26000}{10000} + \frac{0{,}25 \cdot 4{,}82 \cdot 10000}{2} + 4{,}82 \cdot 26000 = 133945 \text{ грн.}$$

Тепер обчислимо загальні мінімальні витрати управління запасами з урахуванням вартості річних запасів $C_0^з$ за формулою:

$$C_0^з = \frac{c_1 N}{n_0} + \frac{c_2\theta \cdot n_0}{2} + p \cdot N\,,$$

Отже, отримуємо такі витрати $C_0^з = 8000 + 4{,}92 \cdot 26000 = 135920$ грн, що дозволяє зробити такий висновок: підприємству варто збільшити закупки до 10000 пар і скористатися знижкою, економія складе:

$$E = C_0^з - C_з = 135920 - 133945 = 1975 \text{ грн.}$$

9. Планування дефіциту

Підприємство розглядає можливість переходу на систему замовлень. Для підтримки системи замовлень і на додаткову рекламу, що буде компенсувати втрату клієнтів, які бажають купувати товар негайно і відмовляються чекати виконання замовлення необхідно 1 грн. на кожну одиницю дефіциту на рік. Чи доцільно фірмі перейти на систему замовлень?

Для відповіді на питання обчислимо основні параметри моделі планування дефіциту.

Розмір оптимальної партії поставки (EOQ) при плануванні дефіциту, як відомо, обчислюється за формулою:

$$\tilde{n}_0 = \sqrt{\frac{2c_1N}{c_2\theta}}\sqrt{\frac{c_2 + c_3}{c_3}},$$

де c_3 – штраф за 1 одиницю дефіциту в одиницю часу;

$\rho = \dfrac{c_3}{c_2 + c_3}$ – щільність збитків через незадоволення попиту.

З урахуванням цього розрахункову формулу можна перетворити до вигляду:

$$\tilde{n}_0 = \frac{n_0}{\sqrt{\rho}}.$$

Проте за умовами ситуації, що розглядається, річний штраф складає 1 грн на кожну одиницю дефіциту, тобто $c_3\theta$ = 1 грн. Річний рівень витрат зберігання – $c_2\theta$ = 0,25·4,92 грн. Тому розрахунки доцільно проводити за формулою:

$$\tilde{n}_0 = \sqrt{\frac{2c_1N}{c_2\theta}}\sqrt{\frac{c_2\theta + c_3\theta}{c_3\theta}}$$

Насамперед обчислимо щільність збитків через незадоволення попиту $\rho = \dfrac{1}{0{,}25 \cdot 4{,}92 + 1} = 0{,}4484\,(44{,}84\%)$, це означає, що близько 55% $\left(= (1-\rho)\cdot 100\%\right)$ загального часу запас на фірмі буде відсутній.

Отже, оптимальний розмір замовлення за планування дефіциту складатиме:

$$\tilde{n}_0 = \frac{6502}{\sqrt{0{,}4484}} = 9709{,}558 \approx 9710\,\text{пар}\,.$$

Для оцінки ефективності системи замовлень обчислимо притаманні їй сукупні витрати за формулою:

$$\tilde{C}_0 = \frac{c_1 N}{\tilde{n}_0} + \frac{c_2\theta \cdot \tilde{s}^{\,2}}{2\tilde{n}_0} + \frac{c_3\theta \cdot \left(\tilde{n}_0 - \tilde{s}\right)^2}{2\tilde{n}_0}\,,$$

де $\tilde{s}_0 = \tilde{n}_0 \cdot \rho = 9709{,}5584 \cdot 0{,}4484 = 4353{,}7659\,\text{пар}$ – максимальний рівень запасу;

$\tilde{X}_0 = \tilde{n}_0 - \tilde{s}_0 = 9709{,}5584 - 4353{,}7659 = 5355{,}7925\,\text{пар}$ – розмір планованого дефіциту.

Отже, загальні витрати при плануванні дефіциту складатимуть:

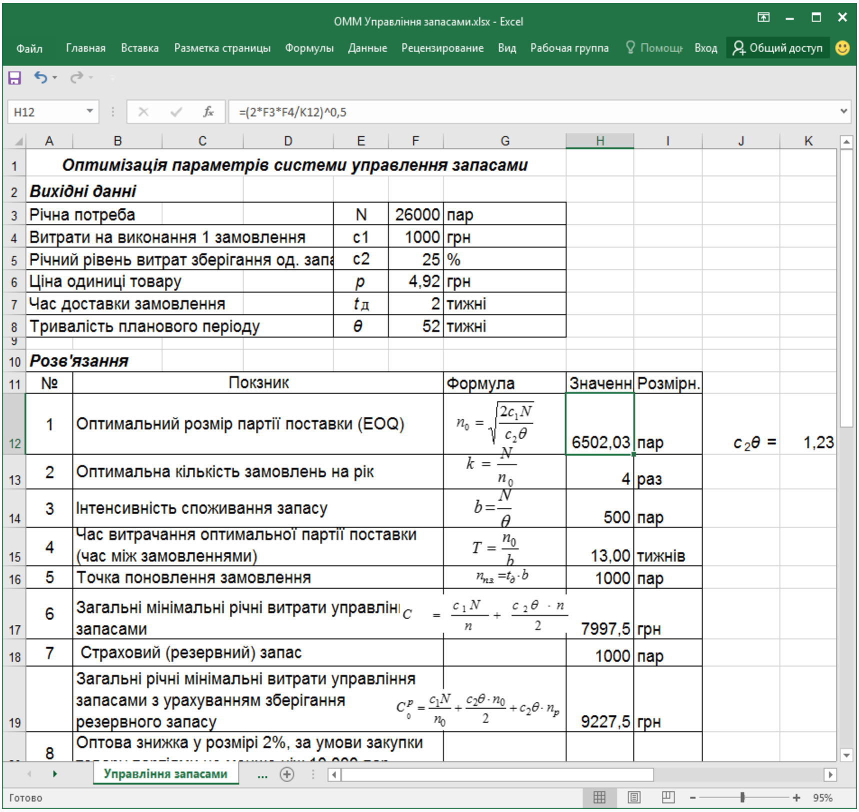
$$\tilde{C}_0 = \frac{1000 \cdot 26000}{9709{,}5584} + \frac{0{,}25 \cdot 4{,}92 \cdot \left(4353{,}7659\right)^2}{19419{,}116} + \frac{1 \cdot \left(5355{,}7925\right)^2}{19419{,}116} =$$

$= 5355{,}52$ грн.

Оскільки $\tilde{C}_0 < C_0$, то підприємству доцільно перейти на систему планування дефіциту. Така модель рекомендує 55% величини замовлення використовувати на задоволення попередніх заявок (покриття дефіциту), плануючи дефіцит у розмірі 5356 пар і 4354 пари відправляти в запас.

10. ***Графік витрат управління запасами***

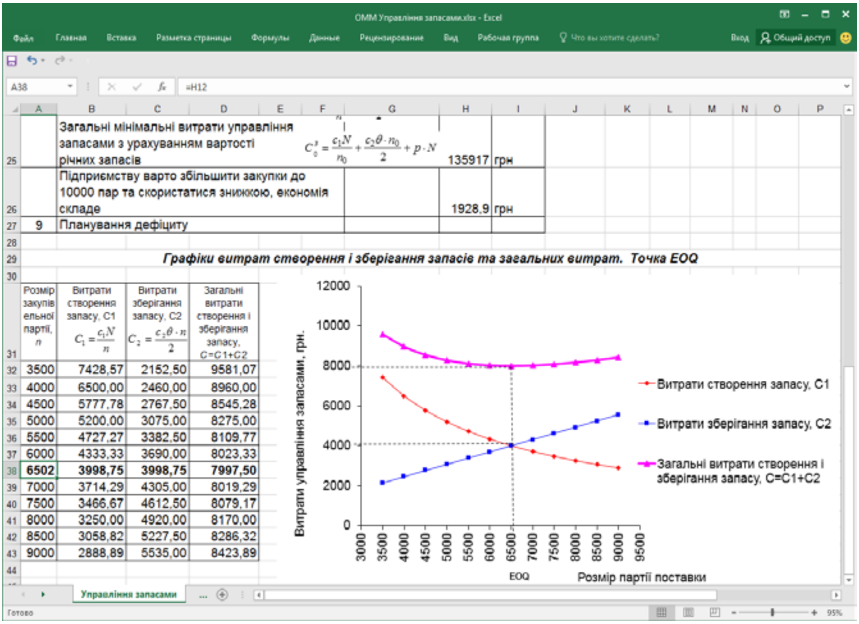
Для візуалізації управління витратами безрезервної та бездефіцитної системи будується засобами табличного процесора MS Excel (рис. 8.6 (б)). Рис. 8.6 (а) ілюструє шаблон розв’язання задачі в MS Excel.



1	***Оптимізація параметрів системи управління запасами***				
2	***Вихідні данні***				
3	Річна потреба	N	26000	пар	
4	Витрати на виконання 1 замовлення	c1	1000	грн	
5	Річний рівень витрат зберігання од. запа	c2	25	%	
6	Ціна одиниці товару	*p*	4,92	грн	
7	Час доставки замовлення	$t_д$	2	тижні	
8	Тривалість планового періоду	θ	52	тижні	
10	***Розв'язання***				

	№	Показник	Формула	Значенн	Розмірн.		
12	1	Оптимальний розмір партії поставки (EOQ)	$n_0=\sqrt{\frac{2c_1N}{c_2\theta}}$	6502,03	пар	$c_2\theta$ =	1,23
13	2	Оптимальна кількість замовлень на рік	$k=\frac{N}{n_0}$	4	раз		
14	3	Інтенсивність споживання запасу	$b=\frac{N}{\theta}$	500	пар		
15	4	Час витрачання оптимальної партії поставки (час між замовленнями)	$T=\frac{n_0}{b}$	13,00	тижнів		
16	5	Точка поновлення замовлення	$n_{пз}=t_д\cdot b$	1000	пар		
17	6	Загальні мінімальні річні витрати управлін запасами	$C=\frac{c_1N}{n}+\frac{c_2\theta\cdot n}{2}$	7997,5	грн		
18	7	Страховий (резервний) запас		1000	пар		
19		Загальні річні мінімальні витрати управління запасами з урахуванням зберігання резервного запасу	$C_0^P=\frac{c_1N}{n_0}+\frac{c_2\theta\cdot n_0}{2}+c_2\theta\cdot n_p$	9227,5	грн		
	8	Оптова знижка у розмірі 2%, за умови закупки					

а) шаблон оптимізації параметрів системи управління запасами



б) графіки витрат створення та зберігання запасів і загальних витрат, точка EOQ

Рис. 8.6. Оптимізація параметрів системи управління запасами в MS Excel

Завдання до практичної роботи № 8

Завдання:

–розробити в середовищі табличного процесора MS Excel шаблон, який дозволить розв'язувати задачі управління запасами будь-якої модифікації детермінованої статичної моделі;

–згідно з індивідуальним варіантом розв'язати завдання з управління запасами за створеним шаблоном;

–розрахунки проілюструвати графіками витрат управління запасами у відповідності до рис. 8.6.

Варіант № 1

Холдингова компанія «Трубний завод» крупний виробник водопровідних труб використовує велику кількість різноманітних розчинників. Протягом року витрата розчинника одного типу складає 1 млн. літрів. Постійні витрати на розміщення і виконання одного замовлення на даний розчинник рівні 2 500 грн., зокрема 2 000 грн. – витрати, що вимагаються урядовими нормами, на очищення і контроль за станом водоймищ. Річні витрати на зберігання розчинника складають 0,40 грн. за одиницю запасів (літр), а вартість одного літра – 2 грн.

«Трубний завод» підтримує страховий запас 10 000 л. На поставку одного замовлення розчинника потрібно 10 днів.

1. Визначте величину EOQ компанії для даного виду запасів.
2. Визначте середню вартість запасів, враховуючи страховий запас.
3. Визначте загальні витрати на зберігання та розміщення замовлень, зокрема витрати на підтримку страхового запасу (вважати, що на початок року страховий запас був наявний).
4. Визначте річні витрати на зберігання у відсотках від вартості запасів.
5. При досягненні якого рівня запасів повинно бути виконано нове замовлення, припускаючи, що в році 360 днів? (Також за умови підтримки страхового запасу 10 000 л).
6. Побудуйте графіки витрат створення, зберігання запасів і загальних витрат і визначте точку EOQ системи управління запасами, яка не підтримує страховий запас і дефіцит.

Варіант № 2

ПАТ «Хлібний завод» купує, а потім продає (у вигляді хліба) 2,6 млн. т. пшениці щорічно. Вартість виконання замовлення, яка враховує вартість вивозу з елеватора у розмірі 3 500 грн, складає 5000 грн. за замовлення. Річні витрати на зберігання складають 2% від купівельної ціни 5 грн за тонну. Компанія підтримує резервний запас у розмірі 200 000 т. Час доставки 6 тижнів.

1. Визначте величину EOQ компанії для даного виду запасів.

2. При якому рівні запасів необхідно відновлювати замовлення, щоб не допустити використовування резервного запасу?

3. Яка загальна вартість запасів, враховуючи витрати зберігання резервного запасу?

4. Компанія з переробки пшениці згодна сплатити вивіз з елеватора, якщо «Хлібний завод» купуватиме пшеницю партіями по 650 000 т. Чи вигідно «Хлібному заводу» замовляти пшеницю такими партіями?

5. Побудуйте графіки витрат створення, зберігання запасів і загальних витрат і визначте точку EOQ системи управління запасами, яка не підтримує страховий запас і дефіцит.

Варіант № 3

Приватне підприємство «Electronic» щорічно реалізує 500 000 стандартних настінних вимикачів. Витрати компанії на кожен вимикач 2 грн. Річні витрати по зберіганню цього товару складають 20% вартості його запасів. Компанія може замовляти вимикачі у двох фірм-виробників. Постійні витрати на виконання замовлення у виробника МПП «Конус» складають 100 грн., а його виконання займає 3 дні; у виробника МПП «Електра» відповідно 75 грн. і 5 днів. При цьому передбачається, що компанія не має страхових запасів.

1. Визначте величину EOQ компанії стосовно замовлень у кожного з двох виробників.

2. Скільки замовлень в рік повинно бути розміщено стосовно кожного з постачальників? (Передбачається, що одночасно використовується тільки один постачальник.)

3. При якому рівні запасів треба розміщувати замовлення у кожного з виробників, припускаючи, що в році 360 днів?

4. Якого з постачальників треба вважати ліпшим, беручи до уваги тільки витрати, пов'язані із запасами?

5. Припустимо, що компанія віддала перевагу виробнику МПП «Електра». При цьому «Electronic» може скористатися знижкою 1% у разі замовлень партіями 20 000 одиниць і більше. Чи варто компанії збільшити розмір одного замовлення до 20 000 одиниць і скористатися знижкою?

6. Побудуйте графіки витрат створення, зберігання запасів і загальних витрат та визначте точку EOQ системи управління

запасами, яка не підтримує страховий запас і дефіцит, для вибраного виробника.

Варіант № 4

Потреба складального підприємства в деталях певного типу складає 120 000 деталей у рік, причому ці деталі витрачаються в процесі виробництва рівномірно і безперервно. Деталі замовляються один раз у рік і поставляються партіями однакового розміру, вказаного в замовленні. Зберігання деталі на складі коштує 0,35 коп. у добу, а поставка партії 100 грн. Затримка виробництва через відсутність деталей недопустима.

1. Визначте найбільш економічний обсяг партії та інтервал між поставками, які потрібно вказати в замовленні (передбачається, що постачальник не допускає затримок поставок і в році 360 днів).
2. На скільки відсотків збільшаться витрати на створення і зберігання запасів у порівнянні з мінімальними витратами, якщо умови договору з постачальником не дозволяють замовляти партії менше 5000 деталей?
3. Припустимо, що замовляються не всі партії відразу, а кожна окремо, причому термін виконання замовлення 16 днів. При якому рівні запасу необхідно замовляти наступну партію?
4. Визначте найбільш економічний розмір партії і інтервал між поставками, якщо відомо, що відсутність на збірці кожної деталі приносить у добу збитки у розмірі 3,5 копійки.
5. Побудуйте графіки витрат створення, зберігання запасів та загальних витрат та визначте точку EOQ системи управління запасами, яка не підтримує страховий запас і дефіцит.

Варіант № 5

Річна потреба машинобудівного заводу в дрібно сортовій сталі (пруток діаметром 12 мм) складає 300 т. Сировина замовляється один раз у рік і поставляється партіями однакового обсягу, вказаного у замовленні. Умовно-постійні транспортно-заготовчі витрати на одне замовлення рівні 21 грн, річні витрати на зберігання 1т – 14 грн. Вартість прутка діаметром 12 мм 200 грн за тонну.

Затримка виробництва через відсутність сировини недопустима. Завод страхових запасів не має. Ефективний фонд робочого часу за рік дорівнює 365 дням.

1. Визначте найбільш економічний обсяг партії та інтервал між поставками, які потрібно вказати в замовленні (передбачається, що постачальник не допускає затримок поставок).

2. Припустимо, що замовляються не всі партії відразу, а кожна окремо, причому термін виконання замовлення дорівнює 15 днів. При якому рівні запасу треба замовляти наступну партію?

3. Визначте найбільш економічний обсяг партії та інтервал між поставками, якщо відомо, що відсутність на збірці 1 т прутка приносить у добу збитки у розмірі 2,2 грн.

4. Відповідно до технічних вимог, у разі потреби, пруток діаметром 12 мм може бути замінено прутком діаметром 14 мм, ціна якого за тонну на 20 грн більша. Поставки цього виду дрібно-сортової сталі постачальник пропонує здійснювати 12 разів на рік. Чи вигідно прийняти таку пропозицію менеджеру машинобудівного заводу?

5. Побудуйте графіки витрат створення, зберігання запасів і загальних витрат, визначте точку EOQ системи управління запасами, яка не підтримує страховий запас і дефіцит.

Варіант № 6

ПАТ «Прилад» щорічно купує 8 000 штук транзисторів за ціною 10 грн/шт. і використовує їх на збірці. Витрати на зберігання одного транзистора протягом року складають 3 грн/шт. Постійні витрати на виконання замовлення складають 30 грн./замовлення, а його виконання займає 2 робочих дні. Ефективний фонд робочого часу за рік дорівнює 200 дням. Передбачається, що компанія не має страхових запасів.

1. Визначте оптимальний розмір закупівельної партії.

2. Скільки замовлень у рік повинно бути розміщено у постачальника і який інтервал повинен бути між поставками (передбачається, що постачальник не допускає затримок поставок)?

3. При якому рівні запасів треба розміщувати замовлення?

4. Визначте загальні витрати на зберігання і розміщення запасів.

5. Як зміняться параметри моделі EOQ (оптимальний розмір закупівельної партії і загальні річні витрати, пов'язані із запасами), якщо постачальники встановили дисконтні знижки для оптових покупців: партія 400 штук – по 10 грн/шт.; партія 600 штук – по 9,5 грн/шт.; партія 2000 штук – по 9,3 грн/шт. Витрати по зберіганню складають 30% від ціни. Яким умовам поставок Ви б віддали перевагу?

6. Побудуйте графіки витрат створення, зберігання запасів і загальних витрат і визначте точку EOQ системи управління запасами, яка не підтримує страховий запас і дефіцит.

Варіант № 7

Автомобільний завод може закупляти коробки з дрібною деталлю в одного з двох постачальників на таких умовах:

Постачальник I		Постачальник II	
Кількість коробок	Ціна за коробку, грн	Кількість коробок	Ціна за коробку, грн
1-3999	3,97	1-5000	4
4000-5499	3,80	5001-13999	3,80
5500 і більш	3,66	14000 і більш	3,60

Для витрат зберігання менеджмент використовує внутрішню норму прибутковості заводу 20% (від вартості запасу). Оформлення замовлення не коштує нічого. Доставка здійснюється на заводській вантажівці, яка здатна відвезти до 30 тис. коробок за один раз. Його пробіг до постачальника і назад, завантаження, і розвантаження коштують 40 грн. На постачання одного замовлення від першого постачальника потрібно 12 днів, а від другого – 10 днів. Річна потреба заводу – 25 тис. коробок.

1. Який оптимальний розмір замовлення з урахуванням знижок кожного з постачальників?

2. У якого постачальника варто зробити замовлення, щоб мінімізувати повні складські та закупівельні витрати для аналізованого запасу?

3. Скільки замовлень у рік повинно бути розміщено у вибраного постачальника? Який їх реальний розмір?

4. При якому рівні запасів належить розміщувати замовлення у вибраного постачальника? Ефективний фонд робочого часу за рік

дорівнює 365 дням. Передбачається, що компанія не має страхових запасів.

5. Стосовно замовлень у вибраного постачальника побудуйте графіки витрат створення, зберігання запасів і загальних витрат. Визначте точку EOQ.

Вказівка. При обчисленні повних складських і закупівельних витрат використовуйте не економічний розмір замовлення EOQ, а реальний розмір закупівельної партії, тобто той мінімальний розмір, який постачальник дозволить купити за даною ціною.

Варіант № 8

Рідкі продукти декількох видів розливаються в пакети на одній лінії упаковки. Витрати на підготовчо-завершальні операції складають 700 грн, потреба в продуктах складає 140 000 л у місяць (30 днів), вартість зберігання 1 л протягом місяця – 4 грн.

1. Визначте оптимальний розмір партії.
2. Визначте інтервал між поставками (цикл), який необхідно вказати в замовленні (передбачається, що постачальник не допускає затримок поставок).
3. Визначте загальні витрати на зберігання і розміщення найбільш економічної партії запасу (страховий запас на підприємстві не передбачений).
4. Порівняйте мінімальні витрати з витратами при діючій системі розливу одного продукту протягом 3-х днів. На скільки відсотків мінімальні витрати менші від реальних витрат?
5. Визначте найбільш економічний розмір партії і цикл розливу продукту, якщо відомо, що відсутність продукту на лінії упаковки приносить збитки у розмірі 2 грн за місяць.
6. Побудуйте графіки витрат створення, зберігання запасів і загальних витрат, визначте точку EOQ системи управління запасами, яка не підтримує страховий запас і дефіцит.

Варіант № 9

Річна потреба заводу верстатобудування в деталях А-1701 для складального конвеєру – 2500 т. Деталі замовляються один раз на рік і поставляються партіями однакового розміру, вказаного в замовленні. Умовно-постійні транспортно-заготовчі витрати на одне замовлення рівні 30 грн, річні витрати на зберігання 1т – 28 грн. Вартість деталі А-1701 складає 55 грн за тонну.

Затримка виробництва через відсутність сировини недопустима. Завод страхових запасів не має. Ефективний фонд робочого часу за рік дорівнює 365 дням.

1. Визначте найбільш економічний розмір партії та інтервал між поставками, які потрібно вказати в замовленні (передбачається, що постачальник не допускає затримок поставок).

2. Припустимо, що замовляються не всі партії відразу, а кожна окремо, причому термін виконання замовлення рівний 7 днів. При якому рівні запасу треба замовляти наступну партію?

3. Визначте найбільш економічний розмір партії та інтервал між поставками, якщо відомо, що відсутність на збірці 1 т деталей приносить у добу збитки у розмірі 3,2 грн.

4. Відповідно до технічних вимог у разі потреби деталі А-1701 може бути замінено деталями А-1702, ціна яких за тонну на 3 грн більше. Поставки цього виду деталей постачальник пропонує здійснювати 35 разів на рік. Чи вигідно прийняти таку пропозицію менеджеру заводу?

5. Побудуйте графіки витрат створення, зберігання запасів і загальних витрат, визначте точку EOQ системи управління запасами, яка не підтримує страховий запас і дефіцит.

Варіант № 10

На паперовій фабриці для упаковки готової продукції використовується картон. Тимчасова відсутність цього матеріалу веде до затримки поставок, тому його дефіцит недопустимий. Паперова продукція декількох видів упаковується на одній лінії упаковки. Витрати на підготовчо-завершальні операції складають 250 грн, потреба в картоні складає 8000 л умісяць (30 днів), вартість зберігання 1 л протягом місяця – 7 грн. Тимчасова відсутність картону веде до затримки поставок, тому його дефіцит недопустимий.

1. Визначте оптимальний розмір партії поставки.

2. Визначте інтервал між поставками (цикл), який необхідно вказати в замовленні (передбачається, що постачальник не допускає затримок поставок).

3. Визначте загальні витрати на зберігання і розміщення найбільш економічної партії запасу (страховий запас на підприємстві не передбачений).

4. Порівняйте мінімальні витрати з витратами при діючій системі упаковки протягом 5-х днів. На скільки відсотків мінімальні витрати менші від реальних витрат?

5. Визначте найбільш економічний розмір партії та цикл упаковки, якщо відомо, що відсутність продукту на лінії упаковки приносить збитки у розмірі 3 грн у місяць.

6. Побудуйте графіки витрат створення, зберігання запасів і загальних витрат, визначте точку EOQ системи управління запасами, яка не підтримує страховий запас і дефіцит.

Варіант № 11

ПАТ «Тракторний завод» щодня у виробничому процесі використовує 200 акумуляторів. Постійні витрати на розміщення та виконання одного замовлення на цей вид комплектуючих – 2 200 грн. Річні витрати на зберігання одного акумулятора складають 0,40 грн, а вартість одного акумулятора – 35 грн.

Тракторний завод підтримує страховий запас 1000 шт. На поставку одного замовлення акумуляторів потрібно 15 днів.

1. Визначте величину EOQ компанії для даного виду запасів.

2. Визначте середню вартість запасів, враховуючи страховий запас.

3. Визначте загальні витрати на зберігання та розміщення замовлень, зокрема витрати на підтримку страхового запасу (вважати, що на початок року страховий запас був у наявності).

4. Визначте річні витрати на зберігання у відсотках від вартості запасів.

5. За досягнення якого рівня запасів повинно бути виконане нове замовлення, припускаючи, що в році 360 днів? (Також за умови підтримки страхового запасу 1000 шт.).

6. Побудуйте графіки витрат створення, зберігання запасів і загальних витрат, визначте точку EOQ системи управління запасами, яка не підтримує страховий запас і дефіцит.

Варіант № 12

Металургійний комбінат щорічно купує 35 000 т коксу. Вартість виконання замовлення, яка враховує вартість вивозу з коксохімічного заводу у розмірі 500 грн, складає 2 500 грн за замовлення. Річні витрати на зберігання – 3% від купівельної ціни 200 грн за тонну. Металургійний комбінат підтримує резервний запас у розмірі 10 000 т коксу. Час доставки 2 тижні.

1. Визначте величину EOQ компанії для даного виду запасів.
2. За якого рівня запасів необхідно відновлювати замовлення, щоб не допустити використовування резервного запасу?
3. Яка загальна вартість витрат на управління запасами, включаючи витрати зберігання резервного запасу.
4. Коксохімічний завод згоден сплатити вивіз коксу, якщо металургійний комбінат купуватиме його партіями по 10 000 т. Чи вигідне комбінату замовляти кокс такими партіями?
5. Побудуйте графіки витрат створення, зберігання запасів і загальних витрат та визначте точку EOQ системи управління запасами, яка не підтримує страховий запас і дефіцит.

Варіант № 13

Компанія «Sintetic» щорічно реалізує 280 000 погонних метрів синтетичного покриття. Витрати компанії на кожен метр покриття 32 грн. Річні витрати на зберігання цього товару складають 15% вартості його запасів. Компанія може замовляти покриття у двох фірм-виробників. Постійні витрати на виконання замовлення у виробника МПП «Мануфактура» складають 200 грн, а його виконання займає 7 дня; у виробника МПП «Нейлон» відповідно 225 грн і 5 днів. При цьому передбачається, що компанія не має страхових запасів.

1. Визначте величину EOQ компанії стосовно замовлень у кожного з двох виробників.
2. Скільки замовлень у рік повинно бути розміщено стосовно кожного з постачальників? (Передбачається, що одночасно використовується тільки один постачальник.)
3. За якого рівня запасів належить розміщувати замовлення у кожного з виробників, припускаючи, що в році 360 днів?

4. Якого з постачальників треба вважати ліпшим, беручи до уваги тільки витрати, пов'язані із запасами?

5. Припустимо, що компанія віддала перевагу МПП «Мануфактура». При цьому «Sintetic» може скористатися знижкою 1% у разі замовлень партіями 7000 одиниць і більше. Чи варто компанії збільшити розмір одного замовлення до 7000 одиниць і скористатися знижкою?

6. Побудуйте графіки витрат створення, зберігання запасів і загальних витрат, визначте точку EOQ системи управління запасами, яка не підтримує страховий запас і дефіцит, для обраного постачальника.

Варіант № 14

Потреба цегляного заводу в піску 30000 тис. т., причому пісок витрачається у процесі виробництва рівномірно і безперервно. Пісок замовляється в кар'єрі один раз у рік і поставляється партіями однакового розміру, вказаного в замовленні. Зберігання 1 тис. т піску на складі коштує 0,20 грн за добу, а поставка партії 300 грн. Затримка виробництва через відсутність деталей недопустима.

1. Визначте найбільш економічний об'єм партії і інтервал між поставками, які потрібно вказати в замовленні (передбачається, що постачальник не допускає затримок поставок і в році 360 днів).

2. На скільки відсотків збільшяться витрати на створення і зберігання запасів у порівнянні з мінімальними витратами, якщо умови договору з постачальником не дозволяють замовляти партії менше 1000 деталей?

3. Припустимо, що замовляються не всі партії відразу, а кожна окремо, причому термін виконання замовлення – 10 днів. При якому рівні запасу треба замовляти наступну партію?

4. Визначте найбільш економічний розмір партії і інтервал між поставками, якщо відомо, що відсутність на збірці кожної деталі приносить у добу збитки у розмірі 7,5 грн.

5. Побудуйте графіки витрат створення, зберігання запасів і загальних витрат та визначте точку EOQ системи управління запасами, яка не підтримує страховий запас і дефіцит.

Варіант № 15

Річна потреба машинобудівного заводу в дрібно-сортовій сталі (пруток діаметром 12 мм) складає 2000 т. Сировина замовляється один раз у рік і поставляється партіями однакового розміру, вказаного в замовленні. Умовно-постійні транспортно-заготовчі витрати на одне замовлення – 25 грн, річні витрати на зберігання 1т – 9 грн. Вартість прутка діаметром 12 мм 350 грн за тонну.

Затримка виробництва через відсутність сировини недопустима. Завод страхових запасів не має. Ефективний фонд робочого часу за рік дорівнює 365 дням.

1. Визначте найбільш економічний розмір партії та інтервал між поставками, які потрібно вказати в замовленні (передбачається, що постачальник не допускає затримок поставок).

2. Припустимо, що замовляються не всі партії відразу, а кожна окремо, причому термін виконання замовлення становить 20 днів. При якому рівні запасу треба замовляти наступну партію?

3. Визначте найбільш економічний об'єм партії і інтервал між поставками, якщо відомо, що відсутність на збірці 1 т прутка приносить у добу збитки у розмірі 2,5 грн.

4. Відповідно до технічних вимог у разі потреби пруток діаметром 12 мм може бути замінено прутком діаметром 14 мм, ціна якого за тонну на 30 грн більше. Поставки цього виду дрібно-сортової сталі, постачальник пропонує здійснювати 16 разів на рік. Чи вигідно прийняти таку пропозицію менеджеру машинобудівного заводу?

5. Побудуйте графіки витрат створення, зберігання запасів і загальних витрат, визначте точку EOQ системи управління запасами, яка не підтримує страховий запас і дефіцит.

Варіант № 16

Приватне підприємство «Cotton Tops» – оптовий продавець футболок, що виготовляються за індивідуальними замовленнями і реалізуються клієнтам, розташованим по всій території західного регіону. Фірма займається розробкою моделей і оптовою торгівлею (виготовлення товару ведеться іншою компанією). Річний обсяг реалізації 9 000 штук, ціна покупки 25 грн/шт, ціна реалізації 35 грн/шт. Витрати на зберігання одиниці товару протягом року складають 6 грн/шт. Постійні витрати на виконання замовлення складають 35 грн/замовлення, а його виконання займає 4 робочих дні. Ефективний фонд робочого часу за рік – 200 днів. Передбачається, що фірма не має страхових запасів.

1. Визначте оптимальний розмір закупівельної партії.

2. Скільки замовлень у рік повинно бути розміщено у постачальника і який інтервал повинен бути між поставками (передбачається, що постачальник не допускає затримок поставок)?

3. При якому рівні запасів треба розміщувати замовлення?

4. Визначте загальні витрати на зберігання та розміщення запасів.

5. Як зміняться параметри моделі EOQ (оптимальний розмір закупівельної партії та загальні річні витрати, пов’язані із запасами), якщо постачальники встановили дисконтні знижки для оптових покупців: партія 400 штук – по 25 грн/шт.; партія 600 штук – по 23 грн/шт.; партія 2000 штук – по 20 грн/шт. Витрати на зберігання складають 25% від ціни. Яким умовам поставок Ви б віддали перевагу?

6. Побудуйте графіки витрат створення, зберігання запасів і загальних витрат та визначте точку EOQ системи управління запасами, яка не підтримує страховий запас і дефіцит.

Варіант № 17

Фінансовий менеджер ПАТ «ЄВРОСВІТЛО» розглядає умови покупки комплектуючих у двох постачальників:

Постачальник №1		Постачальник №2	
Кількість упаковок	Ціна за упаковку, грн.	Кількість упаковок	Ціна за упаковку, грн.
1-1999	32,5	1-2999	30,0
2000-4999	30,5	5000-9999	27,5
5000 і більш	28,5	10000 і більш	25,5

Для витрат зберігання менеджмент використовує внутрішню норму прибутковості підприємства – 20% (від вартості запасу). Оформлення замовлення не коштує нічого. Доставка здійснюється на власному транспорті, який здатний відвезти до 20 тис. упаковок комплектуючих за один раз. Його пробіг до постачальника і назад, завантаження і розвантаження коштують 35 грн. На поставку одного замовлення від першого постачальника потрібно 5 днів, а від другого – 7 днів. Річна потреба заводу – 25 тис. упаковок комплектуючих.

1. Який оптимальний розмір замовлення з урахуванням знижок кожного з постачальників?
2. Побудуйте графіки витрат створення, зберігання запасів і загальних витрат стосовно одного з постачальників. Визначте точку EOQ.
3. У якого постачальника слід зробити замовлення, щоб мінімізувати повні складські і закупівельні витрати для аналізованого запасу?
4. Скільки замовлень в рік повинно бути розміщено у вибраного постачальника? Який їх реальний розмір?
5. При якому рівні запасів треба розміщувати замовлення у вибраного постачальника? Ефективний фонд робочого часу за рік дорівнює 365 дням. Передбачається, що компанія не має страхових запасів.
6. Стосовно замовлень у вибраного постачальника побудуйте графіки витрат створення, зберігання запасів і загальних витрат. Визначте точку EOQ.

Вказівка. При обчисленні повних складських і закупівельних витрат використовуйте не економічний розмір замовлення EOQ, а реальний розмір закупівельної партії, тобто той мінімальний розмір, який постачальник дозволить купити за даною ціною.

Варіант № 18

ПрАТ «Лакофарбний завод» для упаковки ацетону і деяких видів розчинників використовує вакуумні пакети. Розчинники кількох видів розливаються в пакети на одній лінії упаковки. Витрати на підготовчо-завершальні операції складають 150 грн, потреба в продуктах складає 9000 л у місяць (30 днів), вартість зберігання 1 л протягом місяця – 6 грн.

1. Визначте оптимальний розмір партії.
2. Визначте інтервал між поставками (цикл), який необхідно вказати в замовленні (передбачається, що постачальник не допускає затримок поставок).
3. При якому рівні запасів треба розміщувати замовлення?

4. Визначте загальні витрати по зберіганню і розміщенню найбільш економічної партії запасу (страховий запас на підприємстві не передбачений).

5. Порівняйте мінімальні витрати з витратами при діючій системі розливу одного продукту протягом 4-х днів. На скільки відсотків мінімальні витрати менші від реальних витрат?

6. Визначте найбільш економічний розмір партії і цикл розливу продукту, якщо відомо, що відсутність продукту на лінії упаковки приносить збитки 5 грн на місяць.

7. Побудуйте графіки витрат створення, зберігання запасів і загальних витрат та визначте точку EOQ системи управління запасами, яка не підтримує страховий запас і дефіцит.

Варіант № 19

ПрАТ «Азбест» закуповує сировину-напівфабрикат у зовнішнього постачальника. Відділ закупівель розглядає три претенденти на поставку напівфабрикатів. Перший постачальник пропонує таку систему знижок:

до 2000 т – 650 грн;
від 2000 до 5000 т – 620 грн;
понад 5000 т – 590 грн.

Другий крупніший постачальник пропонує більш істотні знижки:

до 3000 т – 660 грн;
від 3000 до 10000 т – 610 грн;
понад 10000 т – 580 грн.

Третя невелика фірма не дає істотних знижок і готова поставляти продукцію невеликими партіями

до 1000 т – 640 грн;
від 1000 до 2000 т – 620 грн;
понад 2000 т – 600 грн.

Для витрат зберігання менеджмент використовує внутрішню норму прибутковості фірми, що дорівнює 20% (від вартості запасу). Витрати, пов'язані з оформленням, доставкою і розміщенням замовлення напівфабрикатів, оцінюються в 950 грн за замовлення. Річна потреба підприємства – 40 000 т. Проте площа складів дозволяє зберігати запас, у декілька разів перевищуючий річну потребу.

На поставку одного замовлення від першого постачальника потрібно 12 днів, від другого – 15 днів, а від третього – 7 днів.

1. Який оптимальний розмір замовлення з урахуванням знижок кожного з постачальників?

2. У якого постачальника, і за якою ціною треба зробити замовлення, щоб мінімізувати повні складські і закупівельні витрати для аналізованого запасу?

3. Скільки замовлень у рік повинно бути розміщено у вибраного постачальника? Який їх реальний розмір?

4. За якого рівня запасів слід розміщувати замовлення у вибраного постачальника? Ефективний фонд робочого часу за рік рівний 365 дням. Передбачається, що компанія не має страхових запасів.

5. Стосовно замовлень у вибраного постачальника побудуйте графіки витрат створення, зберігання запасів і загальних витрат. Визначте точку EOQ.

Вказівка. При обчисленні повних складських і закупівельних витрат використовуйте не економічний розмір замовлення EOQ, а реальний розмір закупівельної партії, тобто той мінімальний розмір, який постачальник дозволить купити за даною ціною.

Варіант № 20

ПАТ «Еврика» – крупний виробник побутової техніки – щорічно купує 12 000 трансформаторів за ціною 15 грн/шт. і використовує їх на збірці. Витрати на зберігання одного трансформатора протягом року складають 4 грн/шт. Постійні витрати на виконання замовлення складають 27 грн/замовлення, а його виконання займає 5 робочих днів. Ефективний фонд робочого часу за рік дорівнює 200 дням. Передбачається, що компанія не має страхових запасів.

1. Визначте оптимальний розмір закупівельної партії.

2. Скільки замовлень у рік має бути розміщено у постачальника і який інтервал повинен бути між поставками (передбачається, що постачальник не допускає затримок поставок)?

3. При якому рівні запасів треба розміщувати замовлення?

4. Визначте загальні витрати на зберігання і розміщення запасів.

5. Як зміняться параметри моделі EOQ (оптимальний розмір закупівельної партії та загальні річні витрати, пов'язані із запасами), якщо постачальники встановили дисконтні знижки для оптових покупців: партія 400 штук – по 15 грн/шт.; партія 600 штук – по 12 грн/шт.; партія 2000 штук – по 10 грн/шт. Витрати на зберігання складають 25% від ціни. Яким умовам поставок Ви б віддали перевагу?

6. Побудуйте графіки витрат створення, зберігання запасів і загальних витрат та визначте точку EOQ системи управління запасами, яка не підтримує страховий запас і дефіцит.

Варіант № 21

Домобудівний комбінат використовує 500 балок-перекриття в день. Постійні витрати на розміщення та виконання одного замовлення на даний вид балок – 700 грн. Річні витрати на зберігання запасів складають 0,25 грн за одиницю, а вартість однієї балки-перекриття – 45 грн.

Домобудівний комбінат підтримує страховий запас 2500 шт. На поставку одного замовлення потрібно 15 днів.

1. Побудуйте графіки витрат створення, розміщення запасів і загальних витрат. Визначте точку EOQ
2. Визначте величину EOQ компанії для даного виду запасів.
3. Визначте середню вартість запасів, включаючи страховий запас.
4. Визначте загальні витрати по зберіганню і розміщенню замовлень, зокрема витрати по підтримці страхового запасу (вважати, що на початок року страховий запас був у наявності).
5. Визначте річні витрати по зберіганню у відсотках від вартості запасів.
6. При досягненні, якого рівня запасів повинне бути виконаний нове замовлення, припускаючи, що в році 360 днів? (Також за умови підтримки страхового запасу 2500 шт.)

Варіант № 22

Завод залізобетонних виробів (ЗБВ) щорічно купує 30 000 т піску. Вартість виконання замовлення, яка враховує вартість вивозу з піщаного кар'єру у розмірі 500 грн, складає 1 500 грн за замовлення. Річні витрати на зберігання – 1% від закупівельної ціни 120 грн за тонну. Завод підтримує резервний запас у розмірі 10 000 т піску. Час доставки 3 тижні.

1. Визначте величину EOQ компанії для даного виду запасів.
2. При якому рівні запасів необхідно відновлювати замовлення, щоб не допустити використовування резервного запасу?
3. Яка загальна вартість запасів, враховуючи витрати зберігання резервного запасу.
4. Піщаний кар’єр згоден сплатити вивіз піску, якщо завод ЗБВ купуватиме його партіями по 60 000 т. Чи вигідно заводу замовляти пісок такими партіями?
5. Побудуйте графіки витрат створення, зберігання запасів і загальних витрат, визначте точку EOQ системи управління запасами, яка не підтримує страховий запас і дефіцит.

Варіант № 23

Будівельна компанія щодня реалізує 750 тис. шт. цегли. Витрати компанії на кожну тис. шт. 30 грн. Річні витрати на зберігання цього товару складають 10% вартості його запасів. Компанія може замовляти цеглину у двох фірм-виробників. Постійні витрати на виконання замовлення у виробника МПП «Алекс» складають 180 грн, а його виконання займає 8 днів; у виробника МПП «Будівельник» відповідно 210 грн і 4 днів. При цьому передбачається, що компанія не має страхових запасів.

1. Визначте величину EOQ компанії стосовно замовлень у кожного з двох виробників.
2. Скільки замовлень в рік повинно бути розміщено стосовно кожного з постачальників? (Передбачається, що одночасно використовується тільки один постачальник.)
3. При якому рівні запасів треба розміщувати замовлення у кожного з виробників, припускаючи, що в році 360 днів?
4. Якого з постачальників слід вважати вигіднішим, беручи до уваги тільки витрати, пов'язані із запасами?
5. Припустимо, що компанія віддала перевагу МПП «Алекс». При цьому вона може скористатися знижкою 1% у разі замовлень партіями 15000 тис. шт. і більше. Чи варто компанії збільшити

розмір одного замовлення до 15000 тис. шт. і скористатися знижкою?

6. Побудуйте графіки витрат створення, зберігання запасів і загальних витрат, визначте точку EOQ системи управління запасами, яка не підтримує страховий запас і дефіцит, для обраного постачальника.

Варіант № 24

Річна потреба машинобудівного заводу в деталях певного типу складає 25 000 деталей, причому ці деталі витрачаються у процесі виробництва рівномірно і безперервно. Деталі замовляються один раз у рік і поставляються партіями однакового розміру, вказаного в замовленні. Зберігання деталі на складі коштує 0,4 грн за добу, а постачання партії 250 грн. Затримка виробництва через відсутність деталей недопустима.

1. Визначте найбільш економічний розмір партії і інтервал між поставками, які потрібно вказати в замовленні (передбачається, що постачальник не допускає затримок поставок і в році 360 днів).

2. На скільки відсотків збільшяться витрати на створення і зберігання запасів у порівнянні з мінімальними витратами, якщо умови договору з постачальником не дозволяють замовляти партії менше 500 деталей?

3. Припустимо, що замовляються не всі партії відразу, а кожна окремо, причому термін виконання замовлення рівний 7 днів. При якому рівні запасу треба замовляти наступну партію?

4. Визначте найбільш економічний обсяг партії та інтервал між поставками, якщо відомо, що відсутність на збірці кожної деталі приносить у добу збитки у розмірі 2,5 грн.

5. Побудуйте графіки витрат створення, зберігання запасів і загальних витрат, визначте точку EOQ системи управління запасами, яка не підтримує страховий запас і дефіцит.

Варіант № 25

Торгово-виробниче мале підприємство закуповує відповідальну електронну схему у зовнішнього постачальника. Відділ закупівель розглядає три претенденти на поставку цієї схеми. Перший постачальник пропонує таку систему знижок:

до 3000 шт. – 794 грн;
від 3000 до 5000 шт. – 780 грн;
понад 5000 шт. – 770 грн.

Другий крупніший постачальник пропонує більш істотні знижки:

до 10000 шт. – 800 грн;
від 10000 до 20000 шт. – 760 грн;
понад 20000 шт. – 720 грн.

Третя невелика фірма не дає істотних знижок і готова поставляти продукцію невеликими партіями

до 1500 шт. – 800 грн;
від 1500 до 2500 шт. – 790 грн;
понад 2500 шт. – 782 грн.

Для витрат зберігання менеджмент використовує внутрішню норму прибутковості фірми – 30% (від вартості запасу). Витрати, пов'язані з оформленням, доставкою і розміщенням замовлення цих електронних схем, оцінюються в 90 000 грн. за замовлення. Річна потреба підприємства – 10 000 схем. Проте площа складів дозволяє зберігати запас, у кілька разів перевищуючий річну потребу.

На поставку одного замовлення від першого постачальника потрібно 10 днів, від другого – 8 днів, а від третього – 7 днів.

1. Який оптимальний розмір замовлення з урахуванням знижок кожного з постачальників?

2. Побудуйте графіки витрат створення, зберігання запасів і загальних витрат стосовно одного з постачальників. Визначте точку EOQ.

3. У якого постачальника і за якою ціною треба зробити замовлення, щоб мінімізувати повні складські та закупівельні витрати для аналізованого запасу?

4. Скільки замовлень у рік повинно бути розміщено у вибраного постачальника? Який їх реальний розмір?

5. При якому рівні запасів слід розміщувати замовлення у вибраного постачальника? Ефективний фонд робочого часу за рік рівний 365 дням. Передбачається, що компанія не має страхових запасів.

6. Стосовно замовлень у вибраного постачальника побудуйте графіки витрат створення, зберігання запасів і загальних витрат. Визначте точку EOQ.

Вказівка. При обчисленні повних складських і закупівельних витрат використовуйте не економічний розмір замовлення EOQ, а реальний розмір закупівельної партії, тобто той мінімальний розмір, який постачальник дозволить купити за такою ціною.

Контрольні запитання та завдання до захисту практичної роботи

1. Дайте визначення економічній категорії «запаси».
2. З якою метою створюються запаси?
3. Які види витрат, які можуть вплинути на вибір рішення з управління запасами?
4. У чому полягає управління запасами?
5. У якому випадку модель управління запасами є статичною детермінованою?
6. Назвіть основні види моделей управління запасами.
7. Опишіть динаміку запасів для статичної детермінованої моделі без дефіциту.
8. Які види витрат враховуються у моделі без дефіциту?
9. Як визначається економічний розмір партії поставки?
10. Наведіть приклад графічного визначення точки EOQ.
11. У якому випадку використовується модель планування дефіциту?
12. Опишіть динаміку запасів для статичної детермінованої моделі без дефіциту.
13. Які види витрат враховуються у моделі планування дефіциту?
14. Що означає щільність збитків через незадоволення попиту на запас?
15. Опишіть динаміку запасів для моделі виробництва оптимальної партії продукції (модель EBQ).
16. Запишіть функцію витрат для моделі EBQ?
17. У якому випадку під час прийняття рішення про управління запасами враховуються витрати на закупку запасів?
18. Запишіть формулу загальних витрат для системи управління запасами, яка передбачає страховий (резервний) запас.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Проведення підсумкового контролю знань має на меті перевірку рівня засвоєння студентами навчального матеріалу з дисципліни та оцінювання результатів навчання. Є підстави вважати, що з дисципліни «Оптимізаційні методи та моделі» в умовах очного навчання найповнішу картину дасть така комбінація видів оцінювання: два теоретичних питання, задача, 3-5 тестових питань. В умовах дистанційного/змішаного навчання доцільно проводити тестування на платформі дистанційного навчання Moodle. Система пропонує кілька типів тестових питань, коректний вибір яких забезпечить перевірку знань на різних рівнях засвоєння відповідно до таксономії Блума, а саме: не лише на рівні знання (питання з множинним вибором), а й на рівнях розуміння і застосування (числові і розрахункові питання) та аналізу (питання з відкритою відповіддю – есе) Виходячи з цього, використано такі типи тестових питань.

Питання типу ***«Багатоваріантне питання»*** (рис. А.1) дозволяє вибирати одну або кілька відповідей з наданого списку.

У питанні типу ***«Відповідність»*** (рис. А.2) відповідь на кожне підзапитання має бути вибрана із заданого списку можливих відповідностей.

Питання типу ***«Правильно/Неправильно»*** (рис. А.3) – це проста форма питання з множинним вибором тільки з двома варіантами вибору: «Правильно» і «Неправильно».

У питанні типу ***«Визначити пропущені слова»*** (рис. А.4) Пропущені слова в тексті запитання заповнюються за допомогою спадних меню.

У питанні типу ***«Перетягування на картинку»*** (рис. А.5) зображення або текстові мітки перетягуються та опускаються в зони скидання на фоновому зображенні. Важливо пам’ятати, що цей тип запитання недоступний для користувачів із вадами зору, якщо зображення дрібні та нечіткі.

У питанні типу ***«Перетягування в тексті»*** пропущені в тексті слова заповнюються за допомогою перетягування; відповіді можуть бути незгрупованими (рис. А.6) і згрупованими (рис. А.7).

У питанні типу ***«Числовий»*** (рис. А.8) дозволено числові відповіді, можливо, з одиницями виміру, які оцінюються шляхом порівняння з різними варіантами відповідей, можливо, з допусками.

Питання типу ***«Розрахунковий простий»*** (рис. А.9) – це простий варіант розрахункового питання, схожого на числове питання, але з числами, що випадковим чином вибираються з певного набору, коли тест запускається.

Питання типу ***«Розрахунковий»*** (рис. А.10) схожі з числовими, але тут числа можуть вибиратися випадковим чином з деякого заданого набору в момент запуску тесту.

Питання типу ***«Розрахунковий з множинним вибором»*** схожі з питаннями множинного вибору, в яких варіанти відповідей можуть містити розрахункові формули з числовими значеннями, що випадково вибираються з певного набору в момент запуску тесту.

Питання типу ***«Есе»*** (рис. А.11) дозволяє отримати відповідь на завантаження файлу та/або онлайн-текст, але потім його потрібно оцінити вручну.

Банк тестових завдань для проведення підсумкового контролю знань

1. В оптимізаційних задачах цільова функція є математичним виразом ____________.

– критерію оптимальності;
– системи обмежень;
– вектору невідомих змінних;
– обмежень ресурсів.

2. Симплексний метод може бути безпосередньо застосований для розв’язання:

– канонічної моделі задачі лінійного програмування;
– будь-якої задачі лінійного програмування з обмеженнями у формі нерівностей;
– тільки транспортної задачі;
– будь-якої задачі динамічного програмування.

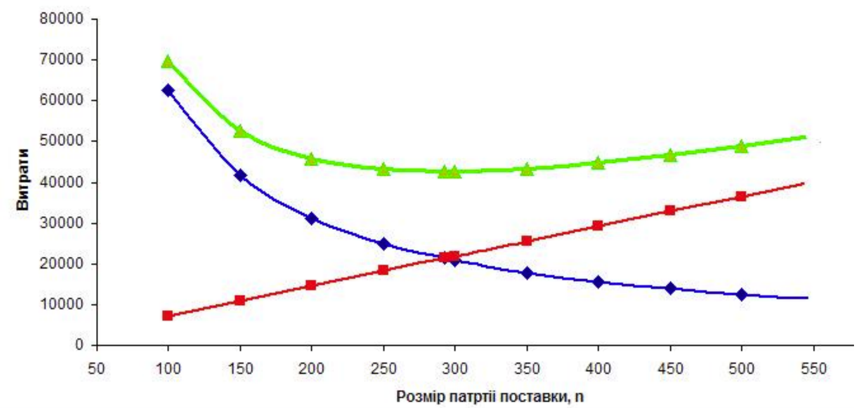
3.У стандартній задачі про оптимальний розподіл ресурсів обмеження на ресурси мають такий вигляд: _______________.

– сумарні витрати ресурсу <= запасу ресурсу;
– сумарні витрати ресурсу >= запасу ресурсу;
– сумарні витрати ресурсу = запасу ресурсу;
– сумарні витрати ресурсу > запасу ресурсу.

4. У задачі про оптимальний розподіл ресурсів цільова функція є функцією ____________.

– максимізації сумарного доходу від реалізації виробленої продукції;
– максимізації сумарного обсягу продукції;
– мінімізації сумарних витрат ресурсів у вартісному виразі;
– мінімізації сумарних витрат ресурсів у натуральному виразі.

5. Підпишіть на рисунку графіки витрат з управління запасами.



Загальні витрати | Витрати створення запасів

Витрати зберігання запасів

6. Під час розв’язання ЛП-задачі на відшукання максимуму відповідно до алгоритму симплексного методу у черговий базис вводиться вектор, який в індексному рядку має _______________.

– найменшу від’ємну оцінку;
– нульову оцінку;
– найбільшу додатну оцінку;
– найменшу додатну оцінку.

7. З трьох кар’єрів до чотирьох керамічних заводів перевозять глину. Потужність кар’єрів, потреби заводів і витрати на

перевезення 1 т глини (у грн) з кожного кар’єру до кожного заводу подано в таблиці. Спланувати перевезення глини на керамічні заводи так, щоб транспортні витрати були мінімальними: знайти початковий опорний план транспортної задачі за методом північно-західного кута.

Кар’єри	Керамічні заводи				Потужність кар’єра
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	3	3	9	50
A_2	8	7	5	4	90
A_3	6	6	4	5	95
Потреби керамічних заводів	80	40	80	35	235 235

$\boxed{20}$ $\boxed{30}$ $\boxed{35}$ $\boxed{40}$ $\boxed{50}$ $\boxed{60}$

8. Заповніть дві порожні клітини другої симплексної таблиці.

i	Базис	$C_б$	X_0	$c_1 = 8$	$c_2 = 6$	$c_3 = 9$	$c_4 = 0$	$c_5 = 0$	$c_6 = 0$	Θ_i
				X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
1	X_4	0	13	0,6	0,2	0,1	1	0	0	130
2	X_5	0	14	0,3	0,4	0,2	0	1	0	70
3	X_6	0	12	0,1	0,5	**0,3**	0	0	1	40
m+1	$\Delta_j = z_j - c_j$		0	-8	-6	-9	0	0	0	
1	X_4	0	9		0,03	0	1	0	-0,33	
2	X_5	0	6	0,23	0,07	0	0	1	-0,67	
3	X_3	9	40	0,33	1,67	1	0	0	3,33	
m+1	$\Delta_j = z_j - c_j$			-5	9	0	0	0	30	

$\boxed{0{,}48}$ $\boxed{0{,}57}$ $\boxed{0{,}85}$ $\boxed{260}$ $\boxed{340}$ $\boxed{360}$

9. Ключовий елемент у симплексній таблиці знаходиться на перетині ________________.

– спрямовуючого стовпця та спрямовуючого рядка;
– спрямовуючого стовпця та рядка цільової функції;
– спрямовуючого рядка та стовпця основної змінної;
– спрямовуючого рядка та стовпця додаткової змінної;

10. Якими властивостями із перелічених володіють об'єктивно зумовлені оцінки?

– оцінки як міра дефіцитності ресурсів;
– оцінки як міра рентабельності продукції;
– оцінки як інструмент визначення ефективності нових варіантів виробництва;
– оцінки як міра ризику виробництва.

11. Суть методу північно-західного кута побудови початкового опорного плану транспортної задачі полягає у тому, що заповнення матриці планування перевезень починається з ______________.

– лівого верхнього кута матриці планування;
– правого верхнього кута матриці планування;
– будь-якої клітинки матриці планування;
– клітинки матриці планування, яка містить мінімальний тариф перевезення.

12. Установіть послідовність кроків алгоритму розв’язання задачі оптимальної стратегії оновлення обладнання.

Крок 1.	Побудова функціонального рівняння Беллмана
Крок 2.	Вибір параметрів, що характеризують стан системи, і змінних управління на *k*-му кроці
Крок 3.	Вибір способу розподілу процесу управління на кроки
Крок 4.	Формулювання принципу оптимальності Беллмана
Крок 5.	Безумовна оптимізація процесу
Крок 6.	Умовна оптимізація процесу

13. Модель планування дефіциту – це модифікація моделі економічного розміру замовлення EOQ, яка стосується управління ______________.

– високовартісними товарними запасами;
– низьковартісними товарними запасами;
– запасами сировини;
– запасами якісної продукції.

14. Твердження про те, що щільність збитків через незадоволення попиту на запас дорівнює ρ означає, що (1-ρ)100% часу запас товару _____________.

– відсутній;
– присутній;
– використовується;
– знаходиться в дорозі.

15. Математичний апарат, який дозволяє здійснювати оптимальне планування багатокрокових керованих процесів і процесів, які залежать від часу, називається _____________.

– динамічне програмування;
– лінійне програмування;
– нелінійне програмування;
– теорія управління запасами.

16. Які типи звітів можна створити за допомогою надбудови MS Excel **Пошук рішення**?

– Звіт про результати;
– Звіт про границі;
– Звіт про стійкість;
– Звіт про оптимальні розв’язки.

17. Згідно із методом потенціалів, якщо сума потенціалів для незаповнених клітин матриці планування $\leq c_{ij}$, то отриманий план перевезень є ______________ планом транспортної задачі.

– оптимальним;
– неоптимальним;
– невизначеним;
– виродженим.

18. Метод потенціалів може бути безпосередньо застосований для розв’язання ________________.

– тільки транспортної задачі;
– будь-якої задачі лінійного програмування з обмеженнями у формі нерівностей;
– канонічної задачі лінійного програмування;
– будь-якої задачі динамічного програмування.

19. Динамічне програмування, як самостійний науковий напрям, започаткував:

– американський математик Річард Ернст Беллман;
– радянський математик і економіст Леонід Канторович;
– італійський економіст і соціолог Вільфредо Парето;
– французький математик, філософ, економіст і адміністратор у галузі університетської освіти Антуан Курно.

20. Фінансовому менеджеру надійшло розпорядження зайнятися важливою проблемою пов’язаною зі своєчасним оновленням обладнання. З використанням методу динамічного програмування фахівець отримав оптимізаційну таблицю, але залив кавою дві комірки. Відновіть два втрачених числа, щоб продовжити планування.

Вихідні дані							
Вік обладнання, *t*	0	1	2	3	4	5	6
Вартість виробленої продукції, *r(t)*	37	36	36	35	34	33	32
Експлуатаційні витрати, *u(t)*	10	11	12	14	18	20	24
Плановий період, *n*	10						
Ціна одиниці нового обладнання, *P=const*	15						
Ліквідаційна вартість, *S=const*	8						

Оптимізаційна таблиця							
Fk(t)	0	1	2	3	4	5	6
F10(t)	**27**	**25**	**24**	**21**	**20**	**20**	**20**
F9(t)	**52**		**45**	**45**	**45**	**45**	**45**
F8(t)	**76**	**70**		**69**	**69**	**69**	**69**
F7(t)	**97**	**94**	**93**	**90**	**90**	**90**	**90**
F6(t)	**121**	**118**	**114**	**114**	**114**	**114**	**114**
F5(t)	**145**	**139**	**138**	**138**	**138**	**138**	**138**
F4(t)	**166**	**163**	**162**	**159**	**159**	**159**	**159**
F3(t)	**190**	**187**	**183**	**183**	**183**	**183**	**183**
F2(t)	**214**	**208**	**207**	**207**	**207**	**207**	**207**
F1(t)	**235**	**232**	**231**	**228**	**228**	**228**	**228**

$\boxed{49}$ $\boxed{69}$ $\boxed{51}$ $\boxed{65}$ $\boxed{21}$

21. Потреба цегляного заводу в піску 30000 тис. т, при цьому пісок витрачається у процесі виробництва рівномірно і безперервно. Пісок замовляється в кар’єрі один раз на рік і поставляється

партіями однакового розміру, вказаного у замовленні. Зберігання 1 тис. т піску на складі коштує 0,20 грн. за добу, а поставка партії 300 грн. Передбачається, що завод не допускає затримок поставок, у році 365 днів. Визначте оптимальний розмір партії поставки.

- 496,56;
- 365,24;
- 1205,00;
- 983,50.

22. Витрати зберігання запасів ____________ розміру партії поставки.

- прямопропорційні;
- обернено пропорційні;
- не залежать від.

23. Алгоритм побудови економіко-математичної моделі задачі про оптимальне використання ресурсів (задача планування виробництва) складається з п’яти кроків. Установіть їхню послідовність.

Крок 1.	Вибір змінних
Крок 2.	Визначення мети задачі
Крок 3.	Формулювання економіко-математичної моделі
Крок 4.	Побудова цільової функції
Крок 5.	Побудова системи обмежень

24. Як називається послідовність клітин матриці планування перевезень, з’єднаних замкнутою ламаною лінією, яка робить поворот на 90^0 у заповнених клітинах?

- цикл;
- мережа;
- ланцюг;
- сходинки;

25. На кожній ітерації розрахунки в симплексних таблицях виконуються за мнемонічним правилом _______________.

- правої руки;
- трикутника;
- буравчика;
- прямокутника.

26. Наведено першу і останню симплексні таблиці розв'язання задачі про оптимальне використання сировини на кондитерській фабриці при виробництві трьох видів карамелі. Установіть оптимальні розв'язки початкової та двоїстої задач.

Вид сировини	Норми витрат сировини на 1 т карамелі			Запас сировини
	Апельсиновий смак	Лимонний смак	Персиковий аромат	
Цукор, т	7	15	20	100
Патока, т	40	22	15	500
Фруктове пюре, т	10	40	25	200
Дохід від реалізації, грн/кг	30	40	50	

i	Базис	$C_б$	X_0	30	40	50	0	0	0
				X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
1	X_4	0	100	7	15	20	1	0	0
2	X_5	0	500	40	22	15	0	1	0
3	X_6	0	200	10	40	25	0	0	1
m+1			0	-30	-40	-50	0	0	0
Остання симплексна таблиця									
1	X_3	50	0,72	0	0,64	1	0,06	-0,01	0
2	X_1	30	12,23	1	0,31	0	-0,02	0,03	0
3	X_6	0	59,71	0	20,86	0	-1,22	-0,04	1
m+1			402,88	0	1,37	0	2,23	0,36	0

X*=	Z_{max} =
Y* =	F_{max} =

- (0,64; 0,31; 20,86; 1,37; 0; 30);
- (0; 20,86; 0; -1,22; -0,04; 1);
- (12,23; 0; 0,72; 0;0; 59,71);
- (2,23; 0,36; 0; 0; 1,37; 0);
- 402,88;
- 72,66;
- Z_{max}.

27. Критерій оптимальності опорного плану: щоб опорний план задачі на відшукання максимуму був оптимальним, необхідно і достатньо, щоб його оцінки були ______________.

- від'ємними;
- невід'ємними;
- нульовими;

28. Заповніть таблицю основних параметрів статичної детермінованої моделі управління запасами без дефіциту

Показник	Формула розрахунку
Оптимальний розмір замовлення (партії поставки), EOQ	
Мінімальні загальні витрати управління запасами	
Оптимальна кількість замовлень за період планування	
Інтенсивність споживання запасу	
Час витрачання оптимальної партії поставки (час між замовленнями)	

$$C_0 = \frac{c_1 N}{n_0} + \frac{c_2 \theta \cdot n_0}{2}; \qquad k_0 = \frac{N}{n_0};$$

$$n_0 = \sqrt{\frac{2c_1 N}{c_2 \theta}}; \qquad T = \frac{n_0}{b}; \qquad b = \frac{N}{\theta}.$$

29. Відкрита модель транспортної задачі зводиться до закритої моделі шляхом _____________.

– введення фіктивного споживача (постачальника);
– збільшення запасів на складах постачальників на визначену величину;
– збільшення потреб споживачів на визначену величину;
– зменшення потреб споживачів на визначену величину.

30. У задачі про оптимальне використання ресурсів природні обмеження мають такий вигляд:

– обсяг виробництва продукції ≤ 0;
– обсяг виробництва продукції < 0;
– обсяг виробництва продукції ≥ 0;
– обсяг виробництва продукції > 0.

31. Для розв’язання ЛП-задач використовується __________.

– метод потенціалів;
– градієнтний метод;
– симплексний метод;
– метод Беллмана.

32. Зменшення розміру замовлення (партії поставки) в моделі управління запасами призведе до такого результату: __________.

– зростають витрати зберігання та зменшуються витрати оформлення замовлень (створення запасу);
– зменшуються витрати зберігання та зростають витрати оформлення замовлень (створення запасу);
– зростають витрати зберігання та втрачена вигода;
– зменшуються витрати зберігання та втрачена вигода.

33. Основні двоїсті оцінки визначають ступінь дефіцитності ресурсів: (1) ресурс, використовуваний повністю в оптимальному плані виробництва, називається __________, і його двоїста оцінка (умовна ціна) – ____________, подальше збільшення ресурсу доцільне; (2) ресурс, використовуваний не повністю в оптимальному плані виробництва, називається ___________ і його двоїста оцінка (умовна ціна) дорівнює ____________, подальше збільшення ресурсу не вплине на фінансовий результат.

– надмірним;
– дефіцитним;
– нулю;
– додатна.

34. У матриці планування отримано оптимальний план транспортної задачі. Яка його вартість?

Постачальники		Споживачі				Запаси
		B$_1$ $V_1=7$	**B$_2$** $V_2=7$	**B$_3$** $V_3=5$	**B$_4$** $V_4=4$	
A$_1$	$U_1=6$	1 **50**	3 -	3 -	9 -	**50**
A$_2$	$U_2=0$	8	7 **40**	5 **40**	4 **40**	**120**
A$_3$	$U_3=1$	6 **30**	6 -	4 **60**	5 -	**90**
Потреби		**80**	**40**	**100**	**40**	260 / 260

–1110;
–2220;
–3330;
–260.

35. Додаткові двоїсті оцінки чисельно дорівнюють __________, який принесе підприємству виготовлення одиниці продукції, що не увійшла до оптимального плану, така продукція називається __________.

– прибутку;
– збитку;
– нерентабельною;
– рентабельною.

36. Установіть цільову функцію економіко-математичної моделі задачі про оптимальне використання сировини для міні-пекарні при виробництві трьох видів булочок за умов, наведених у таблиці.

Вид сировини	Норми розходу сировини на 1 т			Запас сировини
	Батон особливий	Батон нарізний	Сайка	
Борошно, т	8	16	20	200
Дріжджі, т	30	22	15	600
Маргарин, т	10	40	20	300
Дохід від реалізації 1т булочок, грн	20	30	45	

$Z =$

– $200x_1 + 600x_2 + 300x_3 \rightarrow \max$;
– $200x_1 + 600x_2 + 300x_3 \rightarrow \min$;
– $20x_1 + 30x_2 + 45x_3 \rightarrow \max$;
– $20x_1 + 30x_2 + 45x_3 \rightarrow \min$.

37. Відкритими задачами вважають моделі транспортних задач, для яких ___________.

– запаси постачальників дорівнюють потребам споживачів;
– запаси постачальників не дорівнюють потребам споживачів;
– запаси постачальників завжди більші за потреби споживачів;
– запаси постачальників завжди менші за потреби споживачів.

38. Економічний зміст основних змінних задачі про оптимальне використання ресурсів:

- збиток від виробництва продукції j-го виду;
- обсяг виробництва продукції j-го виду;
- залишок ресурсу i-го виду;
- умовна ціна ресурсу i-го виду.

39. Економічний зміст додаткових змінних задачі про оптимальне використання ресурсів:

- збиток від виробництва продукції j-го виду;
- обсяг виробництва продукції j-го виду;
- залишок ресурсу i-го виду;
- умовна ціна ресурсу i-го виду.

40. Для збільшення обсягів продажів постачальники часто пропонують оптові знижки. У цьому разі для прийняття рішення у формулу загальних витрат управління запасами додаються витрати на закупку запасів, тобто вираз ___________.

- $p_з N$;
- $c_1 N$;
- $c_2 N$;
- $p_з b$.

41. Укажіть складові елементи стандартної економіко-математичної моделі оптимізаційної задачі лінійного програмування.

- цільова функція;
- рекурентне співвідношення;
- система обмежень;
- умови невід’ємності.

42. При розв'язанні задач про оптимальне використання ресурсів за допомогою у надбудови **Пошук рішення** збиток від виробництва нерентабельної продукції відображений у _________:

- Звіті про стійкість табл. Обмеження;
- Звіті про стійкість табл. Комірки змінних;
- Звіті про складність табл. Обмеження;
- Звіті про складність табл. Комірки змінних.

43. Якщо платіжна матриця гри містить сідлову точку, то ___________.

– гра розв’язується у змішаних стратегія;
– гра розв’язується у чистих стратегія;
– гра розв’язується графічно;
– гра не має розв’язку.

44. З якою метою вводять фіктивних постачальників або фіктивних споживачів при розв’язку транспортної задачі?

– щоб ускладнити процес пошуку рішення;
– щоб звести незбалансовану задачу до збалансованої;
– щоб вирішити проблему максимізації прибутку;
– щоб змінити загальну сукупну вартість перевезень.

45. На кожній ітерації розрахунки в симплексних таблицях виконуються за _______________.

– методом потенціалів;
– методом множників Лагранжа;
– методом повних виключень Жордана-Гаусса;
– методом відтинання Гоморі.

46. Для визначення оптимального розміру замовлення в моделі з дефіцитом необхідно знати ________________.

– час виконання замовлення;
– темп виробництва;
– ціну продукту;
– штраф за дефіцит.

47. Вибір вектора, що підлягає виведенню з базису (спрямовуючого рядка) здійснюється за формулою ___________.

– $y_i^* \approx \dfrac{\Delta_i z_{\max}}{\Delta b_i}, \quad i = \overline{1;m}.$;
– $\theta = \min\{\theta_i\} = \min\left\{\dfrac{x_{i0}}{x_{ij}}, x_{ij} > 0\right\}$;
– $n_0 = \sqrt{\dfrac{2c_1 N}{c_2 \theta}}$;
– $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}, \; j = \overline{1;n}$.

48. Економічний зміст додаткових змінних двоїстої задачі до задачі про оптимальне використання ресурсів:

– обсяг виробництва продукції *j*-го виду;
– залишок ресурсу *i*-го виду;
– збиток від виробництва продукції *j*-го виду;
– умовна ціна ресурсу *i*-го виду.

49. Гра називається грою з нульовою сумою (антагоністичною), якщо ___________.

– жоден з гравців нічого не виграв;
– сума виграшів обох гравців дорівнює нулю;
– у грі беруть участь більше ніж два гравці;
– кожен гравець має нескінченну кількість стратегій.

50. За методом мінімальної вартості заповнення матриці планування транспортної задачі починається з ____________.

– довільної клітини матриці планування;
– клітини, що має мінімальну вартість перевезення одиниці вантажу;
– лівого нижнього кута матриці планування;
– правого верхнього кута матриці планування

51. Зменшення розміру замовлення в моделі управління запасами призведе до _________________.

– збільшення кількості втрачених продажів і збільшення витрат на зберігання;
– зменшення кількості втрачених продажів і збільшення витрат на зберігання;
– зменшення витрат на зберігання і зростання витрат на оформлення замовлень;
– збільшення витрат на зберігання і зниження витрат на оформлення замовлень.

52. Для того щоб розв’язати гру або знайти розв’язок гри слід для кожного гравця вибрати стратегію, яка задовольняє __________.

– умові раціональності та умові ефективності;
– умові оптимальності та умові раціональності;
– умові оптимальності та умові стійкості;
– умові раціональності та умові стійкості.

53. Модель EOQ має вигляд ___________.

– $y_i^* \approx \dfrac{\Delta_i z_{\max}}{\Delta b_i}, \quad i = \overline{1; m.};$

– $\theta = \min\{\theta_i\} = \min\left\{\dfrac{x_{i0}}{x_{ij}}, x_{ij} > 0\right\};$

– $n_0 = \sqrt{\dfrac{2c_1 N}{c_2 \theta}};$

– $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}, \ j = \overline{1; n}.$

54. Якщо парна гра з нульовою сумою не має сідлової точки, то гра ____________.

– не має розв’язку;
– розв’язується в чистих стратегіях;
– розв’язується у змішаних стратегіях;
– має безліч розв’язків.

55. Який зі звітів надбудови **Пошук рішення** містить відомості про двоїсті оцінки?

– Звіт про результати;
– Звіт про границі;
– Звіт про стійкість;
– Звіт про оптимальні розв’язки.

56. При розв’язанні ЛП-задачі на відшукування максимуму відповідно до алгоритму симплексного методу в черговий базис вводиться вектор, який має ___________.

– найменшу від’ємну оцінку;
– нульову оцінку;
– найбільшу додатну оцінку;
– найменшу додатну оцінку.

57. Принцип вибору стратегії гравця *A*, заснований на максимізації мінімальних виграшів, називається принципом ______.

– Беллмана;
– управління;
– максиміну;

– мінімаксу.

58. Задачі відшукання локального або глобального екстремуму функції за умови, що на змінні функції накладаються певні обмеження, називаються задачами на ____________ функції.

– умовний екстремум;
– безумовний екстремум;
– локальний максимум;
– глобальний мінімум.

59. Який метод необхідно обрати у діалозі **Параметри пошуку рішення** надбудови **Пошук рішення** для розв'язання задачі: знайти мінімум сумарних витрат $Z = x_1^2 + x_2^2 \to \min$ за обмежень $x_1 + x_2 = 230$?

– Пошук рішення нелінійних задач методом ОПГ;
– Пошук рішення лінійних задач симплекс-методом;
– Еволюційний пошук рішення;
– надбудову **Пошук рішення** не можна використовувати для розв'язання задач такого типу.

60. Запишіть функцію Лагранжа для задачі: знайти мінімум сумарних витрат $Z = x_1^2 + x_2^2 \to \min$ за обмежень $x_1 + x_2 = 500$.

– $L(x_1, x_2, \lambda) = x_1 + x_2 + \lambda(500 - x_1^2 - x_2^2)$;

– $L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(500 - x_1 - x_2)$;

– $L(x_1, x_2, \lambda) = 500x_1^2 + 500x_2^2 + \lambda(x_1 - x_2)$;

– $L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + 500(\lambda - x_1 - x_2)$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бех О. В., Городня Т. А., Щербак А. Ф. Математичне програмування : Навч. посіб.. Львів : Магнолія 2006, 2007. 200 с.
2. Бех О. В., Городня Т. А., Щербак А. Ф. Збірник задач з математичного програмування : Навч. посіб. Львів : Магнолія 2006, 2007. 200 с.
3. Bellman, R. Dynamic programming. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1957. 342 pp. URL: https://www.gwern.net/docs/statistics/decision/1957-bellman-dynamicprogramming.pdf
4. Bradley S.P., Hax A.C., Magnanti T.L. Applied mathematical programming. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1977. 539 pp. URL: http://web.mit.edu/15.053/www/AMP.htm
5. Вітлінський В. В., Наконечний С. І., Терещенко Т. О. Математичне програмування : навч.-метод. посібник для самостійного вивчення дисципліни. К. : КНЕУ, 2001. 248 с.
6. Вітлінський В. В. Моделювання економіки : Навч. посіб. Київ : КНЕУ, 2003. 408 с.
7. Глущик М. М., Копич І. М., Пенцак О. С., Сороківський В. М. Математичне програмування : Навч. посіб. Львів : Новий світ-2000, 2005. 216 с.
8. Григорків В. С., Григорків М. В. Оптимізаційні методи та моделі : підручник. Чернівці : Чернівец. нац. ун-т, 2016. 400 с.
9. Дякон В. М., Ковальов Л. Е. Математичне програмування : Навч. посіб. / За ред. В.М. Михайленка. Київ : Вид-во Європ. ун-ту, 2004. 497 с.
10. Івченко І. Ю. Математичне програмування : Навч. посіб. Київ : Центр учбової літератури, 2007. 232 с.
11. Исследование операций в экономике: Учебн. пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. 407 с.
12. Катренко А. В. Дослідження операцій : Підручник. Львів: Магнолія Плюс, 2004. 549 с.
13. Крушевский А.В., Швецов К.И. Математическое программирование и моделирование в экономике : Учеб. пособие. для вузов. Київ : Вища школа, 1979. 456 с.
14. Kim M-K., McCarl B.A., Spreen T.H. Applied Mathematical Programming. TX : Texas A&M University, College Station, 2018. 112 pp. URL: https://agecon2.tamu.edu/people/faculty/mccarl-bruce/

mccspr/Kim%20McCarl%20Spreen%20(2018)%20Applied%20Mathematical%20Programming.pdf

15. Kupferschmid K. Introduction to Mathematical Programming : Theory and Algorithms of Linear and Nonlinear Optimization, 2017. 563 pp. URL: https://www.pdfdrive.com/introduction-to-mathematical-programming-e34326160.html

16. Кучма М. І. Математичне програмування: приклади і задачі : Навч. посіб. Львів : Новий світ-2000, 2006. 342 с.

17. Лебедєва І. Л., Норік Л. О. Розв'язання завдань з навчальної дисципліни «Оптимізаційні методи і моделі» у середовищі MS Excel-2010 : навчально-практичний посібник для іноземних студентів. Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2015. 220 с.

18. Математичні методи дослідження операцій : підручник / Є. А. Лавров, Л. П. Перхун, В. В. Шендрик [та ін]. Суми : СумДУ, 2017. 212 с.

19. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування : Навч. посіб. Київ : КНЕУ, 2003. 452 с.

20. Оптимізаційні методи та моделі: вибрані завдання для тематичного контролю : навч. посіб. / В.С. Григорків, О.І. Ярошенко, М.В. Григорків, Г.П. Кибич ; Чернів. нац. ун-т ім. Ю.Федьковича. Чернівці : ДрукАрт, 2013. 168 с.

21. Оптимізаційні методи та моделі в підприємницькій діяльності : Навч. посіб. / Л.О. Волонтир, Н.А. Потапова, І.М. Ушкаленко, І.А. Чіков, Вінницький національний аграрний університет. Вінниця : ВНАУ, 2020. 404 с.

22. Степанюк В. В. Методи математичного програмування. Київ : Вища школа, 1997. 272 с.

23. Ульянченко О. В. Методи оптимізації в економіці : Навч. посіб. Харків : Харк. держ. аграр. ун-т ім. В. В. Докучаєва, 2001. 139 с.

24. Ульянченко О. В. Дослідження операцій в економіці : Підручник для студентів вузів. Харків : Гриф, 2002. 580 с.

25. Якимова Л.П. Методика викладання фахових дисциплін у ЗВО: опорний конспект лекцій у схемах і таблицях : навч. посіб. Чернівці : Технодрук, 2019. 177 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Основні типи тестових питань для проведення тестування на платформі дистанційного навчання Moodle

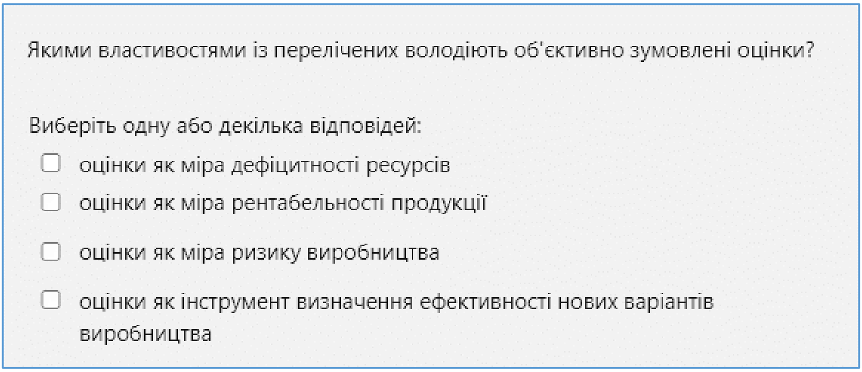


Рис. А.1. Тип питання «Багатоваріантне питання»

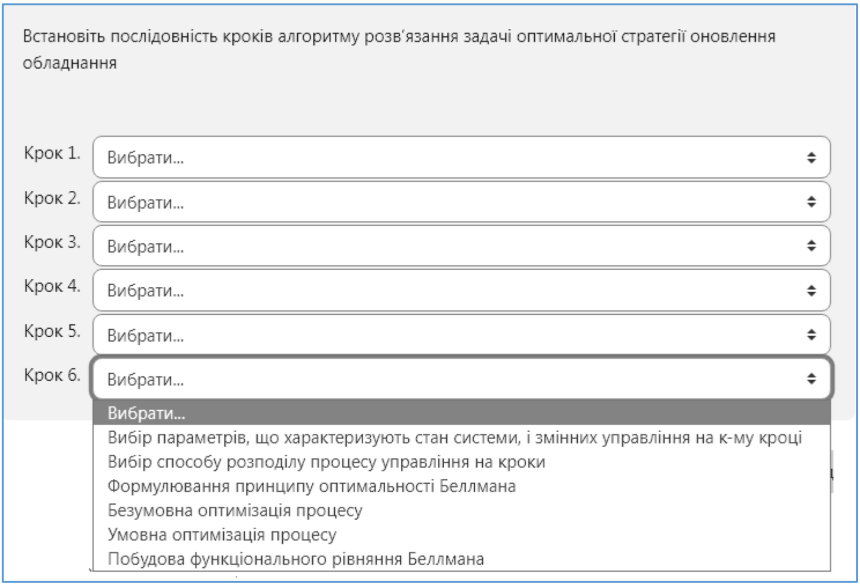


Рис. А.2. Тип питання «Відповідність»

Гра називається грою з нульовою сумою, якщо жоден з гравців нічого не виграв.

Виберіть одну відповідь:

○ Правильно

○ Неправильно

Рис. А.3. Тип питання «Правильно/Неправильно»

Витрати зберігання запасів [ ] розміру партії поставки.

не залежать від
оберненопропорційні
прямопропорційні

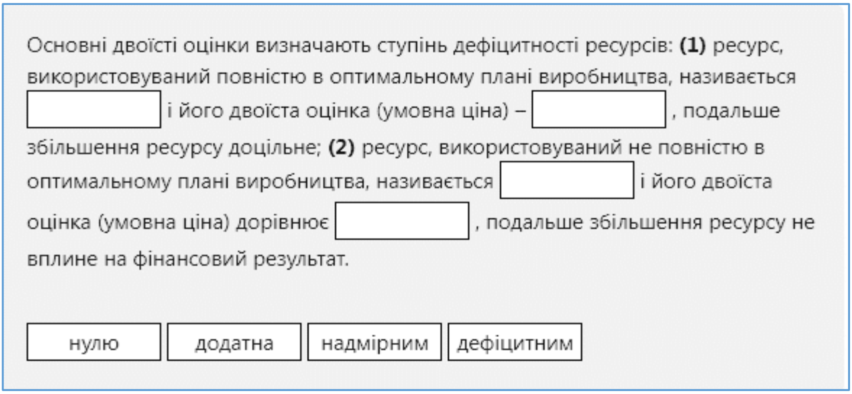
Рис. А.4. Тип питання «Визначити пропущені слова»

З трьох кар'єрів до чотирьох керамічних заводів перевозять глину. Потужність кар'єрів, потреби заводів і витрати на перевезення 1 т глини (у грн) з кожного кар'єру до кожного заводу подано в таблиці. Спланувати перевезення глини на керамічні заводи так, щоб транспортні витрати були мінімальними: знайти початковий опорний план транспортної задачі за методом північно-західного кута.

Кар'єри	Керамічні заводи				Потужність кар'єра
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	3	3	9	**50**
A_2	8	7	5	4	**90**
A_3	6	6	4	5	**95**
Потреби керамічних заводів	**80**	**40**	**80**	**35**	235 / 235

40 35 20 50 30 60

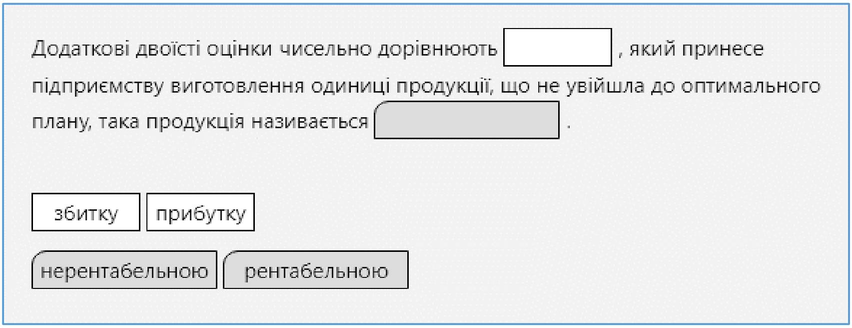
Рис. А.5. Тип питання «Перетягування на картинку»



Основні двоїсті оцінки визначають ступінь дефіцитності ресурсів: **(1)** ресурс, використовуваний повністю в оптимальному плані виробництва, називається ______ і його двоїста оцінка (умовна ціна) – ______ , подальше збільшення ресурсу доцільне; **(2)** ресурс, використовуваний не повністю в оптимальному плані виробництва, називається ______ і його двоїста оцінка (умовна ціна) дорівнює ______ , подальше збільшення ресурсу не вплине на фінансовий результат.

нулю | додатна | надмірним | дефіцитним

Рис. А.6. Тип питання «Перетягування в тексті»

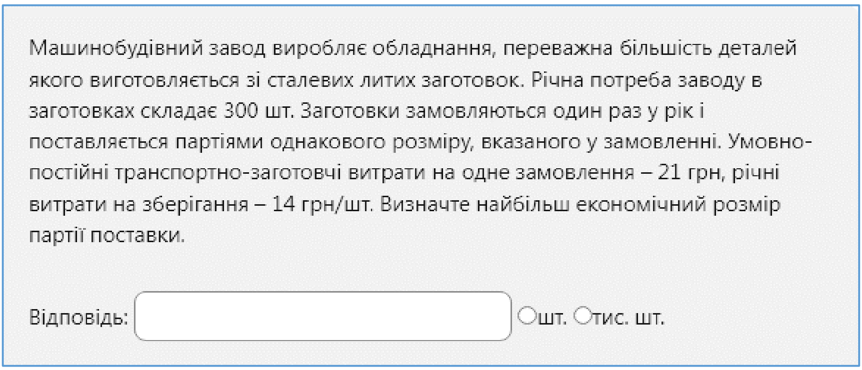


Додаткові двоїсті оцінки чисельно дорівнюють ______ , який принесе підприємству виготовлення одиниці продукції, що не увійшла до оптимального плану, така продукція називається ______ .

збитку | прибутку

нерентабельною | рентабельною

Рис. А.7. Тип питання «Перетягування в тексті» з групуванням



Машинобудівний завод виробляє обладнання, переважна більшість деталей якого виготовляється зі сталевих литих заготовок. Річна потреба заводу в заготовках складає 300 шт. Заготовки замовляються один раз у рік і поставляється партіями однакового розміру, вказаного у замовленні. Умовно-постійні транспортно-заготовчі витрати на одне замовлення – 21 грн, річні витрати на зберігання – 14 грн/шт. Визначте найбільш економічний розмір партії поставки.

Відповідь: ______ ○шт. ○тис. шт.

Рис. А.8. Тип питання «Числовий»

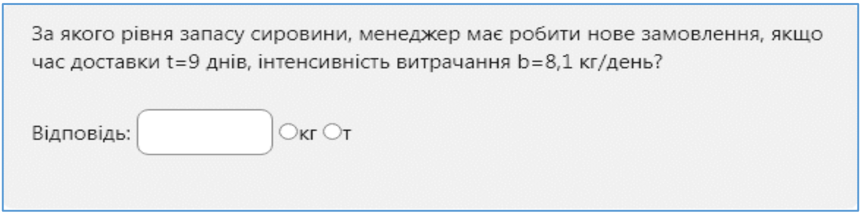
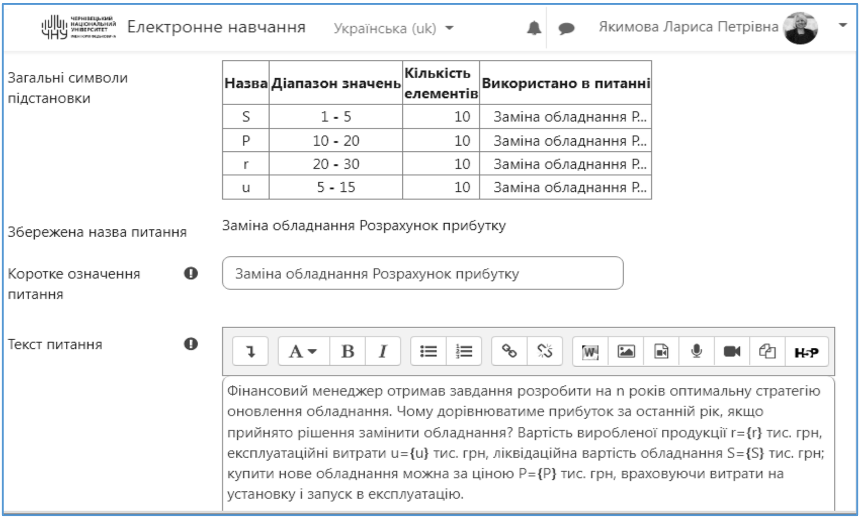


Рис. А.9. Тип питання «Розрахунковий простий»



Назва	Діапазон значень	Кількість елементів	Використано в питанні
S	1 - 5	10	Заміна обладнання Р...
P	10 - 20	10	Заміна обладнання Р...
r	20 - 30	10	Заміна обладнання Р...
u	5 - 15	10	Заміна обладнання Р...

Рис. А.10. Редагування питання типу «Розрахунковий»

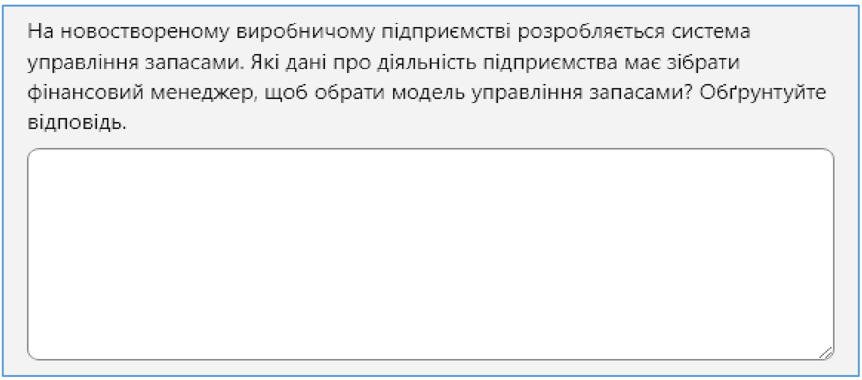


Рис. А.11. Тип питання «Есе»

Навчальне видання

ЯКИМОВА Лариса Петрівна

Оптимізаційні методи та моделі

Практикум в MS Excel

Навчально-методичний посібник

Літературний редактор ***Лупул О. В.***

Технічний редактор
та дизайн обкладинки ***Кудрінська О.М.***

Підписано до друку 01.07.2022. Формат 60х84/16.
Папір офсетний. Друк різографічний. Умов.-друк. арк. 14,9.
Обл.-вид. арк. 16,0.Тираж 30. Зам. Н-072.
Видавництво та друкарня Чернівецького національного університету.
58002, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2.
e-mail: ruta@chnu.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 891 від 08.04.2002.