

**Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича**

**РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ОПТИЧНИХ ХВИЛЬ У ВИПАДКОВИХ
СЕРЕДОВИЩАХ ТА СИСТЕМАХ
Конспект лекцій**

**Чернівці
ЧНУ
2022**

УДК 535.41(075.8)

M173

ББК 22.343.4я73

М І73 Розповсюдження оптичних хвиль у випадкових середовищах та системах: Конспект лекцій 2022. –155 с.

У конспекті лекцій розглянуто статистичний опис випадкових оптичних полів та об'єктів; розповсюдження оптичних хвиль у випадкових середовищах та системах, розв'язок дифракційних задач оптики; розв'язки прямих та обернених задач статистичної оптики.

Для студентів спеціальностей телекомунікації, метрологія та інформаційно-вимірвальна техніка, видавничо-поліграфічна справа, аспірантів та наукових працівників у цих галузях.

ББК 22.343.4я73

УДК 535.41(075.8)

НЕ 0. ВСТУП ТА ПРЕДМЕТ КУРСУ «РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ОПТИЧНИХ ХВИЛЬ У ВИПАДКОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ ТА СИСТЕМАХ»

Курс «Розповсюдження оптичних хвиль у випадкових середовищах та системах» бвзується на принципах статистичної оптики. Часто статистична оптика розглядається разом із статистичною радіофізикою, оскільки природа оптичних та радіо- коливань однакова – електромагнітна. Різниця лише у спектрі їх випромінювання. У довжинах хвиль оптичний діапазон: 0.05-100 мкм; радіо діапазон: 0.1 мм - 50 км). А моделі, підходи, закони, описи та інше є для них спільними. Тому є зміст розглядати теоретичну базу статистичної оптики та радіофізики як спільну, виділяючи, звичайно, особливості кожної з наук.

Зародження та етапи розвитку статистичної оптики та радіофізики індивідуальні.

Багато того, що спочатку відкрили в оптиці, потім по аналогії знайшли і в радіофізиці і навпаки. Ми, зважаючи на те, що у нас на факультеті краще розвинуті оптичні традиції будемо розглядати статистичну оптику.

Предметом курсу «Розповсюдження оптичних хвиль у випадкових середовищах та системах» є застосування статистичних підходів до розв'язання задач поширення оптичних полів у системах оптичного зв'язку.

Що означає – статистичні підходи? Це статистичний опис та статистичні параметри, які ви розглядали в курсі теорії ймовірності та математичної статистики. Це: середні значення, моменти, кореляційні функції, спектри потужності, функції розподілу густини ймовірності та інші.

Що ж стосується оптики, то як говориться у Старому завіті, все з неї почалося (“да будет свет”). Оптика вже ввійшла у своє друге тисячоліття. Проте не дивлячись на свій вік, оптика інтенсивно розвивається, а 21 століття назвали століттям оптичних технологій.

Основні напрямки, якими оптика розвивається в цьому столітті наступні:

- оптика в науках про життя,
- оптичний зв'язок та
- оптика у промислових та військових задачах.

Як бачите, випадково чи ні, але ці напрямки пов'язані з оптичними спеціальностями нашого інституту:

- Біотехнічні та медичні апарати і системи
- Інформаційні мережі зв'язку
- Лазерна та оптоелектронна техніка

Це що стосується перспектив розвитку оптики.

Проте, особливо важливі відкриття було зроблено в середині 20 століття.

Це:

1. Введення в оптику понять та методів Фур'є аналізу в кінці 40 на протязі 50-х років (ви знаєте, що фур'є-перетворення робить лінза, причому в реальному часі над всім полем одночасно).
2. Відкриття лазеру та освоєння лазерної техніки в кінці 50-х. (Відкриття лазеру революційно вплинуло на розвиток всієї оптики)
3. Поява нелінійної оптики в 1960 роках (нові нелінійно-оптичні явища, звичайно ж пов'язані з відкриттям лазеру – самофокусування, генерація подвійної гармоніки, оптична бістабільність, фемптосекундна спектроскопія та інше).

Ці відкриття суттєво вплинули на розвиток оптики і, зокрема, статистичної оптики. Оптика була головним джерелом у хвильових статистичних задачах в кінці XIX на початку XX сторліть. Відкриття ж лазеру дозволило розбити етапи розвитку статистичної оптики на долазерний та лазерний період.

Етапи долазерного періоду:

1. В кінці 19 століття Релей застосував принцип аналізу та синтезу до складних полів, як електромагнітних так і акустичних. Це так званий розклад Релея по гармоніках. Релей також розглянув складання сигналів з випадковими фазами та амплітудами.
2. Статистична інтерпретація квантової механіки, запропонована Борном.

3. Введена Вольфом теорія когерентності в 1954 році. (часткова когерентність, інтерференція білого світла, МП-4, довжина когерентності – сотні кілометрів, найбільша у радіохвиль, глобальна система NASA – GPS).
4. Створення Менделем теорія реєстрації світла в кінці 50-х, яка враховує статистичний характер взаємодії випромінювання та речовини (дробовий шум приймача, робота ФЕП в режимі ліку фотонів та інше).

Це етапи долазерного розвитку статистичної оптики. Лазерне ж випромінювання - високо когерентне.

Стало можливим дослідження як статичних, так і динамічних оптичних полів. Статистичні характеристики електромагнітних полів, утворених внаслідок інтерференційного складання парціальних хвиль з випадковими амплітудами та фазами, стали предметом інтенсивного дослідження в лазерний період.

Історично склалися два напрямки розвитку статистичної оптики в лазерний період:

- дослідження механізмів та особливостей просторової модуляції поля, які стали предметом оптики спеклів, та
- дослідження часових флуктуацій поля, сформованих внаслідок розсіювання світла в динамічних середовищах.

Вивченням часових флуктуацій та можливостей використання отриманої інформації для діагностики динаміки та структури середовищ займається кореляційна або доплерівська спектроскопія.

Першими, статистичні властивості стаціонарних і квазістаціонарних спекл-полів, почали вивчати Голдфішер, Гудмен, Дейнти та інші дослідники. Цікаво, що тонку структуру розсіяного лазерного випромінювання поля досліджували в 1976 році і на кафедрі оптики ЧНУ Полянський В.К. та Ковальський Л.В. Полянський В.К. та Ковальський Л.В. створили один з перших на Україні лазер та вперше в Україні записали голограму. Пізніше лазери стали випускати промислово.

Дефекти хвильових фронтів у спекл-полях аналізували М.Беррі й

Дж.Най, Б.Я.Зельдович, М.С.Соскін із співробітниками та І.І. Мохунь.

Дослідження впливу статистичних характеристик спеклів в задачах обробки інформації проводили Г.Р.Локшин, І.С.Клименко й В.П.Рябухо та ряд інших дослідників.

Кореляційні властивості когерентних полів, розсіяних фазово-неоднорідними об'єктами, досліджували О.В.Ангельський, І.А.Попов із співробітниками.

Теоретичні основи методу кореляційної спектроскопії з використанням лазерного випромінювання представлені в роботах Э.Пайка, Г.Каммінса, Э.Джейкмена, Б.С.Ринкевічюса та інших.

М.Л.Гурари, А.А.Магомедов із співробітниками, В.К.Полянський, О.В.Ангельський провели голографічні дослідження часових кореляцій поля випромінювання, розсіяного системою броунівських частинок.

Слід виділити роботи в області адаптивної оптики, що пов'язані з дослідженням впливу випадкової фазової модуляції зондуючих пучків при їхньому поширенні в турбулентній атмосфері (М.А.Воронцов, В.И.Шмальгаузен та ін.).

Паралельно з розвитком оптики спеклів та кореляційної спектроскопії розвивається підхід, який базується на теорії стохастичних та хаотичних коливань. В рамках цієї теорії розглядаються процеси та об'єкти, які знаходяться між детермінованими та випадковими. Так, поява в детермінованому процесі нелінійностей і невизначеностей приводить до його хаотизації, а певне впорядкування випадкового процесу робить його стохастичним. Посередині між детермінованими та випадковими процесами знаходяться так звані фрактальні процеси.

Із усієї різноманітності оглядів, збірників, статей та монографій, присвячених цій тематиці, своєю повнотою та ясністю викладення виділяються роботи:

- Ю.І.Неймарка й П.С.Ланди по дослідженню стохастичних та хаотичних коливань в фізичних системах,

- В.С.Аніщенко по стохастичним коливанням в радіофізичних системах,
- М.І.Рабіновича по розвитку турбулентності та утворенню структур в течіях рідин,
- Муна хаос в інженерних задачах.

В оптиці вивчення проявів часового хаосу в основному стосується:

- процесів в лазерних резонаторах,
- нелінійної оптики, зокрема, оптичної бістабільності,
а просторового хаосу - поля випромінювання, дифрагованого на амплітудних та фазових фрактальних утвореннях.

З часу введення Б.Мандельбротом концепції фракталів, виконано значну кількість теоретичних і експериментальних робіт, присвячених дослідженням взаємодії когерентного випромінювання з фрактальними об'єктами різних типів:

- тримірні фрактальні кластери;
- двомірні амплітудні та фазові фрактали з неперервним пропусканням;
- двомірні бінарні амплітудні і фазові фрактальні об'єкти (масові фрактали);
- апертури, обмежені фрактальними лініями;
- фрактальні шаруваті структури (часто розглядаються багат шарові діелектричні фільтри з структурами типу канторовської множини) та інші.

У цих роботах розглядається самоподібність розподілу параметрів поля дифрагованого випромінювання, оцінюється фрактальна розмірність об'єктів та полів за спектром потужності розподілів інтенсивності поля.

Дослідження динамічних когерентних полів з фрактальними властивостями, отриманих в результаті однократного та багатократного розсіювання пучків з обмеженими апертурами, проведені Асакурою, Йозумі, Джейкманом, Д.А.Зімняковим та іншими.

Разом з тим, незважаючи на значну кількість теоретичних і експериментальних робіт, присвячених розвитку різних аспектів оптики спеклів і фрактальної оптики, недостатньо висвітлені потенційні можливості застосування підходів статистичної оптики та теорії стохастичних і хаотичних коливань. Адже реальні об'єкти не є чисто фрактальними або повністю

випадковими. І тому не зовсім очевидно, який підхід краще використовувати: статистичний чи стохастичний.

Причому, об'єкти з однаковою статистикою або однаковою фрактальною розмірністю можуть формувати поля розсіяного випромінювання з різними масштабами просторової модуляції, а, отже, різної складності. Існуючі оптичні методи дослідження не дозволяють виявити ці особливості реальних об'єктів. Проте в теорії стохастичних та хаотичних коливань для оцінки складності динамічної системи використовується кореляційний експонент.

Розглянемо тепер класифікацію випадкових середовищ, які ми будемо розглядати у курсі.

Як ви думаєте, на які групи можна розділити всі середовища? По характеру взаємодії з оптичним випромінюванням їх можна розділити на три великі групи:

- Фазово-неоднорідні об'єкти,
- Шорсткі поверхні,
- Дисперсні середовища

НЕ 1.1 ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

1.1.1. Детермінований та статистичний опис реальних процесів.

Розглядаючи будь-який фізичний процес, ми намагаємося описати цей процес математично. Математичний опис може бути детермінованим або статистичними (імовірнісним).

При детермінованому описі передбачається, по суті, що є всі дані, щоб точно передбачити часовий хід процесу x , тобто рішення задачі шукається у вигляді деякої конкретної математичної функції

$$x = f(t) . \quad (1.1.1)$$

В основі детермінованого опису фактично лежить припущення, що при повторному відтворенні процесу ми знову отримали б залежність величини x від часу виду (1.1.1).

Прикладом процесу, детермінований опис якого неможливий, є броунівський рух. Вимірюючи траєкторію частинки вздовж вісі x ми отримуємо деяку криву $x_{(1)}(t)$. Якщо повторити спостереження, помістивши частинку в початкову точку, то траєкторія $x_{(2)}(t)$ буде зовсім іншою. Розкид траєкторій пов'язаний з хаотичним тепловим рухом дуже великого числа молекул, і його непередбачуваний характер стає очевидним.

В цьому і інших аналогічних випадках, коли процес x є випадковим, замість детермінованого опису (1.1.1) використовується статистичний опис. Величина $x(t)$ в момент t характеризується при цьому функцією розподілу ймовірностей $w(x, t)$, яка визначає відносну імовірність різних значень x в цей момент часу. Імовірність для x прийняти значення, що лежить в деякому інтервалі, запишеться через $w(x, t)$ як:

$$P(x_1 \leq x \leq x_2, t) = \int_{x_1}^{x_2} w(x, t) dx. \quad (1.1.2)$$

Функції розподілу ймовірностей вводяться для дійсних випадкових функцій x , тобто з імовірністю, рівною одиниці, $-\infty < x < \infty$. Тому згідно (2) функція $w(x, t)$ повинна задовольняти умову нормування

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x, t) dx = 1. \quad (1.1.2a)$$

В радіофізиці і оптиці дуже часто розглядаються і комплексні випадкові процеси виду

$$z(t) = x(t) + iy(t); \quad (1.1.3)$$

ймовірнісні властивості z визначаються спільним розподілом дійсної і уявної компонент $w(x, y, t)$.

1.1.2. Реалізація випадкового процесу; статистичний ансамбль.

Повертаючись до розглянутого вище прикладу, припустимо, що одночасно і при ідентичних умовах спостерігається рух великого числа N броунівських частинок. В результаті ми будемо мати N різних кривих $x_{(m)}(t)$ ($m = 1, 2, \dots, N$), які називаються реалізаціями випадкового процесу $x(t)$. Сукупність всіх можливих реалізацій називають статистичним ансамблем або набором реалізацій (див. рис. 1.1.1, де окремі реалізації і набір багатьох реалізацій приведені для радіофізичного випадкового процесу - електричного шуму на опорі). Маючи досить широку сукупність реалізацій, можна оцінити ймовірність (1.1.2) як

$$P_1 = P(x_1 \leq x \leq x_1 + \Delta x, t) \approx N_1/N, \quad (1.1.4)$$

де N_1 — число реалізацій, значення яких в момент t лежать в інтервалі $x_1 \leq x \leq x_1 + \Delta x$. Статистичний опис можливий лише при умові, що відношення N_1/N стійке, тобто при $N \rightarrow \infty$ воно прямує до певної межі, рівної P_1 .

При достатньо малому Δx співвідношенні (4) дозволяє провести перехід до густини розподілу ймовірностей. Враховуючи (2), можна написати

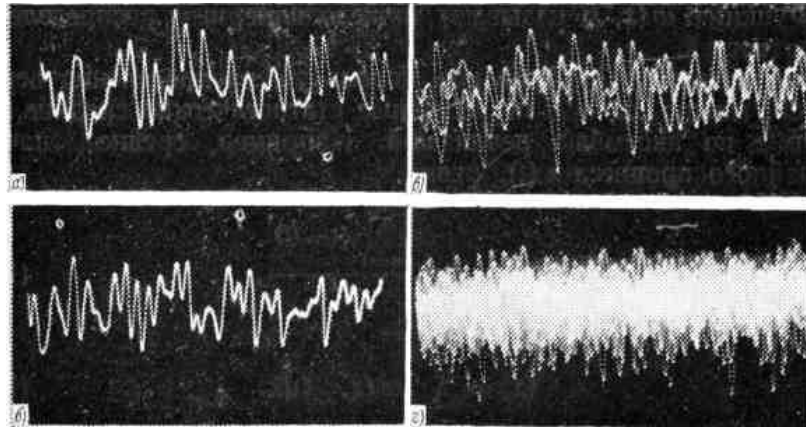
$$w(x, t) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \frac{1}{\Delta x} \frac{N_1(t)}{N(t)}. \quad (1.1.5)$$

Функцію $w(x, t)$ можна визначити з експериментальних досліджень, користуючись формулами (1.1.4), (1.1.5)). В багатьох випадках в цьому досить громіздкому методі немає необхідності, так як функцію $w(x, t)$ вдається знайти

теоретичним шляхом на основі модельних уявлень про випадковий процес.

Функцію $w(x, t)$ називають також одномірним розподілом ймовірностей.

Рис. 1.1.1



Осцилограми шуму, спектр якого лежить в інтервалі частот від 100 Гц до 20 кГц: а), б) одна реалізація; в) накладання трьох реалізацій; г) накладання приблизно 100 реалізацій; час розгортки 0,5 мс.

1.1.3. Статистичне усереднення.

Використовуючи розподіл ймовірностей, можна обчислити різні статистичні середні, тобто середні по ансамблю реалізацій. Наприклад, середнє значення випадкового процесу $x(t)$, рівне

$$\langle x \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=1}^N x_{(m)}(t)}{N}, \quad (1.1.6)$$

знаходиться як

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x w(x, t) dx. \quad (1.1.7)$$

Дійсно, групуючи реалізації $x_m(t)$ в (1.1.6) по інтервалах $x_n \leq x \leq x_n + \Delta x$, отримаємо

$$\langle x \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_n x_n N_n}{N},$$

де N_n — число реалізацій у n -му інтервалі. Помноживши і розділивши на Δx і враховуючи (1.1.5), знайдемо

$$\langle x \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_n \frac{x_n}{\Delta x} \frac{N_n}{N} \Delta x \approx \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_n x_n \dot{\omega}(x_n, t) \Delta x,$$

і в межах при $\Delta x \rightarrow 0$ отримаємо для $\langle x \rangle$ вираз (1.1.7). Крім квадратних дужок, статистичне усереднення надалі позначається рискою зверху:

$$\langle x \rangle \equiv \bar{x}.$$

Для зручності запису формул використовуються обидва символи статистичного усереднення.

Середнє $\langle x \rangle$ має зміст регулярної, тобто цілком передбачуваної характеристики випадкового процесу, який часто буває зручно записувати у вигляді суми регулярної складової $x(t)$ і флуктуаційної компоненти (або просто флуктуації) $\tilde{x}(t)$:

$$x(t) = \bar{x}(t) + \tilde{x}(t). \quad (1.1.8)$$

З (1.1.8) безпосередньо випливає, що середнє значення флуктуації дорівнює нулю: $\langle \tilde{x}(t) \rangle = 0$.

Згідно (1.1.8) різні реалізації випадкового процесу розрізняються лише флуктуаціями, регулярні ж компоненти для всіх реалізацій співпадають:

$$x_{(m)}(t) = \bar{x}(t) + \tilde{x}_{(m)}(t). \quad (1.1.9)$$

Цей запис можна ще уточнити, виділивши постійну і змінну складові флуктуації:

$$\tilde{x}_{(m)}(t) = \xi_{0(m)} + \xi_{(m)}(t). \quad (1.1.10)$$

Де $\xi_{0(m)}$ - постійний параметр, який випадково міняється від реалізації до реалізації і рівний в середньому нулю. Відповідно з (1.1.9) і (1.1.10) замість (1.1.8) можна написати

$$x(t) = \bar{x}(t) + \xi_0 + \xi(t). \quad (1.1.11)$$

Середнє значення будь-якої функції $F(x)$ випадкового процесу визначається, аналогічно (1.1.7), як

$$\langle F(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x, t) F(x) dx. \quad (1.1.12)$$

Статистичні середні випадкового процесу в загальному випадку залежать від часу. Надалі ця залежність виділяється у формулах лише в тих випадках, коли вона має суттєве значення для задачі, яка розглядається.

Використовуючи (12), можна записати вираз для різних середніх моментів

$$m_n = \langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \omega(x) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (1.1.13)$$

центральных моментів

$$\mu_n = \langle (x - \bar{x})^n \rangle = \langle \tilde{x}^n \rangle, \quad (1.1.14)$$

характеристичної функції

$$\theta(u) = \langle e^{iux} \rangle. \quad (1.1.15)$$

Останню можна також тлумачити як фур'є - образ розподілу ймовірностей:

$$\theta(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \omega(x) dx, \quad (1.1.16)$$

Відповідно, знаючи характеристичну функцію, можна знайти розподіл ймовірностей, виконавши зворотне перетворення Фур'є:

$$\omega(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(u) e^{-iux} du. \quad (1.1.17)$$

На відміну від розподілу ймовірностей $w(x)$, характеристична функція комплексна. Вона також обмежена по модулю:

$$|\theta(u)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) |e^{iux}| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) dx = 1.$$

Середнє значення (12) довільної функції $F(x)$ можна виразити через $\theta(u)$ і Фур'є-образ функції $F(x)$, а саме:

$$\langle F(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(u) \varphi(u) du, \quad (1.1.18)$$

$$\varphi(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-iux} dx. \quad (1.1.19)$$

Як видно з визначення (1.1.12) оператора статистичного усереднення, цей оператор - лінійний, комутуючий з довільним лінійним оператором L , що не залежить від x , тобто

$$\langle \hat{L}F \rangle = \hat{L} \langle F \rangle.$$

Тобто, середнє значення інтеграла рівне інтегралу від середнього значення, а середнє похідної — похідній від середнього.

1.1.4. Розклад в ряд по моментах.

Характеристична функція $\theta(u)$, розподіл ймовірностей $w(x)$ і статистичне середнє загального вигляду (1.1.12) можуть бути представлені у вигляді рядів, коефіцієнти яких визначаються моментами (1.1.13).

Розкладаючи експоненту в ряд по x , з (1.1.15) знаходимо

$$\theta(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} m_n. \quad (1.1.20)$$

Звідси видно, що моменти можуть бути знайдені диференціюванням характеристичної функції:

$$m_n = \frac{1}{i^n} \left(\frac{d}{du} \right)^n \theta(u) \Big|_{u=0}. \quad (1.1.21)$$

Підставивши розклад (1.1.20) у вираз (1.1.17) для функції розподілу ймовірностей, отримаємо:

$$w(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} (iu)^n du.$$

Але

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} (iu)^n du = (-1)^n \left(\frac{d}{dx} \right)^n \delta(x), \quad (1.1.22)$$

де $\delta(x)$ - дельта-функція. Співвідношення (1.1.22) можна довести, інтегруючи по частинам вираз для δ -функції

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} du.$$

Таким чином, представлення $w(x)$ у вигляді ряду по моментам буде мати вигляд:

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} m_n \left(\frac{d}{dx}\right)^n \delta(x). \quad (1.1.23)$$

Підставляючи (1.1.23) в (1.1.12) і враховуючи, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x') \left(\frac{d}{dx'}\right)^n \delta(x' - x) dx' = (-1)^n \left(\frac{d}{dx}\right)^n F(x), \quad (1.1.24)$$

знаходимо також

$$\langle F(x) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n F(x) \Big|_{x=0}. \quad (1.1.25)$$

Останнє співвідношення представляє собою просто результат усереднення ряду Тейлора для функції $F(x)$. При $F(x) = e^{iux}$ (1.1.25) переходить в (1.1.20).

1.1.5. Нерівність Чебишева.

Момент другого порядку $m_2 = \overline{x^2}$ визначає середню інтенсивність випадкового процесу. Важливу роль при статистичних оцінках грає центральний момент другого порядку, або дисперсія (див. (1.1.14)),

$$\sigma^2 = \mu_2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 w(x) dx. \quad (1.1.26)$$

Цей параметр характеризує середню інтенсивність флуктуацій. Під середньоквадратичним відхиленням випадкової величини (від середнього) розуміють корінь квадратний дисперсії, тобто величину σ .

Неважко отримати нерівність, яка зв'язує величину σ з ймовірністю того, що флуктуація x буде більше, ніж $n\sigma$ (n — деяке додатне число). Підінтегральний вираз в (1.1.26) додатній, і можна написати

$$\sigma^2 = \left(\int_{-\infty}^{\bar{x}-n\sigma} + \int_{\bar{x}-n\sigma}^{\bar{x}+n\sigma} + \int_{\bar{x}+n\sigma}^{\infty} \right) (x - \bar{x})^2 \omega(x) dx \geq \\ \geq \left(\int_{-\infty}^{\bar{x}-n\sigma} + \int_{\bar{x}+n\sigma}^{\infty} \right) (x - \bar{x})^2 \omega(x) dx.$$

В останніх інтегралах $(x - \bar{x})^2 \geq n^2 \sigma^2$, і, отже

$$\sigma^2 \geq n^2 \sigma^2 \left(\int_{-\infty}^{\bar{x}-n\sigma} + \int_{\bar{x}+n\sigma}^{\infty} \right) \omega(x) dx. \quad (1.1.27)$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\bar{x}-n\sigma} + \int_{\bar{x}+n\sigma}^{\infty} \right) \omega(x) dx = P(|x - \bar{x}| \geq n\sigma). \quad (1.1.28)$$

Підставивши (1.1.28) в (1.1.27), отримаємо шукану нерівність у вигляді

$$P(|x - \bar{x}| \geq n\sigma) = P(|\bar{x}| \geq n\sigma) \leq \frac{1}{n^2} \quad (1.1.29)$$

або

$$P(|x - \bar{x}| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}. \quad (1.1.30)$$

Більш точна оцінка ймовірності для відхилення від середнього може бути отримана, якщо центральний момент буде високого порядку. Викладки, аналогічні приведеним, приведуть до наступного результату:

$$P(|x - \bar{x}| \geq n \sqrt[2m]{\mu_{2m}}) \leq \frac{1}{n^{2m}}. \quad (1.1.31)$$

При $m = 1$ (1.1.31) співпадає з (1.1.30).

1.1.6. Кумулянти.

Використовуючи розклад логарифма

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

та рахуючи, що $1+x = \theta(u)$, отримаємо

$$\theta(u) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\theta-1)^n}{n}$$

Підставимо сюди з (1.1.20)

$$\theta - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} m_n$$

і збираючи в показниках експоненти члени одного порядку по x , отримаємо для характеристичної функції наступний вираз:

$$\theta(u) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} k_n, \quad (1.1.32)$$

або

$$\ln \theta(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} k_n. \quad (1.1.33)$$

Коефіцієнти k_n називаються кумулянтами. Між моментами і кумулянтами існує однозначний зв'язок, до того ж k_n виражається через моменти до n -го порядку включно. Наприклад,

$$\begin{aligned} k_1 &= m_1, & k_2 &= \mu_2 = \sigma^2, & k_3 &= \mu_3, & k_4 &= \mu_4 - 3\mu_2^2, \\ k_5 &= \mu_5 - 10\mu_2\mu_3, & k_6 &= \mu_6 - 15\mu_2\mu_4 - 10\mu_3^2 - 30\mu_2^3. \end{aligned} \quad (1.1.34)$$

Якщо ввести безрозмірні нормовані кумулянти

$$\kappa_n = k_n / \sigma^n, \quad (1.1.35)$$

то (33) прийме вигляд

$$\ln \theta(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iu\sigma)^n \kappa_n}{n!}.$$

З допомогою кінцевого числа моментів неможливо отримати зручну апроксимацію для розподілу ймовірностей: згідно (1.1.23) функція $w(x)$ визначається при цьому як сума δ -функції і її похідних. А скінчене число кумулянтів визначає $w(x)$ без будь-яких подібних особливостей. Наприклад, знаючи перші два моменти m_1 і m_2 , вважаючи, що решта моментів дорівнюють нулю, і використовуючи (1.1.23), ми отримаємо для розподілу ймовірностей вираз

$$w(x) = \delta(x) - m_1 \delta'(x) + \frac{1}{2} m_2 \delta''(x).$$

Якщо припустити, що відмінні від нуля тільки два перших кумулянта, $k_1 = m_1$ і $k_2 = \sigma^2$, то згідно (1.1.32) характеристична функція буде

$$\theta(u) = \exp\left(ium_1 - \frac{1}{2} u^2 \sigma^2\right). \quad (1.1.36)$$

Підставимо (1.1.36) в (17), отримаємо

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (1.1.37)$$

Розподіл (1.1.37) має вигляд плавної дзвоноподібної кривої з максимумом в точці $x = m_1$. Цей розподіл називається гаусівським або нормальним.

Цікаво, що випадком (1.1.36) вичерпуються всі можливості представлення $\theta(u)$ з допомогою кінцевого числа кумулянтів: згідно теореми, доведеної Марцинкевичем, перетворюючи по Фур'є функцію

$$\theta(u) = \exp \sum_{n=1}^N \frac{(iu)^n}{n!} k_n, \quad (1.1.38)$$

ми можемо отримати додатній розподіл $w(x) \geq 0$ лише при $N = 1, 2$ або $N = \infty$.

Старші кумулянти k_n ($n = 3, 4, \dots$) дають кількісну оцінку відхилень довільної функції розподілу від симетричної гаусівської кривої (1.1.37); величину

$$\kappa_3 = \frac{k_3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

називають коефіцієнтом асиметрії, а

$$\kappa_4 = \frac{k_4}{\sigma^4} = \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

- коефіцієнтом ексцесу. При $\kappa_4 > 0$ розподіл $w(x)$ в околі $x = \bar{x}$ більш гострий і вузький, а при $\kappa_4 < 0$ навпаки, більш плоский, ніж гаусівський. Цікаво, що величини κ_3 і κ_4 не зовсім незалежні, так як повинна виконуватись нерівність $\kappa_4 - \kappa_3^2 + 2 \geq 0$, і, зокрема, $\kappa_4 \geq -2$.

Аналогічні співвідношення можуть бути отримані і для інших кумулянтів.

1.1.7. Багатомірні розподіли ймовірностей.

Для опису сукупності кількох випадкових величин x, y, z (зокрема, для з'ясування зв'язку між цими величинами) крім одномірних розподілів

$$w(x), \quad w(y), \quad w(z), \dots \quad (1.1.39)$$

потрібно знати також двомірні розподіли ймовірностей

$$w(x, y), \quad w(x, z), \quad w(y, z), \dots, \quad (1.1.40)$$

трьохмірні

$$w(x, y, z), \dots \quad (1.1.41)$$

і т. д.

Багатомірні розподіли задовольняють умовам нормування, наприклад:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) dx dy = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y, z) dx dy dz = 1. \quad (1.1.42)$$

Крім того, повинні виконуватись умови відповідності типу

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y, z) dy dz = \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) dy = w(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} w(x, z) dx = w(z), \quad (1.1.43)$$

тобто, проінтегрувавши багатомірний розподіл по одній або декільком випадковим змінним, ми повинні отримати розподіл ймовірностей для решти випадкових змінних.

1.1.8. Умовні розподіли ймовірностей; статистична незалежність.

Розглянемо дві випадкові величини x і y . Будемо говорити про подію A , якщо $a \leq x \leq a + \Delta x$, і про подію B , якщо $b \leq y \leq b + \Delta y$. Нехай при N випробуваннях подія A відбувалась N_A разів, подія B - N_B разів, а в N_{AB} випадках з N мали місце одразу обидві події A і B . Тоді при $N, N_A, N_B, N_{AB} \rightarrow \infty$ можна написати вираз для ймовірностей:

$$P(A) = N_A/N, \quad P(B) = N_B/N, \quad P(A, B) = N_{AB}/N;$$

Останній вираз визначає ймовірність спільної реалізації подій A і B .

Відношення N_{AB}/N_A також можна трактувати як ймовірність, а саме як умовну ймовірність здійснення події B при умові, що подія A обов'язково має місце:

$$N_{AB}/N_A = P(B | A).$$

Аналогічну умовну ймовірність можна написати і для A : Оскільки

$$N_{AB}/N_B = P(A | B).$$

$$\frac{N_{AB}}{N} = \frac{N_{AB}}{N_A} \frac{N_A}{N} = \frac{N_{AB}}{N_B} \frac{N_B}{N},$$

то між умовними і звичайними (або безумовними) ймовірностями має місце наступне співвідношення:

$$P(A, B) = P(A | B) P(B) = P(B | A) P(A). \quad (1.1.44)$$

Якщо перейти до щільності розподілу ймовірностей, то отримаємо

$$w(x, y) = w(x | y) w(y) = w(y | x) w(x). \quad (1.1.45)$$

Таким чином, спільний розподіл двох випадкових величин (тобто двомірний розподіл) може бути знайдений, якщо відомий одномірний розподіл для однієї з цих величин і відповідний умовний розподіл.

Потрібно мати на увазі, що, наприклад, в умовному розподілі $w(x | y)$ величина y грає роль параметра і нормування для $w(x | y)$ має звичайний вигляд:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(x|y) dx = 1,$$

Якщо значення однієї з випадкових величин ніяк не впливає на розподіл ймовірностей для іншої, то ці величини називають статистично незалежними. В цьому випадку

$$\omega(x|y) = \omega(x), \quad \omega(y|x) = \omega(y). \quad (1.1.46)$$

Підставимо (1.1.45) в (1.1.46), отримаємо

$$\omega(x, y) = \omega(x) \omega(y). \quad (1.1.47)$$

Взагалі, якщо є n незалежних випадкових величин

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \quad (1.1.48)$$

то багатомірний розподіл дорівнює добутку одномірних:

$$\omega(x_1, \dots, x_n) = \omega(x_1) \dots \omega(x_n). \quad (1.1.49)$$

Багатомірна характеристична функція сукупності незалежних випадкових величин дорівнює добутку одномірних характеристичних функцій:

$$\theta(u_1, \dots, u_n) = \theta(u_1) \dots \theta(u_n). \quad (1.1.50)$$

1.1.9. Розподіл суми незалежних випадкових величин; центральна гранична теорема.

Застосуємо отримані результати до аналізу статистичних властивостей суми

$$y = x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad (1.1.51)$$

Незалежних випадкових величин з різними розподілами ймовірностей $\omega_\alpha(x_\alpha)$ і характеристичними функціями $\theta_\alpha(u_\alpha)$ ($\alpha = 1, 2, \dots, n$). Останнє можна записати через кумулянти:

$$\theta_\alpha(u_\alpha) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(iu_\alpha)^m}{m!} k_{\alpha, m}. \quad (1.1.52)$$

Характеристичну функцію для u отримаємо, припускаючи $u_1 = u_2 = \dots = u_n = u$. Враховуючи також (1.2.51) і (1.2.52), маємо

$$\theta(u) = \langle \exp \{iu(x_1 + \dots + x_n)\} \rangle = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(iu)^m}{m!} k_m, \quad (1.1.53)$$

де

$$k_m = \sum_{\alpha=1}^n k_{\alpha,m}. \quad (1.1.54)$$

Формула (1.1.54) виражає властивість адитивності кумулянтів: кумулянт суми (незалежних випадкових величин) дорівнює сумі кумулянтів (однакового порядку). Відмітимо, що моменти суми незалежних випадкових величин властивістю адитивності не володіють (виняток складають моменти першого і центральні моменти другого і третього порядку, які співпадають по величині з кумулянтами).

Пронормуємо кумулянти на дисперсію:

$$k_{\alpha,m} = \sigma_{\alpha}^m \kappa_{\alpha,m}; \quad (1.1.55)$$

(1.2.52) тепер можна переписати як

$$\theta_{\alpha}(u) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(iu\sigma_{\alpha})^m}{m!} \kappa_{\alpha,m}. \quad (1.1.56)$$

Такі ж коефіцієнти можна ввести і для кумулянтів суми:

$$k_m = \sigma^m \kappa_m, \quad \sigma^2 = \sum_{\alpha=1}^n \sigma_{\alpha}^2. \quad (1.1.57)$$

В результаті характеристична функція (1.2.53) прийме вигляд

$$\theta(u) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(iu\sigma)^m}{m!} \kappa_m. \quad (1.1.58)$$

Із (1.1.54), (1.1.55) і (1.1.57) випливає, що

$$\kappa_m = \frac{\sum_{\alpha=1}^n \sigma_{\alpha}^m \kappa_{\alpha,m}}{\left(\sum_{\alpha=1}^n \sigma_{\alpha}^2 \right)^{m/2}}. \quad (1.1.59)$$

З ростом n чисельник в (1.1.59) росте $\sim n$, а знаменник $\sim n^{m/2}$, тобто

$$x_m \sim \frac{1}{n^{m/2-1}} \quad (n \gg 1).$$

Таким чином, при збільшенні числа доданків в сумі (1.1.51) відносна роль кумулянтів старших порядків ($m \geq 3$) падає. В граничному випадку $n \rightarrow \infty$ залишаються лише кумулянти першого і другого порядків, а вираз (1.1.53) приймає вигляд

$$\begin{aligned} \theta(u) &= \langle \exp(iu(x_1 + \dots + x_n)) \rangle = \\ &= \exp\left(iuk_1 - \frac{1}{2}u^2k_2\right) = \exp\left(iu\bar{y} - \frac{1}{2}u^2\sigma^2\right), \end{aligned} \quad (1.1.60)$$

оскільки

$$k_1 = \sum_{\alpha} \bar{x}_{\alpha} = \bar{y}, \quad k_2 = \sum_{\alpha} \sigma_{\alpha}^2 = \bar{y}^2 - \bar{y}^2 = \sigma^2.$$

Характеристичній функції (1.1.60) відповідає гаусівський розподіл ймовірностей.

Ми приходимо, таким чином, до висновку, що сума великого числа статистично незалежних складових, кожне з яких має довільний розподіл ймовірностей, розподілена по нормальному, або гаусівському, закону. Це твердження носить назву центральної граничної теореми (ЦГТ). ЦГТ має фундаментальне значення для фізики; в силу ЦГТ більшість реальних випадкових процесів виявляються гаусівськими.

1.1.10. Стаціонарні і нестаціонарні випадкові процеси.

Користуючись багатомірними розподілами, можна визначити і вичерпаний спосіб задання випадкового процесу $x(t)$. Випадковий процес задано, якщо для будь-якого числа n довільно вибраних моментів часу відома n -мірна функція розподілу

$$\omega(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n). \quad (1.1.61)$$

З допомогою вказаної функції можна визначити і ймовірність того, що реалізація процесу достатньо близька до заданої траєкторії:

$$dP = w(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (1.1.62)$$

Формулу (1.62) можна розглядати як «статистичний аналог» запису (1.1.1) регулярної функції часу. Для випадкового процесу (випадкової функції) реалізації зазнають флуктуаційний розкид, але, знаючи $w(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$, можна розрахувати ймовірність здійснення даної реалізації (рис. 1.1.2).

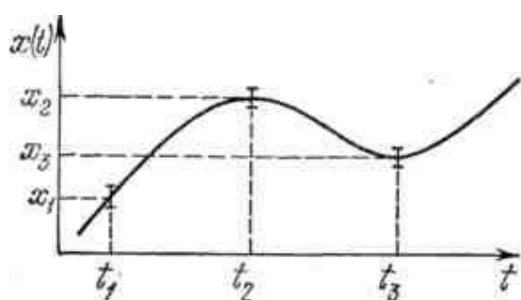


Рис.1.1.2. Ймовірна форма реалізацій і оцінка її ймовірностей з допомогою n -мірного розподілу випадкового процесу. Ймовірність послідовного попадання в три заданих інтервали визначається трьохмірним розподілом $w(x_1, x_2, x_3)$.

Узагальнюючи (1.1.43), можна записати

$$w(x_1, \dots, x_m; t_1, \dots, t_m) = \int w(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) dx_{m+1} \dots dx_n \quad (m < n) \quad (1.1.63)$$

— молодші функції розподілу можуть бути визначені із старших. Таким чином, старші функції розподілу несуть в собі всю інформацію про процес, яка міститься в розподілах більш низького порядку, плюс деяка додаткова інформація. На щастя, для більшості практично важливих задач цінність цієї додаткової інформації швидко зменшується з ростом n тому нижче ми не будемо, як правило, мати справу з $n > 5$, а в дуже багатьох випадках взагалі будемо обмежуватись розглядом лише одномірних і двомірних функцій розподілу. Вибір необхідного опису суттєво залежить від типу випадкового процесу, тобто фактично від умов у фізичній системі, в якій виникає випадковий процес, що розглядається. Далі особливе значення будуть мати так звані стаціонарні випадкові процеси, для яких статистика визначається лише

різницею часу $t_i - t_j$ і не залежить від початку відліку часу t_0 . Стаціонарним випадковим процесом є флуктуації деякої фізичної величини, які виникають в системі, яка знаходиться в умовах рівноваги.

Сформулюємо тепер і математичне визначення стаціонарного процесу. Стаціонарним випадковим процесом називають процес, довільна n -мірна функція розподілу якого не змінюється при одночасному зсуві всіх точок t_1, \dots, t_n на осі часу на одну і ту ж величину, інакше кажучи — функція розподілу не змінюється з часом:

$$\omega(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \omega(x_1, \dots, x_n; t_1 + t, \dots, t_n + t). \quad (1.1.64)$$

У відповідності з (1.1.64) одномірний розподіл ймовірностей стаціонарного процесу не залежить від часу взагалі:

$$\omega(x, t) = \omega(x), \quad (1.1.65)$$

а двомірний - залежить лише від інтервалу $\tau = t_1 - t_2$:

$$\omega[x(t), x(t + \tau); t, t + \tau] = \omega[x, x_\tau, \tau], \quad (1.1.66)$$

Де $x_\tau = x(t + \tau)$. Процеси, для яких виконуються співвідношення (1.1.65) і (1.1.66), іноді називають стаціонарними в широкому розумінні.

В статистичній радіофізиці і оптиці стаціонарні процеси займають особливо важливе місце; умови їх реалізації здійснюються в багатьох експериментальних ситуаціях. Разом з тим, відмітимо, що і нестаціонарні процеси, для яких (1.1.65) несправедливе, також грають важливу роль: наприклад, всі перехідні процеси, що протікають в присутності флуктуації, виявляються фактично нестаціонарними випадковими процесами.

НЕ 1.2. ВИПАДКОВІ ПОЛЯ

1.2.1. Однорідні та ізотропні випадкові поля.

Для опису реальних випадкових об'єктів, середовищ та оптичних полів широко використовують підхід теорії випадкових полів.

Випадковим полем називається випадкова функція більше ніж одного параметра. Так, у просторі параметрів α, β, \dots випадковою буде функція типу

$\xi(\alpha, \beta, \dots)$. В оптиці і об'єкти, і поля є випадковими функціями чотирьох параметрів: часу t та координат простору $\vec{r} = (x, y, z)$. Якщо випадкова функція залежить від одного параметра, а саме часу, то ми маємо справу з випадковими процесами. Випадковим процесом може бути зміна певного параметра середовища або об'єкта (показника заломлення, висоти рельєфу, амплітудного пропускання та інше) в одній точці. Для оптичного поля випадковим процесом буде часова зміна певного параметра поля: інтенсивності, амплітуди, фази чи поляризації.

Випадкове поле можна описати не однією, а рядом функцій $\xi^i(t, \vec{r})$, де $i = 1, 2, \dots, N$. Тоді воно називається N -мірним випадковим полем.

Для скорочення запису введемо точку в чотиривимірному просторі $Q = (t, \vec{r})$. Для повного опису одновимірного випадкового поля, $\xi(Q)$, ми повинні знати всі n -мірні густини ймовірності, тобто для довільного числа n довільно вибраних точок Q_ν повинні бути відомі функції:

$$w_n \{ \xi_1, \dots, \xi_n \} d\xi_1 \dots d\xi_n = P \{ \xi_\nu \leq \xi(Q_\nu) < \xi_\nu + d\xi_\nu (\nu = 1, 2, \dots, n) \}, \quad (1.2.1)$$

де $P \{ \xi \leq \xi(Q) < \xi + d\xi \}$ ймовірність того, що випадкова функція $\xi(Q)$ набуде значення, що лежить всередині інтервалу $(\xi, \xi + d\xi)$.

Аналогічно, для повного статистичного опису N -вимірного поля необхідно знати сукупність n N -мірних густин ймовірності:

$$w_{nN} \left(\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \dots, \xi_n^{(1)}, \dots, \xi_1^{(N)}, \xi_2^{(N)}, \dots, \xi_n^{(N)} \right) d\xi_1^{(1)} d\xi_2^{(1)} \dots d\xi_n^{(N)} = P \left\{ \xi_\nu^{(i)} \leq \xi^{(i)}(Q_\nu) < \xi_\nu^{(i)} + d\xi_\nu^{(i)} (\nu = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, N) \right\} \quad (1.2.2)$$

Одномірне випадкове поле однорідне (стаціонарне за t та однорідне у просторі x, y, z), якщо всі n -мірні густини ймовірності w_n інваріантні відносно перетворення трансляції $Q \rightarrow Q + \delta Q$:

$$P \{ \xi_\nu \leq \xi(Q_n + \delta Q) < \xi_\nu + d\xi_\nu (\nu = 1, 2, \dots, n) \} = P \{ \xi_\nu \leq \xi(Q_\nu) < \xi_\nu + d\xi_\nu (\nu = 1, 2, \dots, n) \}. \quad (1.2.3)$$

Статистично однорідне випадкове поле буде ізотропним, якщо w_n залежить тільки від абсолютного значення вектора \vec{r} і не залежить від його напрямку.

Знаючи n -мірні густини ймовірностей, можна розрахувати моменти випадкового поля ξ будь-якого порядку. У загальному випадку ці моменти будуть функціями координат: $Q_\nu = (t_\nu, \vec{r}_\nu)$.

Для оптичних полів найбільший інтерес мають моменти першого та другого порядку.

Середнє значення випадкового поля $\xi(Q)$ (момент першого порядку), можна розрахувати, використовуючи одномірну густину ймовірності $w_1(\xi)$:

$$\langle \xi(Q) \rangle = \int \xi w_1(\xi) d\xi, \quad (1.2.4)$$

де кутові дужки $\langle \rangle$ вказують на усереднення. Флуктуаційну частину випадкового поля будемо позначати хвилястою рисою зверху:

$$\tilde{\xi} \equiv \xi - \langle \xi \rangle \equiv \xi - \bar{\xi}. \quad (1.2.5)$$

Змішаний момент другого порядку, B_ξ , розраховується за двовимірною густиною ймовірності $w_2(\xi_1, \xi_2)$:

$$B_\xi(Q_1, Q_2) \equiv \langle \xi(Q_1) \xi(Q_2) \rangle = \iint \xi_1 \xi_2 w_2(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \quad (1.2.6)$$

Автокореляційна функція $\Psi_\xi(Q_1, Q_2)$ оперує флуктуаційною частиною випадкового поля і також виражається через двомірну густину ймовірності:

$$\Psi_\xi(Q_1, Q_2) \equiv \langle \tilde{\xi}(Q_1) \tilde{\xi}(Q_2) \rangle = \iint (\xi_1 - \langle \xi_1 \rangle) (\xi_2 - \langle \xi_2 \rangle) w_2(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = B_\xi(Q_1, Q_2) - \langle \xi(Q_1) \rangle \langle \xi(Q_2) \rangle. \quad (1.2.7)$$

Максимальне значення кореляційної функції збігається з дисперсією випадкового поля $D[\xi]$, тобто із середньоквадратичними флуктуаціями, і записується:

$$D[\xi] \equiv \sigma_\xi^2(Q) \equiv \langle \tilde{\xi}^2(Q) \rangle = \langle [\xi(Q) - \langle \xi(Q) \rangle]^2 \rangle = \Psi_\xi(Q, Q). \quad (1.2.8)$$

У теорії когерентності оптичних полів, момент другого порядку $B_\xi(Q_1, Q_2)$ називають функцією когерентності й позначають Γ . На практиці виділяють першу та другу функції когерентності оптичного поля

$$\Gamma_{1,1}(1,2) = \langle u(1)u^*(2) \rangle \equiv \Gamma(1,2), \quad (1.2.9)$$

$$\Gamma_{2,0}(1,2) = \langle u(1)u(2) \rangle \equiv \tilde{\Gamma}(1,2).$$

Останні пов'язані з першою та другою кореляційними функціями такими залежностями:

$$\Psi(1,2) = \langle \tilde{u}(1)\tilde{u}^*(2) \rangle = \Gamma(1,2) - \langle u(1) \rangle \langle u^*(2) \rangle, \quad (1.2.10)$$

$$\tilde{\Psi}(1,2) = \langle \tilde{u}(1)\tilde{u}(2) \rangle = \tilde{\Gamma}(1,2) - \langle u(1) \rangle \langle u(2) \rangle,$$

де $\tilde{u} = u - \langle u \rangle$.

Зручно користуватися комплексним ступенем когерентності, $\gamma(1,2)$, який нормується по функції когерентності для нульового зміщення:

$$\gamma(1,2) = \Gamma(1,2)/\Gamma(0). \quad (1.2.11)$$

Енергетичні оптичні величини, такі як інтенсивність, густина енергії, густина її потоку, є квадратичними по полю і тому їх середнє значення можна виразити через статистичні моменти першого та другого порядків. Серед моментів високого порядку найбільш поширений момент поля четвертого порядку:

$$\Gamma_{2,2}(1,2,3,4) = \langle u(1)u(2)u^*(3)u^*(4) \rangle, \quad (1.2.12)$$

через який можна виразити кореляційну функцію флуктуацій інтенсивності комплексного поля $I = |u|^2$:

$$\Psi_I(1,2) = \langle \tilde{I}(1)\tilde{I}(2) \rangle = \Gamma_{2,2}(1,2;2,1) - \bar{I}(1)\bar{I}(2), \quad (1.2.12)$$

де $\bar{I}(1) = \langle |u(1)|^2 \rangle = \Gamma(1,1)$.

Поряд із дійсними випадковими полями $\xi(Q)$, в оптиці часто розглядають комплексні оптичні поля:

$$\zeta(Q) = \xi(Q) + i\eta(Q), \quad (1.2.13)$$

де $\xi = \text{Re}\zeta$ і $\eta = \text{Im}\zeta$ є дійсними функціями в Q - просторі. Повний статистичний опис комплексного випадкового поля $\zeta(Q)$ здійснюється заданням $2n$ - мірних густин ймовірностей $w_{2n}(\xi_1, \dots, \xi_n; \eta_1, \dots, \eta_n)$, де $n = 1, 2, \dots$, через які, подібно до (1.2.1) виражаються ймовірності:

$$P\{\xi_\mu \leq \xi(Q_\mu) < \xi_\mu + d\xi_\mu, \eta_\nu \leq \eta(Q_\nu) < \eta_\nu + d\eta_\nu (\mu, \nu = 1, 2, \dots, n)\}. \quad (1.2.14)$$

Функції w_{2n} можна використати для розрахунку моментів випадкового поля ζ будь-якого порядку.

Випадкове комплексне поле $\zeta(\vec{r})$ можна описати структурною функцією, яка є середнім квадратом модуля приросту флуктуаційної компоненти $\tilde{\zeta}(\vec{r})$ поля $\zeta(\vec{r})$:

$$D_\zeta(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \left\langle \left| \tilde{\zeta}(\vec{r}_1) - \tilde{\zeta}(\vec{r}_2) \right|^2 \right\rangle. \quad (1.2.15)$$

Важливою властивістю структурної функції є те, що на неї не впливають великомасштабні просторові флуктуації ζ , тобто флуктуації з характерним розміром $l \gg r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$. Для певного класу досліджуваних оптичних полів, наприклад при дослідженні турбулентностей, такий підхід доцільний.

Важливим частковим випадком випадкових полів є так звані локально-однорідні поля. У цьому випадку структурна функція $D_\zeta(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ та усереднений приріст поля $f_\zeta(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \langle \zeta(\vec{r}_1) \rangle - \langle \zeta(\vec{r}_2) \rangle$ залежать тільки від різниці координат $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$:

$$D_\zeta(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = D_\zeta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), f_\zeta(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = f_\zeta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2). \quad (1.2.16)$$

Якщо поле характеризується кореляційною функцією типу

$$\Psi_\zeta(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \left\langle \tilde{\zeta}(\vec{r}_1) \tilde{\zeta}^*(\vec{r}_2) \right\rangle, \quad (1.2.17)$$

то, виходячи з (1.2.15), структурна функція буде:

$$D_\zeta(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \Psi_\zeta(\vec{r}_1, \vec{r}_1) + \Psi_\zeta(\vec{r}_2, \vec{r}_2) - \Psi_\zeta(\vec{r}_1, \vec{r}_2) - \Psi_\zeta^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2). \quad (1.2.18)$$

У частковому випадку однорідних полів з (1.2.18) отримуємо зв'язок між структурною та кореляційною функціями:

$$D_\zeta(\vec{r}) = 2[\Psi_\zeta(0) - \Psi_\zeta(\vec{r})]. \quad (1.2.19)$$

1.2.2. Спектри однорідних і стаціонарних просторово-часових випадкових полів.

Звернемось тепер до спектральних уявлень для стаціонарних і однорідних випадкових полів. Будемо розглядати оптичні поля, тому і позначення будуть традиційними. Аналогом спектрального розкладу тут може бути розклад по плоским хвилям:

$$E(\mathbf{r}, t) = \iint_{-\infty}^{\infty} \xi(\omega, \mathbf{k}) e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} d\omega d^3k, \quad (1.2.20)$$

де \mathbf{k} — хвильовий вектор. Величини $\xi(\omega, \mathbf{k})$ ми будемо називати спектральними амплітудами просторово-часового випадкового поля. Амплітуди $\xi(\omega, \mathbf{k})$ по різному залежать від ω і \mathbf{k} в різних реалізаціях випадкового поля, тобто $\xi(\omega, \mathbf{k})$ випадкові функції ω і \mathbf{k} .

Введемо поняття спектральної густини просторово-часового випадкового оптичного поля і встановимо зв'язок її з кореляційною функцією. Вираз для кореляційної функції $B(\mathbf{s}, \tau)$ однорідного та стаціонарного випадкового поля буде

$$\langle \xi(\omega, \mathbf{k}) \xi^*(\omega', \mathbf{k}') \rangle = G(\omega, \mathbf{k}) \delta(\omega - \omega') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (1.2.21)$$

де $G(\omega, \mathbf{k})$ має зміст спектральної густини просторово-часового випадкового поля; $G(\omega, \mathbf{k}) \geq 0$. Звідси безпосередньо випливають співвідношення:

$$B(\mathbf{s}, \tau) = \iint_{-\infty}^{\infty} G(\omega, \mathbf{k}) e^{i(\omega\tau - \mathbf{k}\mathbf{s})} d\omega d^3k, \quad (1.2.22)$$

$$G(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iint_{-\infty}^{\infty} B(\tau, \mathbf{s}) e^{-i(\omega\tau - \mathbf{k}\mathbf{s})} d\tau d^3s. \quad (1.2.23)$$

У цих виразах просторово-часова кореляційна функція і спектр випадкового поля записані в загальному вигляді. При цьому часовий хід кореляційної функції залежить від просторової координати \mathbf{s} і, навпаки, просторові кореляції змінюються з часом τ . Разом з тим, існує клас задач статистичної оптики, коли часову залежність поля у всіх точках простору можна рахувати практично однаковою. Тоді можна записати

$$E(\mathbf{r}, t) = F(\mathbf{r})f(t). \quad (1.2.24)$$

Із цього співвідношення безпосередньо випливає, що кореляційна функція (3) приймає вигляд

$$B(\mathbf{s}, \tau) = B_F(\mathbf{s}) B_f(\tau). \quad (1.2.25)$$

Випадкові поля, що задовольняють цій умові, іноді називають спектрально «чистими» полями. Умова (24) слабше, ніж (25).

Крім того, існує спеціальний вигляд полів з так званими «замороженими» неоднорідностями, коли напруженість електричного поля $E(\mathbf{r}, t) = E(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$, де \mathbf{v} — швидкість переміщення неоднорідностей. В цьому випадку кореляційна функція поля, очевидно, рівна

$$B(\mathbf{s}, \tau) = B(\mathbf{s} - \mathbf{v}\tau), \quad (1.2.26)$$

тобто просторові і часові кореляції поля повністю взаємозв'язані між собою.

1.2.3. Двовірне ізотропне випадкове поле; випадкова хвиля.

Для оптики першочерговий інтерес представляє спеціальний вигляд випадкових полів - випадкові хвилі.

Загальні формули, записані вище для випадкових полів, ми конкретизуємо для випадкових хвиль. Розгляд почнемо з хвилі, яка близька до регулярної плоскої монохроматичної хвилі.

Розглянемо випадкову хвилю виду

$$E(\mathbf{r}, z, t) = A(\mathbf{r}) e^{i(\omega_0 t - k_0 z)}. \quad (1.2.27)$$

Мова піде, таким чином, про хвилю, яка розповсюджується вздовж осі z ; будемо вважати, що комплексна амплітуда хвилі $A(\mathbf{r})$ випадковим чином залежить лише від радіуса-вектора \mathbf{r} , який лежить в площині, перпендикулярній осі z . Хвилю типу (1.2.27) можна розглядати як «спотворену» плоску хвилю. Поле такого виду, очевидно, виникає, якщо ідеальну плоску монохроматичну хвилю пропустити через безмежний плоский екран, прозорість і фазовий набіги якого випадково змінюються від точки до точки.

Хвилю (1.2.27) можна характеризувати поперечною просторовою кореляційною функцією

$$B_{\perp}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \langle A(\mathbf{r}_1) A^*(\mathbf{r}_2) \rangle. \quad (1.2.28)$$

Для статистично однорідного і ізотропного поля $A(\mathbf{r})$ кореляційна функція (1.2.28) розкладається в двомірний інтеграл Фур'є:

$$B_{\perp}(s = |\bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{r}}_1|) = \int \tilde{G}(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\boldsymbol{\kappa}s} d^2\boldsymbol{\kappa}. \quad (1.2.29)$$

Тут x — поперечна компонента хвильового вектора \mathbf{k} , $k = (k_0^2 + x^2)^{1/2}$.

Через ізотропність поля в (1.2.29) $G(\mathbf{x}) = G(x)$; переходячи до полярних координат, вираз (1.2.29) можна представити у вигляді:

$$B_{\perp}(s) = 2\pi \int_0^{\infty} J_0(s\boldsymbol{\kappa}) G(\boldsymbol{\kappa}) \boldsymbol{\kappa} d\boldsymbol{\kappa}; \quad (1.2.30)$$

$J_0(x)$ - функція Бесселя від дійсного аргумента. Формула перетворення (1.2.30) має вигляд

$$G(\boldsymbol{\kappa}) = (2\pi)^{-1} \int_0^{\infty} J_0(\boldsymbol{\kappa}s) B(s) s ds. \quad (1.2.31)$$

4. Світлові пучки; поперечна і поздовжня кореляція.

Хвиля виду (1.2.27) з статистично ізотропною комплексною амплітудою є ідеальною моделлю. Тому звернемося до більш реальної моделі обмеженого в просторі світлового пучка (рис.1.2.1)

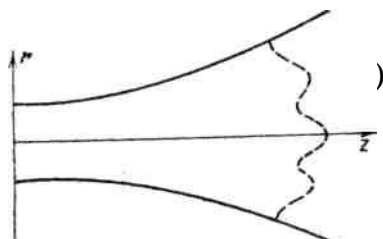


Рис. 1.2.1. Випадково модульований в просторі світловий пучок.

Пунктирна лінія — фазовий фронт пучка.

$$E(\mathbf{r}, z, t) = A(\mathbf{r}, z, t) e^{i[\omega t - k_0 z]} = \rho(\mathbf{r}, z, t) e^{i[\omega t - k_0 z + \varphi(\mathbf{r}, z, t)]} \quad (1.2.32)$$

Координата z направлена вздовж осі пучка; вектор \mathbf{r} , як і раніше, розташований в площині, перпендикулярній осі z . Зміни комплексної амплітуди A (або дійсної амплітуди ρ і фази φ) вздовж осі пучка набагато повільніші, ніж поперек пучка.

Найбільш суттєві риси просторової статистики поля типу (1.2.32) описуються *поперечною* кореляційною функцією (1.2.28) для деякого перерізу пучка z :

$$B_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; z) = \langle E(\mathbf{r}_1, z, t) E^*(\mathbf{r}_2, z, t) \rangle = \langle A(\mathbf{r}_1, z, t) A^*(\mathbf{r}_2, z, t) \rangle. \quad (1.2.33)$$

Крім функції (1.2.33), просторову статистику світлових пучків можна характеризувати *поздовжньою* кореляційною функцією

$$B_{\parallel}(z_1, z_2; \mathbf{r}) = \langle E(\mathbf{r}, z_1) E^*(\mathbf{r}, z_2) \rangle = \langle A(\mathbf{r}, z_1) A^*(\mathbf{r}, z_2) e^{ik_0(z_2 - z_1)} \rangle. \quad (1.2.34)$$

При описі процесу розповсюдження випадково модульованих світлових пучків виявляється зручним введення нових координат:

$$\mathbf{s} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1). \quad (1.2.35)$$

При цьому поперечна кореляційна функція (1.2.33) записується у вигляді:

$$B_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; z) = B_{\perp}(\mathbf{s}, \mathbf{R}; z). \quad (1.2.36)$$

Залежність від координати R є наслідком просторового обмеження світлового пучка, розподіл інтенсивності якого в поперечному перерізі задається функцією:

$$I(\mathbf{R}, z) = B_{\perp}(0, \mathbf{R}; z) = |E(\mathbf{r}_1, z, t)|^2.$$

Кореляційна функція B_{\perp} комплексна і від R залежать як її модуль, так і аргумент. Припущення про незалежність B_{\perp} від R означає також її незалежність від z , тобто приводить до ідеалізованої моделі поля.

Із сказаного випливає, що поле реальних випадково модульованих світлових пучків не підкоряється умовам статистичної однорідності і ізотропності. Іншими словами, поля світлових пучків являються суттєво неоднорідними.

Співвідношення між масштабами a і r_k (зміни кореляційної функції B_{\pm} відповідно вздовж радіус-векторів \mathbf{R} і \mathbf{s}) може бути довільним. При $r_k \rightarrow \infty$ приходимо до пучка з регулярною просторовою модуляцією. Для виключення з розгляду регулярних або великомасштабних неоднорідностей полів можна використовувати так звану структурну функцію.

1.1.5. Когерентність, повністю і частково когерентні поля, коефіцієнт когерентності пучка.

В оптиці з корельованістю випадкових полів пов'язують поняття *когерентності*. Визначимо нормовану кореляційну функцію:

$$\gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, t_2, t_1) = \frac{B(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, t_2, t_1)}{[I(\mathbf{r}_1, t_1)I(\mathbf{r}_2, t_2)]^{1/2}}. \quad (1.2.37)$$

Для стаціонарних полів

$$\gamma = \gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, \tau = t_2 - t_1) = \frac{B(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, \tau)}{[I(\mathbf{r}_1)I(\mathbf{r}_2)]^{1/2}}. \quad (1.2.38)$$

Величина γ називається *комплексним ступенем когерентності*, оскільки кореляційна функція в загальному випадку комплексна. Її абсолютну величину називають модулем ступеня когерентності або просто *ступенем когерентності*. Неважко переконатись, що, як і коефіцієнт кореляції, ступінь когерентності задовольняє нерівність

$$|\gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, \tau)| \leq 1. \quad (1.2.39)$$

Модуль величини $|\gamma|$ при $\tau = 0$ дає значення ступеня просторової когерентності, а при $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ — значення ступеня часової когерентності.

Відзначимо, що нормування кореляційної функції проводиться не на значення інтенсивності в будь-якій одній просторовій точці, а на середнє геометричне значення інтенсивностей в досліджуваних точках поля. Таке нормування дозволяє в більшості випадків виключити із уклад регулярних змін поля.

Для підтвердження сказаного звернемося до хвильового пучка (27). Ступінь просторової когерентності між точками \mathbf{r}_1 і \mathbf{r}_2 в поперечному перерізі пучка рівна ($\tau = 0$)

$$|\gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; z)| = \frac{|B_{\perp}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; z)|}{\sqrt{I(\mathbf{r}_1, z)I(\mathbf{r}_2, z)}}. \quad (1.2.40)$$

У випадку $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$

$$B_{\perp}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_j; z) = I(\mathbf{r}_j, z) \quad (1.2.41)$$

В координатах (1.2.35) ступінь когерентності записується у вигляді

$$|\gamma(\mathbf{s}; \mathbf{R}, z)| = |B_{\perp}(\mathbf{s}, \mathbf{R}; z)| \left\{ I\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{s}}{2}, z\right) I\left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{s}}{2}, z\right) \right\}^{1/2}. \quad (1.2.42)$$

НЕ 1.3. МОДЕЛІ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ І ПОЛІВ

1.3.1. Фізика виникнення випадкових процесів і полів і їх математичні моделі

Поява статистичних задач в радіофізиці і оптиці пов'язана з рядом обставин. Класичні і квантові флуктуації електромагнітного поля, електричні шуми приводять до того, що реальні радіотехнічні і оптичні пристрої постійно підлягають впливу випадкових сил. Неконтрольованим, випадковим чином змінюються і параметри цих пристроїв, комплексний показник заломлення середовищ, в яких розповсюджуються радіо - і світлові хвилі.

Які статистичні властивості цих випадкових процесів. Це, безумовно, одне з головних питань статистичної радіофізики і оптики. Відповідь нього дозволяє передбачити статистичну поведінку радіофізичних і оптичних систем, статистичні властивості хвиль, що розповсюджуються, враховуючи статистичні властивості випадкових сил, флуктуаційні зміни параметрів, можна знайти статистичні характеристики «відгуку» системи, випромінювання, яке розповсюджується у флуктуючому середовищі, і т. п.

Не дивлячись на величезну різноманітність фізичних систем, в яких генеруються ті чи інші випадкові процеси, більшість з них вдається описати порівняно невеликим числом математичних моделей.

Ми розглянемо деякі моделі, що представляють особливий інтерес для радіофізики і оптики; відмітимо одразу ж, що вибраний далі порядок не оснований на строгій класифікації і в ряді випадків виділені моделі відповідають класифікації по різним ознакам (по виду розподілу, спектру, характеру змін у часі); разом з моделями стаціонарних процесів, приведені і приклади моделей, які описують нестаціонарність. Які ж данні використані нижче для побудови математичних моделей?

Перш за все це загальні уявлення, які фактично не вимагають детального знання фізичного механізму (наприклад, мікроскопічної картини) процесу.

Найбільш яскравий приклад такого стану речей - це ситуація, коли виконані умови для застосування центральної граничної теореми теорії ймовірностей. В цьому випадку процес являється гаусівським і можна одразу вказати багато властивостей багатомірних розподілів, моментів випадкових функцій і її похідних і т. п.

В силу центральної граничної теореми гаусівські процеси займають абсолютно виняткове місце у фізиці. Однак, це не означає, що в статистичній радіофізиці приходиться мати справу лише з ними. Справа в тому, що гаусівський розподіл стійкий лише в лінійних системах з постійними параметрами, або тими, що змінюються регулярним чином.

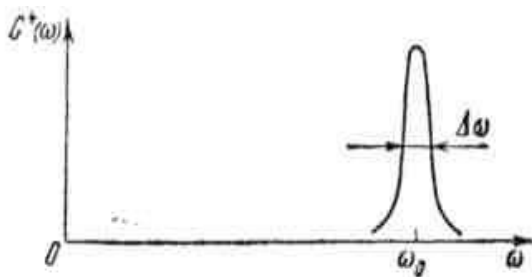


Рис. 1.3.1. Спектральна густина вузькополосного випадкового процесу

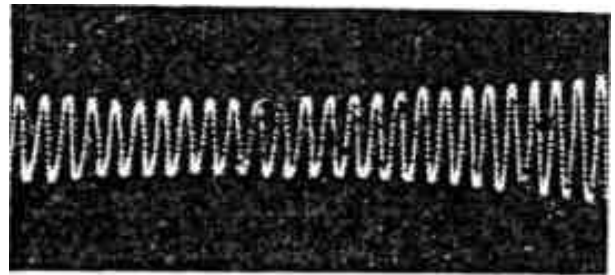


Рис. 1.3.1. Реалізація вузькополосного випадкового процесу

В нелінійних же системах або лінійних системах з випадковими параметрами статистика процесу суттєво трансформується; тому, незважаючи на гаусівський характер флуктуаційних сил і випадкових змін параметрів, дуже багато радіофізичних процесів виявляються суттєво негаусівськими.

Надзвичайно корисною виявляється також модель випадкового процесу, яка базується на представленні реалізації як коливання, близького до синусоїди, з випадковими амплітудою і фазою. Таке представлення фізично дуже наочно для так званих вузько смугових або квазімонохроматичних, процесів.

Дійсно, нехай мова йде про випадковий процес, відносна ширина спектру якого мала: $\Delta\omega/\omega_0 < 1$ (рис. 2.1). Логічно очікувати, що по мірі звуження смуги $\Delta\omega$ кожна окрема реалізація такого процесу буде все більше наближатись по вигляду до гармонічного коливання частоти ω_0 . Відмінність же реалізації від точної синусоїди потрібно приписати наявності амплітудної і фазової модуляції,

тим більш повільних - в масштабі середньої частоти ω_0 , чим вужча ширина спектру $\Delta\omega$. Таким чином, виникає представлення реалізації випадкового процесу у вигляді

$$\xi(t) = \rho(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]. \quad (1.3.1)$$

На рис. 1.3.2 наведено осцилограму, яка ілюструє наші міркування.

Тісно пов'язана з вказаною моделлю і модель коливання, модульованого шумом. Але наша постановка задачі обернена. Якщо в (1.3.1) по заданій статистиці $\xi(t)$ потрібно визначити статистичні характеристики ρ і φ , то для коливань, модульованих шумом, початковими є функції ρ і φ , а по ним знаходяться характеристики $\xi(t)$ (в першу чергу спектр такого коливання).

Модель коливання, модульованого шумом, має багато застосувань в радіофізиці і оптиці. Така модель дає адекватний опис автоколивань в реальному автогенераторі радіодіапазону і лазері: багато застосувань вона знаходить в задачах розповсюдження хвиль через статистично неоднорідне середовище.

Картина випадкової амплітудної і фазової модуляції коливань може бути покладена і в основу статистичної теорії ширини спектральних ліній в оптиці. Але тут центр ваги переноситься уже на мікроскопічну картину виникнення випадкової модуляції, а загальні формули, які пов'язують статистику модуляції ρ і φ і вигляд спектру, використовуються для розрахунку звуження спектральних ліній, класифікації фізичних механізмів.

Для сучасної оптики велике значення має модель оптичного шуму, яка представляє собою суперпозицію еквідистантних по частоті гармонійних коливань з випадковими фазами; така модель добре описує випромінювання багатомодового лазера з несинхронізованими модами.

1.3.2. Гаусівський випадковий процес

Ми почнемо з даних, які відносяться до гаусівських випадкових процесів; в значній мірі вони носять довідковий характер. До гаусівського нормального шуму приводять багато фізичних механізмів.

Ймовірність того, що значення x лежить в деякому інтервалі, рівна

$$P(a \leq x \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^b e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2} dx = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{b-\bar{x}}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\bar{x}}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right], \quad (1.3.2)$$

де

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^x e^{-t^2/2} dt$$

- табульована функція, яка називається інтегралом ймовірності, або функцією помилок, яка змінюється в межах від $\Phi(-\infty) = 0$ до $\Phi(\infty) = 1$. Зокрема,

$$P(|x - \bar{x}| \leq n\sqrt{2}\sigma) = \Phi(n) = \begin{cases} 0,9 & (n=1,17), \\ 0,99 & (n=1,83), \\ 0,999 & (n=2,33). \end{cases}$$

Ширина еквівалентного прямокутного розподілу рівна

$$\Delta x' = \sqrt{2\pi}\sigma \approx 2,51\sigma,$$

причому $w(x = \bar{x} \pm 1/2\Delta x') = w_{\max} e^{-\pi/4} \approx w_{\max} \cdot 0,455$,
 $P(|x - \bar{x}| \leq 1/2\Delta x') \approx 0,79$.

За оцінку ширини піку гаусівської кривої іноді приймають величину, яка мало відрізняється від $\Delta x'$

$$\Delta x'' = 2\sqrt{2\ln 2}\sigma \approx 2,37\sigma, \quad (1.3.3)$$

яка відповідає зменшенню $w(x)$ в два рази відносно w_{\max} .

1.3.3. Вузькосмуговий гаусівський шум

Аналіз статистичних властивостей обвідної і фази випадкового процесу найбільш повно може бути виконаний в тому випадку, коли a і b є гаусівськими випадковими функціями. Процес ξ , який залежить від a і b лінійно, також буде при цьому гаусівським. Обмежимося тут розглядом випадку, коли a , b і ξ стаціонарні.

Процеси a , b і ξ мають нульові середні значення і однакові дисперсії:

$$\bar{a} = \bar{b} = \bar{\xi} = 0, \quad \overline{a^2} = \overline{b^2} = \overline{\xi^2} = \sigma^2, \quad (1.3.4)$$

тобто їх одномірні розподіли ідентичні:

$$(1.3.5) \quad \omega(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-a^2/2\sigma^2}, \quad \omega(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-b^2/2\sigma^2}, \\ \omega(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\xi^2/2\sigma^2}.$$

Розподіли обвідної і фази. Із гаусовості a і b і відсутності кореляції між ними випливає, що у співпадаючі їм моменти часу a і b статистично незалежні, тобто їх спільний розподіл ймовірностей має вигляд

$$\omega(a, b) = \omega(a) \omega(b) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{a^2 + b^2}{2\sigma^2}\right). \quad (1.3.6)$$

Переходячи в (1.3.6) до змінних ρ і φ :

$$a = \rho \cos \varphi, \quad b = \rho \sin \varphi, \quad \frac{\partial(a, b)}{\partial(\rho, \varphi)} = \rho,$$

знайдемо спільний розподіл обвідної і фази квазігармонійного гаусівського процесу:

$$\omega(\rho, \varphi) = \omega(a = \rho \cos \varphi, b = \rho \sin \varphi) \left| \frac{\partial(a, b)}{\partial(\rho, \varphi)} \right| = \frac{1}{2\pi} \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\rho^2/2\sigma^2}. \quad (1.3.7)$$

Функцію (1.3.7) можна представити як $\omega(\rho, \varphi) = \omega(\rho) \omega(\varphi)$, де $\omega(\varphi) = \text{const.}$

Тому, подібно до a і b , випадкові величини ρ і φ у співпадаючі моменти часу також статистично незалежні. Проінтегрувавши (1.3.7) по ρ ($0 < \rho < \infty$), отримаємо

$$\omega(\varphi) = \frac{1}{2\pi}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \omega(\varphi) d\varphi = 1. \quad (1.3.8)$$

Таким чином фаза φ має рівномірний розподіл і всі її значення в інтервалі $(-\pi, \pi)$ рівноймовірні. Розподіл (1.3.8) являється універсальним, тобто, рівномірний розподіл має фаза будь-якого (не лише гаусівського) квазігармонійного стаціонарного процесу. Розділивши (1.3.7) на $\omega(\varphi) = 1/2\pi$, знайдемо розподіл обвідної гаусівського процесу:

$$\omega(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\rho^2/2\sigma^2} \quad (\rho \geq 0). \quad (1.3.9)$$

Це так званий розподіл Релея. Моменти ρ дорівнюють:

$$\langle \rho^{2n} \rangle = 2^n n! \sigma^{2n}, \quad \langle \rho^{2n+1} \rangle = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (2n+1)!! \sigma^{2n+1}, \quad (1.3.10)$$

$$\left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle = \frac{\sqrt{\pi/2}}{\sigma}, \quad \frac{1}{\langle \rho \rangle} = \frac{\sqrt{2/\pi}}{\sigma}, \quad \langle \rho \rangle \left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle = \pi/2. \quad (1.3.10a)$$

Інтенсивність вузько смугового процесу пов'язана з його обвідною співвідношенням $I = \rho^2/2$, причому

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} \langle \rho^2 \rangle = \sigma^2 = \langle \xi^2 \rangle.$$

Переходячи в (1.3.9) до змінної I , легко переконатись, що для гаусівського вузькосмугового процесу розподіл інтенсивності є експоненціальним:

$$\omega(I) = \omega(\rho = \sqrt{2I}) \left| \frac{\partial \rho}{\partial I} \right| = \frac{1}{\sigma^2} e^{-I/\sigma^2} = \frac{1}{\langle I \rangle} \exp\left(-\frac{I}{\langle I \rangle}\right)$$

1.3.4. Дифузний (вінерівський) процес

В цьому параграфі ми розглянемо важливу модель суттєво нестационарного випадкового процесу, яка буде використана надалі,— випадковий процес, який являється інтегралом по часу від деякої випадкової функції.

Отже, розглянемо процес, який описується виразом

$$\xi(t) = \int_0^t \eta(\theta) d\theta. \quad (1.3.11)$$

Функція (1.3.11) задовольняє рівняння

$$\dot{\xi} = \eta(t). \quad (1.3.11a)$$

Важливим радіофізичним прикладом стохастичного рівняння типу (1.3.11a) являється рівняння, яке описує флуктуації фази в автономному генераторі радіодіапазону або лазері, яке виникає під дією власного теплового, дробового або квантового шуму.

В теорії броунівського руху рівняння (1.3.11a) з'являється в граничному випадку «безінерційної» поведінки броунівської частинки. Якщо

$$\langle \eta \rangle = 0, \quad \langle \eta^2 \rangle = \sigma_0^2, \quad \langle \eta \eta_\tau \rangle = B_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (1.3.12)$$

то згідно (1.3.11)

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad (1.3.13)$$

$$\sigma^2 = \langle \xi^2 \rangle = 2 \int_0^t (t - \tau) B_0(\tau) d\tau = 2 \int_0^\infty G_0(\omega) \left(\frac{\sin(\omega t/2)}{\omega t/2} \right)^2 d\omega. \quad (1.3.14)$$

Звідси видно, що дисперсія σ^2 залежить від часу:

$$\dot{\sigma}^2 = 2 \int_0^t B_0(\tau) d\tau, \quad \ddot{\sigma}^2 = 2B_0(t),$$

тобто процес $\xi(t)$ нестационарний.

Неважко з'ясувати залежність σ^2 від часу при малих і великих t . Для малих інтервалів часу, на яких кореляційна функція $B_0(\tau)$ практично постійна, знаходимо

$$B_0(\tau) \approx \sigma_0^2, \quad \sigma^2 = \sigma_0^2 t^2 \quad (t \ll \tau_0). \quad (1.3.15)$$

Характерний час τ_0 в (1.3.15) може бути порядку часу кореляції τ_k або періоду осциляції $T_0 \ll \tau_k$ функції $B_0(\tau)$, що відповідають ефективній ширині $\Delta\omega \sim 1/\tau_k$ спектру $G_0(\omega)$ або частоті $\omega \sim 1/T_0$, на яку приходить максимум спектральної інтенсивності.

При великих $t \gg \tau_k$, для яких функцію $B_0(t)$ можна вважати рівною нулю, вважаючи $t \rightarrow \infty$ у верхній межі інтегралу (1.3.14), отримаємо

$$\sigma^2 = 2D(t - \tau_0) \quad (t \gg \tau_k), \quad (1.3.16)$$

де

$$D = \pi G_0(0) = \int_0^\infty B_0(\tau) d\tau, \quad \tau_0 = \int_0^\infty \tau B_0(\tau) d\tau / D. \quad (1.6.7)$$

Розглянемо деякі окремі випадки

1. $\eta(t)$ - білий шум. При цьому $G_0(\omega) = G$, $\sigma_0^2 = \langle \eta^2 \rangle = \infty$,

$$B_0(\tau) = 2D\delta(\tau), \quad D = \pi G. \quad (1.3.18)$$

Підставивши (1.3.18) в (1.3.13), отримаємо

$$\sigma^2 = 2Dt, \quad (1.3.18a)$$

тобто дисперсія ξ лінійно росте з часом.

Інтеграл від білого шуму називають іноді вінерівським випадковим процесом. Неважко знайти його кореляційну функцію:

$$B(t, \tau) = \langle \xi \xi_\tau \rangle = \begin{cases} 2Dt & (\tau \geq 0), \\ 2D(t - |\tau|) & (-t < \tau \leq 0), \\ 0 & (\tau < -t) \end{cases} \quad (1.3.19)$$

і коефіцієнт кореляції

$$R(t, \tau) = \frac{B(\tau)}{\sigma(t)\sigma(t+\tau)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+\tau/t}} & (\tau \geq 0), \\ \frac{1}{\sqrt{1+\tau/t}} & (-t < \tau \leq 0), \\ 0 & (\tau < -t) \end{cases} \quad (1.3.19a)$$

(рис. 1.3.3). Із цих виразів видно, що кореляція між двома значеннями $\xi(t)$ і $\xi(t+\tau)$ вінерівського випадкового процесу завжди збільшується з часом: при будь-якому $\tau \geq 0$ коефіцієнт кореляції R стає як завгодно близьким до одиниці при достатньо великих t . На рис. 1.3.3 точка, що відповідає деякому фіксованому значенню τ , з ростом t переміщується до вершини кривої.

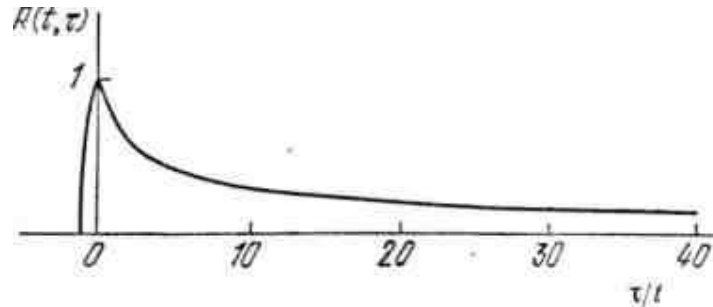


Рис. 1.3.3. Коефіцієнт кореляції $R(t, \tau)$ (1.3.19) вінерівського процесу в залежності від τ/t .

Відмітимо, що вираз (1.3.18б) відповідає (1.3.16), так як у випадку білого шуму для всіх t виконана умова $t \geq \tau_k = 0$ і згідно (1.3.17) $\tau_0 = 0$.

2. Спектр $\eta(t)$ — лоренцівський, $G_0(\omega) = \frac{Dh^2/\tau}{h^2 + \omega^2}$. При цьому

$$B_0(\tau) = \sigma_0^2 e^{-h|\tau|}, \quad \sigma_0^2 = Dh = \pi h G_0(0)$$

і згідно (1.3.13) і (1.3.17)

$$\sigma^2 = \frac{2D}{h} (ht - 1 + e^{-ht}), \quad \tau_0 = \frac{1}{h}, \quad (1.3.19a)$$

або

$$\frac{\sigma^2}{2D\tau_0} = x - 1 + e^{-x}, \quad x = \frac{t}{\tau_0}$$

(рис. 1.3.4, крива 1).

3. При гаусівському спектрі $G_0(\omega) = G_0(0) e^{-\omega^2/2h^2}$ маємо

$$B_0(\tau) = \sigma_0^2 e^{-h^2\tau^2/2}, \quad \sigma_0^2 = G_0(0) \sqrt{2\pi} h = Dh \sqrt{2/\pi},$$

$$\sigma^2 = \frac{2\sigma_0^2}{h^2} \left[\frac{ht}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi} \Phi\left(\frac{ht}{\sqrt{2}}\right) - 1 + e^{-h^2t^2/2} \right], \quad \tau_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{h}, \quad (1.3.19б)$$

або

$$\frac{\sigma^2}{2D\tau_0} = x \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{\pi}}\right) - 1 + e^{-x^2/\pi}, \quad x = \frac{t}{\tau_0}$$

(рис. 1.3.4, крива 2). Криві 1 і 2 на рис. 1.3.4 ілюструють перехід від квадратичного закону наростання дисперсії (1.3.15) до лінійного (1.3.16).

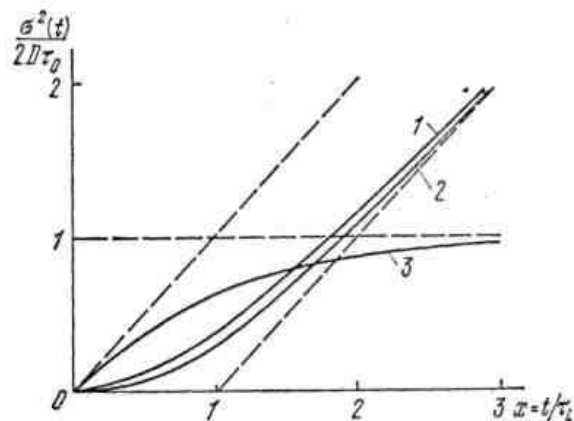


Рис. 1.3.4. Ріст дисперсії дифузного процесу (1) з часом. Криві 1-3 побудовані для різних спектральних густин процесу $\eta(t)$: 1 - поренцівський спектр, 2 - гаусівський спектр, 3 - спектр з відфільтрованими низькими частотами (1.3.20). Пунктирні криві - асимптоти.

Розглянуті особливості характерні для тих випадків, коли спектральна інтенсивність сили $\eta(t)$ на нульовій частоті $G_0(0)$ має деяке кінцеве значення. Якщо $G_0(0) = 0$ або $G_0(0) = \infty$ то зміни дисперсії σ^2 з часом мають інший вигляд.

4. $G_0(0) = 0$. Величина σ^2 прямує до кінцевої межі. Вважатимемо, наприклад, що $\eta(t)$ - це білий шум з відфільтрованими низькими частотами:

$$G_0(\omega) = \frac{D}{\pi} \frac{\omega^2}{\omega^2 + h^2} = \frac{D}{\pi} \left[1 - \frac{h^2}{h^2 + \omega^2} \right],$$

$$B_0(\tau) = 2D\delta(\tau) - Dhe^{-h|\tau|}. \quad (1.3.20)$$

Підставивши (1.3.20) в (1.3.13), отримаємо

$$\sigma^2 = \frac{2D}{h} (1 - e^{-ht}). \quad (1.3.21)$$

В цьому випадку лінійною є початкова ділянка кривої $\overline{\xi^2}(t) = \sigma^2(t)$ (рис.1.3.4, крива 3).

5. $G_0(0) = \infty$. Нехай, наприклад,

$$G_0(\omega) = \frac{D}{\pi} \left| \frac{\omega_0}{\omega} \right|^\nu \quad (0 \leq \nu < 1),$$

$$B_0(\tau) = \frac{D\omega_0}{\Gamma(\nu) \cos \pi\nu/2} \frac{1}{(\omega_0\tau)^{1-\nu}} *). \quad (1.3.22)$$

Підстановка (1.3.22) в (1.3.14) дає

$$\sigma^2 = \frac{2D}{\omega_0 \cos \pi\nu/2} (\omega_0 t)^{1+\nu}. \quad (1.3.23)$$

В цьому прикладі закон зміни дисперсії з часом може мінятись від лінійного ($\nu = 0$) до майже квадратичного ($\nu \approx 1$). Випадок $\nu = 0$ відповідає тому, що $\eta(t)$ - білий шум.

Згідно (1.3.23) залежність

$$\ln \sigma^2 = \text{const} + (1 + \nu) \ln t, \quad (1.3.24)$$

- лінійна, причому, нахил прямої (1.3.24) визначається лише ступенем ν в спектрі (1.3.22).

НЕ 1.4 ВЕКТОРНІ ВИПАДКОВІ ПОЛЯ

1.4.1. Векторні випадкові поля; випадкова поляризація, поляризаційна матриця.

Для векторного випадкового поля випадковими є не лише амплітуда і фаза, але і стан поляризації. Розглянемо один із способів задання статистики поляризації електромагнітної хвилі. Нехай плоска випадкова хвиля

розповсюджується в напрямку осі z . Позначимо через E_x і E_y дві дійсні ортогональні компоненти вектора $E(z,t)$ в площині $z = \text{const}$ ($E_z = 0$):

$$\begin{aligned} E_x(t) &= \rho_x(t) \cos(\omega t + \varphi_x(t)), \\ E_y(t) &= \rho_y(t) \cos(\omega t + \varphi_y(t)). \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

Виключаючи з (1.4.1) ωt , неважко отримати співвідношення

$$\left(\frac{E_x}{\rho_x(t)}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{\rho_y(t)}\right)^2 - \frac{2E_x E_y}{\rho_x(t)\rho_y(t)} \cos \vartheta(t) = \sin^2 \vartheta(t), \quad (1.4.1a)$$

де $\vartheta(t) = \varphi_y(t) - \varphi_x(t)$.

Рівняння (1.4.1a) є рівнянням еліпса. Таким чином, в загальному випадку електричний вектор E електромагнітного поля описує в просторі еліпс. Така хвиля називається еліптично поляризованою.

Еліпс може перетворюватись в коло або пряму лінію. Хвилі з круговою поляризацією відповідають $\rho_x = \rho_y$ і $\theta = (2m+1)\pi/2$, лінійно поляризованій хвилі $\theta = m\pi$ ($m = 0, \pm 1, \dots$). Напрямок обертання вектора E визначається знаком $\sin \theta$; при $\sin \theta > 0$ має місце правоциркулярна поляризація, а при $\sin \theta < 0$ - лівоциркулярна поляризація.

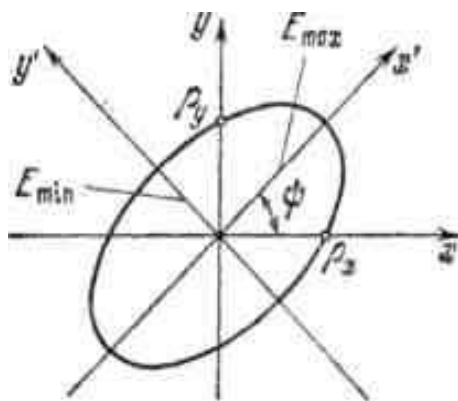


Рис.1.4.1. Еліпс поляризації.

Для випадкової хвилі ($\rho_j(t)$ і $\varphi_j(t)$ - випадкові функції) певний вид поляризації і її параметри зберігаються на протязі інтервалу часу, малого порівняно з часом кореляції хвилі ($\tau < \tau_k$). В протилежному випадку ($\tau \gg \tau_k$) параметри поляризації і її вид міняються випадковим чином.

Основними параметрами еліптично поляризованої хвилі є кут орієнтації ψ еліпса (кут нахилу великої піввісі до осі x (див. рис. 1.4.1):

$$\text{tg } \psi = \frac{2\rho_x \rho_y \cos(\varphi_x - \varphi_y)}{\rho_x^2 - \rho_y^2}, \quad (1.4.2)$$

і коефіцієнт еліптичності, рівний відношенню довжин малої піввісі до великої:

$$K = \pm \frac{E_{\min}}{E_{\max}} = \operatorname{tg} \chi, \quad (1.4.3a)$$

де χ — допоміжний кут,

$$\sin 2\chi = \frac{2\rho_x \rho_y \sin(\varphi_x - \varphi_y)}{\rho_x^2 + \rho_y^2}. \quad (1.4.3b)$$

Як уже говорилось, для випадкової хвилі величини ψ і χ флюктуують в часі. Очевидно, що у випадку просторово-модульованих хвиль ($\rho_j = \rho_j(r,t)$ і $\varphi_j = \varphi_j(r,t)$) параметри ψ і χ змінюються і в просторі. Формули (1.4.2) і (1.4.3) ми використаємо для аналізу деполяризації лазерного випромінювання. А тепер перейдемо до опису поляризаційних властивостей хвилі з допомогою величин, які мають розмірність інтенсивності, які можна безпосередньо виміряти в експерименті.

Припустимо, що ортогональні компоненти E_x і E_y хвилі представляють собою стаціонарні випадкові процеси. Хвилю, яку ми розглядаємо, можна охарактеризувати набором кореляційних функцій.

$$B_{ij}(\tau) = \langle E_i(t) E_j^*(t + \tau) \rangle$$

Тут E_j - вже комплексні функції; $i, j = x, y$. Утворимо з $B_{ij}(\tau)$ матрицю

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} B_{xx}(0) & B_{xy}(0) \\ B_{yx}(0) & B_{yy}(0) \end{pmatrix}. \quad (1.4.4)$$

Діагональні елементи матриці (1.4.4) це середні інтенсивності I_x і I_y ($I_j = B_{jj}(0)$) ортогональних компонент. Недіагональні елементи залежать як від амплітуд, так і від різниці фаз компонент хвилі. Матриця (1.4.4) визначається інтенсивністю хвилі і її поляризацією, тому її називають поляризаційною.

Утворимо з елементів поляризаційної матриці так звані параметри Стокса

$$\begin{aligned} S_0 &= B_{xx}(0) + B_{yy}(0), & S_1 &= B_{xx}(0) - B_{yy}(0), \\ S_2 &= B_{xy}(0) + B_{yx}(0), & S_3 &= -i(B_{xy}(0) - B_{yx}(0)). \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

Вони мають такий фізичний зміст. Параметр S_0 дорівнює інтенсивності еліптично поляризованої хвилі. Параметр S_1 - різниця інтенсивностей ортогональних компонент, він характеризує переважаючу горизонтальну ($S_1 > 0$) або вертикальну ($S_1 < 0$) поляризацію хвилі. Решта параметрів S_2 в S_3 залежать від кореляції між ортогональними компонентами. Можна показати, що S_2 дорівнює різниці інтенсивностей хвиль в системі координат, повернутій відносно початкової на $\pi/4$, а параметр S_3 - різниця інтенсивностей хвиль кругової поляризації з протилежним напрямком обертання. Розглянутий фізичний зміст параметрів Стокса показує також метод їх вимірювання.

1.4.2. Повністю і частково поляризовані хвилі

З допомогою параметрів Стокса (1.4.5) поляризаційна матриця (1.4.4) записується у вигляді

$$\hat{J} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S_0 + S_1 & S_2 + iS_3 \\ S_2 - iS_3 & S_0 - S_1 \end{pmatrix}. \quad (1.4.6)$$

Інваріантами матриць (1.4.4) і (1.4.6) є визначник

$$\det \hat{J} = \{B_{xx}B_{yy} - |B_{xy}|^2\} = \frac{1}{4} \{S_0^2 - S_1^2 - S_2^2 - S_3^2\} \geq 0 \quad (1.4.7)$$

і слід матриць

$$\text{Sp } \hat{J} = B_{xx} + B_{yy} = S_0 > 0. \quad (1.4.8)$$

У випадку повністю поляризованої хвилі коефіцієнт взаємної кореляції

$$\gamma_{xy} = B_{xy}(0) / \sqrt{B_{xx}(0) B_{yy}(0)} = e^{i\psi}, \quad (1.4.9)$$

так що $\det \hat{J} = 0$. Для неполяризованої хвилі всі напрямки вектора E в площині фазового фронту рівномірні (коефіцієнт взаємної кореляції $\gamma_{xy} = 0$, $B_{xx} = B_{yy} = I$). Поляризаційна матриця при цьому має вигляд

$$\hat{J} = I \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.4.10)$$

В проміжному випадку частково поляризованої хвилі $0 < |\gamma_{xy}| < 1$.

Частково поляризовану хвилю можна розкласти на повністю поляризовану і повністю неполяризовану хвилі, тобто матрицю (1.4.4) можна записати у вигляді

$$\hat{J} = \hat{J}_{\text{пол}} + \hat{J}_{\text{непол}}, \quad (1.4.11)$$

тобто, суми матриць повністю поляризованої і неполяризованої хвиль, відповідно:

$$\hat{J}_{\text{пол}} = \begin{pmatrix} B & D \\ D^* & C \end{pmatrix}, \quad \hat{J}_{\text{непол}} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

З порівняння (1.4.11) з (1.4.4) випливає, що.

$$B_{xx} = A + B, \quad B_{yy} = A + C, \quad B_{xy} = D, \quad B_{yx} = D^*.$$

Крім того, $\det \hat{J}_{\text{пол}} = 0$; т. е.

$$BC - DD^* = A^2 - (B_{xx} + B_{yy})A + \det \hat{J} = 0. \quad (1.4.12)$$

Рішення рівняння (1.4.12) дає

$$A = \frac{1}{2} \{ B_{xx} + B_{yy} \mp \sqrt{(B_{xx} + B_{yy})^2 - 4 \det \hat{J}} \}.$$

Значення A з знаком плюс перед коренем дає від'ємні значення величин B і C , тому його потрібно відкинути. Сума величин $B + C$ представляє собою інтенсивність поляризованої хвилі:

$$I_{\text{пол}} = B + C = \{(B_{xx} + B_{yy})^2 - 4 \det \hat{J}\}^{1/2}.$$

1.4.3. Ступінь поляризації.

Ця величина визначається як відношення інтенсивності $I_{\text{пол}}$ до повної інтенсивності хвилі $I_0 = B_{xx} + B_{yy}$ і позначається через P :

$$P = \frac{I_{\text{пол}}}{I_0} = \left\{ 1 - \frac{4 \det \hat{J}}{(\text{Sp } \hat{J})^2} \right\}^{1/2}. \quad (1.4.13)$$

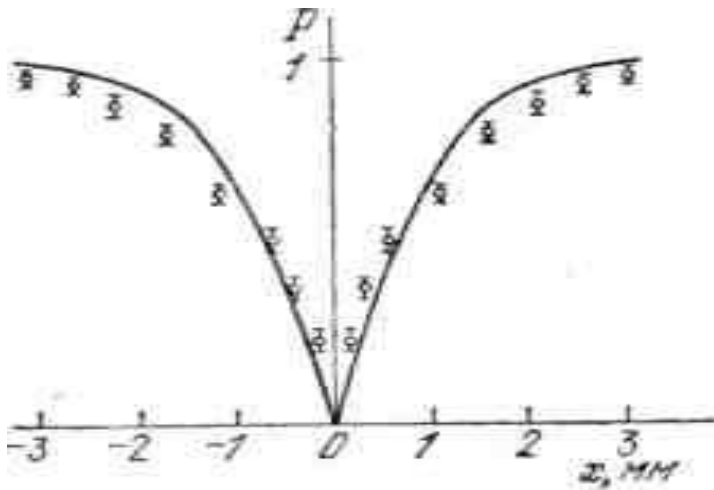


Рис. 1.4.2. Ступінь поляризації в лазерному пучку з випадковою фазовою модуляцією, що пройшов через канал з оптично активним елементом.
 x — відстань від центра пучка

Легко переконатись, що для повністю поляризованої хвилі $P = 1$, для неполяризованої хвилі $P = 0$. Частково поляризована хвиля має значення $0 < P < 1$.

Співвідношення (1.4.7) і (1.4.8) дозволяють представити ступінь поляризації через параметри Стокса:

$$P = [S_1^2 + S_2^2 + S_3^2]^{1/2} S_0^{-1}. \quad (1.4.14)$$

У відповідності з фізичним змістом параметрів S_j , величину P можна записати як

$$P = \sqrt{P_l^2 + P_{кр}^2}, \quad P_l = (S_1^2 + S_2^2)^{1/2} S_0^{-1}, \\ P_{кр} = S_3 / S_0. \quad (1.8.57) \quad (1.4.15)$$

Де P_l і $P_{кр}$ — відповідно ступені лінійної і кругової поляризації.

Покажемо тепер, що коефіцієнт взаємної кореляції γ_{xy} не може перевищувати ступінь поляризації P . Скориставшись (1.4.13), (1.4.7) і (1.4.8), отримаємо

$$1 - P^2 = \left(\frac{2 \sqrt{B_{xx} B_{yy}}}{B_{xx} + B_{yy}} \right)^2 [1 - |\gamma_{xy}|^2]. \quad (1.4.16)$$

Оскільки, $(B_{xx}^{1/2} - B_{yy}^{1/2})^2 > 0$, то з (1.4.16) слідує

$$P \geq |\gamma_{xy}|. \quad (1.4.17)$$

Величина P (1.4.13) виражається через інваріанти $\det J$ та $\text{Sp } J$ і, тому, не залежить від вибору осей x і y . Коефіцієнт γ_{xy} залежить від вибору осей координат, він має максимальне значення при $B_{xx} = B_{yy}$. Неважко показати, що

завжди можна вибрати нові координати x' і y' , повернуті на кут θ відносно осей x і y , таким чином, щоб

$$B_{x'x'} = B_{y'y'}. \quad (1.4.18)$$

В новій системі координат компоненти електричного поля:

$$E_{x'} = E_x \cos \theta + E_y \sin \theta, \quad E_{y'} = -E_x \sin \theta + E_y \cos \theta.$$

Обчислимо величини $B_{jj'} = \langle E_j, E_{j'}^* \rangle$ і будемо вимагати виконання умови (1.4.18).

При цьому знайдемо, що кут θ визначається виразом

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B_{yy} - B_{xx}}{B_{xy} + B_{yx}}.$$

Оскільки $B_{yx} = B_{xy}^*$, значення θ дійсне. В системі координат x' і y' ступінь поляризації P хвилі рівний коефіцієнту взаємної кореляції $|\gamma_{x'y'}|$. Ця обставина використовується для вимірювання P .

Проведені вище міркування обмежені випадком плоскої випадкової хвилі. Для випадково модульованих світлових пучків ступінь поляризації може бути різна для різних точок пучка (рис. 1.24).

НЕ 1.5. КЛАСИФІКАЦІЯ ВИПАДКОВИХ СЕРЕДОВИЩ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ У ОПТИЧНОМУ ЗВ'ЯЗКУ

Виходячи з механізму взаємодії з оптичним випромінюванням випадкові об'єкти можна розділити на три великі групи: неперервні випадкові неоднорідні середовища, шорсткі поверхні та дисперсні середовища. Такі об'єкти модулюють амплітуду, фазу та поляризацію хвилі, що взаємодіє з ними і в результаті утворюється випадково-неоднорідне поле.

1.5.1. Неперервні випадкові неоднорідні середовища

Під неперервним випадковим середовищем будемо розуміти середовище, діелектрична проникність якого $\varepsilon(\vec{r}, t)$ є неперервною функцією простору та

часу. Прикладами неперервних випадкових середовищ є турбулентності в тропосфері та іоносфері планет, турбулентності в рідинах, прозорі біологічні середовища, свілі в оптичних деталях та інше.

У випадку слабких флуктуацій діелектричної проникності можна зробити ряд наближень. Розглянемо випадкове середовище одиничного об'єму dV з діелектричною проникністю $\varepsilon(\vec{r}, t)$, що є випадковою функцією часу та координат простору. Її можна записати як суму середнього значення $\langle \varepsilon \rangle$ та флуктуаційної частини:

$$\varepsilon(\vec{r}, t) = \langle \varepsilon(\vec{r}, t) \rangle [1 + \varepsilon_1(\vec{r}, t)], \quad (1.5.1)$$

де ε_1 - флуктуації з нульовим середнім значенням $\langle \varepsilon_1 \rangle = 0$.

Показник заломлення можна записати як

$$n(\vec{r}, t) = \sqrt{\varepsilon(\vec{r}, t) / \varepsilon_0} = \langle n(\vec{r}, t) \rangle [1 + n_1(\vec{r}, t)], \quad (1.5.2)$$

де ε_0 - діелектрична проникність вакууму, а n_1 - флуктуації показника заломлення. Для малих флуктуацій приблизно маємо:

$$\varepsilon_1(\vec{r}, t) \approx 2n_1(\vec{r}, t). \quad (1.5.3)$$

Будемо вважати, що діелектрична проникність незмінна впродовж часу спостереження, так що її можна вважати незалежною від часу. Окрім того, нехай середня діелектрична проникність постійна і збігається з діелектричною проникністю вакууму:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\vec{r}) &= \varepsilon_0 [1 + \varepsilon_1(\vec{r})], \\ n(\vec{r}) &= 1 + n_1(\vec{r}). \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

Для статистичного ізотропного середовища, кореляційна функція $\langle \varepsilon_1(\vec{r}_1') \varepsilon_1(\vec{r}_2') \rangle$ залежить тільки від абсолютного значення відстані $r = |\vec{r}| = |\vec{r}_1' - \vec{r}_2'|$:

$$\langle \varepsilon_1(\vec{r}_1') \varepsilon_1(\vec{r}_2') \rangle = \Psi_\varepsilon(r) = 4\Psi_n(r), \quad \langle n_1(\vec{r}_1') n_1(\vec{r}_2') \rangle = \Psi_n(r). \quad (1.5.5)$$

Згідно з теоремою Вінера-Хінчина, Фур'є-перетворення від кореляційної

функції $\Psi_n(\vec{r})$ є спектральною густиною випадкового середовища $S_n(\vec{k})$:

$$S_n(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\infty} \Psi_n(\vec{r}) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) dV .$$

(1.5.6)

Для опису неперервного випадкового неоднорідного середовища запропоновано кілька моделей представлення спектральної густини $S_n(\vec{k})$, таких як модель Букера-Гордона, гаусівська модель та модель спектру Колмогорова.

Модель Букера-Гордона базується на експоненційній кореляційній функції середовища:

$$\Psi_n(r) = \langle n_1^2 \rangle \exp(-r/l) . \quad (1.5.7)$$

Згідно з цією моделлю випадкове середовище характеризується дисперсією $\langle n_1^2 \rangle$, та радіусом кореляції l , на якому значення кореляційної функції зменшується в e разів у порівнянні з її значенням для $r = 0$. Так радіус кореляції вказує на інтервал, у межах якого властивості середовища скорельовані. Радіус кореляції називають також масштабом турбулентності, оскільки він характеризує певний середній розмір турбулентних утворень. Проте експоненціальний характер кореляційної функції зумовлений більше простотою математичних викладок, ніж фізичними властивостями середовища.

На практиці, для опису випадкового середовища, буває зручною гаусівська апроксимація кореляційної функції :

$$\Psi_n(r) = \langle n_1^2 \rangle \exp(-r^2/l^2) , \quad (1.5.8)$$

з якої легко визначити спектральну густину:

$$S_n(k) = \langle n_1^2 \rangle \left(\frac{l}{2\sqrt{\pi}} \right)^3 \exp\left[-\frac{(kl)^2}{4} \right] . \quad (1.5.9)$$

Але ці дві моделі не можуть повністю пояснити особливості явища розсіювання оптичного випромінювання в турбулентній атмосфері чи океані.

А.М. Колмогоров розробив адекватну теорію розвинутої турбулентності. Згідно з Колмогоровим турбулентні вихорі характеризуються зовнішнім L_0 та

внутрішнім l_0 масштабами турбулентності. Поділимо всю область зміни масштабу турбулентних вихорів на три інтервали:

а) енергетичний інтервал (розмір вихора більший L_0). Турбулентність у зовнішньому масштабі анізотропна (див. рис. 1.5.1). Спектр у ньому залежить від умов виникнення турбулентності. Тому немає загальної формули, що описує турбулентні вихорі в цьому інтервалі.

б) інерційний, або Колмогорівський інтервал (розмір вихора більший за l_0 і менший за L_0). У цьому інтервалі кінетична енергія вихорів переважає енергію дисипації через в'язкість і турбулентність має переважаючий ізотропний характер. Спектр турбулентності пропорційний $K^{-11/3}$, де $K = 2\pi/l$ (вихрове хвильове число).

в) в'язкий інтервал (l_0 більше за розмір вихора). У цьому інтервалі дисипація енергії через в'язкість переважає кінетичну енергію, тому спектр дуже вузький.

Для зручності використаємо структурну функцію флуктуацій середовища, $D_\varepsilon(r) = \langle |\tilde{\varepsilon}(\vec{r}_1) - \tilde{\varepsilon}(\vec{r}_2)|^2 \rangle$, яка для досить великих r описується законом двох третіх Колмогорова-Обухова:

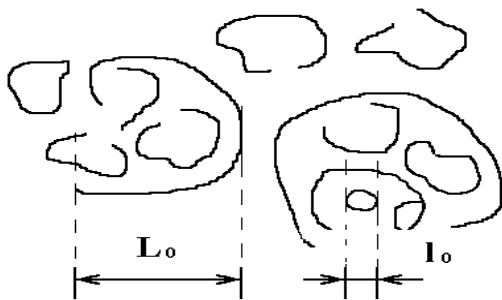


Рис. 1.5.1.

Турбулентні вихори; показані зовнішній та внутрішній масштаби.

$$D_\varepsilon(r) \approx C_\varepsilon^2 r^{2/3}, \quad r \gg l_0, \quad (1.5.10)$$

де C_ε - структурна константа. Для малих r структурна функція зростає за квадратичним законом:

$$D_\varepsilon(r) \approx C_\varepsilon^2 l_0^{-4/3} r^2, \quad r \ll l_0. \quad (1.5.11)$$

Внутрішній масштаб l_0 входить у формули (1.5.10) та (1.5.11) так, що значення обох виразів однакові для

$r = l_0$. Відповідні графіки зображені пунктирними лініями на рис. 1.5.2, а суцільною лінією подано реальний хід структурної функції $D_\varepsilon(r)$. Отже структурну функцію $D_\varepsilon(r)$ можна апроксимувати на окремих інтервалах r такими функціями:

$$D(r) = \begin{cases} C_\varepsilon^2 l_0^{-4/3} r^2 = 2\sigma_\varepsilon^2 r^2 l_0^{-4/3} L_0^{-2/3}, & r \ll l_0, \\ C_\varepsilon^2 r^{2/3} = 2\sigma_\varepsilon^2 (r/L_0)^{2/3}, & l_0 \ll r \ll L_0, \\ C_\varepsilon^2 L_0^{2/3} = 2\sigma_\varepsilon^2, & L_0 \ll r. \end{cases} \quad (1.5.12)$$

Спектральна густина для будь-яких r буде:

$$S_n(k) = 0.033 C_\varepsilon^2 (k^2 + 1/L_0^2)^{-11/6} e^{-k^2/k_m^2}, \quad (1.5.13)$$

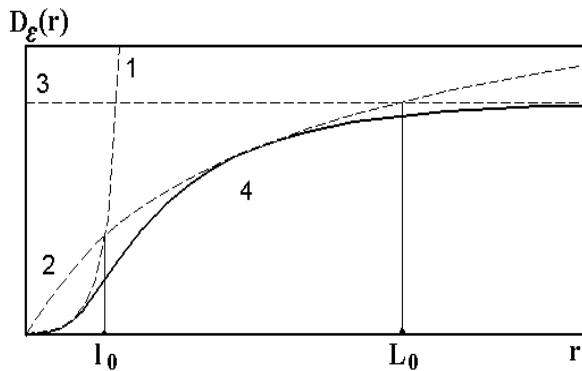


Рис. 1.5.2. Типова поведінка: $D_\varepsilon(r)$ (крива 4); $C_\varepsilon^2 l_0^{-4/3} \rho^2$ (1); $C_\varepsilon^2 \rho^{2/3}$ (2); $C_\varepsilon^2 L_0^{2/3}$ (3).

де $k_m = 5.92/l_0$. Це

співвідношення ще називають спектром Кармана.

Звичайно, поведінка флуктуацій ε в реальному турбулентному середовищі більш складна, ніж наведені апроксимації. Проте співвідношення (1.5.13) досить добре описує просторовий спектр турбулентних флуктуацій в оптиці та радіофізиці.

Наведені вище співвідношення, ми розглянемо пізніше при вирішенні задачі кореляційно-оптичної діагностики турбулентності.

Якщо товщина турбулентного шару досить мала, ми можемо розглянути нескінченно тонкий екран. Падаюча хвиля модулюється таким екраном у залежності від його комплексної функції пропускання:

$$f(\vec{\rho}) = A(\vec{\rho}) \exp[i\Phi(\vec{\rho})], \quad (1.5.14)$$

де $A(\vec{\rho})$ - амплітудна функція пропускання, аргумент експоненційного фактора $\Phi(\vec{\rho})$ визначає фазову модуляцію хвилі.

Коли пропускання екрана має вигляд $f(\vec{\rho}) = \exp[i\Phi(\vec{\rho})]$, де $\Phi(\vec{\rho})$ - випадкова функція, такий екран називають випадковим фазовим екраном (ВФЕ). У площині ВФЕ модулюється тільки фаза хвилі, а за екраном присутня як фазова, так і амплітудна модуляції. Модель ВФЕ часто використовується в

оптиці та радіофізиці. Одним із прикладів ВФЕ є шорстка поверхня з однорідним пропусканням або відбиванням. Проходження плоскої хвилі через ВФЕ ми розглянемо пізніше.

1.5.2. Шорсткі поверхні

Розглянемо параметри, якими характеризується шорстка поверхня.

Шорстку поверхню можна зобразити у вигляді двомірного розподілу висоти $z = \zeta(x, y)$. Цей рельєф є найповнішою характеристикою поверхні. З нього можна визначити всі статистичні моменти поверхні, розподіли та спектри. Експериментально побудувати функцію $z = \zeta(x, y)$ можна з комбінацій профілів, отриманих механічними чи оптичними профілометрами. Найчастіше, для кількісної оцінки шорсткої поверхні, використовують наступні параметри: середньоквадратичне та середньоарифметичне відхилення профілю від базової лінії, функцію розподілу висот нерівностей, коефіцієнти асиметрії та ексцесу, спектр потужності, автокореляційну функцію та радіус кореляції.

Середньоквадратичне відхилення профілю від базової лінії

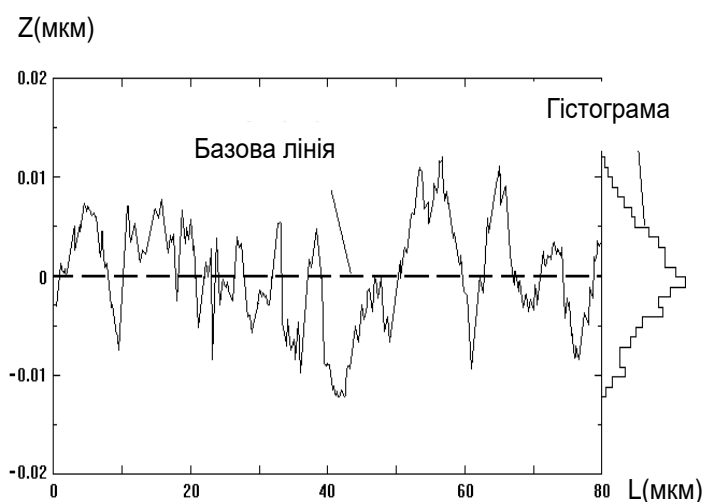


Рис. 1.5.3. Схематичне представлення шорсткої поверхні і відповідна

Середньоквадратичне відхилення профілю від базової лінії σ_h є найбільш важливим та найуживанішим статистичним параметром шорсткої поверхні. На рис. 1.5.3 показано поперечний переріз шорсткої поверхні. Цей профіль поміряно вздовж базової лінії L , яка

проходить посередині розподілу висот, тобто суми площ під кривою профілю і

під базовою лінією рівні. Математично базова лінія визначається:

$$\sum_{i=1}^N z_i = 0. \quad (1.5.15)$$

Тепер розглянемо N дискретних, рівновіддалених точок вздовж базової лінії L . Середньоквадратичне відхилення профілю від базової лінії σ_h визначимо як:

$$\sigma_h = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N z_i^2}. \quad (1.5.16)$$

Середньоарифметичне відхилення профілю від базової лінії

Для характеристики оптичних поверхонь досить часто використовують середньоарифметичне відхилення профілю від базової лінії R_a :

$$R_a = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |z_i|. \quad (1.5.17)$$

Деколи корисний параметр R_z . Він розраховується по усередненій різниці між п'ятьма найвищими і п'ятьма найнижчими точками на базовій довжині.

Функція розподілу висот, асиметрія та ексцес

Найбільш повну інформацію про поверхню можна отримати з аналізу її функції розподілу висот. Функція розподілу висот показує долю висот, що лежать у певному інтервалі. Дискретна функція розподілу називається гістограмою. Приклад гістограми наведений на рис. 1.5.3.

Коефіцієнт асиметрії є мірою асиметрії профілю відносно базової лінії. Наприклад, якщо на практично гладкій поверхні є порівняно глибокі ями, то функція розподілу не буде симетричною і коефіцієнт асиметрії буде значним. Коефіцієнт ексцесу характеризує переважну концентрацію висот біля базової лінії, чи навпаки.

Асиметрію розподілу, приклад якого наведено на рис. 1.5.4, можна математично визначити як:

$$K_S = \frac{1}{\sigma_h^3} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i^3. \quad (1.5.18)$$

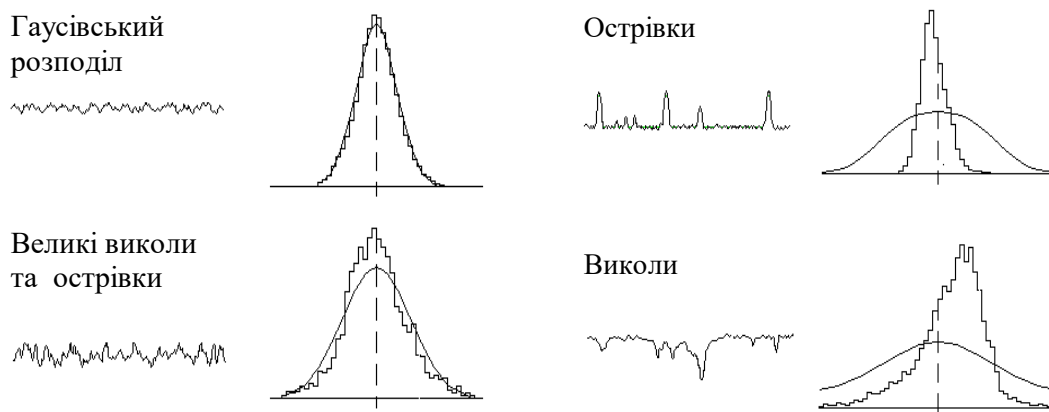


Рис. 1.5.4. Функція розподілу по висотах та еквівалентний гаусівський розподіл для різних поверхонь.

Знак коефіцієнта асиметрії визначає більшу (плюс) чи меншу (мінус) частину висот вище базової лінії.

Коефіцієнт ексцесу визначається як:

$$K_K = \frac{1}{\sigma_h^2} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i^4. \quad (1.5.19)$$

Профілі, зі значною кількістю ям та частинок на поверхні мають пропорційно більшу частку висот на хвостах функції розподілу (рис. 1.5.4, нижній лівий). Це дасть коефіцієнт ексцесу більше 3. Якщо профілі мають більшу частку висот коло базової лінії, то коефіцієнт ексцесу менший 3. Для гаусівського розподілу коефіцієнт ексцесу дорівнює 3.

Автокореляційна функція та радіус кореляції

Автокореляційна функція профілю поверхні на обмеженій довжині, отримана з дискретного набору даних, записується як:

$$\Psi(l) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-l} z_i \cdot z_{i+l}, \quad (1.5.20) \quad l = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Приклад автокореляційної функції наведено на рис. 1.5.5.

Фур'є - перетворення від автокореляційної функції дає спектральну густину профілю поверхні, який використовується для розрахунку кутового розсіювання шорсткою поверхнею.

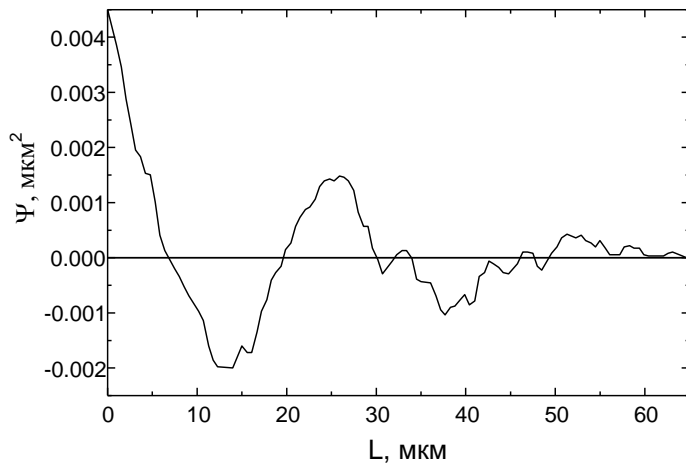


Рис. 1.5.5. Автокореляційна функція профілю поверхні

Радіус кореляції шорсткої поверхні оцінюється за автокореляційною функцією на рівні $1/e$ (0.368) її максимального значення. І хоч радіус кореляції можна отримати з коректних експериментальних даних, він може не відповідати

істинному радіусу кореляції поверхні. Це можливе, коли не достатня довжина профілю. У цьому випадку говорять про обмежену область даних.

Рельєф традиційно полірованої поверхні ізотропний та випадковий. Ізотропність означає, що профілі поверхні в різних напрямках подібні. Випадковість шорсткої поверхні означає, що її профіль еквівалентний суперпозиції ряду періодичних структур із випадковою амплітудою, періодом та орієнтацією.

Спектр потужності профілю поверхні

Спектр потужності є частотним спектром шорсткої поверхні, поданим в обернених довжинах періоду. Він використовується при розрахунку кутового розсіяння шорсткою поверхнею. Фур'є - перетворення спектра потужності дає автокореляційну функцію поверхні. Однак профіль поверхні отримати неможливо, оскільки втрачено фазові співвідношення між складовими профілю.

1.5.3. Дисперсні середовища

Природні об'єкти, такі як дощ, дим, град, аерозолі, червоні кров'яні тільця та інші, містять світлорозсіюючі частинки з випадковим розподілом по розмірах. Розмір сферичної частинки задається її діаметром. Якщо форма частинки

відмінна від сферичної, то її діаметр може бути визначений як відстань між точками перетину поверхні частинки лінією, що проходить через центр гравітації частинки. Звичайно, що таких ліній можна провести безліч. Розміром несферичної частинки буде результат статистичного усереднення всіх вихідних діаметрів частинки. Числове значення розміру буде залежати від способу усереднення діаметрів. Розрізняють:

геометричне середнє

$$\bar{a}_g = \left(\prod_i a_i \right)^{1/n}, \quad (1.5.21)$$

арифметичне середнє

$$\bar{a}_a = \frac{1}{n} \sum_i a_i \quad (1.5.22)$$

та гармонічне середнє

$$\bar{a}_h = \left(\frac{1}{n} \sum_i \frac{1}{a_i} \right)^{-1}, \quad (1.5.23)$$

де n - кількість діаметрів.

Реальні частинки в дисперсній системі відрізняються розмірами, тому важливо знати їх розподіл по розмірах. Нехай $n(a)da$ кількість частинок із розміром, що лежить у діапазоні від a до $a + da$. Сумарна кількість частинок в одиниці об'єму (концентрація) буде визначатися:

$$c = \int_0^{\infty} n(a)da. \quad (1.5.24)$$

Ми можемо отримати також густину частинок із розміром, що лежить у діапазоні від a до $a + da$:

$$w(a) = \frac{n(a)}{da}, \quad \int_0^{\infty} w(a)da = 1. \quad (1.5.25)$$

Аналогічно можна отримати вираз для середнього розміру частинок $\langle a \rangle$ та дисперсії розмірів σ^2 :

$$\langle a \rangle = \int_0^{\infty} a w(a) da, \quad \sigma^2 = \int_0^{\infty} (a - \langle a \rangle)^2 w(a) da. \quad (1.5.26)$$

НЕ 2.1 ДИФРАКЦІЯ ХВИЛЬОВИХ ПОЛІВ

2.1.1. Основні типи статистичних хвильових задач

Серед різноманітних випадкових полів, з якими має справу статистична радіофізика, хвильові поля займають центральне місце. Ми теж зосередимо увагу на хвильових (в першу чергу електромагнітних) полях і обмежимося при цьому лише *лінійними і неквантовими* задачами. Досить широкий клас таких задач можна сформулювати наступним чином.

Нехай розповсюдження хвиль тієї чи іншої фізичної природи (електромагнітних, пружних, поверхневих і т. д.) описується лінійним просторово - часовим оператором L (звичайно диференціальним, рідше - інтегро-диференціальним), так що хвильове поле задовольняє рівняння

$$\hat{L}u = q, \quad (2.1.1)$$

де функція $q(t, r)$ описує джерела хвиль. Поля u і q можуть бути і багатокомпонентними (наприклад, векторними), і тоді L - операторна матриця (наприклад, тензор). В багатьох задачах просторова область, в якій розглядається поле виділена деякою поверхнею S_0 , не містить джерел ($q = 0$) а задано *первинне* хвильове поле u_0 , що приходить в цю область ззовні. Тоді рівняння (2.1.1) однорідне:

$$\hat{L}u = 0, \quad (2.1.2)$$

але на S_0 задані значення первинного поля (або його похідних), наприклад:

$$v \equiv u_0(t, \mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in S_0}. \quad (2.1.3)$$

В цьому випадку говорять, що на S_0 задані «віртуальні» джерела поля. Тут ми шукаємо розсіяне або дифракційне поле, тобто це задачі теорії дифракції.

При наявності всередині поверхні S_0 границь розділу між різними середовищами або тілами (поверхні розділу S) поле u повинно задовольняти ще певним *граничним умовам*. Якщо поверхня S_0 не замкнута або ж охоплює весь простір, так що хвилі від реальних джерел, що розміщені в кінцевій області, можуть

прямувати в нескінченість, то повинні також виконуватись відомі *умови випромінювання* (на достатньо великих відстанях від джерел повинні існувати лише хвилі, що віддаляються).

В задачах прикладного характеру часто представляє інтерес вимірювання випроміненого або дифракційного поля - для отримання інформації про джерела поля, про розсіюючі тіла або про середовище, в якому розповсюджуються хвилі. Тоді в описану схему може бути включено ще *приймач* випромінювання¹), а також різного роду завади як зовнішнього (по відношенню до приймача), так і внутрішнього походження. Відгук приймача w буде залежати і від поля, що вимірюється u , і від завад ξ :

$$w = \hat{w}(u, \xi), \quad (2.1.4)$$

де w — в загальному випадку нелінійний оператор.

Все, що було сказано про звичайні стохастичні диференціальні рівняння, тепер, коли ми розглядаємо випадкові поля, переноситься на рівняння в частинних похідних. Статистичні хвильові задачі ставляться *тими ж* рівняннями і умовами, що і динамічні, але тепер це будуть *стохастичні* рівняння і умови, тобто рівняння і умови для окремих реалізацій випадкового поля u . Іншими словами, фігуруючі в задачі параметри, функції і оператори тепер випадкові (всі або їх частина) і, відповідно, задані своїми розподілами ймовірностей. Тому, набагато більше різноманіття можливостей для просторово-часових полів (порівняно з процесами у часі) в рівній мірі стосується як динамічних, так і статистичних задач.

У відповідності з описаною постановкою динамічної хвильової задачі, випадковими можуть бути:

- 1) *джерела поля* (реальні або віртуальні, так що можна розрізнити задану «статистику джерел» q і «статистику первинного поля» v);
- 2) *властивості середовища* (задана «статистика середовища», а значить, оператора L);
- 3) *форма і положення границь розділу S* (задана «статистика границь»);
- 4) *умови прийому і реєстрації хвиль* (задані «статистика приймача» — оператора w і «статистика завад» ξ).

До цих чотирьох основних статистичних схем, які ми назвемо первинними, фактично зводиться постановка переважної більшості задач статистичної хвильової теорії. Безумовно, можливі задачі і змішаного типу, наприклад про теплове випромінювання у випадково-неоднорідному середовищі, але поки що таких задач розглянуто небагато.

Якщо б ми мали *точне рішення динамічної задачі*, наприклад деяким інтегральним представленням поля, яке ми шукаємо u у вигляді

$$u = \hat{G}q, \quad (2.1.5)$$

де $\hat{G}q = \hat{L}^{-1}q$ - рішення неоднорідного рівняння (2.1.1), записане через функцію Гріна, що враховує всі граничні і інші умови, то обчислення моментів поля звелось би до усереднення добутків виду $u(1)u(2)\dots u(n)$ по спільному розподілу всіх фігуруючих в задачі випадкових параметрів і функцій, що характеризують статистику джерел, середовища, границь розділу і т. д. Але реальних ситуаціях цей ідеал здійснюється не часто, наприклад, в задачах про збудження полів випадковими джерелами, які розглядаються в цьому розділі. Частіше всього ми не вміємо знаходити точне рішення при будь-яких детермінованих функціях, тим самим, при довільних реалізаціях всіх випадкових величин і функцій, в силу чого потрібно уже на етапі рішення динамічної задачі звертатись до різного роду *наближеним* методам. Ці різноманітні методи і прийоми приурочені до конкретних особливостей задачі.

Флуктуації випадкових параметрів і функцій можуть бути (в певних характерних масштабах) великими і малими, плавними, повільними і, навпаки, різкими, швидкими; кореляція може бути сильною, «далекою», або ж слабкою, «короткою», і т. п. Ці відмінності вимагають використання різних наближених підходів і приводять до багаточисельних вторинних статистичних схем, пов'язаних уже з тими чи іншими приближеними методами рішення.

Потрібно відмітити, що в багатьох випадках, особливо коли нас цікавлять лише моменти поля, етап пошуку динамічного рішення (для подальшого обчислення моментів) опускається і мова іде про виведення

рівнянь і умов для *самих моментів* (виходячи з рівнянь і умов для поля u). Але і в такій постановці практично не можна обійтись без максимально можливого спрощення вихідних рівнянь для, наперед враховуючого особливості флуктуації і характер детермінованих функцій.

Виділені вище чотири первинні статистичні схеми відображають лише ті параметри і функції, які часто зустрічаються, які входять в умови задачі, на детерміновані і випадкові. Зупинимось коротко на цих схемах і вкажемо деякі приклади задач, що до них відносяться.

В схемі 1), якщо присутні реальні джерела, ми маємо справу з *неоднорідним* рівнянням (8.1), в якому статистично задана *права частина* q . *Однорідні* граничні умови детерміновані. Задач такого типу багато і в радіофізиці, і в оптиці, і в акустиці. Вони охоплюють, зокрема, статистичну теорію антен і теорію теплових флуктуацій в розподілених системах.

З віртуальними випадковими джерелами ми стикаємось, очевидно, у всіх задачах по дифракції випадкових (інакше—частково когерентних) полів, коли однорідне рівняння (8.2) і всі необхідні умови детерміновані, за винятком випадкового первинного поля u_0 . Такі задачі типові перш за все для оптики (формування оптичного і голографічного зображення, дія інтерферометрів і ін.), але з ними приходиться мати справу і в радіодіапазоні (зокрема, в радіоастрономії), і при дифракції рентгенівських хвиль.

Задачі типу 1) ми розглянемо в даному розділі.

Схема 2) охоплює проблему розповсюдження і дифракції хвиль у *випадково-неоднорідних* середовищах (*випадковий* оператор L). Ці питання представляють великий інтерес для радіозв'язку, лазерного зв'язку, гідроакустики, радіоастрономії, діагностики плазми.

До схеми 3) відносяться хвильові задачі при наявності тіл, які мають *випадкову форму або займають випадкове положення*. Мова може йти, наприклад, про граничні поверхні з великою кількістю випадкових нерівностей (так звані *шорсткі або статистично нерівні* поверхні).

В задачах про тіла, які займають випадкове положення в просторі, мова може йти про розсіяння як на одному або небагатьох тілах, так і на дуже великій сукупності дискретних крапель (осади, туман, аерозолі і т. д.). Остання досить загальна задача вимагає обліку багатократного розсіяння. Ми обмежимося її розглядом лише в наближенні однократного розсіяння (§ 31).

Схема 4) охоплює багаточисельні задачі прийому і обробки інформації про хвильові поля при наявності завад. Якщо статистичні властивості поля u , завад ξ і оператора w , які описують приймач, відомі, то, у відповідності з (2.1.4), в принципі можна розрахувати статистичні характеристики відгуку приймача w .

Однак більш важливим і разом з тим більш складним є інше питання— про вибір оптимального (в певному розумінні) способу прийому при наявності завад, тобто питання про знаходження *оптимального* оператора w . Прикладом задачі такого типу може служити проблема відновлення форми об'єкта по його зображенню, яка представляє першочерговий інтерес для оптики, радіоастрономії, радіолокації, гідроакустики і т. п. Ця проблема оптимального прийому випадкових полів вимагає залучення ідей і методів теорії інформації - можливо, навіть в більшій мірі, ніж питання обробки випадкових процесів. Але ми не будемо поглиблюватись в ці проблеми, оскільки вони ближче по своєму характеру до «радіоматематики», а не до радіофізики.

2.1.2. Проходження плоскої хвилі через нескінченний фазовий екран

Ця задача відноситься до другого типу дифракційних задач.

Під випадковим фазовим екраном розуміють екран, функція пропускання якого задається співвідношенням $f(\vec{\rho}) = \exp[i\Phi(\vec{\rho})]$, де Φ - дійсна випадкова функція. У площині такого екрана модулюється тільки фаза випадкової хвилі, а амплітуда (а отже, й інтенсивність) залишається незмінною. У півплощині $z > 0$, фазовий екран модулює як амплітуду, так і фазу хвилі, що пройшла.

При падінні плоскої хвилі $u_p = e^{ikz}$ на нескінченний ВФЕ в площині екрана

$z = 0$ утворюється граничне поле:

$$v(\vec{\rho}) = \exp[i\Phi(\vec{\rho})] u_p \Big|_{z=0} = \exp[i\Phi(\vec{\rho})]. \quad (2.1.6)$$

Розглянемо співвідношення між статистичними моментами поля, що пройшло крізь екран, та кореляційною функцією фази екрана:

$$\Psi_{\varphi 0}(\vec{\rho}) = \langle \tilde{\Phi}(\vec{\rho}_1) \tilde{\Phi}(\vec{\rho}_2) \rangle = \sigma_{\varphi 0}^2 K(\vec{\rho}), \quad (2.1.7)$$

де $\sigma_{\varphi 0}^2$ - дисперсія фази, а $K(\vec{\rho})$ - коефіцієнт кореляції фази екрана.

Припускаємо, що флуктуації фази Φ статистично однорідні, в площині $z = 0$, мають нульове середнє значення ($\bar{\Phi} = 0$) і задовольняють нормальному закону розподілу.

Маючи на увазі, що для розподіленої за нормальним законом величини α з $\bar{\alpha} = 0$, виконується співвідношення $\langle e^{i\alpha} \rangle = \exp(-\bar{\alpha}^2 / 2)$, отримуємо для граничного поля:

$$\begin{aligned} \Gamma_v(\vec{\rho}) &= \langle v(\vec{\rho}_1) v^*(\vec{\rho}_2) \rangle = \langle \exp\{i[\Phi(\vec{\rho}_1) - \Phi(\vec{\rho}_2)]\} \rangle = \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2} \langle [\Phi(\vec{\rho}_1) - \Phi(\vec{\rho}_2)]^2 \rangle\right\}. \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Однак, для $\bar{\Phi} = 0$, середньоквадратична різниця флуктуацій фази є її структурною функцією $D_\varphi(\vec{\rho})$, зв'язаною з кореляційною $\Psi_{\varphi 0}(\vec{\rho})$ згідно з рівнянням (2.1.9). Тому

$$\Gamma_v(\vec{\rho}) = \exp\left[-\frac{1}{2} D_\varphi(\vec{\rho})\right] = \exp[\Psi_{\varphi 0}(\vec{\rho}) - \Psi_{\varphi 0}(0)] = \exp\{\sigma_{\varphi 0}^2 [K(\vec{\rho}) - 1]\}. \quad (2.1.9)$$

Усереднене поле, функцію когерентності, а також поперечну кореляційну функцію поля, що пройшло крізь екран, можна знайти за формулами:

$$\bar{u} = v_0 e^{ikz} = \exp\left\{-\sigma_{\varphi 0}^2 / 2 + ikz\right\}, \quad (2.1.10)$$

$$\Gamma_\perp(\vec{\rho}) = \Gamma_v(\vec{\rho}) = \exp\left[-\frac{1}{2} D_\varphi(\vec{\rho})\right], \quad (2.1.11)$$

$$\Psi_\perp(\vec{\rho}) = \Psi_v(\vec{\rho}) = \exp\{\sigma_{\varphi 0}^2 [K(\vec{\rho}) - 1]\} - e^{-\sigma_{\varphi 0}^2}. \quad (2.1.12)$$

Для малих флуктуацій фази з (2.1.12) можна отримати:

$$\Psi_\perp(\vec{\rho}) \approx \sigma_{\varphi 0}^2 K(\vec{\rho}) = \Psi_\varphi(\vec{\rho}) \quad (\sigma_{\varphi 0}^2 \ll 1), \quad (2.1.13)$$

поперечна кореляційна функція збігається з $\Psi_\varphi(\vec{\rho})$ для всього півпростору $z >$

0.

Для великих флуктуацій фази ($\sigma_{\varphi 0}^2 \gg 1$), усереднене граничне поле $v_0 = e^{-\sigma_{\varphi 0}^2/2}$ дуже мале порівняно з одиницею, а величина $\exp\{\sigma_{\varphi 0}^2[K(\bar{\rho})-1]\}$ помітно відрізняється від нуля лише для малих значень ρ . Тому знехтуємо в (2.1.12) доданком $e^{-\sigma_{\varphi 0}^2}$ і розкладемо коефіцієнт $K(\bar{\rho})$ у ряд Тейлора.

Вважаючи, для простоти, флуктуації фази ізотропними, одержуємо:

$$K(\rho) = 1 + K''(0)\frac{\rho^2}{2} + \dots, \quad (2.1.14)$$

де штрихом позначено диференціювання ρ (лінійний член розкладу по ρ рівний нулю). Тому запишемо:

$$\Psi_{\perp}(\rho) \approx e^{1/2\sigma_{\varphi 0}^2 K''(0)\rho^2} = e^{-1/2|\Psi_{\varphi}''(0)|\rho^2} \quad (\sigma_{\varphi 0}^2 \gg 1), \quad (2.1.15)$$

де враховано, що другі похідні $K''(0)$ та $\Psi_{\varphi}''(0) = \sigma_{\varphi 0}^2 K''(0)$ від'ємні для нульового аргументу. З (2.1.15) можна побачити, що кореляція зникає для $\rho \geq \left|\sigma_{\varphi 0}^2 K''(0)\right|^{-1/2} \approx l_{\varphi}/\sigma_{\varphi 0}$, де $l_{\varphi} \sim \left|K''(0)\right|^{-1/2}$ - радіус кореляції фази.

Із цих співвідношень можна отримати оцінку для поперечного радіусу кореляції поля:

$$l_{\perp} \sim \frac{l_{\varphi}}{\sigma_{\varphi 0}} \quad (\sigma_{\varphi 0}^2 \gg 1). \quad (2.1.16)$$

Отже, для $\sigma_{\varphi 0}^2 \gg 1$, радіус кореляції поля в $\sigma_{\varphi 0}$ разів менший від радіусу кореляції фази екрана l_{φ} .

У багатьох задачах оптичної діагностики використовують статистичні характеристики окремо взятих амплітуди та фази хвилі. Для їх розрахунку, крім першої кореляційної функції комплексного поля $\Psi_{\perp}(\bar{\rho}) = \langle \tilde{u}(\bar{\rho}_1, z) \tilde{u}^*(\bar{\rho}_2, z) \rangle$, потрібна і друга кореляційна функція $\tilde{\Psi}_{\perp}(\bar{\rho}) = \langle \tilde{u}(\bar{\rho}_1, z) \tilde{u}(\bar{\rho}_2, z) \rangle$.

У випадку слабких флуктуацій $\sigma_{\varphi 0}^2 \ll 1$ та їх гаусівського розподілу для

кореляційних функцій амплітуди, фази і кореляції їх між собою, можна отримати наступні вирази:

$$\Psi_{A,\varphi}(\vec{\rho}, z) = \frac{1}{2} \left[\Psi_{\varphi}^0(\vec{\rho}) \mp \frac{k}{4\pi z} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{\varphi}^0(\vec{\rho}') \sin \frac{k(\vec{\rho} - \vec{\rho}')^2}{4z} d^2 \rho' \right], \quad (2.1.17)$$

$$\Psi_{A\varphi}(\vec{\rho}, z) = \frac{k}{8\pi z} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{\varphi}^0(\vec{\rho}') \cos \frac{k(\vec{\rho} - \vec{\rho}')^2}{4z} d^2 \rho', \quad (2.1.18)$$

де $\Psi_{\varphi}^0(\vec{\rho})$ - кореляційна функція фази в площині $z = 0$.

Для гаусівської кореляційної функції

$$\Psi_{\varphi}^0(\rho) = \sigma_{\varphi_0}^2 e^{\frac{-\rho^2}{2l_{\varphi}^2}} \quad (2.1.19)$$

ці інтеграли легко обчислити. Так, для $\rho = 0$ отримуємо:

$$\sigma_{A,\varphi}^2(z) = \frac{\sigma_{\varphi_0}^2}{2} \left(1 \mp \frac{1}{1 + D^2} \right), \quad (2.1.20)$$

де $D = D(z) = 2z / kl_{\varphi}^2$.

Величину D називають хвильовим параметром. Він показує, скільки фазових неоднорідностей поміщається в одній зоні Френеля розміром $\pi\lambda z = 2\pi^2 z / k$. У залежності від хвильового параметра можна виділити три області (зони) z по відношенню до окремої неоднорідності, а саме: ближня ($D \ll 1$), зона Френеля ($D \sim 1$) і зона Фраунгофера ($D \gg 1$). Зрозуміло, що в ближній зоні ($D \ll 1$) будуть переважати фазові флуктуації $\sigma_A^2 \ll \sigma_{\varphi}^2 \approx \sigma_{\varphi_0}^2$. При віддаленні від екрана амплітудні флуктуації будуть зростати, а фазові зменшуватись. У зоні Фраунгофера ($D \rightarrow \infty$) вони вирівнюються й досягають граничного значення:

$$\sigma_{A,\varphi}^2 \Big|_{z \rightarrow \infty} = \frac{1}{2} \sigma_{\varphi_0}^2. \quad (2.1.21)$$

Кореляція між амплітудою та фазою поля в ближній та дальній зонах мала та досягає максимуму для $D \sim 1$.

Флуктуації інтенсивності поля характеризуються кореляційною функцією

інтенсивності:

$$\Psi_I(\vec{\rho}, z) = \langle \tilde{I}(\vec{\rho}_1, z) \tilde{I}(\vec{\rho}_2, z) \rangle = \langle I(\vec{\rho}_1, z) I(\vec{\rho}_2, z) \rangle - \bar{I}^2 \quad (2.1.22)$$

та індексом мерехтіння:

$$\beta^2(z) = \frac{\langle I^2(z) \rangle - \langle I(z) \rangle^2}{\langle I(z) \rangle^2} = \frac{\sigma_I^2(z)}{\langle I(z) \rangle^2}. \quad (2.1.23)$$

Вважаючи $\langle I(z) \rangle = 1$, отримуємо:

$$\Psi_I(\vec{\rho}, z) = \langle I(\vec{\rho}_1, z) I(\vec{\rho}_2, z) \rangle - 1, \quad (2.1.24)$$

$$\beta^2(z) = \langle I^2(z) \rangle - 1 = \sigma_I^2(z). \quad (2.1.25)$$

Як і у випадку аналізу флуктуацій амплітуди та фази, значення Ψ_I та β^2 можуть бути розраховані тільки для двох граничних випадків: малих флуктуацій та фраунгоферової зони. Для малих флуктуацій маємо:

$$\Psi_I(\vec{\rho}, z) = 4\Psi_A(\vec{\rho}, z), \quad (2.1.26)$$

$$\beta^2(z) = 4\sigma_A^2(z). \quad (2.1.27)$$

Отже, при віддаленні від екрана флуктуації інтенсивності ведуть себе подібно до флуктуацій амплітуди.

Для зони Фраунгофера ($D \gg 1$), $\beta^2(z)$ прямує до граничного значення

$$\beta_\infty^2 = 2\sigma_{\varphi_0}^2, \quad \sigma_{\varphi_0}^2 \ll 1, \quad (2.1.28)$$

незалежно від вигляду кореляційної функції фази ВФЕ.

Кореляційна функція інтенсивності для далекої зони може бути записана як:

$$\Psi_I(\vec{\rho}, z) = |\Gamma_u(\vec{\rho})|^2 - |\bar{u}|^4 = |\Gamma_v(\vec{\rho})|^2 - |v_0|^4. \quad (2.1.29)$$

Вважаючи, що $\Gamma_v(0) = \bar{I} = 1$, отримуємо індекс мерехтіння в далекій зоні:

$$\beta_{z \rightarrow \infty}^2 = \Psi_I(0) = 1 - |v_0|^4. \quad (2.1.30)$$

Для часткового випадку гаусівського розподілу фазових флуктуацій ВФЕ,

коли $v_0 = e^{-\frac{\sigma_{\varphi_0}^2}{2}}$ і $\Psi_v(\vec{\rho})$ записується за допомогою рівняння (2.1.12), отримуємо:

$$\Psi_I(\bar{\rho}) = e^{-2\sigma_{\varphi_0}^2} \left\{ \exp[2\Psi_{\varphi}^0(\bar{\rho})] - 1 \right\}, \quad \beta^2 = 1 - e^{-2\sigma_{\varphi_0}^2}. \quad (2.1.31)$$

Для $\sigma_{\varphi_0}^2 \ll 1$ цей вираз переходить у (2.1.28). Для іншого часткового випадку, з нульовим середнім ($\bar{v}_0 = 0$), вирази (2.1.29) та (2.1.30) спрощуються:

$$\Psi_I(\bar{\rho}) = |\Gamma_v(\bar{\rho})|^2 = |\Psi_v(\bar{\rho})|^2, \quad \beta_{\infty}^2 = 1. \quad (2.1.32)$$

На рис. 2.1.1 показано залежність індексу β^2 від хвильового параметра $D = 2z / kl_{\varphi}^2$ для гаусівської функції кореляції фази та дисперсії $\sigma_{\varphi_0}^2$ від 0.1 до 5.

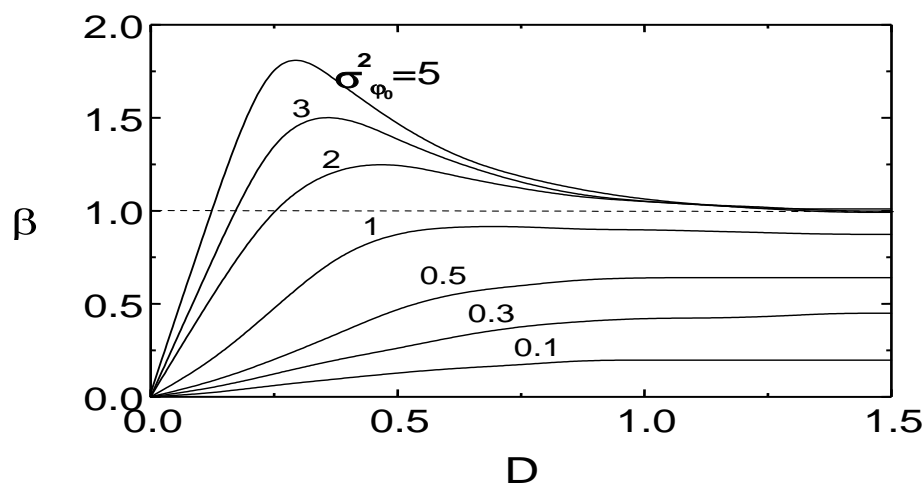


Рис. 2.1.1. Залежність індексу мерехтіння β^2 від параметра D .

Поведінку цих кривих ми вже частково розглянули.

$\beta^2 = \beta_{\infty}^2 = 1 - e^{-2\sigma_{\varphi_0}^2}$ в зоні Фраунгофера ($D \gg 1$) та $\beta^2 = 2\sigma_{\varphi_0}^2 D^2 / (1 + D^2)$ для малих флуктуацій фази ($\sigma_{\varphi_0}^2 \ll 1$). Новим є наявність максимуму β^2 для $D \leq 1$ і значень $\sigma_{\varphi_0}^2 > 1$. Якісна оцінка цього факту дана в роботі, згідно якої для сильних флуктуацій ($\sigma_{\varphi_0}^2 \gg 1$) $\beta_{\max}^2 \sim \ln \sigma_{\varphi_0}^2$. Максимум індексу мерехтіння приходить на так звану зону фокусування z_m , яка визначається так:

$$z_m = \frac{kl_\varphi^2}{\sigma_{\varphi_0}}. \quad (2.1.33)$$

Зрозуміло, що фокусування хвиль, а отже, й максимуми індексу мерехтіння властиві лише фазовим флуктуаціям екрана. Амплітудні флуктуації екрана приведуть до дифракційного згладжування флуктуацій інтенсивності, а отже, і до зменшення індексу мерехтіння.

НЕ 2.2 РОЗСПЮВАННЯ ХВИЛЬОВИХ ПОЛІВ

2.2.1. Дослідження світлорозсіяння шорсткими поверхнями

Шорсткі границі розділу різних об'єктів та середовищ випадковим чином перетворюють амплітуду, фазу, кореляційні параметри поля оптичного випромінювання.

Якість обробки будь-якої поверхні характеризується параметрами шорсткості. Шорсткість може бути оцінена з вимірювань профілю поверхні або розрахована з досліджень світлорозсіяння шорсткою поверхнею. Кожен із цих типів вимірювань має певні переваги й обмеження. Для вимірювання профілю поверхні використовують один із двох зондів - світловий промінь або механічний щуп. Механічний щуп може пошкодити поверхню, що виключено при використанні світлового променя. Чутливість сучасних профілометрів складає 1 ангстрем. Важлива перевага профілометричних методів - їх здатність виявляти локальні нерівності, подряпини, тріщини і т.д.

Оптичні методи знайшли широке використання в системах, призначених для контролю якості оброблених поверхонь. Їх перевага полягає в безконтактності, неруйнівності й здатності усереднювати в оптичному каналі по великій кількості нерівностей поверхні.

Перспективні кореляційно-оптичні методи дослідження та контролю шорсткості поверхонь, що базуються на використанні моделі випадкового фазового екрана (ВФЕ).

Проте модель ВФЕ накладає певні обмеження на досліджувані поверхні.

Верхня межа діапазону контрольованих висот обмежена довжиною хвилі використовуваного випромінювання. До того ж, нерівності поверхні повинні бути розподілені за нормальним законом. Реальні ж поверхні мають обмежену кількість нерівностей і не обов'язково з гаусівським розподілом висот. До того ж, останнім часом стали більше уваги приділяти фрактальним властивостям деяких шорстких поверхонь.

У розділі 3 наведено результати дослідження ефективності та перспектив застосування кореляційно-оптичних методів контролю шорсткості поверхонь із негаусівською статистикою, фрактальних поверхонь та поверхонь з нерівностями, більшими від довжини хвилі.

2.2.1.1. Розсіяння світла шорсткими поверхнями

Теоретичне дослідження взаємодії випромінювання з шорсткою поверхнею спочатку було проведено Релеєм. Він вивчав дифракцію плоскої хвилі на поверхні з гармонічним профілем та глибиною менше довжини хвилі.

Книга, яка цитується найчастіше при розгляді питань розсіювання хвиль шорсткими поверхнями, написана Бекманом та Спізічіно. Вони застосовували скалярне наближення Кірхгофа для опису розсіювання хвиль на періодичних та випадкових поверхнях. І хоча цим дослідженням скоро буде сорок років, вони продовжують розглядатися як фундаментальні.

У більш сучасній монографії Баса та Фукса розглянуто підхід Кірхгофа та метод малих збурень для опису більш складних поверхонь: із кількома масштабами, з перевідбиваннями, з ефектами самозатінення.

На розсіювання електромагнітних хвиль шорсткими поверхнями впливають численні фактори. Крім висоти і поперечного масштабу нерівностей, які порівнюються з довжиною хвилі зондуючого випромінювання, необхідно враховувати багато інших експериментальних параметрів: розмір площі розсіювання, напрямок освітлення, стан поляризації зондуючого пучка, коефіцієнт відбивання та показник заломлення. У залежності від співвідношення між згаданими параметрами, застосовується той чи інший метод обчислення

розсіяного поля. Найбільш широко застосовуються два підходи, а саме метод малих збурень і метод Кірхгофа. Ці методи охоплюють широкий клас шорстких поверхонь, засновані на досить простих припущеннях і на них базуються стандартизовані діагностичні методи. Теорія малих збурень використовується для поверхонь із малими та пологими нерівностями, теорія Кірхгофа - для плавних нерівностей. Розглянемо межі застосування цих підходів для шорсткої поверхні з розподілом висоти, що задається рівнянням: $z = \zeta(x, y) \equiv \zeta(\vec{\rho})$, де $\langle \zeta \rangle = 0$. Пологість нерівностей означає, що їх усереднені нахили невеликі:

$$\langle (\nabla_{\perp} \zeta)^2 \rangle \approx \frac{\sigma^2}{l_{\zeta}^2} \ll 1, \quad (2.2.1)$$

де $\sigma^2 \equiv \langle \zeta^2 \rangle$ - середньоквадратичне відхилення висоти від базової лінії $z = 0$, l_{ζ} - поперечний масштаб кореляції нерівностей.

Малість нерівностей означає, що моменти $\langle \zeta^m \rangle$ набагато менші, ніж відповідні степені довжини хвилі, $\langle \zeta^m \rangle \ll \lambda^m$, зокрема $\sigma^2 \ll \lambda^2$.

Для плавних нерівностей величина відхилення ζ не обмежується, а умова пологості замінюється вимогою про малу кривизну нерівностей. Радіуси кривизни поверхні мікронерівностей R_c повинні бути більшими за λ :

$$R_c \gg \lambda \text{ або } kR_c \gg 1. \quad (2.2.2)$$

Для плавних нерівностей відношення σ / l_{ζ} може бути відносно великим.

2.2.1.2. Оптичні методи контролю шорсткості поверхонь

На даному етапі розвитку техніки дослідження та контролю шорстких поверхонь досягнуто значних успіхів. Розроблено комплекс методів та створено багато різноманітних систем діагностики шорстких поверхонь. Загальновизнану перевагу серед них мають дистанційні, неруйнівні методи контролю. Застосування малопотужних джерел когерентного оптичного випромінювання робить перспективними оптичні методи контролю шорстких поверхонь. Ці методи можна розділити на три великі групи: профільні інтерференційні та

гетеродинні методи; методи, що базуються на вимірюванні інтенсивності розсіяного випромінювання; кореляційно-оптичні методи.

Перша група методів реалізована у вигляді метрологічних систем WYKO TOPO-3D, Zygo NewView5000 3-D Surface Profilers, Talysurf та інших моделей. Це досить складне та дороге обладнання, яке дозволяє отримувати карту висот шорстких поверхонь та всі можливі статистичні параметри поверхні в діапазоні висот від одного ангстрема до кількох мікрон.

До другої групи належать: метод індикатриси, рефлектотричний метод, метод дифузного розсіяння та інші. Ці методи не дозволяють отримати профіль поверхні, але дають усереднене значення середньоквадратичного відхилення профіля від базової лінії по досліджуваній ділянці поверхні шляхом вимірювання кутового розподілу інтенсивності розсіяного випромінювання. Чутливість даних методів складає кілька ангстрем, а верхня межа вимірюваних висот не перевищує десятої частини довжини хвилі зондуючого випромінювання.

Кореляційно-оптичні методи базуються на використанні моделі випадкового фазового екрана (ВФЕ). Це дає можливість отримати прості співвідношення між статистичними параметрами об'єкта та поля розсіяного ним випромінювання. Шорсткі поверхні не єдиний об'єкт, який можна описати з допомогою моделі ВФЕ. До таких об'єктів можна віднести фазово-неоднорідні об'єкти, турбулентності в рідинах та газах, оптичні кристали з дислокаціями та ін. Тобто кореляційно-оптичні методи дозволяють досліджувати широкий клас об'єктів. Кореляційно-оптичні системи контролю шорсткості поверхонь можуть бути виконані в лабораторному та портативному варіантах, із можливістю установки на станках та контролю поверхонь різної форми. Усереднення по великій площі контрольованої поверхні забезпечує високу чутливість (близько 2×10^{-6} Å) та швидкодію (кілька секунд) методів.

Проте кореляційно - оптичні методи, що базуються на моделі ВФЕ, мають певні обмеження. Верхня межа діапазону контрольованих висот обмежена довжиною хвилі використовуваного випромінювання. До того ж, нерівності поверхні повинні бути розподілені за нормальним законом. Реальні ж поверхні

мають обмежену кількість нерівностей, не обов'язково мають гауссівський розподіл висот і можуть мати фрактальні властивості. Однією із ознак фрактальності поверхні є те, що з необмеженим збільшенням поперечних розмірів фрактальної поверхні пропорційно зростає і радіус кореляції її нерівностей. Цей факт пояснює властивість самоподібності фрактальних структур, коли фрагмент поверхні більшого масштабу схожий на менший фрагмент. Це ускладнює застосування статистичних підходів, а, отже й моделі ВФЕ. Фрактальні або самоподібні об'єкти можна розглядати з точки зору теорії стохастичних та хаотичних коливань і характеризувати фрактальною, кореляційною, масовою, ємнісною та іншими розмірностями. Розмірнісні параметри оцінюються за нахилом логарифмічної залежності просторово-частотного спектру фрактальної поверхні або спектра потужності випромінювання, розсіяного поверхнею. Проте ці методи визначення розмірнісних параметрів мають певні обмеження. Тому актуальна розробка нових методів діагностики фрактальних поверхонь.

Досліджувались ефективність та перспективи застосування кореляційно-оптичних методів контролю шорсткості поверхонь із негауссівською статистикою фрактальних поверхонь та поверхонь з нерівностями, більшими від довжини хвилі.

2.2.1.2.1. Рефлектометричний метод та метод дифузного розсіювання

Рефлектометричний метод базується на вимірюванні інтенсивностей падаючого на шорстку поверхню та дзеркально відбитого пучків. Цей метод добре працює для слабошорстких поверхонь, коли інтенсивність дзеркальної складової переважає інтенсивність дифузно відбитого пучка. Оптичне випромінювання, відбите шорсткою поверхнею складається з двох частин: дзеркально відбитої когерентної складової та розсіяної в усі боки некогерентної складової.

Скалярна теорія розсіяння шорсткою поверхнею дає співвідношення між інтенсивністю дзеркальної складової I_s , інтенсивністю сумарного відбитого випромінювання I_0 (що включає дзеркально та дифузно відбите

випромінювання $I_0 = I_s + I_d$), середньоквадратичним відхиленням профілю від базової лінії σ та довжиною освітлюючої хвилі λ :

$$I_s/I_o = e^{-(4\pi\sigma \cos\theta_o / \lambda)^2}, \quad (2.2.3)$$

де θ_o - кут падіння пучка на поверхню.

У рівнянні (2.2.3) вважається що σ мале в порівнянні з довжиною хвилі λ . Обговорення використання скалярної теорії розсіяння до інтерпретації результатів застосування рефлектометричного методу проведено в огляді Дж. Елсона та співавторів. К. Карнігліа дещо пізніше застосував скалярну теорію, щоб описати розсіювання на діелектричних мультишарах.

Для дуже гладких поверхонь, коли відношення I_s/I_o близьке до одиниці, доцільно вимірювати інтенсивність дифузно відбитого випромінювання. Тоді, для нормального падіння пучка та $\sigma \ll \lambda$, рівняння (2.3) перепишеться так:

$$\frac{I_d}{I_o} = \frac{(I_o - I_s)}{I_o} = 1 - e^{-(4\pi\sigma/\lambda)^2} \approx \left(\frac{4\pi\sigma}{\lambda}\right)^2 \approx \frac{I_d}{I_s}, \quad (2.2.4)$$

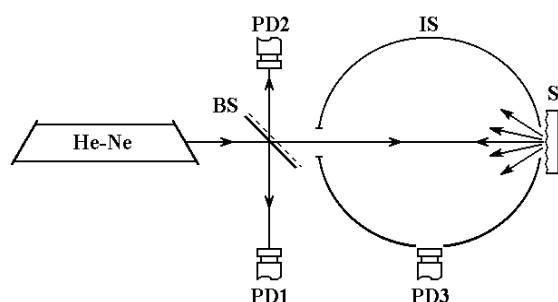


Рис. 2.2.1. Оптична схема для вимірювання дзеркального та дифузного розсіяння: He-Ne - лазер; BS - світлоподільник; IS - фотометрична куля; S – досліджувана поверхня; PD1, PD2, PD3 – фотоприймачі падаючого, відбитого та розсіяного променів

Для вимірювання дифузно відбитого випромінювання, як правило, використовується інтегральна сфера. На рис. 2.2.1 показано оптичну схему пристрою для визначення шорсткості поверхні з вимірювань дифузної та дзеркальної складових відбитого пучка.

У цій схемі діаметр пучка He-Ne-лазера складав 1 мм. Фотоприймач 1 використовується для нормування вимірювань, 2 – для вимірювання дзеркальної складової, 3 – для вимірювання дифузного пучка. Отвір у фотометричній кулі IS повинен бути досить великим, щоб дзеркальна складова не віньєтувалася.

Для реалізації рефлектометричного методу та методу дифузного розсіяння

як джерело випромінювання, як правило, використовуються лазери. Проте є прилади, які використовують вольфрамову лампу в діапазоні довжин хвиль від 400 нм до 1000 нм і дозволяють вимірювати коефіцієнти дифузного відбивання та пропускання на рівні 10^{-4} . Це дозволяє визначати σ в діапазоні 1-1000 Å.

2.2.1.2.2. Метод індикатриси

На відміну від рефлектометричного та дифузного методу, метод індикатриси розглядає стан поляризації падаючого та розсіяного пучків. У зарубіжній літературі цей метод називають angle-resolved scattering (ARS). Середньоквадратичне відхилення профілю від базової лінії повинно бути меншим від довжини хвилі λ .

Згідно з Елсоном, можна записати наступний вираз для індикатриси розсіювання:

$$\frac{1}{P_0} \frac{dP}{d\Omega} = \frac{16\pi^2}{\lambda^4} \cos \theta_0 \cos^2 \theta |1 - \varepsilon|^2 \left(\frac{|\chi_\theta|^2}{|q' + q\varepsilon|^2} + \frac{|\chi_\phi|^2}{|q' + q_0|^2} \right) g(\bar{k} - \bar{k}_0), \quad (2.2.5)$$

де P_0 - потужність хвилі; $dP/d\Omega$ - потужність випромінювання, розсіяна в тілесному куті $d\Omega$; θ_0 - кут падіння; θ - кут розсіювання; ε - діелектрична постійна поверхні ($\varepsilon = \tilde{N}^2$, де $\tilde{N} = n - ik$ - комплексний показник заломлення); $g(\bar{k} - \bar{k}_0)$ - спектр потужності розсіяного випромінювання (power-spectral-density - PSD); \bar{k}_0 та \bar{k} - хвильові вектори падаючої та розсіяної хвилі, які визначаються:

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta_0, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta, \quad (2.2.6)$$

$$q_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \theta_0, \quad q = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \theta, \quad (2.2.7)$$

$$q' = \left[\varepsilon \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 - k^2 \right]^{1/2}, \quad q'_0 = \left[\varepsilon \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 - k_0^2 \right]^{1/2}. \quad (2.2.8)$$

χ_θ та χ_ϕ вираховуються за допомогою рівнянь:

$$\chi_{\theta} = \frac{(q'q'_0 \cos \phi - kk_0 \varepsilon) \cos \phi'}{q'_0 + q_0 \varepsilon} + \frac{(2\pi/\lambda)q' \sin \phi \sin \phi'}{q'_0 + q_0}, \quad (2.2.9)$$

$$\chi_{\phi} = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{q'_0 \sin \phi \cos \phi'}{q'_0 + q_0 \varepsilon} - \frac{(2\pi/\lambda) \cos \phi \sin \phi'}{q'_0 + q_0} \right].$$

Тут ϕ - азимутальний кут розсіювання і ϕ' - кут падіння електричного вектора поля, виміряні відносно площини падіння.

Для розсіювання в площині падіння загальні рівняння спрощуються:

$$\chi_{\theta} = \frac{(q'q'_0 - kk_0) \cos \phi'}{q'_0 + q_0 \varepsilon}, \quad \chi_{\phi} = -\frac{2\pi \sin \phi'}{\lambda q'_0 + q_0}, \quad (2.2.10)$$

вони дають p -поляризовані падаючий та розсіяний пучки, коли $\phi' = 0$, та s -поляризований падаючий та розсіяний пучки, коли $\phi' = \pi/2$.

Вищезгадані вирази припускають, що оптичні постійні однорідно розподілені по шорсткій поверхні. Рівняння (2.2.5) може бути розділене на дві частини, одна з яких залежить від відомих оптичних параметрів: довжини хвилі λ , кутів падіння θ_0 та розсіювання θ , оптичних постійних матеріалу ε , стану поляризації ϕ' падаючого та розсіяного променів. Від мікронерівностей поверхні залежить лише спектр потужності $g(\bar{k} - \bar{k}_0)$. Вимірювання індикатриси випромінювання, розсіяного шорсткою поверхнею, може бути проведено за допомогою системи DALLAS (detector array for laser light angular scattering), принципова схема якої зображена на рис. 2.2.2. Пучок лазерного

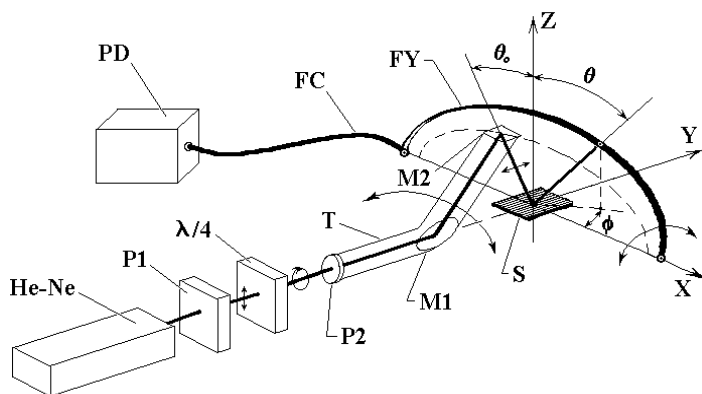


Рис. 2.2.2. Принципова схема системи DALLAS

випромінювання з круговою поляризацією, діаметром 2 мм - освітлює досліджувану поверхню. Система з 87 збірних лінз розташована по периметру півкола. Апертура прийому кожної лінзи складає 1.5° .

Випромінювання,

сфокусоване лінзою, передається на матрицю фотодіодів за допомогою скловолокна. Сигнали з фотодіодів вводяться в комп'ютер.

Поміряна, таким способом індикатриса розсіяння дозволяє розрахувати спектр потужності шорсткої поверхні. Однак конфігурація поверхні не може бути відновлена, тому що втрачається фазова інформація про особливості профілю поверхні. Фур'є-перетворення від спектра потужності дає автокореляційну функцію поверхні, максимум якої дорівнює середньоквадратичному відхиленню профілю від базової лінії.

Альтернативно, середньоквадратичне відхилення профілю від базової лінії може бути отримане шляхом інтегрування індикатриса розсіяння з наступним використанням рівняння (2.2.4).

2.2.1.2.3 Межі застосовності методів вимірювання шорсткості поверхні

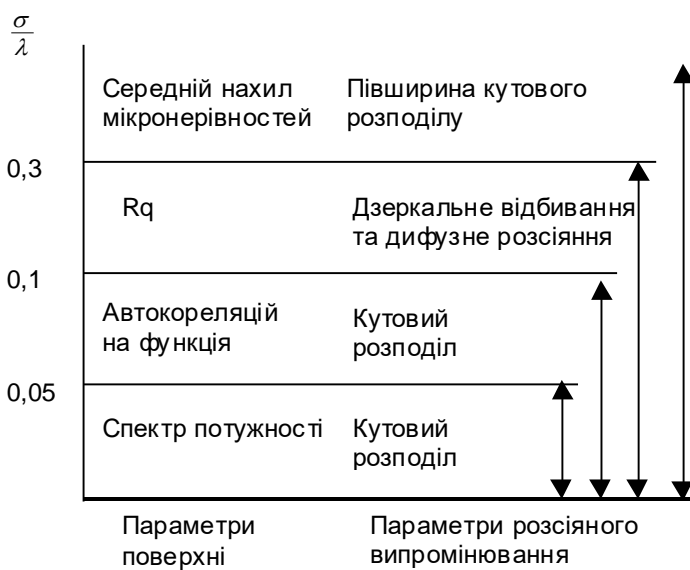


Рис. 2.2.3. Схема застосування оптичних методів для вимірювання параметрів поверхні різних діапазонів висот

поверхонь для пологих синусоїдальних профілів.

Схема на рис. 2.2.3 показує, які параметри поверхні та якими оптичними методами і в якому діапазоні висот можна визначити. Ця схема не повна. Вона

Для практичного використання різних методів вимірювання шорсткості поверхонь необхідно підсумувати попередні експерименти з досліджень шорстких поверхонь і узагальнити їх, використовуючи формалізм Кірхгофа. Ефективність формалізму Кірхгофа підтверджена для згладжених

не включає використання зворотного розсіювання, методів оптики спеклів і поляризаційних властивостей розсіяного випромінювання.

2.2.1.3. Кореляційно-оптичні методи діагностики шорстких поверхонь

2.2.1.3.1. Методи оптики спеклів

Існує значна кількість методів діагностики шорстких поверхонь, що базуються на використанні когерентних джерел випромінювання. Поле розсіяного когерентного випромінювання в цьому випадку має плямисту будову і називається спекл-полем. Контраст спекл-картини пов'язаний з дисперсією фази об'єкта. Проте в цьому випадку необхідно знати кількість неоднорідностей

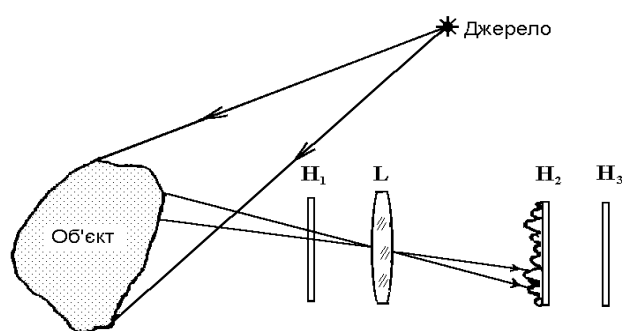


Рис. 2.2.4. Оптичне схема для отримання когерентного плямистого зображення

об'єкта, які беруть участь у формуванні спекл-картини, виконати процедуру сканування поля розсіяного випромінювання і провести комп'ютерну обробку результатів вимірювань.

Параметри мікрорельєфу поверхні визначаються за допомогою схеми, зображеної на рис. 2.2.4.

Випромінювання когерентного джерела освітлює досліджуваний об'єкт. Лінза L формує когерентне зображення об'єкту в площині H_2 . По розподілу інтенсивності в зображенні об'єкта можна визначити параметри шорсткості.

Середній розмір спекла в зображенні складає приблизно $\lambda l/d_a$, де l - відстань між оптичною системою і площиною зображення, d_a - діаметр апертури оптичної системи. Відповідно до критерію Релея, мінімальний розмір ділянки поверхні, що розрізняється, дорівнює $\lambda l_0/d_a$, де l_0 - відстань між оптичною системою і поверхнею об'єкта. Чим нижча роздільна здатність системи, тим більший мінімальний розмір поля, що розрізняється, отже, більше число $N = \lambda l_0/d_a l_{\varphi_0}$ некорельованих елементів шорсткості приймають участь в

формуванні зображення. Тут, l_{φ_0} - радіус кореляції шорсткої поверхні. В результаті, в площині зображення H_2 , додаються хвилі розсіяні різними елементами шорсткої поверхні, з випадковими початковими фазами. Отже, зображення стає плямистим. Плямистим поле буде і в довільній площині H_1 до оптичної системи чи після неї H_3 (див. рис. 2.2.4). Аналіз статистичних характеристик плямистого поля базується на методі випадкових незалежних вкладів, запропонованому в і гауссівській статистиці поля.

Якщо висота мікронерівностей шорсткої поверхні менша від довжини хвилі, то контраст плямистої картини C ($C = \sqrt{\sigma_I^2} / \langle I(x, y) \rangle$, де $\sigma_I^2 = \langle I^2(x, y) \rangle - \langle I(x, y) \rangle^2$) практично лінійно залежить від дисперсії фази $\sigma_{\varphi_0}^2$ поверхні:

$$C \approx \frac{4\pi\sigma_{\varphi_0}^2}{\lambda^2 N}. \quad (2.2.11)$$

Для визначення $\sigma_{\varphi_0}^2$ по вимірюванню контрасту плямистого поля необхідна інформація про число незалежних вкладів N . N можна вирахувати з вимірювань радіуса кореляції поверхні l_{φ_0} . Коли радіус кореляції збігається з розмірами гауссівського пучка, контраст спекл-картини максимальний.

Перспективними є методи діагностики шорсткості поверхні з дослідження кореляції між двома спекл-полями, отриманими для різних кутів падіння лазерного променя. Ці методи ефективні для висот 1-12 мкм, практично в реальному часі. Так, в одному з таких методів Легер та Перрін показали, що контраст спекл-картини, зареєстрованої на фотопластині двома експозиціями для двох кутів падіння променя на шорстку поверхню θ та $\theta + \Delta\theta$, дається співвідношенням:

$$C = \exp\left[-(k\Delta\theta \sin \theta)^2 \sigma_{\varphi_0}^2\right].$$

2.2.1.3.2. Опис шорсткої поверхні в рамках моделі випадкового фазового екрана

Шорстка поверхня з розподілом висот $h(\rho)$ (де ρ - двомірний вектор) у рамках моделі ВФЕ характеризується кореляційною функцією фази поверхні:

$$\Psi_{\Phi}(\rho) = \sigma_{\varphi_0}^2 K(\rho), \quad (2.2.12)$$

максимальне значення якої визначається дисперсією фази пропусканого об'єкта $\sigma_{\varphi_0}^2$, а хід – коефіцієнтом кореляції $K(\rho)$. Півширина кореляційної функції дає радіус кореляції l_{φ_0} . З формули (2.2.12) можна перейти до кореляційної функції висот поверхні:

$$\Psi_h(\rho) = \sigma_h^2 K(\rho), \quad (2.2.13)$$

де $\sigma_h = \frac{\lambda}{2\pi(n-1)} \sigma_{\varphi_0}$ - середньоквадратичне відхилення профілю від базової лінії (Rq).

Модель ВФЕ базується на наступних припущеннях: у зоні реєстрації присутні всі просторові частоти поля розсіяного випромінювання; дисперсія фази об'єкта мала - $\sigma_{\varphi_0}^2 < 1$; радіус кореляції неоднорідностей більший за довжину хвилі, $l_{\varphi_0} > \lambda$.

Із моделі ВФЕ випливають наступні співвідношення між статистичними параметрами об'єкта та поля розсіяного випромінювання:

- дисперсія фази σ_{φ}^2 та амплітуди σ_A^2 поля в зоні Фраунгофера

$$\sigma_A^2 = \sigma_{\varphi}^2 = 0.5\sigma_{\varphi_0}^2, \quad (2.2.14)$$

- індекс мерехтіння (дисперсія інтенсивності) в зоні Фраунгофера

$$\beta_{\infty}^2 = 2\sigma_{\varphi_0}^2, \quad (2.2.15)$$

Поперечна функція когерентності поля не змінює в залежності від зони реєстрації, дорівнює поперечній функції когерентності граничного поля і визначається формулою:

$$\Gamma_{\perp}(\rho) = \exp\left\{\sigma_{\varphi_0}^2 [K_{\varphi_0}(\rho) - 1]\right\}, \quad (2.2.16)$$

Розглянуті співвідношення виконуються для гауссового розподілу

нерівностей висот поверхні. Коли ж кількість нерівностей невелика або має місце відхилення закону їх розподілу від нормального, потрібно враховувати моменти вищих порядків як в структурі поверхні, так і в розподілі поля розсіяного нею випромінювання.

Третій та четвертий статистичні моменти розподілу нерівностей шорсткої поверхні визначають коефіцієнт асиметрії k_a та ексцесу k_k функції розподілу:

$$k_a = \frac{1}{\sigma_h^3} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i^3, \quad (2.2.17)$$

$$k_k = \frac{1}{\sigma_h^2} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i^4. \quad (2.2.18)$$

2.2.2. Розсіювання оптичного випромінювання дисперсними середовищами

Розсіювання світла в дисперсних середовищах залежить від типу розсіюючих часток та відстані між ними. Розсіювання окремою часткою визначається її оптичними та геометричними параметрами: розміром, формою, внутрішньою будовою та іншим. У залежності від конкретних значень цих параметрів використовується та чи інша модель взаємодії оптичного випромінювання з розсіюючими частинками. Так, для однорідних сферичних частинок використовують формули Мі. Встановлено, що розсіювання ансамблем частинок залежить від їх концентрації. Коли відстань між частинками велика, порівняно з їх розміром, зміна концентрації не приведе до суттєвої зміни характеристик розсіяного випромінювання. В цьому випадку говорять про однократне розсіювання випромінювання. Істотне збільшення концентрації приведе до багатократного розсіювання.

У цьому параграфі розглядаються основні співвідношення, що описують розсіювання сферичними частинками, релєївське розсіювання, формули Мі,

багатократне розсіювання. Таке світлорозсіювання відносять до традиційного (ТСР). Методи ТСР полягають у вимірюванні індикатриси розсіювання світла (залежності інтенсивності розсіювання від кута розсіювання). Поява лазерів привела до інтенсивного розвитку методів динамічного розсіювання світла (ДСР). Вони дозволяють по часових флуктуаціях інтенсивності розсіяного когерентного випромінювання досліджувати динамічні та структурні параметри світлорозсіюючого середовища.

2.2.2.1. Традиційний опис світлорозсіювання

Світлорозсіююча частинка повинна мати різку границю розділу між матеріалом частинки і навколишнім середовищем. Це забезпечується різними показниками заломлення частинки n_1 та середовища n_2 . Будемо вважати, що електричний вектор падаючого на частинку радіуса R світла з довжиною хвилі λ перпендикулярний до площини розсіювання. На відстані r реєструється випромінювання розсіяне під кутом θ тієї ж поляризації.

За величиною відношення R/λ можна виділити три типи розсіювання.

2.2.2.1.1. Релеївське розсіювання ($R/\lambda \ll 1$)

Інтенсивність I_R розсіювання світла ізольованою частинкою має розмір значно меншим від довжини хвилі:

$$I_R = \frac{16\pi^4 R^6 I_0}{r^2 \lambda^4} \left[\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 + 2n_2^2} \right]^2, \quad (2.2.21)$$

де індекс R вказує на “релеївські” або точкові розсіювачі, а I_0 - інтенсивність падаючого пучка.

Зауважимо, що інтенсивність розсіювання I_R має такі особливості:

- не залежить від кута розсіювання;
- залежить від різниці показників заломлення $n_1 - n_2$ (залежність від абсолютного значення показника заломлення незначна);
- пропорційна R^6 , а отже амплітуда розсіяного поля $\sqrt{I_R}$ пропорційна

поляризованості сфери;

- пропорційність λ^{-4} - це так званий закон розсіювання Релея.

2.2.2.1.2. Розсіювання Релея-Ганса-Дебая (РГД) $((n_1 - n_2)R/\lambda \ll 1)$

У цьому випадку поле випромінювання, розсіяного однією частинкою, формується в результаті інтерференційного складання полів, розсіяних різними ділянками частинки. Це призводить до деякого відхилення індикатриси розсіювання РГД від релеївської I_R :

$$I_{RGD} = I_R \times P(\theta), \quad (2.2.22)$$

де $P(\theta)$ - фактор форми з властивостями $P(0) = 1$, $P(\theta) < 1$ для $\theta > 0$.

Для однорідних сфер, $P(\theta)$ набуває відносно простої форми:

$$P(\theta) = \left[3(\sin uR - uR \cos uR)/(uR)^3 \right]^2, \quad (2.2.23)$$

де

$$u = \left(4\pi/\lambda \right) \sin\left(\theta/2\right), \quad (2.2.24)$$

так званий параметр розсіювання.

Розклад (2.2.23) за степенями uR дає:

$$P(\theta) = 1 - (uR)^2/5 + \dots, \quad (2.2.25)$$

і для частинок РГД довільної форми та будови :

$$P(\theta) = 1 - (uR_G)^2/3 + \dots, \quad (2.2.26)$$

де R_G - інерційний радіус частинки (для однорідної сфери $R_G = \sqrt{3/5}R$).

2.2.2.1.3. Розсіювання Мі $((n_1 - n_2)R/\lambda \geq 1)$

Для великих частинок індикатриси розсіяного випромінювання стає дуже складною. Вона розраховується за допомогою законів геометричної оптики і враховує заломлення, поглинання, відбивання та перевідбивання променів всередині частинки. Отримано повні рішення такої задачі для діелектричних, металевих, багатошарових та інших сфер.

2.2. Однократне розсіювання системою частинок РГД

Для дисперсних середовищ з малою концентрацією частинок, виконуються умови однократного розсіювання випромінювання. Традиційні (некогерентні) методи світлорозсіювання в цьому випадку розглядають результуючу індикатрису розсіювання як суму парціальних індикатрис розсіювання незалежних частинок. Використання як джерела випромінювання лазера приведе до просторових та часових флуктуацій поля розсіяного випромінювання. Проте його усереднення приймаючим детектором в просторі та часі дасть результати, подібні до випадку з некогерентним джерелом.

Для системи, що складається з N ідентичних частинок, співвідношення (2.2.3) та (2.2.4) можна записати так:

$$I(\theta) = \frac{16\pi^4 R^6 N I_0}{r^2 \lambda^4} \left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 + 2n_2^2} \right)^2 P(\theta). \quad (2.2.27)$$

Або у видозміненій формі:

$$I(\theta) = \frac{9\pi^2 V_S C M I_0}{r^2 \lambda^4 N_A} \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 + 2n_2^2} \right) \right]^2 P(\theta),$$

(2.2.28)

де V_S - розсіюючий об'єм, C - вагова концентрація частинок, M - молекулярна вага частинок, ρ - густина матеріалу частинок та N_A - число Авогадро.

Отже, вимірювання індикатриси світлорозсіювання суспензією дозволяє визначити їх молекулярну вагу. Решта параметрів відомі або можуть бути визначені простими методами. Якщо ж абсолютні вимірювання інтенсивності зробити важко, то за початковим нахилом $I(\theta)$ від u^2 , з рівнянь (2.2.6), (2.2.8) та (2.2.28), можна оцінити інерційний радіус частинок. Цей метод добре працює в діапазоні інерційних радіусів $200\text{\AA} < R_G < 1000\text{\AA}$.

2.2.2.2.1. Динамічне світлорозсіювання

Як вже зазначалося, розвиток ДСР прискорився одразу після відкриття лазера. Розсіювання когерентного випромінювання призводить до утворення складного спекл-поля, утвореного в результаті складання парціальних

когерентних сигналів із випадковими амплітудами та фазами. Рух частинок у потоці та броунівський рух викликає флуктуації інтенсивності розсіяного поля. Часові та просторові флуктуації інтенсивності поля розсіяного випромінювання залежать від розміру частинок та параметрів їх руху.

З 1970 р. динамічне розсіювання світла досліджувалась за допомогою спектроскопії кореляції фотонів. Високороздільна кореляційна техніка дозволяла записувати просторову, або часову кореляційну функцію розсіяного випромінювання $g(\mathcal{G})$, де \mathcal{G} - просторово-часовий аналог частоти. Для однократного розсіювання:

$$g(\tau) = \exp(-\tau/T_C), \quad (2.2.29)$$

де

$$T_C = \frac{1}{D_r u^2}, \quad (2.2.30)$$

вектор розсіювання u задається співвідношенням (2.2.6), а τ – часова кореляційна затримка. Коефіцієнт трансляційної дифузії частинки D_r задається співвідношенням Стокса – Ейнштейна:

$$D_r = \frac{KT}{6\pi\eta R_H},$$

(2.2.31)

де K - константа Больцмана, T - температура Кельвіна, η - коефіцієнт динамічної в'язкості та R_H - гідродинамічний радіус частинки. В (2.2.29) T_C можна інтерпретувати як типові часові флуктуації спекл - картини на детекторі. Для субмікронних частинок типові значення u , T_C лежать в інтервалі мікросекунд та мілісекунд.

У цьому випадку по $g(\tau)$ динамічного світлорозсіювання (2.2.29) можна знайти півширину часових флуктуацій T_C . Оскільки u , T та η відомі величини, за допомогою (2.2.30) та (2.2.31) можна знайти гідродинамічний радіус частинок. У багатьох випадках відомо(існує) зв'язок R_H з реальним радіусом частинок R . Метод динамічного світлорозсіювання широко застосовується для визначення

розмірів частинок у діапазоні від 20\AA до 1 мкм .

Дещо інші можливості дослідження поля розсіяного випромінювання дає теорія стохастичних та хаотичних коливань (див. розділ 1). В наступному параграфі розглянемо хаотичний рух броунівської частинки, в якому виявлено фрактальні властивості.

2.2.2.3. Система броунівський частинок

Броунівський рух пояснюють наявністю неврівноважених поштовхів молекул та атомів, які оточують броунівську частинку. В кожний момент часу рух броунівської частинки визначається рівнодіючою сил окремих атомів. Хаотичний рух атомів призводить до складного та неперервного руху броунівської частинки.

Процес *броунівського руху* це процес, який описує хаотичне переміщення зважених у рідині або газі дрібних частинок, внаслідок зіткнень із молекулами середовища. Броунівський рух було відкрито в 1827 р. англійським ботаніком Робертом Броуном. Він помітив, що рух частинки не слабшає з часом і не залежить від хімічних властивостей середовища. Р. Броун першим зробив висновок, що неупорядкований рух мікроскопічних частинок пилку має фізичну, а не біологічну природу, як думали до нього. Тепловим флуктуаціям підлягають молекули, макромолекули, віруси, порошини й інші частинки, що знаходяться в русі за рахунок своєї теплової енергії. Фізична частинка речовини при відомій температурі несе середню кінетичну енергію, що виражається через постійну Больцмана. Інтенсивність броунівського руху збільшується з підвищенням температури середовища та зменшенням його в'язкості й розмірів частинок.

Послідовне пояснення броунівського руху дано А. Ейнштейном і М. Смолуховским у 1905-1906 рр. на основі молекулярно-кінетичної теорії. У результаті "бомбардування" молекулами броунівська частинка починає рухатися, змінюючи величину і напрямок своєї швидкості приблизно 10^{14} разів за секунду! Як відомо, середня кінетична енергія броунівських частинок не залежить від їх розміру й дорівнює $3/2 Kt$.

У наш час виявлено, що явище броунівського руху має більше значення,

ніж це вважалось раніше. Воно відіграє принципову роль у формуванні спектрів коливань у генераторах будь-якої природи (електронних, напівпровідникових, лазерах). На мові броунівського руху можна глибше зрозуміти явище дифузії. Цікаві ефекти броунівського руху відкриті в біології. При фазових переходах, виявляється, існує броунівський рух параметрів порядку.

2.2.2.4. Спектроскопія оптичного змішування

Вперше метод оптичного детектування запропонував Г.С. Горелик в 1947 році. Експерименти Форрестера, Таунса, Каммінса, Пайка та інших стали основою нового напрямку в статистичній оптиці – спектроскопії оптичного змішування.

У спектроскопії з використанням дифракційної ґратки або інтерферометра вимірюється спектральна густина випромінювання, що виражається Фур'є-перетворенням кореляційної функції першого порядку електричного вектора розсіяного поля:

$$\Psi_R^{(1)}(\tau) = \langle E_R^*(R, t) E_R(R, t + \tau) \rangle. \quad (2.2.46)$$

Для повного опису статистичних властивостей поля випромінювання, розсіяного броунівськими частками потрібно досліджувати функції кореляції вищих порядків. Функцію кореляції інтенсивності розсіяного світла можна записати у вигляді:

$$\Psi_R^{(2)}(\tau) = \langle |E_R(R, t)|^2 |E_R(R, t + \tau)| \rangle. \quad (2.2.47)$$

Зручно ввести нормовані кореляційні функції (або коефіцієнти кореляції) першого і другого порядків :

$$K_R^{(1)}(\tau) = \frac{\Psi_R^{(1)}(\tau)}{\Psi_R^{(1)}(0)}, \quad K_R^{(2)}(\tau) = \frac{\Psi_R^{(2)}(\tau)}{[\Psi_R^{(2)}(0)]^2}. \quad (2.2.48)$$

Для визначення кореляційних функцій (2.2.46) та (2.2.47) використовують методи оптичного змішування, що по суті збігаються з методом биття, який застосовується у радіочастотній спектроскопії, але перенесені в оптичний діапазон. Існують різноманітні варіанти цього методу: одні засновані на принципі биття різних частот (гетеродинний метод), інші - на принципі

самобиття (гомодинний метод).

2.2.2.4.1. Гетеродинна спектроскопія

У гетеродинному методі, схема якого подана на рис. 2.2.5, частоти розсіяного світла ω_R змішуються з частотою лазерного випромінювання або місцевого гетеродина ω_{MG} .

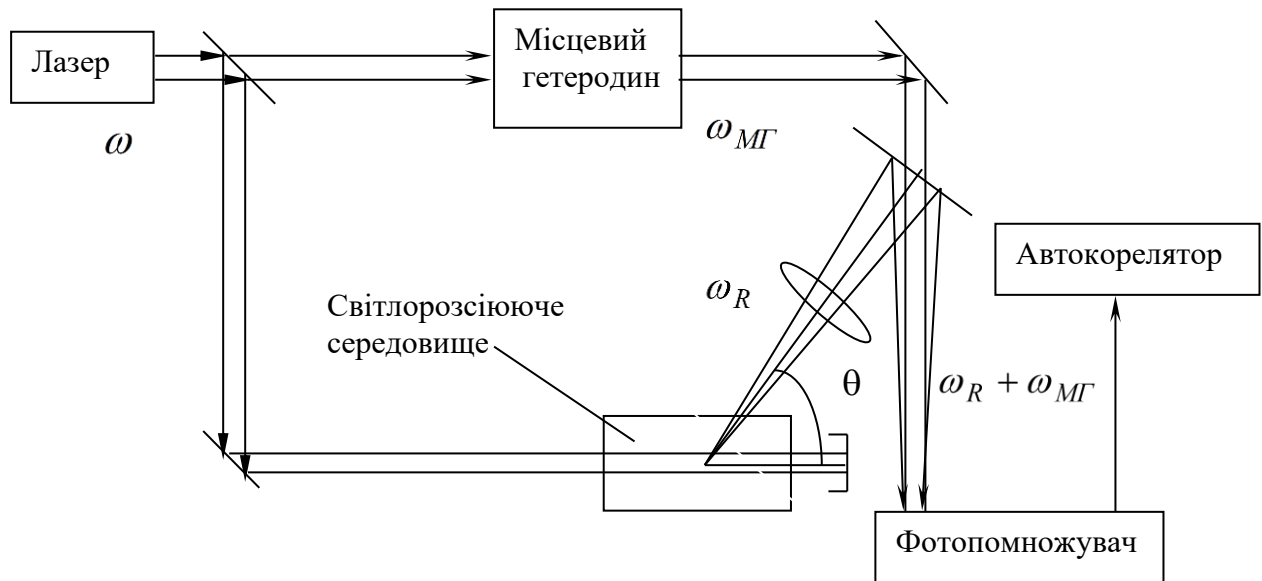


Рис. 2.2.5.Схема гетеродинної системи для дослідження розсіяного лазерного світла

Розглянемо функцію кореляції фотоструму:

$$\Psi_i(\tau) = \langle i(t)i(t+\tau) \rangle = e^2 q^2 \langle |E(t)|^2 |E(t+\tau)|^2 \rangle, \quad (2.2.49)$$

де $i(t) = e^2 q E^*(t)E(t)$ - миттєва густина фотоструму; e - заряд електрона; q - чутливість фотоприймача.

Кореляційну функцію фотоструму можна переписати у вигляді:

$$\Psi_i(\tau) = e^2 q \langle E^*(t)E(t) \rangle \delta(t) + e^2 q^2 \langle E^*(t)E(t)E^*(t+\tau)E(t+\tau) \rangle. \quad (2.2.50)$$

У гетеродинному методі на фотокатод діє поле розсіяного випромінювання $E_R(t)$ і поле місцевого гетеродина $E_{MG}(t)$. Отже, повне поле буде:

$$E(t) = E_R(t) + E_{M\Gamma}^0 \exp(-i\omega_{M\Gamma}t). \quad (2.2.51)$$

Для такого поля кореляційна функція фотоструму запишеться:

$$\Psi_i(\tau) = ei_{M\Gamma} \delta(\tau) + i_{M\Gamma}^2 + i_{M\Gamma} \langle i_R \rangle \left\{ K_R^{(1)}(\tau) \exp(i_{M\Gamma}t) + K_R^{(1)}(\tau)^* \exp(-i\omega_{M\Gamma}t) \right\}, \quad (2.2.52)$$

де припускається, що $i_{M\Gamma} \gg \langle i_R \rangle$.

Лазерний пучок із частотою ω ділиться на два пучки, один з яких (з частотою ω_R), розсіюється в середовищі під кутом θ , а інший - керує коливаннями місцевого гетеродина (з частотою $\omega_{M\Gamma}$). Пучки з частотами ω_R та $\omega_{M\Gamma}$ змішуються на катоді фотопомножувача, струм з якого потрапляє в автокорелятор.

Якщо вважати, що:

$$K_R^{(1)}(\tau) = \exp(-i\omega_R\tau) \exp(-\Gamma|\tau|), \quad (2.2.53)$$

то відповідно до теореми Вінера – Хінчина, одержуємо вираз для спектральної густини фотоструму:

$$S_i(\omega) = \pi^{-1} ei_{M\Gamma} + i_{M\Gamma}^2 \delta(\omega) + i_{M\Gamma} \langle i_R \rangle \frac{2\Gamma/\pi}{(\omega - |\omega_R - \omega_{M\Gamma}|)^2 + \Gamma^2}. \quad (2.2.54)$$

Отже, у гетеродинному методі спектр має лорентцівську форму з півшириною $\Delta\omega_{1/2} = \Gamma$ та центром на частоті $\omega = \omega_R - \omega_{M\Gamma}$.

Повертаючись до рівності (2.2.52), переконуємося, що в гетеродинному методі вимірюється кореляційна функція першого порядку:

$$\Psi_R^{(1)}(\tau) = k_R^{(1)}(\tau) \langle i_R \rangle / eq, \quad (2.2.55)$$

незалежно від типу статистики поля. Тому в гетеродинній спектроскопії визначається та саме кореляційна функція, що й у звичайній спектроскопії, але для значно повільніших процесів розсіювання.

2.2.2.4.2. Гомодинна спектроскопія

При використанні гомодинного методу на фотокатод потрапляє тільки розсіяне світло (рис. 4.2). Тому, якщо у рівняння (2.2.49) підставити функцію кореляції другого порядку (2.2.47), отримаємо:

$$\Psi_i(\tau) = e \langle i_R \rangle \delta(\tau) + \langle i_R \rangle^2 K_R^{(2)}(\tau). \quad (2.2.56)$$

У загальному випадку співвідношення між функціями $K_R^{(1)}(\tau)$ і $K_R^{(2)}(\tau)$ залежить від типу статистики і, зокрема, для розподілу Гаусса записується:

$$K_R^{(2)}(\tau) = 1 + |K_R^{(1)}(\tau)|^2. \quad (2.2.57)$$

Якщо нормована кореляційна функція поля має вигляд (2.2.53), то спектральна густина фотоструму буде:

$$S_i(\omega) = \frac{e\langle i_R \rangle}{2\pi} + \langle i_R \rangle^2 \delta(\omega) + \langle i_R \rangle^2 \frac{2\Gamma/\pi}{\omega^2 + (2\Gamma)^2}. \quad (2.2.58)$$

Отже, маємо лоренцівський контур із півшириною $\Delta\omega_{1/2} = 2\Gamma$, симетричний відносно $\omega = 0$.

У загальному випадку кореляційні функції фотоструму, що визначаються в гомодинному та гетеродинному методах, відрізняються. Хоч при відсутності направленої руху в середовищі вони дають практично однакову спектральну інформацію. Якщо ж у розсіюючому середовищі є течії, то їх швидкість можна визначити лише гетеродинним методом.

Розсіяне світло фокусується на фотокатоді помножувача, викликаючи миттєві фотоструми, що виявляються у вигляді флуктуації числа фотоелектронів. Цей сигнал потрапляє в автокорелятор, що розраховує функцію часової кореляції інтенсивності розсіяного світла.

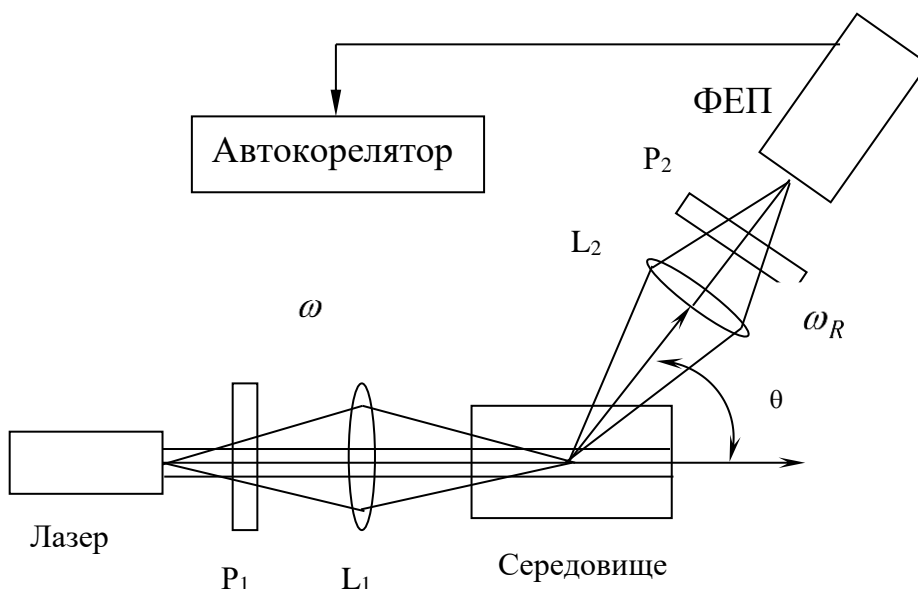


Рис. 2.2.6. Схема гомодинної системи

2.2.2.5. Розсіювання світла на броунівських частинках

Розглянемо середовище об'ємом V , що містить N розсіюючих центрів. Електричне поле в точці R , розсіяне на центрі в точці (r_p, t) , можна записати:

$$E_R(r_p, t) = A(\Gamma_p, t) \exp\{i(u \cdot r_p^t - \omega t)\}, \quad (2.2.59)$$

де $A(\Gamma_p, t)$ - амплітуда, що залежить від геометрії і поляризації поля випромінювання, а також від структури і конфігурації розсіюючого центра, $\Gamma_p = (\Omega, r)$, а

$$u = |k - k_R| = \frac{4\pi}{\lambda} n \sin \frac{\theta}{2}, \quad (2.2.60)$$

де n - показник заломлення розчинника.

Лазерне випромінювання з поляризацією e , хвильовим вектором k і частотою ω падає на розсіююче середовище. Розсіяне світло з поляризацією e_R , хвильовим вектором k_R і частотою ω_R спостерігається під кутом θ до напрямку падаючої хвилі за допомогою приймача.

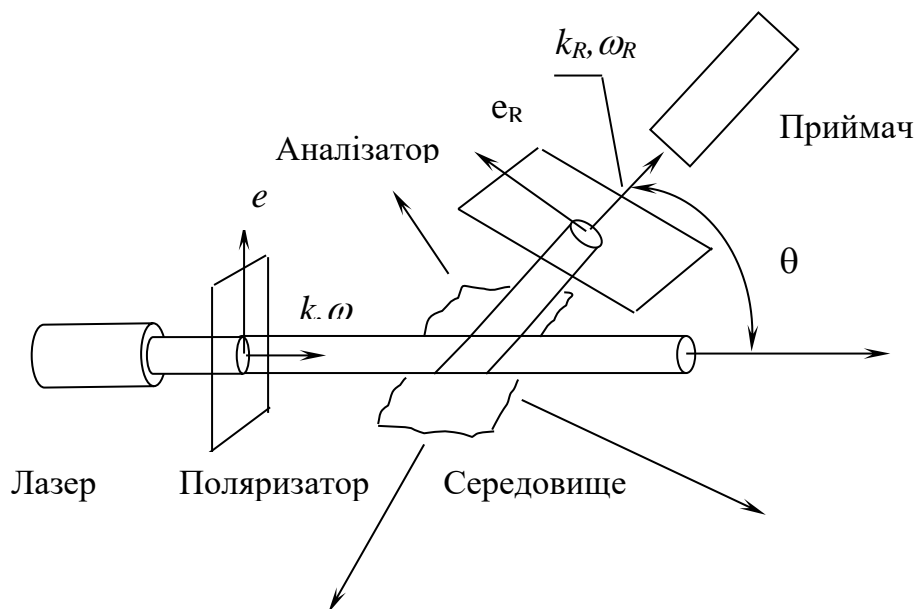


Рис. 2.2.7. Схема спостереження розсіяного випромінювання

Повне електричне поле в точці (R, t) дорівнює:

$$E_R(R, t) = \sum_{p=1}^N E_R(r_p, t), \quad (2.2.61)$$

і кореляційна функція поля має вигляд:

$$\Psi_R^{(1)}(u, t) = \exp(-i\omega t) \left\langle \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N A^*(\Gamma_p^0, 0) \cdot A(\Gamma_q^t, t) \exp(-iur_p^0) \exp(iur_q^t) \right\rangle. \quad (2.2.62)$$

Будемо вважати, для простоти, що амплітуди поля не залежать від конфігурації (Ω, r) розсіюючих центрів. Тоді рівняння набуде вигляду:

$$\Psi_R^{(1)}(u, t) = N \langle |A|^2 \rangle F(u, t) \exp(i\omega t), \quad (2.2.63)$$

де введена проміжна функція для розсіювання світла,

$$F(u, t) = N^{-1} \left\langle \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \exp(-iur_p^0) \exp(iur_q^t) \right\rangle, \quad (2.2.64)$$

взята з теорії розсіювання нейтронів .

Використовуючи метод Ван Хова, було знайдено:

$$F(u, t) = F_s(u, t) + F_c(u, t), \quad (2.2.65)$$

де (2.2.66)

$$F_s(u, t) = N^{-1} \left\langle \sum_{p=1}^N \exp[iu(r_p^t - r_p^0)] \right\rangle$$

визначає автокореляційну частину, що описує некогерентне розсіювання, а

$$F_c(u, t) = N^{-1} \left\langle \sum_{p=1}^N \sum_{q \neq p}^N \exp[iu(r_q^t - r_p^0)] \right\rangle \quad (2.2.67)$$

задає взаємно кореляційну частину, пов'язану з когерентним розсіюванням.

2.2.2.6. Некогерентне розсіювання

Функцію (2.2.66) можна записати:

$$F_s(u, t) = \int \exp(iu\Delta r_t) G_s(r, t) dr, \quad (2.2.68)$$

де $G_s(r, t)$ - автокореляційна функція Ван Хова, а миттєвий зсув частинки в часі дорівнює:

$$\Delta r_t = r^t - r^0 = \int_0^t v(t') dt', \quad (2.2.69)$$

де $v(t)$ - миттєва швидкість розсіюючої частинки.

Для моделі вільної трансляційної дифузії маємо:

$$G_s(r, t) = (4\pi D_T t)^{-3/2} \exp\left(-\frac{r^2}{4D_T t}\right) \quad (2.2.70)$$

і для середнього квадрата зсуву частинки (2.2.69) одержуємо відому формулу Ейнштейна - Смолуховського:

$$\langle (\Delta r_t)^2 \rangle = 6D_T t. \quad (2.2.71)$$

Для гауссового розподілу у вигляді (2.2.70) функція кореляції (2.2.68) набуває вигляду:

$$F_s(u, t) = \exp(-u^2 D_T t), \quad (2.2.72)$$

або з урахуванням співвідношення (2.2.71):

$$F_s(u, t) = \exp\left[-\frac{1}{6} u^2 \langle |\Delta r_t|^2 \rangle\right] \quad (2.2.73)$$

Для гауссового розподілу (2.2.72) спектральна густина некогерентно розсіяного випромінювання дорівнює:

$$S(u, \omega) = N|A|^2 \frac{u^2 D_T / \pi}{(\omega_R - \omega)^2 + (D_T u^2)^2}. \quad (2.2.74)$$

Цей вираз описує лоренцівський контур із півшириною $\Delta\omega_{1/2} = u^2 D_T$ і центром при $\omega = \omega_R$.

Згідно з (2.2.57) та (2.2.72) для гауссового розподілу маємо:

$$K_R^{(2)}(t) = 1 + \exp(-2u^2 D_T t). \quad (2.2.75)$$

Вимірюючи кут нахилу прямої $\ln[K_R^{(2)}(t) - 1]$ (у лінійному наближенні) до осі t , знаходимо значення коефіцієнта дифузії.

2.2.2.8. Когерентне розсіювання

Якщо броунівські частинки взаємодіють одна з одною, то функцію (2.2.67) можна записати:

$$F_c(u, t) = \frac{\rho}{V} \iint \exp[iu(r_q^t - r_p^0)] G_c(r_q^t, r_p^0, t) dr_q^t dr_p^0, \quad (2.2.76)$$

де $G_c(r_q^t, r_p^0, t)$ - функція Ван Хова, взаємної кореляції двох різних частинок.

Оскільки нам не відомий аналітичний вигляд функції Ван Хова, скористаємося наближенням Віньярда:

$$G_c(r_q^t, r_p^0, t) = \int g^{(2)}(r_q^0, r_p^0) G_s(r_q^t, r_p^0, t) dr_p^0, \quad (2.2.77)$$

що дозволяє привести функцію (2.2.76) для когерентного розсіювання до простого вигляду:

$$F(u, t) = G(u) F_s(u, t), \quad (2.2.78)$$

де: $F_s(u, t)$ задана формулами (2.2.728) або (2.2.73), а $G(u)$ - функція Цернике і Принса.

Підставляючи (2.2.78) у (2.2.65), отримуємо:

$$F(u, t) = [1 + G(u)] F_s(u, t) = F(u, 0) F_s(u, t), \quad (2.2.79)$$

звідки випливає, що врахування взаємодії частинок відповідно до моделі Віньярда не змінює часової залежності функції кореляції. Це означає, що в наближенні Віньярда взаємодія частинок впливає тільки на інтенсивність спектральної лінії і не змінює її форму, визначену (2.2.74).

2.2.2.9. Функція кореляції другого порядку

Функцію кореляції другого порядку для інтенсивності розсіяного світла можна записати у вигляді:

$$K_R^{(2)}(u, t) = N^2 \langle |A|^2 \rangle F^{(2)}(u, t), \quad (2.2.80)$$

де введена проміжна функція другого порядку :

$$F^{(2)}(u, t) = N^{-2} \left\langle \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \exp[-iu(r_p^0 - r_q^0 + r_r^t - r_s^t)] \right\rangle. \quad (2.2.81)$$

Розглянемо цю функцію у випадку частинок, положення яких статистично незалежні. Тоді тільки три складові, для яких $p = q = r = s$, $p = q \neq r = s$ та $p = s \neq q = r$ відмінні від нуля. Інші доданки дорівнюють нулю, оскільки вони

містять інтерференційні множники типу $\exp(iur_i)$ або $\exp[iu(r_i + r_0)]$, що зрівнюються з нулем при усередненні з функцією розподілу, останнє залежить тільки від модуля $|r_i - r_0|$. Отже, функція зводиться до вигляду:

$$F_s^{(2)}(u, t) = 1 + (1 - N^{-1})|F_s(u, t)|^2. \quad (2.2.82)$$

Якщо прийняти модель трансляційної дифузії частинок, для якої функція $F_s(u, t)$ має вигляд (2.2.72), то очевидно, що функція (2.2.82) відрізняється від результату (2.2.75) складовою, пропорційною N^{-1} . Це так звана негауссівська поправка, що прямує до нуля при $N \rightarrow \infty$. Тому для великої кількості частинок знаходимо:

$$F_s^{(2)}(u, t) = 1 + |F_s(u, t)|^2, \quad (2.2.83)$$

що збігається з (2.2.75) у випадку гаусівського процесу.

Звичайно, повний аналіз функції (2.2.81) потребує врахування взаємодії між частинками, а також врахування флуктуації кількості частинок у часі.

НЕ 2.3. ДИФРАКЦІЯ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ В ПРОСТИХ ОПТИЧНИХ СИСТЕМАХ

Раніше ми розглянули одну з найпростіших статистичних дифракційних задач - дифракцію *детермінованої* плоскої і монохроматичної хвилі на нескінченному і статистично однорідному *хаотичному* екрані. Тут ми звернемось до дифракції *випадкових* полів на *детермінованих* об'єктах. В основному ми будемо мати на увазі хвильові пучки, що слабо розходяться. Частіше всього вони зустрічаються в оптичних і квазіоптичних системах.

2.3.1. Проходження випадкової хвилі через отвір в екрані.

Теорема Ван-Циттерта —Церніке.

Нехай $v(\omega, \rho) = u_n(\omega, \mathbf{r})|_{z=0}$ - спектральна амплітуда поля, яке створюється будь-яким джерелом в площині $z=0$. Якщо помістити в цій площині непрозорий екран з отвором S , що вирізає пучок хвиль кінцевого

діаметру, то безпосередньо за екраном утворюється поле «на виході» $u_B(\omega, \rho)$, яке в наближенні Кірхгофа рівне

$$u_B(\omega, \rho) = \begin{cases} v(\omega, \rho) & \text{на } S, \\ 0 & \text{вне } S. \end{cases}$$

Це поле можна записати через функцію пропускання отвору:

$$u_B(\omega, \rho) = M(\rho) v(\omega, \rho), \quad (2.3.1)$$

вважаючи, що

$$M(\rho) = \begin{cases} 1 & \text{на } S, \\ 0 & \text{вне } S. \end{cases} \quad (2.3.2)$$

У випадку плавних (в масштабі довжини хвилі) флуктуації граничного поля $v(\omega, \rho)$ для обчислення поля за отвором можна скористатись френелівським наближенням, яке з врахуванням (2.3.1) дає

$$u(\omega, \mathbf{r}) = \frac{ke^{ikz}}{2\pi iz} \int_{-\infty}^{\infty} M(\rho') v(\omega, \rho') \exp\left[\frac{ik}{2z}(\rho - \rho')^2\right] d^2\rho'. \quad (2.3.3)$$

Середнє по ансамблю джерел значення $v(\omega, \rho)$ рівне нулю, внаслідок чого і

$$\langle u(\omega, \mathbf{r}) \rangle = 0. \quad (2.3.4)$$

Обчислимо *поперечну* функцію когерентності дифракційного поля, тобто функцію когерентності в площині $z = \text{const}$. Відповідно з (2.3.3) маємо

$$\begin{aligned} \Gamma_{\perp}(\omega, \rho_1, \rho_2, z) &= \langle u(\omega, \rho_1, z) u^*(\omega, \rho_2, z) \rangle = \\ &= \left(\frac{k}{2\pi z}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(\rho') M(\rho'') \Gamma_v(\omega, \rho' - \rho'') \times \\ &\quad \times \exp\left\{\frac{ik}{2z}[(\rho_1 - \rho')^2 - (\rho_2 - \rho'')^2]\right\} d^2\rho' d^2\rho'', \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

де $\Gamma_v(\omega, \rho' - \rho'')$ - просторова функція когерентності граничного поля $v(\omega, \rho)$, яке вважається статистично однорідним. Просторово-часові функції когерентності полів $u(t, \mathbf{r})$ і $v(t, \rho)$ пов'язані з $\Gamma_{\perp}(\omega, \rho_1, \rho_2, z)$ і $\Gamma_v(\omega, \rho' - \rho'')$ перетвореннями Фур'є, наприклад:

$$\Gamma_{\perp}(\tau, \rho_1, \rho_2, z) = \int_0^{\infty} \Gamma_{\perp}(\omega, \rho_1, \rho_2, z) e^{-i\theta\omega\tau} d\omega \quad (2.3.6)$$

В силу (2.3.4) всі ці функції когерентності співпадають з відповідними функціями кореляції.

Не конкретизуючи вигляд функції когерентності (кореляції) граничного поля, інтеграл (2.3.5) можна обчислити в двох граничних випадках - при великих і малих розмірах отвору a порівняно з радіусом кореляції l_v (але завжди при $a \gg \lambda$).

При $a \ll l_v$ (малий отвір) функція когерентності граничного поля Γ_v практично постійна в межах отвору і її можна винести за знак інтегралу з значенням $\Gamma_v(\omega, 0) \equiv \bar{I}_v(\omega)$ В результаті

$$\Gamma_{\perp}(\rho_1, \rho_2, z) = \bar{I}_v u_M(\rho_1, z) u_M^*(\rho_2, z), \quad (2.3.7)$$

де поле $u_M(\rho, z)$ дається виразом

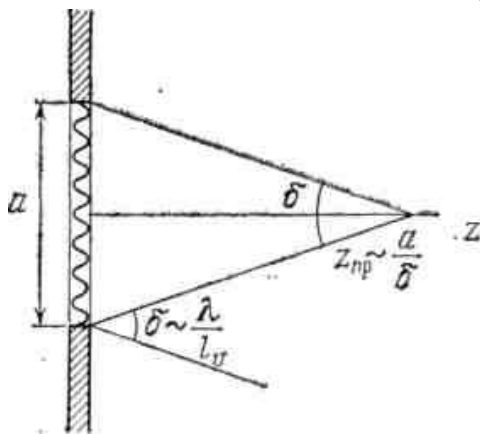
$$u_M(\rho, z) = \frac{ke^{ikz}}{2\pi iz} \int M(\rho') \exp\left[\frac{ik}{2z}(\rho - \rho')^2\right] d^2\rho' \quad (2.3.8)$$

і представляє собою дифракційне поле з отвором при нормальному падінні на нього плоскої хвилі одиничної амплітуди. Коефіцієнт кореляції при дифракції на малому отворі рівний

$$K_{\perp}(\rho_1, \rho_2, z) = \frac{\Gamma_{\perp}(\rho_1, \rho_2, z)}{\sqrt{\Gamma_{\perp}(\rho_1, \rho_1, z) \Gamma_{\perp}(\rho_2, \rho_2, z)}} = \frac{u_M(\rho_1, z) u_M^*(\rho_2, z)}{|u_M(\rho_1, z)| |u_M(\rho_2, z)|},$$

так що $|K_{\perp}| = 1$. Це означає, що випадкова хвиля, яка пройшла через малий отвір, породжує *просторово когерентне* поле. До створення лазерів пропускання світла через малий отвір (поряд з використанням малих джерел світла) було практично єдиним способом отримання просторово когерентного світла. Цим способом користуються і тепер, якщо не потрібна висока інтенсивність поля.

Звернемось до іншого граничного випадку $a \gg l_v$ (*широкий отвір*). Перш за все відмітимо, що поблизу отвору є область, в якій функція кореляції буде такою ж, як і при відсутності непрозорого екрану. Форму і розміри цієї області можна оцінити, використовуючи спектральне представлення. Ширина двомірного спектру $F_v(\vec{\kappa})$ випадкового поля v має порядок $\kappa_v \sim 1/l_v$, або в перерахунку на кути, Тому $\delta \sim \kappa_v/k \sim \lambda/l_v$. якщо точки спостереження r_1 і r_2 знаходяться всередині конуса з основою a і кутом при вершині δ (рис. 2.3.1), то поле «не відчує» впливу країв діафрагми. Для всіх точок всередині цього



конуса поперечна функція кореляції буде такою ж, як у граничного поля:

$$\Gamma_{\perp}(\rho_1, \rho_2, z) = \Gamma_v(\rho_1 - \rho_2).$$

Гранична дистанція z_{np} , на якій ще справедливе це співвідношення, оцінюється як

$$z_{np} \sim \frac{a}{\delta} \sim \frac{al_v}{\lambda} \sim kal_v. \quad (11.9) \quad (2.3.9)$$

Рис. 2.3.1.

При $a \gg l_v$; ця дистанція відповідає *дальній зоні* по відношенню до розміру неоднорідностей l_v , так як

$$\frac{z_{np}}{kl_v^2} \sim \frac{a}{l_v} \gg 1,$$

і *ближній зоні* по відношенню $\frac{z_{np}}{ka^2} \sim \frac{l_v}{a} \ll 1$ до розміру отвору a :

Звідси, зокрема, впливає практично важливий висновок, що розподіл флуктуацій поля за отвором нормалізується ще в ближній зоні апертури a .

Обчислимо інтеграл (2.3.5) при $z \gg z_{np}$. Для цього перейдемо до нових змінних $\xi = \rho' - \rho''$ і $\eta = (\rho' + \rho'')/2$ і позначимо напівсуму $(\rho_1 + \rho_2)/2$ через ρ_+ , а різницю $(\rho_1 - \rho_2)$ - через ρ .

Тоді (2.3.5) приймає вигляд:

$$\Gamma_{\perp}(\rho, \rho_+, z) = \left(\frac{k}{2\pi z}\right)^2 \exp\left(\frac{ik\rho\rho_+}{z}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M\left(\eta + \frac{\xi}{2}\right) M\left(\eta - \frac{\xi}{2}\right) \Gamma_v(\xi) \times \\ \times \exp\left\{\frac{ik}{z}[\xi\eta - \eta\rho - \xi\rho_+]\right\} d^2\xi d^2\eta.$$

Область інтегрування по ξ обмежена тут нерівністю $\xi \leq l_v \ll a$, так як при $\xi \gg l_v$ функція кореляції $\Gamma_v(\xi)$ близька до нуля. В той же час $\eta \leq a$, оскільки при $\eta > a$ перетворюється в нуль добуток $M(\eta + \xi/2) M(\eta - \xi/2) \approx M^2(\eta) = M(\eta)$. Тому перший доданок в показнику експоненти обмежено зверху нерівністю $k\xi\eta/z \leq kal_v/z \sim z_{np}/z$. При $z \gg z_{np}$ цим доданком можна знехтувати, і тоді інтеграл по ξ і η розділяються

$$\Gamma_{\perp}(\rho, \rho_+, z) = \left(\frac{k}{2\pi z}\right)^2 \exp\left(\frac{ik\rho\rho_+}{z}\right) \int_{-\infty}^{\infty} d^2\eta M(\eta) \exp\left(-\frac{ik\eta\rho}{z}\right) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} d^2\xi \Gamma_v(\xi) \exp\left(-\frac{ik\xi\rho_+}{z}\right). \quad (2.3.10)$$

Точно такий вираз можна отримати і для поля у фраунгоферовій зоні:

$$u(\rho, z) = \frac{k \exp\left[ik\left(z + \frac{\rho^2}{2z}\right)\right]}{2\pi iz} \int_{-\infty}^{\infty} M(\rho') v(\rho') \exp\left(-\frac{ik\rho\rho'}{z}\right) d^2\rho'. \quad (2.3.11)$$

Однак наближення (2.3.11) справедливе лише в дальній зоні $z \gg ka^2$, а формула (2.3.10) може застосовуватись і на значно менших дистанціях $z \gg z_{np} \sim kal_v$. Іншими словами, функція когерентності (2.3.10) формується ще в ближній зоні по відношенню до отвору.

Залежність функції когерентності (2.3.10) від поперечних координат $\rho = \rho_1 - \rho_2$ и $\rho_+ = (\rho_1 + \rho_2)/2$ визначається добутком трьох множників. Множник перед інтегралом

$$\exp\{ik\rho\rho_+/z\} = \exp\{ik(\rho_1^2 - \rho_2^2)/2z\} \approx \exp\{ik(r_1 - r_2)\}$$

виникає просто через те, що сферичні хвилі, що покидають отвір, не узгоджені з плоскою формою поверхні $z = \text{const}$, на якій розглядається кореляція поля.

Якщо взяти кореляцію на сфері $r = \text{const}$, цей множник перетворюється в одиницю.

Інтеграл по η в (2.3.10), який залежить лише від різниці $\rho = \rho_1 - \rho_2$ характеризує поле когерентного джерела з розподілом амплітуди $M(\eta)$. При розмірі отвору a кутова ширина діаграми направленості такого випромінювача має порядок λ/a , а лінійна ширина центрального дифракційного пелюстка в площині $z = \text{const}$ рівна $\Delta\rho \sim \lambda z/a$. Звідси для поперечного радіуса кореляції зразу ж впливає, що

$$l_{\perp} \sim \frac{\lambda z}{a} \sim \frac{\lambda}{\gamma}, \quad (2.3.12)$$

де $\gamma \sim a/z$ - кутовий розмір отвору з точки спостереження.

Як і ширина дифракційних пелюстків, поперечний радіус кореляції росте по мірі віддалення від площини $z = 0$. Збільшення радіуса когерентності геометрично пояснюється тим, що при віддаленні від отвору фазові фронти всіх елементарних сферичних хвиль можна вважати (з точністю до λ) співпадають на все більшій площі.

Другий інтеграл в (2.3.10) визначає просторовий розподіл середньої інтенсивності дифракційного поля. Вважаючи в (2.3.10) $\rho = 0$ і враховуючи, що інтеграл по η при $\rho = 0$ рівний площі отвору S , маємо

$$\bar{I}_u(\rho_+, z) = \frac{k^2 S}{(2\pi z)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_v(\xi) \exp\left(-\frac{ik\rho_+\xi}{z}\right) d^2\xi. \quad (2.3.13)$$

По припущенню масштаб l_v зміни функції Γ_v малий порівняно з поперечником отвору a . Тому ширина розподілу інтенсивності \bar{I}_u в площині z

$= \text{const}$, складає $\rho_+ \sim \lambda z/l_v$ (кутова ширина має порядок

$\rho_+/z \sim \lambda/l_v \sim 1/kl_v$), велика порівняно з поперечним радіусом кореляції

l_{\perp} :

$$\frac{\lambda z}{l_v} \gg l_{\perp} \sim \frac{\lambda z}{a} \quad (l_v \ll a).$$

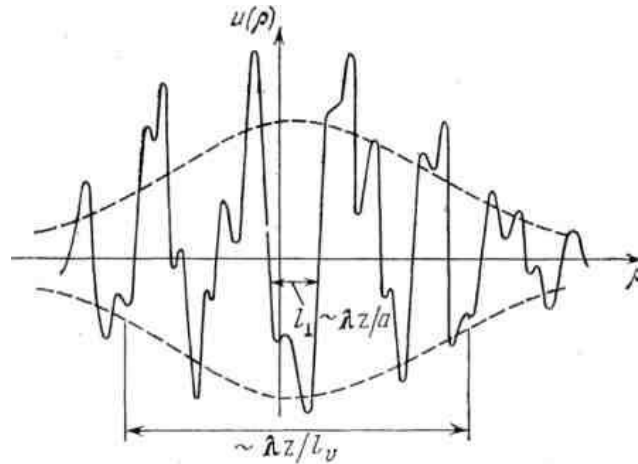


Рис.2.3.2.

Таким чином, ми маємо тут справу з прикладом квазіоднорідного (в площині $z = const$) поля. В даному випадку всі реалізації дифракційного поля за отвором представляють собою швидкі просторові осциляції з масштабом l_{\perp} і з розмахом порядку $\sqrt{\bar{I}_u(\rho)}$ (рис. 2.3.2).

Якщо розділити функцію когерентності (2.3.10) на середню інтенсивність дифракційного поля, то ми отримаємо коефіцієнт поперечної просторової кореляції поля

$$K_{\perp}(\rho) = \exp\left(\frac{ik\rho\rho_+}{z}\right) \mathcal{F}_M\left(\frac{k\rho}{z}\right),$$

де величина

$$\mathcal{F}_M(\kappa) = \frac{1}{S} \int_{-\infty}^{\infty} M(\eta) \exp(-i\kappa\eta) d^2\eta \quad (2.3.14)$$

представляє собою нормоване до одиниці ($\mathcal{F}(0) = 1$) перетворення Фур'є від $M(\eta)$ і одночасно - діаграму направленості отвору при нормальному падінні на нього плоскої монохроматичної хвилі. В окремому випадку круглого отвору, коли $M(\rho) = 1$ при $\rho < a$ і перетворюється в нуль поза цим колом,

$$\mathcal{F}_M(\kappa) = 2J_1(\kappa a)/\kappa a,$$

де $J_1(\kappa a)$ — функція Беселя першого порядку.

В межах, коли радіус кореляції граничного поля l_v малий порівняно з довжиною хвилі, інтеграл по ξ перестає залежати від ρ_+ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_v(\xi) \exp\left(-\frac{ik\rho+\xi}{z}\right) d^2\xi \approx \bar{I}_v S_v \quad (l_v \ll \lambda).$$

Через S_v тут позначена ефективна площа когерентності граничного поля:

$$S_v = \frac{1}{\bar{I}_v} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_v(\xi) d^2\xi = \int_{-\infty}^{\infty} K_v(\xi) d^2\xi, \quad (2.3.15)$$

яка по порядку величини рівна l_v^2 . В результаті при $l_v \ll \lambda$ із (2.3.10) витікає так звана *теорема Ван-Циттерта-Церніке*:

$$\Gamma_v(\rho, \rho_+, z) = \frac{1}{z^2} \exp\left(\frac{ik\rho\rho_+}{z}\right) \int_{-\infty}^{\infty} J(\rho') \exp\left(-\frac{ik\rho\rho'}{z}\right) d^2\rho'. \quad (2.3.16)$$

Величину, яка сюди входить

$$J(\rho') = \frac{k^2}{4\pi^2} \bar{I}_v S_v M(\rho') \quad (2.3.17)$$

Називають *приведеною інтенсивністю*.

Згідно з теоремою Ван-Циттерта-Церніке модуль поперечної функції когерентності Γ_{\perp} залежить від різниці $\rho = \rho_1 - \rho_2$ так, як і поле в зоні Фраунгофера, яке створюють повністю когерентні джерела з розподілом амплітуди, пропорційним $J(\rho')$. Від звичайних дифракційних формул вираз (2.3.16) відрізняється в двох відношеннях. По-перше, квадратична по полю величина Γ_{\perp} обернено пропорційна квадрату (а не першій степені) відстані. По-друге, цей вираз разом з початковою формулою (2.3.10) можна також застосовувати, як уже відзначалось, на дистанціях $z \gg z_{\text{пр}}$, причому в межах $l_v \ll a$ величина $z_{\text{пр}}$ порівняна з a , тоді як діаграма когерентного джерела з поперечником a формується на значно більших дистанціях $z \gg ka^2 \gg z_{\text{пр}} \sim a$.

Звичайно теорему Ван-Циттерта-Церніке (2.3.16) отримують шляхом формального введення дельта-корельованих флуктуацій граничного поля, вважаючи в (2.3.5) або в (2.3.10)

$$\Gamma_v(\rho - \rho') = \bar{I}_v(\rho') \delta(\rho' - \rho'') S_v, \quad (2.3.18)$$

при цьому у виразі (2.3.16) для приведеної інтенсивності замість добутку $\bar{I}_v M(\rho')$ виникає змінна інтенсивність $\bar{I}_v(\rho')$. Джерело з незалежними значеннями поля в як завгодно близьких точках називають просторово некогерентним.

Уявлення про просторово некогерентне джерело являється ідеалізацією, яка має обмежену область застосування. Справа в тому, що поле біжучих хвиль по самій своїй природі не може бути дельта-корельорованим в просторі, оскільки масштаб зміни поля l_v не может бути менше довжини хвилі λ). Тому в постановці задачі, яку ми розглядаємо, (дифракція випадкового поля на отворі) перехід до границі $l_v \rightarrow 0$ являється, строго кажучи, незаконним, що ставить справедливість виводу теореми Ван-Циттерта-Церніке на основі (2.3.18) під сумнів.

Результати, отримані вище для просторової кореляції спектральних амплітуд, у випадку квазімонохроматичного поля зберігає силу і для самих полів. Дійсно, згідно (2.3.6) просторова кореляційна функція рівна

$$\begin{aligned} \Gamma_{\perp}(\tau=0, \rho_1, \rho_2, z) &= \int_0^{\infty} \Gamma_{\perp}(\omega, \rho_1, \rho_2, z) e^{i\omega\tau} d\omega |_{\tau=0} = \\ &= \int_0^{\infty} d\omega \left(\frac{k}{2\pi z}\right)^2 \exp\left(\frac{ik\rho\rho_+}{z}\right) \int_{-\infty}^{\infty} d^2\xi \Gamma_v(\omega, \xi) \exp\left(-\frac{ik\xi\rho_+}{z}\right) \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} d^2\eta M(\eta) \exp\left(-\frac{ik\eta\rho}{z}\right). \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

Для квазімонохроматичного поля функція $\Gamma_v(\omega, \xi)$ зосереджена у вузькій смузі частот $\Delta\omega$ поблизу частоти ω_0 . Тому наближено ($k_0 = \omega_0/c$)

$$\begin{aligned} \Gamma_{\perp}(\tau=0, \rho_1, \rho_2, z) &= \\ &= \left(\frac{k_0}{2\pi z}\right)^2 \exp\left(\frac{ik_0\rho\rho_+}{z}\right) \int_{-\infty}^{\infty} d^2\xi \Gamma_v(\tau=0, \xi) \times \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{ik_0\xi\rho_+}{z}\right) \int_{-\infty}^{\infty} d^2\eta M(\eta) \exp\left(-\frac{ik_0\eta\rho}{z}\right), \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

де

$$\Gamma_v(\tau=0, \xi) = \int_0^{\infty} \Gamma_v(\omega, \xi) e^{i\omega\tau} d\omega |_{\tau=0} = \Delta\omega_{\text{эфф}} \Gamma_v(\omega_0, \xi)$$

- просторова функція кореляції граничного поля, а $\Delta\omega_{\text{эфф}}$ - ефективна ширина смуги частот.

Перехід від (2.3.19) до (2.3.20) можливий при виконанні нерівності

$$\left| \frac{\Delta k}{z} (\rho\rho_+ - \xi\rho_+ - \eta\rho) \right| = \frac{\Delta k}{2z} |(\rho_1 - \rho')^2 - (\rho_2 - \rho'')^2| \ll 1, \quad (2.3.21)$$

фізичний зміст якої полягає в тому, що різниця ходу хвиль від різних частин отвору повинна бути мала порівняно з довжиною когерентності

$$l_k = c\tau_k \sim c/\Delta\omega$$

Прості оцінки показують, що для виконання нерівності (2.3.21) достатньо умови квазімонохроматичності ($\Delta\omega \ll \omega_0$) і умови $\rho_+ \ll a$, яка вимагає, щоб «центр ваги» точок спостереження $\rho_+ = 1/2(\rho_1 + \rho_2)$ не виходив за межі отвору a .

2.3.2. Фокусування випадкових хвиль.

Дифракційну картину у фокусі лінзи можна отримати з попередніх результатів за допомогою простих перетворень, оскільки поле у фокальній площині лінзи подібне полю отвору на безмежності.

Нехай у отворі непрозорого екрану знаходиться тонка лінза з головною фокусною відстанню F . Дію лінзи можна описати, ввівши під знак інтегралу в (2.3.3) фазовий множник $\exp\{-ik\rho'^2/2F\}$:

$$u(\mathbf{r}) = \frac{keikz}{2\pi iz} \int_{-\infty}^{\infty} M(\rho') v(\rho') \exp\left(-\frac{ik\rho'^2}{2F}\right) \exp\left(\frac{ik(\rho - \rho')^2}{2z}\right) d^2\rho'. \quad (2.3.22)$$

В головній фокальній площині $z = F$ показник експоненти спрощується і поле $u(\rho, F)$ виражається просто перетворенням Фур'є від $M(\rho') v(\rho')$:

$$u(\rho, F) = \frac{k \exp\left[ik\left(F + \frac{\rho^2}{2F}\right)\right]}{2\pi i F} \int_{-\infty}^{\infty} M(\rho') v(\rho') \exp\left(-\frac{ik\rho\rho'}{F}\right) d^2\rho'. \quad (2.3.23)$$

Від фраунгоферівського наближення (2.3.11) для поля отвору (без лінзи) вираз (2.3.23) відрізняється лише заміною z на F , так що формули для функцій кореляції повторюють відповідні вирази із п. 1. Так, при $a \ll l_v$ (малий отвір) розподіл інтенсивності у фокальній площині виявляється таким же, як і для просторово

когерентної площини хвилі. В протилежному випадку $a \gg l_v$ (великий отвір) розподіл інтенсивності може бути отриманий із (2.3.13):

$$\bar{I}_u(\rho_+, F) = \frac{k^2 S}{(2\pi F)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_v(\xi) \exp\left(-\frac{ik\rho_+\xi}{F}\right) d^2\xi \quad (a \gg l_v).$$

Розмір фокальної плями в цьому випадку дається виразом $\rho_\phi \sim \lambda l_v$ т. е. воно в a/l_v раз більше, ніж для детермінованого поля плоскої хвилі ($\rho_\phi \sim \lambda a$). Однак інтенсивність в центрі дифракційної картини тепер рівна

$$\bar{I}_u(\rho_+ = 0, F) \approx \frac{k^2 S S_v \bar{I}_v}{(2\pi F)^2},$$

що приблизно в $S/S_v \sim (a/l_v)^2$ раз менше, ніж при когерентному освітленні (малий отвір). Безумовно, повна інтенсивність, отримана інтегруванням I_u по всій площині $z = F$, в обох випадках однакова і рівна повній «вхідній» інтенсивності $\bar{I}_v \bar{S}$.

Як і при дифракції на отворі, розподіл інтенсивності для квазімонохроматичного поля виявляється практично таким же, як і для строго монохроматичної хвилі. Більше того, в оптиці навіть у випадку *білого світла*, у якого $\Delta\omega \sim \omega_0$, розподіл інтенсивності в площині $z = F$ лише незначно відрізняється від відповідної картини для монохроматичного поля. Саме тому при розгляді задач про формування оптичного зображення можливе нехтування ефектами, зумовленими часовою некогерентністю поля.

2.3.3. Про роль просторової когерентності освітлення у формуванні оптичного зображення.

Розглянемо саму просту оптичну систему, яка містить лише одну тонку лінзу (рис. 2.3.3). Напівпрозорий об'єкт, наприклад діапозитив, який

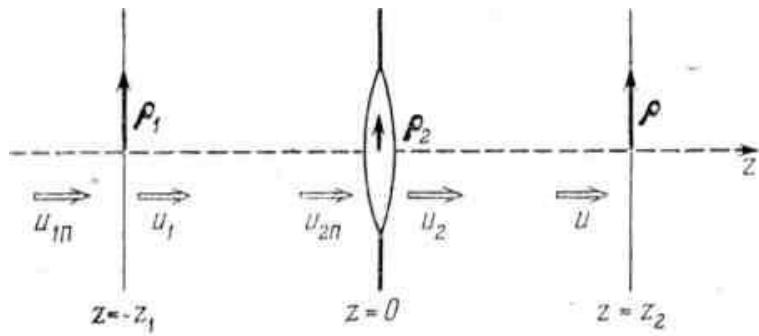


Рис. 2.3.3.

характеризується комплексним коефіцієнтом пропускання $f(\rho_1)$, розташований в предметній площині $z = -z_1$. При освітленні цього об'єкту зліва плоскою монохроматичною хвилею $u_{\text{пад}} = u_{\text{ін}}(\rho, z)$ безпосередньо за об'єктом створюється поле

$$u_1(\rho_1) = f(\rho_1) v(\rho_1), \quad v(\rho_1) \equiv u_{\text{ін}}(\rho, z)|_{z=-z_1}, \quad (2.3.24)$$

де ρ_1 - радіус-вектор точки в предметній площині.

В площині $z = 0$, де розташована лінза, утворюється поле $u_{2\text{н}}(\rho_2)$ (ρ_2 — вектор в площині $z = 0$), яке у френелівському наближенні рівне

$$u_{2\text{н}}(\rho_2) = \frac{ke^{ikz_1}}{2\pi iz_1} \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\rho_1) \exp\left[\frac{ik(\rho_2 - \rho_1)^2}{2z_1}\right] d^2\rho_1. \quad (2.3.25)$$

«На виході» лінзи виникає поле

$$u_2(\rho_2) = u_{2\text{н}}(\rho_2) M(\rho_2) \exp\left(-\frac{ik\rho_2^2}{2F}\right) \quad (2.3.26)$$

Вираз (2.3.28) представляє собою частковий випадок більш загальної формули

$$u(\rho) = \int v(\rho_1) f(\rho_1) \mathcal{P}(\rho, \rho_1) d^2\rho_1, \quad (2.3.29)$$

яка зв'язує поле в предметній площині довільної оптичної системи з опромінюючим полем $v(\rho_1)$ і функцією пропускання об'єкту $f(\rho_1)$. Функцію $\mathcal{P}(\rho, \rho_1)$ називають *апаратною функцією* системи. Характерний масштаб змін апаратної функції в площині зображення (тобто по ρ) - це радіус дифракційної плями, що відповідає точковому об'єкту, а масштаб змін

$\mathcal{P}(\rho, \rho_1)$ по аргументу ρ_1 визначає розмір області в площині предмета, який дає помітний вклад в поле в даній точці площини зображення. Іншими словами, це межа роздільної здатності оптичної системи.

У випадку однолінзової системи з круглою діафрагмою апаратна функція рівна

$$\mathcal{P}(\rho, \rho_1) = -\frac{k^2 S \exp [ik(z_1 + z_2 + \rho^2/2z_2 + \rho_1^2/2z_1)]}{4\pi^2 z_1 z_2} \frac{2J_1(\kappa a)}{\kappa a}, \quad (2.3.30)$$

де $\kappa = k|\rho/z_2 + \rho_1/z_1|$. Згідно (2.3.30) точковому об'єкту, розміщеному в точку ρ_{10} , відповідає дифракційна пляма з центром в точці $\rho_0 = -\rho_{10}z_2/z_1$. Відношення z_2/z_1 характеризує збільшення даної системи, а знак мінус відповідає перевернутому зображенню. Так як функція Бесселя $J_1(\kappa a)$ перший раз перетворюється в нуль при $\kappa a = 3,83$, характерним масштабом апаратної функції по ρ може служити радіус першого темного кільця Ейрі в дифракційному зображенні точкового об'єкту, рівний, $\frac{3,83}{ka} z_2 \approx 0,61 \lambda \frac{z_2}{a}$ тоді як масштаб змін по ρ_1 (з точністю до множника порядку одиниці - це релеївська межа розділення) дорівнює $\delta \equiv 0,61 \lambda \frac{z_1}{a}$.

При аналізі властивостей зображення ми будемо виходити із загальної формули (2.3.29), а окремий вигляд цієї формули (2.3.28) використаємо лише для ілюстрації загальних висновків. Згідно (2.3.29) при освітленні об'єктів частково когерентним світлом середня інтенсивність поля в площині зображення рівна

$$\bar{I}(\rho) = \int \Gamma_v(\rho', \rho'') f(\rho') f^*(\rho'') \mathcal{P}(\rho, \rho') \mathcal{P}^*(\rho, \rho'') d^2\rho' d^2\rho'', \quad (2.3.31)$$

Де

$$\Gamma_v(\rho', \rho'') = \langle v(\rho') v^*(\rho'') \rangle$$

- просторова функція когерентності первинного поля.

Для заданого об'єкта (функція f фіксована) характер розподілу інтенсивності в предметній площині залежить від співвідношення між радіусом когерентності первинного поля l_v (це характерний масштаб зміни функції когерентності Γ_v , розміром області розділення δ (характерний масштаб зміни апаратної функції по ρ_1) і розміром найменших деталей об'єкта ρ_{\min} .

Співвідношення між ρ_{\min} і δ визначається характеристиками відповідно об'єкта і оптичного приладу. Якщо вважати ці величини заданими, то діяти на зображення можна, лише міняючи l_v , тобто змінюючи характер опромінення.

Розглянемо граничні випадки $l_v \gg \rho_{\min}$, δ і $l_v \ll \rho_{\min}$, δ , які прийнято називати відповідно когерентним і некогерентним освітленням предмету. При когерентному освітленні ($l_v \gg \rho_{\min}$, δ) можна вважати, що в області, суттєвій для інтегрування в (2.3.31) (в цій області обидві функції $\mathcal{P}(\rho, \rho_1)$ і $\mathcal{P}(\rho, \rho_1)$ відмінні від нуля, так що $|\rho' - \rho''| \ll \delta$) і, функція когерентності $\Gamma_v(\rho' - \rho'')$ практично постійна (оскільки $|\rho' - \rho''| \ll \delta \ll l_v$). Виносячи її за знак інтегралу із значенням \bar{I}_v , где $\bar{I}_v = \Gamma_v(0)$ - інтенсивність опромінюючого поля, отримаємо

$$\bar{I}(\rho)_{\text{ког}} = \bar{I}_v \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho_1) \mathcal{P}(\rho, \rho_1) d^2 \rho_1 \right|^2 \quad (2.3.32)$$

Таку ж формулу можна отримати і безпосередньо з (2.3.31), якщо вважати первинне поле $v(\rho_1)$ когерентним на всій площині предмета. Із приведенного висновку видно, що вимога когерентності на всьому предметі є зайвою: для справедливості (2.3.32) достатньо, щоб первинне поле $v(\rho)$ було когерентним лише в межах області розділення δ .

В іншому граничному випадку некогерентного освітлення

($l_v \ll \rho_{\min}$, δ) суттєва для інтегрування область в (2.3.32) обмежена площею когерентності з лінійними розмірами

$|\rho' - \rho''| \ll l_v$. В межах цієї площі функції $f^*(\rho'')$ і $\mathcal{P}^*(\rho, \rho'')$ можна наближено замінити відповідно на $f^*(\rho')$ і $\mathcal{P}^*(\rho, \rho')$, і в результаті отримаємо

$$\bar{I}(\rho)_{\text{неког}} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\rho') \mathcal{P}(\rho, \rho')|^2 d^2 \rho' \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_v(\rho' - \rho'') d^2 \rho''$$

Внутрішній інтеграл рівний $\bar{I}_v S_v$, де, подібно (2.3.15), введена площа когерентності S_v рівна інтегралу від коефіцієнта кореляції первинного поля $K_v = \Gamma_v / \bar{I}_v$.

Таким чином, розподіл середньої інтенсивності в площині зображення при некогерентному освітленні дається виразом

$$\bar{I}(\rho)_{\text{ког}} = \bar{I}_v \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho_1) \mathcal{P}(\rho, \rho_1) d^2 \rho_1 \right|^2 \quad (2.3.33)$$

Формально цей вираз можна отримати з (2.3.31), вважаючи, як і в (2.3.18), первинне поле дельта-корельованим.

Формули (2.3.32) і (2.3.33) суттєво відрізняються. Можна сказати, що при когерентному (у вказаному вище сенсі, тобто при $l_v \gg \delta, \rho_{\min}$) освітленні відбувається перетворення самого комплексного коефіцієнту пропускання

$f(\rho_1)$ (з передаточною функцією $\sqrt{\bar{I}_v} \mathcal{P}(\rho, \rho_1)$), а при некогерентному освітленні ($l_v \ll \delta, \rho_{\min}$) перетворюється квадрат модуля $|f(\rho_1)|^2$ (з передаточною функцією $\bar{I}_v \bar{S}_v |\mathcal{P}(\rho, \rho_1)|^2$). Звідси випливає, що при некогерентному освітленні зображення не залежить від фази комплексної функції пропускання f , тоді як когерентне освітлення може виявити різкі варіації фази навіть при $|f| = \text{const}$. Наприклад, якщо на деякій лінії в площині предмета фаза скачком міняється на π , а $|f| = \text{const}$, то, як витікає з (2.3.32), в площині зображення на відповідній (спряженій) лінії інтенсивність $\bar{I}(\rho)_{\text{ког}}$ перетвориться в нуль і ми побачимо там темну полосу. Правда, при *плавній* (в масштабі δ) зміні модуля і аргумента коефіцієнта прозорості, тобто при $\rho_{\min} \gg \delta$, обидва види освітлення дають практично однакові зображення, так як в обох випадках розподіл інтенсивності в площині зображення $\bar{I}(\rho)$ пропорційно $|f(\rho_1)|^2$.

Вкажемо ще на дві відмінності між когерентним і некогерентним освітленням. По-перше, при однаковій інтенсивності освітлення I_v

інтенсивність в площині зображення при когерентному світлі буде більше, ніж при некогерентному, оскільки ширина кутового спектру у некогерентного освітлення більша, ніж у когерентного. По-друге, в граничних випадках освітлення виникають відмінності і у величині роздільної здатності: при некогерентному освітленні розмір найменших розрізними по Релею деталей дещо менше (приблизно на 30%), ніж при когерентному. Ця відмінність пов'язана просто з тим, що квадрат модуля $|\mathcal{P}(\rho, \rho_1)|^2$, який входить у формулу (2.3.33), міняється у функції від координати ρ_1 крутіше, ніж сама апаратна функція $\mathcal{P}(\rho, \rho_1)$ в формулі (2.3.32). В результаті при розділенні двох точкових об'єктів з центрами в точках ρ' і ρ'' провал між горбами в розподілі інтенсивності в площині зображення отримується більш глибоким, якщо світлові коливання в точках ρ' і ρ'' некогерентні. Провал можна зробити ще глибше, якщо добитися від'ємної кореляції поля, що освітлює в точках ρ' і ρ'' (від'ємні значення може приймати, наприклад, функція когерентності виду $2J_1(x)/x$, що відповідає диску, що рівномірно світиться або ж пучку світла, пропущеному через малий круглий отвір). Цей гарний по своїй ідеї спосіб збільшення роздільної здатності дає, на жаль, дуже незначний вииграш (всього лише на декілька процентів) порівняно з некогерентним опроміненням.

Статистичні задачі, які виникають в оптиці, звичайно, не вичерпуються наведеними прикладами. Серед інших проблем можна згадати просторову фільтрацію, статистичні питання, пов'язані з недосконалістю оптичних систем і із зернистістю фотоматеріалів, використання оптичних систем для кореляційного аналізу і т. п.

НЕ 2.4. СТОХАСТИЧНІ ТА ХАОТИЧНІ КОЛИВАННЯ

З погляду класичної теорії ймовірностей на природу випадкового, можна виділити наступні положення, що мають внутрішні протиріччя:

- існування проявів випадковості - аксіома;
- рухи детермінованої динамічної системи (що описуються нехай великою,

але все-таки кінцевою кількістю рівнянь) не можуть бути випадковими, тому що за теоремою Коші вони однозначно описуються початковими умовами;

- випадковість у фізичних статистичних об'єктах пояснюється дуже великою кількістю частинок і ступенів свободи.

З погляду сучасних уявлень випадковість - це властивість будь-якої фізичної системи, навіть детермінованої. Строгий поділ усіх проявів дії фізичних систем на детерміновані і випадкові не відповідає дійсності. Між детермінованістю і випадковістю, як двома крайніми поняттями, є щось середнє, що має строгі кількісні критерії. Це "щось" називають хаосом, стохастичністю, фізичним хаосом, динамічним хаосом, детермінованим хаосом. У деяких роботах термін "стохастичність" застосовується як синонім терміну "випадковість".

Ще більше плутанини у визначеннях просторового хаосу. Саме поняття хаосу, внаслідок історичних причин, зв'язують тільки з часом. Для просторових проявів хаосу існують визначення нерегулярності, просторової складності (complexity), аперіодичності (nonperiodicity) та інше.

Відкриття нерегулярних коливань у детермінованих динамічних системах різної природи (фізичних, механічних, технічних, хімічних, біологічних, екологічних і навіть економічних) стало одним із самих вагомих наукових досягнень останніх років. З'явилося багато теоретичних та експериментальних праць з цієї теми. Виділяються роботи: Ю.І. Неймарка та П.С. Ланда по дослідженню стохастичних та хаотичних коливань у різних системах, В.С. Аніщенко по стохастичним коливанням у радіофізичних системах, М.І. Рабіновича по розвитку турбулентності та інші. Дослідження часового та просторового хаосу в оптиці в основному стосується процесів у лазерних резонаторах та оптичної бістабільності. Ряд робіт присвячено вивченню просторового хаосу в полі випромінювання, дифрагованого на амплітудних фрактальних утвореннях. У цих працях зроблено тільки перші кроки по вивченню просторового хаосу в оптичному полі.

2.4.1. Динамічна система та її математична модель

Під динамічною системою розуміють будь-який об'єкт або процес, для якого однозначно визначено поняття стану як сукупності деяких величин у даний момент часу, та заданий оператор, який описує еволюцію початкового стану у часі. Опис динамічних систем може бути різним: за допомогою диференціальних рівнянь, дискретних відображень, за допомогою теорії графів і т.п. Вибір одного зі способів опису задає конкретний вид математичної моделі, який відповідає динамічній системі. Математична модель динамічної системи вважається заданою, якщо введено параметри (координати) системи, які визначають однозначно її стан, та вказано еволюційний оператор, який дозволяє вирішувати задачу визначення зміни стану в часі.

Динамічні системи можна класифікувати в залежності від виду оператора відображення: якщо оператор лінійний, то й система називається лінійною, якщо ж оператор нелінійний, то й система відповідно - нелінійна. Розрізняють неперервні та дискретні оператори й, відповідно, системи з неперервним та дискретним часом.

Серед широкого класу динамічних систем особливу роль відіграють системи, в яких можливі коливання. Коливна система називається лінійною або нелінійною в залежності від того, лінійна чи нелінійна система диференціальних рівнянь, яка її описує. Динамічну систему, яка моделюється скінченою кількістю звичайних диференціальних рівнянь, називають зосередженою або точковою системою. Вона описується за допомогою фазового простору кінцевої розмірності і характеризуються скінченою кількістю ступенів вільності. Одна й та сама система в різних умовах може розглядатися як зосереджена і як розподілена.

Математичні моделі розподілених систем - це диференціальні рівняння у частинних похідних, інтегральні рівняння або звичайні рівняння з аргументом із затримкою. Кількість ступенів вільності розподіленої системи нескінченна і потрібно мати нескінченну кількість даних для визначення її стану.

По енергетичній ознаці розрізняють консервативні та дисипативні

динамічні системи. Консервативні системи характеризуються незмінним у часі запасом енергії. У механіці їх називають гамільтоновими.

В основі гамільтонового підходу до опису динаміки фізичних систем лежать рівняння Гамільтона, які є системою звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dH}{dp_i}, \quad (2.4.1)$$

де $i = 1, 2, \dots, n$ і при $t = t_0$ виконуються початкові умови $q_i(t_0) = q_i^0$, $p_i(t_0) = p_i^0$. Змінні q_i та p_i називаються відповідно узагальненими координатами та узагальненими імпульсами, а їх сукупність $(q_i, p_i) = (\vec{q}, \vec{p})$ - канонічними змінними. Кількість n незалежних узагальнених координат називається числом ступенів вільності, а функція $H = H(\vec{q}, \vec{p})$, яка характеризує фізичний стан системи, називається функцією Гамільтона, або гамільтоніаном.

Рішення рівнянь (2.4.1) дозволяє визначити залежність $\vec{q}(t)$ та $\vec{p}(t)$ по їх початкових значеннях \vec{q}_0 та \vec{p}_0 . Цей еволюційний процес можна уявити, як рух точки у $2n$ -вимірному просторі з координатами \vec{q} та \vec{p} . Такий об'єднаний простір (\vec{q}, \vec{p}) називається фазовим простором системи, а точки цього простору - фазовими точками. Кожному миттєвому стану гамільтонової системи (2.4.1) відповідає фазова точка простору (\vec{q}, \vec{p}) , і кожній точці цього простору відповідає визначений та єдиний стан системи. Отже, динаміку системи (2.4.1) можна уявити як послідовну зміну положення фазових точок, тобто як рух цих точок у фазовому просторі. Траєкторії руху фазових точок називаються фазовими траєкторіями, або фазовими кривими. Сукупність фазових кривих у просторі (\vec{q}, \vec{p}) називають потоком.

Фазовий простір гамільтонових систем володіє трьома важливими властивостями:

1. У будь-який момент часу траєкторії, які описуються рівняннями (2.4.1), у фазовому просторі не перетинаються.
2. Зберігається об'єм будь-якої області фазового простору (теорема Ліувілля).

1. Неперервна границя S_0 , яка охоплює в момент часу t_0 деяку область D_0 фазового простору, з плином часу трансформується (не розриваючись) у неперервну границю S_t , яка охоплює ту область D_t , в яку еволюціонувала D_0 до моменту t .

2.4.2. Атрактори

Більшість систем, що вивчаються - біологічні, хімічні, екологічні тощо - дисипативні, тобто системи, для яких не виконується теорема Ліувілля та фазовий об'єм яких із часом не залишається постійним, а стискається.

Стискання фазового об'єму приводить до того, що при $t \rightarrow \infty$ всі рішення дисипативної системи будуть стягуватись до деякої підмножини фазового простору, який і називається атрактором. Зараз немає єдиної думки з приводу найкращого визначення атрактора.

Атрактори у вигляді станів рівноваги, граничних циклів або одномірних торів називають простими, або регулярними, підкреслюючи тим самим, що рухи на них відповідають уявленням про стійку, за Ляпуновим, детерміновану поведінку динамічної системи. Важливим результатом дослідів останніх років стало виявлення принципово нових типів рухів у динамічних системах. Таким рухам у фазовому просторі розмірності $N = 3$ відповідають складні множини, траєкторії зображуючих точок яких зображаються у вигляді нескінченної лінії, яка ніде не перетинається, причому при $t \rightarrow \infty$ траєкторія не залишає замкненої області й не прямує до траєкторії відомих типів простих атракторів. Такі траєкторії у математиці називають стійкими за Пуассоном, маючи на увазі факт повернення траєкторії з часом в окіл початкової точки. Д. Рюелем і Ф. Такенсом такий тип руху був названий дивним атрактором. Цей термін був одразу сприйнятий дослідниками для опису режиму нерегулярних автоколивань детермінованих динамічних систем. Стискання фазового об'єму дисипативної динамічної системи приводить до того, що фазові криві з плином часу стягуються до граничної множини - дивного атрактора і залишаються в цій області назавжди.

На самому ж атракторі рух нестійкий: будь-які дві траєкторії системи розходяться експоненціально швидко, залишаючись на дивному атракторі. Інакше кажучи, поведінка системи з дивним атрактором характеризується поєднанням глобального стискування фазового об'єму з локальною нестійкістю фазових траєкторій.

З дивним атрактором пов'язується реалізація складного нерегулярного (в розумінні відсутності періодичності) коливного режиму, який дуже подібний до наших уявлень про стаціонарні випадкові процеси. Але випадковий рух - непередбачуваний або передбачуваний з відповідною ймовірністю. У випадку дивного атрактора існує передбачуваність у розумінні детермінованості оператора еволюції $T_t(x)$. Тому для позначення складних "шумоподібних" автоколивань, математичним образом яких служить дивний атрактор, використовують терміни типу динамічна стохастичність, детермінований хаос та інші.

Принципова різниця регулярних та дивних атракторів динамічних систем полягає в наступному. Регулярні атрактори характеризуються асимптотичною стійкістю і за Ляпуновим і за Пуасоном. Для дивних атракторів стійкість за Пуасоном завжди супроводжується експоненціальною нестійкістю за Ляпуновим. Як наслідок, це приводить до розбігання близьких траєкторій (чутливості до малих змін початкових даних), а також до їх змішування.

Виникнення періодичних чи хаотичних просторових структур аналогічно виникненню періодичних чи стохастичних автоколивань, але з тією істотною різницею, що коли раніше була потрібна стійкість, то тепер потрібен сідловий характер рішення, погоджений, до того ж, з крайовими умовами. Необхідно відзначити також, що для виникнення рівноважної, періодичної чи хаотичної просторової структури її просторова протяжність повинна бути достатньо великою.

2.4.3. Кількісні характеристики стохастичних і хаотичних процесів

Для кількісного опису стохастичних і хаотичних рухів використовують

такі поняття, як розподіл ймовірностей, кореляційна функція, спектральна густина (спектр потужності), ляпуновські показники, ентропія та розмірнісні параметри.

2.4.3.1. Статистичні характеристики

При дослідженні стохастичних рішень диференціальних рівнянь постановка задачі Коші неправомірна, тому що вона ніколи не відповідає умовам експерименту (натурного або чисельного). Причина цього - принципова неможливість точного задання початкових умов.

Тому сформулюємо задачу статистичною мовою. Нехай у початковий момент часу заданий деякий розподіл ймовірностей, близький до δ -подібного. Якщо надалі цей розподіл принаймні не розширюється, то можна приблизно вважати його δ -функцією і в цьому наближенні розглядати задачу Коші. Рішення при цьому буде регулярним і передбачуваним. В іншому випадку, коли початковий розподіл розширюється і набуває кінцевої ширини навіть при прямуванні початкового розподілу до δ -функції, рішення є стохастичним.

Звідси випливає, що стохастичні рухи в динамічних системах є особливим типом випадкових процесів, і для їхнього опису зручно і правомірно користуватися звичайними статистичними характеристиками: розподілом ймовірностей, кореляційними функціями, спектральною щільністю.

Знання граничного розподілу ймовірностей $w(\vec{x})$ для динамічної системи, описуваної вектором \vec{x} , дозволяє обчислити кореляційну функцію процесу і зв'язану з нею теоремою Хінчина спектральну щільність. Для стохастичних рухів кореляційна функція з ростом часу спадає. Цей спад може мати як експоненціальний, так і степеневий характер.

Спектральні густини $S(\omega)$ також є досить інформативними характеристиками. Вимірюючи їх експериментально чи обчислюючи за допомогою комп'ютера, можна досить чітко виділяти момент початку хаотизації, а також моменти біфуркації при плавних змінах параметрів. Так, у випадку періодичного руху спектр складається з ряду еквідистантних ліній на частотах ω , 2ω , 3ω , ... При біфуркаціях подвоєння періоду з'являються додаткові лінії на

частотах $\omega/2$, $3\omega/2$, $5\omega/2$, тощо. При переході до квазіперіодичного руху, крім основної частоти ω_1 , з'являється друга несумірна з нею частота ω_2 , а також їхні лінійні комбінації. При хаотизації сигналу поряд з дискретним спектром з'являється фон, що поступово підсилюється, і, нарешті, спектр набуває суцільного характеру.

2.4.3.2. Розмірнісні параметри

Питання про природу стохастичного сигналу завжди дуже важливе і принципове, коли мова заходить про турбулентність. Всяка реальна система піддається дії зовнішніх шумів і, крім того, для неї характерні власні флуктуації. Тому твердження про те, що стохастичність сигналу визначається дією шумів або флуктуацій, чи навпаки, стохастичність даного руху є наслідком складної нелінійної детермінованої системи і не залежить від характеру присутніх у ній шумів, потребує експериментальних дослідів. Ідея обробки випадкових сигналів з метою хоча б приблизного відновлення властивостей породжуючих їх джерел були висловлені Ф.Такенсом. Вона ґрунтується на точці зору, що коли хаотичний сигнал генерується скінченномірною динамічною системою, то можливе спочатку відновлення відповідної граничної множини (зокрема, дивного атратора) у фазовому просторі, а потім - визначення на цій множині таких характеристик руху, як ентропія та розмірність. Суттєвий вклад у розвиток цих ідей та їх реалізацію був зроблений у 1983 році П. Грасбером та І. Прокаччіа. Було запропоновано взагалі не розглядати граничні множини у фазовому просторі, а всю діагностику будувати лише на обробці конкретної (достатньо довгої) часової реалізації досліджуваної фізичної величини.

Розмірність (руху чи реалізації) надзвичайно важлива характеристика випадкового процесу. З одного боку, вона дозволяє наблизитись до змісту поняття випадкового явища, з іншої - досить корисна для практичних задач, пов'язаних з обробкою сигналів та полів (їх кодуванням, розпізнаванням і т.д.). За допомогою традиційного аналізу випадкового сигналу звичайно нічого не можна сказати про його походження. Якщо ж визначити розмірність цього сигналу, то проблему вдається вирішити. Скінченна розмірність D означає, що

сигнал можна відтворити за допомогою динамічної системи порядку не більшого, ніж $2D+2.4$.

Отже, значення розмірності D дає оцінку кількості ступенів вільності середовища (поля), які беруть участь у формуванні стохастичного сигналу. Зі зростанням розмірності реалізації (прямування до нескінченності) хаотичний сигнал все більше наближається до абсолютно випадкового. З цієї точки зору джерело, яке ми звикли вважати випадковим, можна розглядати як рух динамічної системи на дивному атракторі нескінченної розмірності.

У літературі визначення розмірності підрозділяють на два типи: ті, які залежать від метричних властивостей атрактора, і ті, які залежать від статистичних властивостей потоку (ймовірнісна міра).

Будь-який окіл довільної точки дивного атрактора має досить складну тонку структуру і не може розглядатись як образ будь-якого евклідового простору. Звідси випливає, що дивні атрактори не можуть розглядатись як різноманітності, а їх розмірність не може характеризуватись цілим числом, тобто їх розмірність дробова.

Перед тим, як перейти до розгляду розмірності хаосу, введемо поняття топологічної ентропії. Топологічна ентропія системи визначається так. Припустимо, що ми можемо розрізняти точки фазового простору на відстані, що не перевищує деяку величину $\varepsilon > 0$. Розглянемо пучок траєкторій, що виходять з околу початкової точки радіусу ε . Тобто в початковий момент часу траєкторії не розрізняються. Позначимо кількість траєкторій у момент часу t , що розділяються через $N(\varepsilon, t)$. Топологічною ентропією називається величина:

$$h = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow 0} \ln(N(\varepsilon, t)) / t. \quad (2.4.2)$$

Топологічна ентропія характеризує ступінь розбіжності близьких фазових траєкторій. Якщо траєкторії з часом не розбігаються чи розбігаються недостатньо сильно (наприклад, за степеневим законом), то $h = 0$. В протилежному випадку $h > 0$.

У фізичній літературі, за величину h часто вибирають максимальний із

характеристичних показників Ляпунова. Ці показники використовують для визначення стійкості будь-яких типів поведінки системи в усталеному стані, включаючи й ті, яким відповідають квазіперіодичні й хаотичні розв'язки. Наведемо їх визначення.

Візьмемо фазову траєкторію $\bar{x}(t)$ динамічної системи (2.4.1), яка виходить з точки $\bar{x}(0)$, а також якусь траєкторію, близьку до неї: $\bar{x}_1(t) = \bar{x}(t) + \bar{\xi}(t)$.

Розглянемо функцію:

$$\Lambda(\bar{\xi}(0)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\xi}(t) / \bar{\xi}(0), \quad (2.4.3)$$

яка визначена на векторах початкового зміщення $\bar{\xi}(0)$ таких, що $|\bar{\xi}(0)| = \varepsilon$, при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Можна стверджувати, що при різних поворотах вектора $\bar{\xi}(0)$ функція Λ буде змінюватись стрибками і набувати кінцевий ряд значень $\{\lambda_j\}, j=1,2,\dots,n$. Ці значення називають (глобальними) показниками Ляпунова.

З іншого боку, для процесу $\bar{x}(t)$, що описує коливання стохастичного генератора, повинна існувати гранична густина ймовірностей. Покриємо аттрактор кубиками з ребрами довжиною $\varepsilon_i \leq \varepsilon$. Нехай кількість цих кубиків дорівнює $N(\varepsilon)$. Позначимо i -й кубик символом ε_i . Імовірність перебування зображуючої точки в кубіку ε_i дорівнює:

$$P_i = \int_{\varepsilon_i} w(\bar{x}) d\bar{x} \quad (2.4.4)$$

Згідно з Шеноном ентропія системи дорівнює:

$$H(\varepsilon) = -\inf_{\varepsilon_i} \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i \log_2 P_i \quad (2.4.5)$$

Величина $H(\varepsilon)$ характеризує невизначеність перебування зображуючої точки в кубиках ε_i . При зменшенні довжини ребер ε_i значення ентропії $H(\varepsilon)$ зростає. Однак може існувати границя:

$$\sigma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H(\varepsilon) / \log_2 \varepsilon^{-1} \quad (2.4.6)$$

Величина σ отримала назву інформаційної розмірності аттрактора чи

розмірності Реньї. Якщо границя (2.4.6) не існує, то вводиться поняття нижньої $\underline{\sigma}$ та верхньої $\bar{\sigma}$ інформаційної розмірності:

$$\underline{\sigma} = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} H(\varepsilon) / \log_2 \varepsilon^{-1} ,$$

$$\bar{\sigma} = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} H(\varepsilon) / \log_2 \varepsilon^{-1} . \quad (2.4.7)$$

Ентропія $H(\varepsilon)$ досягає найбільшого значення при рівності імовірностей $P_1 = P_2 = \dots = P_N = 1/N(\varepsilon)$, що дорівнює $\log_2 N(\varepsilon)$. У цьому випадку величина σ досягає свого максимального значення:

$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \log N(\varepsilon) / \log_2 \varepsilon^{-1} , \quad (2.4.8)$$

яке називають фрактальною розмірністю, або ємністю атрактора.

У випадках, коли аттрактором є точка, лінія чи двохмірна поверхня, значення d відповідно дорівнює 0, 1 чи 2. Однак у більш складних випадках величина d може бути дробовою.

Розглянуті вище інформаційна і фрактальна розмірності не єдині. Хаусдорф ввів наступне визначення розмірності, назване згодом його ім'ям.

Нехай у n -мірному просторі задана множина точок. Покриємо цей простір n -мірними кубиками з ребрами довжиною $\varepsilon_i \leq \varepsilon$ і визначимо величину

$$l = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} l_D(\varepsilon) , \text{ де:}$$

$$l_D(\varepsilon) = \inf \sum_i \varepsilon_i^D . \quad (2.4.9)$$

Хаусдорф показав, що існує критичне значення D , вище від якого $l_D = 0$, а нижче $l_D \rightarrow \infty$. Критичне значення $D = d_H$ при якому міра Хаусдорфа l_D скінченна, називається розмірністю Хаусдорфа. Можна показати, що розмірність Хаусдорфа d_H завжди менше фрактальної розмірності D_f .

Прямий безпосередній розрахунок хаусдорфової чи фрактальної розмірності за формулою (2.4.82) можливий тільки для стохастичних множин невеликої мірності. З ростом кількості ступенів вільності динамічної системи такий розрахунок сильно ускладнюється і стає неможливим. При цьому значно простіше обчислювати так звану кореляційну розмірність, що визначається через

кореляційний інтеграл виду:

$$C(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Theta(\varepsilon - |\vec{x}_i - \vec{x}_j|), \quad (2.4.10)$$

де Θ - функція Хевісайда, \vec{x}_i - вектор, що описує положення зображуючої точки у фазовому просторі в момент часу $t_0 + i\tau$, τ - деякий заданий проміжок часу, N - кількість виборок. Величина $C(\varepsilon)$ визначає відносну кількість пар точок, відстань між якими не більше ε . При малому ε , кореляційний інтеграл $C(\varepsilon) \sim \varepsilon^{D_c}$. Звідси випливає, що:

$$\nu = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\ln C_m(\varepsilon) / \ln \varepsilon]. \quad (2.4.11)$$

Хаусдорф показав, що інформаційна σ , фрактальна D_f і кореляційна D_c розмірності є окремими випадками так званої узагальненої розмірності d_q , а також звернено увагу на те, що значення D_c може бути використане для оцінки фрактальної розмірності атрактора знизу. Відомі також ляпуновська розмірність і розмірність Морі.

Існує гіпотеза, висунута Капланом і Йорке, згідно з якою фрактальна розмірність збігається з Ляпуновською розмірністю.

Визначимо розмірність за Ляпуновим.

Нехай числа $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ є показниками Ляпунова для якоїсь динамічної системи. Позначимо через j найбільше ціле число, для якого виконується нерівність $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j$. Тоді, згідно з визначенням, розмірність за Ляпуновим d_L має вигляд:

$$d_L = j + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j}{\lambda_{j+1}}. \quad (2.4.12)$$

У тримірній хаотичній системі з показниками Ляпунова $\lambda_+, 0, \lambda_-$, розмірність за Ляпуновим визначається у відповідності наступним простим виразом :

$$d_L = 2 + \frac{\lambda_+}{\lambda_-}. \quad (2.4.86)$$

Для атрактора виконується нерівність $\lambda_+ + \lambda_- < 0$, звідки випливає, що розмірність за Ляпуновим задовольняє нерівність $2 < d_L < 3$.

Для довільного стійкого граничного циклу справедливе співвідношення $0 = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, звідки, як і очікувалося, $j = 1, d_L = 1$. Аналогічно, розмірність за Ляпуновим d_L двомірного тору дорівнює 2.

2.4.3.3. Порівняння розмірностей

Поняття розмірності дуже зручне для класифікації атракторів. Простий атрактор (положення рівноваги, граничний цикл, тор) характеризується цілою розмірністю; у свою чергу, дивні атрактори мають дробову розмірність. Але в якому співвідношенні вони між собою знаходяться?

Поняття ємності є найбільш простим і виявляється корисним для ілюстрації змісту дробової розмірності. Але при використанні цього поняття атрактор розглядається як деякий нерухомий геометричний об'єкт та ігнорується той факт, що на ньому визначений відповідний динамічний потік. При проведенні експериментальних досліджень або моделюванні на ЕОМ атрактор не можна спостерігати безпосередньо і в процесі спостереження виявляються доступними лише деякі типові траєкторії, що реєструються за скінчені інтервали часу. Все це робить поняття ємності малоприматним для практичних ситуацій. При проведенні експериментальних досліджень шляхом моделювання на ЕОМ, використовуються три інші типи розмірностей, які ґрунтуються на ймовірнісних принципах.

Інформаційна розмірність σ передбачає виконання зважування кожного елемента об'єму з коефіцієнтом, який визначається ймовірністю відвідування його будь-якою траєкторією. Внаслідок цього ті елементи об'єму, відвідування яких відносно рідке, вносять малий вклад у розмірність σ . Отже, можна очікувати, що $\sigma = D_f$, причому рівність виконується в тих випадках, коли всі елементи об'єму характеризуються однаковою ймовірністю відвідування. Для точного обчислення значення розмірності σ необхідно, щоб система функціонувала впродовж достатньо довгого інтервалу часу; щоб будь-яка

конкретна траєкторія відвідала майже кожний елемент об'єму. Це приводить до того, що потрібний інтервал часу та отриманий об'єм експериментальних даних виявляються дуже великими.

Кореляційна розмірність виявляється більш придатною, ніж ємність, з тих самих причин, що й інформаційна розмірність. Можна показати, що для вказаних розмірностей $D_c = \sigma = D_f$.

Із самого визначення розмірності за Ляпуновим випливає, що вона трохи відрізняється від інших трьох типів. Насправді навіть не зрозуміло, чи можливо величину d_L розглядати як розмірність. Для визначення розмірності за Ляпуновим d_L необхідно провести обчислення всіх показників Ляпунова з додатним знаком і декількох показників Ляпунова з від'ємним знаком. Показники Ляпунова достатньо просто відшуковуються шляхом машинного моделювання, оскільки відповідне рівняння можна розв'язати, користуючись стандартними програмами інтегрування. Невідомими залишаються способи експериментального пошуку розмірності за Ляпуновим для всіх можливих систем, оскільки на теперішній час методи, які використовуються не дозволяють обчислювати від'ємні показники Ляпунова.

На закінчення цього короткого огляду необхідно зазначити, що знання розмірностних характеристик множин істотно для багатьох фізичних задач. Насамперед, розмірність дозволяє оцінити мінімальну кількість динамічних змінних, котрими може бути описаний рух на аттракторі, що особливо важливо для розподілених систем. Хаусдорфова розмірність аттрактора для розподілених систем, як правило, має скінченне значення. У роботі показано, що будь-яка компактна множина, що має скінченну хаусдорфову розмірність d_H , може бути взаємно однозначно спроектована на гіперплощину розмірності, не більшої ніж $2d_H + 1$.

2.4.3.4. Процедура Паккарда - Такенса для обчислення розмірності

Як уже зазначалося раніше, для систем з великою кількістю ступенів вільності, в тому числі нескінченномірних, безпосереднє обчислення

розмірностних характеристик є дуже складною, а часто і нездійсненною за допомогою наявних у розпорядженні засобів задачею. Тому практичний інтерес має порівняно проста обчислювальна процедура розрахунку кореляційного показника, запропонована Паккардом і Такенсом. Використання цієї процедури особливо зручне при обробці експериментальних результатів для розподілених систем, для яких просто неможливо визначити всі координати вектора $\vec{x}(t)$.

Суть процедури Паккарда - Такенса полягає в наступному.

Нехай x_1, x_2, \dots, x_n - послідовні значення однієї координати фазового простору системи $x(t)$ через проміжки часу τ , тобто $x_i = x(i\tau)$. З цих значень конструюється нова динамічна система розмірності m . Першим значенням вектора $\vec{y}^{(m)}$, що описує положення зображаючої точки в новому фазовому m -мірному просторі, вибирається вектор:

$$\vec{y}_i^{(m)} = \{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1}\}. \quad (2.4.14)$$

Відповідно до теореми Такенса, для будь-яких реалізацій $x(t)$ і часу затримки τ , аттрактор сконструйованої динамічної системи з розмірністю m буде мати ті ж самі властивості (наприклад, ту саму розмірність), що й вихідний, якщо тільки $m > 2d_H + 1$, де d_H - розмірність Хаусдорфа вихідного аттрактора. Замість змінних $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1}$ можна взяти $x(t), x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \dots, x^{(m-1)}(t)$.

Для кожного значення m можна тим чи іншим способом обчислити розмірність аттрактора сконструйованої динамічної системи. Спочатку з ростом m розмірність буде збільшуватися, а потім вона досягне свого постійного значення, яке можна прийняти за розмірність (вважати розмірністю) аттрактора вихідної системи.

При застосуванні цієї процедури особливо зручною виявляється оцінка розмірності аттрактора за допомогою кореляційного показника ν (названого в зарубіжній літературі кореляційним експонентом).

Для визначення ν на основі однієї з координат фазового простору $x(t)$, описаним вище способом конструюються, динамічні системи різних розмірностей m і обчислюються кореляційні інтеграли:

$$C_m(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Theta(\varepsilon - |\vec{y}_i^{(m)} - \vec{y}_j^{(m)}|). \quad (2.4.15)$$

Величину m варто збільшувати доти, поки нахил залежностей $\ln C_m(\varepsilon)$ від $\ln \varepsilon$ не досягне насичення.

У роботі запропоновано інший спосіб оцінки розмірності на основі процедури Паккарда - Такенса, узагальненої на випадок декількох вимірюваних змінних. При цьому як розмірність n , названу розмірністю вкладення, використовують кількість змінні, що однозначно визначають стан системи на аттракторі. Якщо як фазові змінних сконструйованої за допомогою зазначеної вище процедури динамічної системи обрані значення $\vec{y}_i^{(m)} = \{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1}\}$, то n визначається в такий спосіб. Якщо $m > n$, то змінна x_{i+m} повинна бути функцією попередніх m змінних, тобто $x_{i+m} = f(\vec{y}_i^{(m)})$. У протилежному випадку ($m < n$) x_{i+m} не є функцією цих змінних. Критерій оцінки функціональної залежності, запропонований у, наступний. У просторі векторів $\vec{y}_i^{(m)}$ вибирається сфера з радіусом ε і центром у точці $\vec{y}_c^{(m)}$ і розглядаються всі точки фазової траєкторії, що потрапили в середину цієї сфери при досить великих i . Якщо для цих точок змінна x_{i+m} виявляється віддаленою від значення x_m на відстань, що не перевищує деякої величини $d(\varepsilon)$, що зменшується разом зі зменшенням ε , то вважається, що x_{i+m} залежить від змінних y_i . У випадку відсутності залежності, величина $d(\varepsilon)$ не повинна залежати від ε . Розрахунки, виконані в роботі, показали, що розмірність вкладення, як і слід було очікувати, завжди більша від фрактальної розмірності d .

2.4.3.5. Короткий огляд експериментальних досліджень часового і просторового хаосу в оптиці

Вперше оптичний хаос спостерігався Ікедою в гібридному оптичному

бістабільному пристрої. Ікеда спостерігав подвоєння періоду і перехід до хаотичної зміни інтенсивності на виході пристрою в залежності від вхідної інтенсивності. Це досягалось шляхом введення у зворотний зв'язок затримки t_R , набагато більшої, ніж час відгуку середовища t_M . Нестійкість часової поведінки вихідної інтенсивності, названої згодом нестійкістю Ікеди, особливо цікава через подібність між хаотичними режимами в простих оптичних системах (оптичної турбулентності) і в набагато більш складних ситуаціях, зокрема в задачах гідродинаміки, хімічних, біологічних системах та ін. Зареєстрований в експерименті ланцюжок біфуркацій подвоєння періоду підтвердив співвідношення універсальності Фейгенбаума.

Після піонерської роботи з'явилося порівняно велика кількість експериментальних і теоретичних робіт різних авторів, присвячених оптичному хаосу в бістабільних системах. Нестійкості Ікеди і перехід до хаосу вивчалися також стосовно кільцевих резонаторів і бістабільних резонаторів типу Фабрі-Перо. Низку праць присвячено хаотичному поведженню пульсацій випромінювання газових та твердотільних лазерів. Досить повний огляд робіт, по дослідженню часового хаосу в нелінійній оптиці, починаючи з 1979 року, міститься в монографії Гіббса.

2.4.4. Фрактальні процеси та об'єкти

Геометричні образи та поняття займають важливе місце у фізичних дослідженнях. По-перше, фізичні властивості будь-яких об'єктів завжди тісно пов'язані з їх геометрією. Наприклад, фізичні властивості кристалів багато у чому визначаються геометрією їх кристалічних ґраток. По-друге, переважна більшість фізичних структур та процесів допускають геометричну інтерпретацію (наприклад, у вигляді графіків функцій, фазових траєкторій, та інше).

У кожному розділі фізики, для опису тих чи інших природних явищ застосовуються власні геометричні образи та поняття (наприклад: чотиривимірний простір, текстура, дислокація і т.п.). У переважній більшості

випадків у фізиці для побудови таких об'єктів використовуються традиційні геометрії: Евклідова, Ріманова, Лобачевського та інші.

Проте математики вже наприкінці XIX на початку XX століття у зв'язку з побудовою неперервних, ніде не диференційованих функцій, вивчали та вводили математичні поняття, що виходили за межі традиційної геометрії.

Зокрема, в останні часи широко вивчаються фрактали - геометричні об'єкти (лінії, поверхні та просторові тіла), що мають вирізьблену форму та володіють особливими властивостями однорідності та самоподібності. Термін "фрактал" походить від латинського слова *fractus*, що означає дробовий, ламаний. Підвищення зацікавленості до подібних об'єктів та усвідомлення їх важливого місця у фізиці пов'язані з ім'ям Б.Мандельброта, який ввів термін "фрактал" і загальне поняття фракталів. Всупереч сподіванням виявилось, що фрактал є не абстрактне геометричне поняття, а є адекватним образом багатьох природних об'єктів. Фрактали можуть плідно використовуватися у таких різноманітних розділах фізики, як теорія турбулентності та броунівського руху, фізика конденсованого стану та астрофізика, утворення кластерів та руйнування твердих тіл, теорія протікання у пористих тілах та процеси у блискавці і т.п..

Можна виділити наступні чотири групи фізичних явищ, для яких притаманні фрактальні властивості: агрегація, випадкові блукання та дифузія, явища протікання та перколяція, динамічний хаос. Фрактальний підхід у інших розділах фізики на сьогодні так чи інакше заснований на аналогіях з цією групою явищ та використовує розвинені для них моделі.

З точки зору оптики, перспективною є можливість діагностики фрактальних структур за дослідженнями поля дифрагованого випромінювання. Самостійний інтерес представляє дослідження фрактальних властивостей таких полів.

2.4.4.1. Поняття фракталу

Спершу фрактал був введений як геометричний об'єкт у звичайному фізичному просторі. Тому доцільно розглянути, як з'явилося поняття фракталу.

Почнемо з традиційного для теорії фракталів прикладу. Англійський фізик Л.Ф.Річардсон спробував здійснити заміри довжини лінії морського узбережжя острова Британія. Для визначення цієї довжини було обрано метод, який добре зарекомендував себе щодо звичайних гладких кривих. На досить великомасштабній карті досліджувана лінія узбережжя апроксимувалась замкненою ламаною, що була утворена з відрізків однакової довжини η , усі вершини якої розташовані на узбережжі. Довжина ламаної $L(\eta) = \eta N(\eta)$, де $N(\eta)$ - кількість відрізків ламаної, приймалася за наближене значення довжини узбережжя. Припускалося, що під довжиною морського узбережжя потрібно розуміти величину:

$$L = \lim_{\eta \rightarrow 0} L(\eta) . \quad (2.4.16)$$

Альтернативний спосіб полягає в тому, щоб покрити карту сіткою з квадратними комірками розміром $\eta \times \eta$ та підрахувати кількість комірок $N(\eta)$, які містять берегову лінію на карті. Зменшення η викликає збільшення числа комірок, необхідних для покриття лінії узбережжя. Якщо б лінія узбережжя була звичайною гладкою кривою, що має визначену довжину, то у цьому випадку слід було б чекати: $N(\eta) \sim 1/\eta$, а величина $L(\eta) = N(\eta)\eta \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} L_0$, де $L_0 = \text{const}$ - довжина лінії узбережжя, яку потрібно було знайти. Проте щодо узбережжя острова Британія виявилось, що не існує кінцевого значення L_0 , причому для всього діапазону значень η має місце співвідношення:

$$L(\eta) = \lambda \eta^{1-D} , \quad (2.4.17)$$

де: $\lambda > 0, D > 1$ - сталі.

Подібна поведінка апроксимуючої ламаної пов'язана з тим, що адекватним геометричним образом узбережжя є не звичайна гладка лінія (D для таких ліній дорівнює 1), що має цілком визначену довжину $L_0 = \lambda$, а фрактальна лінія з $D > 1$ та нескінченною довжиною. Аналогічні результати, з іншими значеннями λ і D , були отримані під час дослідження інших ліній узбережжя.

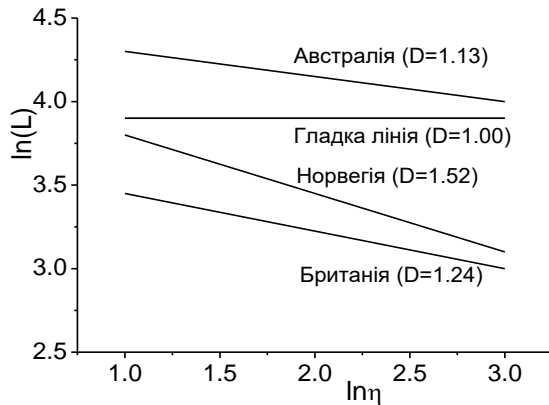


Рис.2.4.1. Залежність довжини апроксимуючої ламаної від довжини її ланцюжка для різних ліній

Графік залежності довжин апроксимуючих ламаних для цих ліній та звичайної гладкої лінії (кола) від довжини ланцюга апроксимуючої ламаної, побудований у подвійному логарифмічному масштабі зображено на рис.2.4.1. На цьому ж рисунку наведені значення параметра D , які визначають величину нахилу графіків. Безрозмірну величину D називають фрактальною (Хаусдорфовою) розмірністю.

Для обчислення фрактальної розмірності необхідно прологарифмувати ліву та праву частину формули (2.4.17) і спрямувати $\eta \rightarrow 0$. Перед цим необхідно перейти до безрозмірного масштабу, розділивши η на деякий масштаб довжини η_0 . Таким чином, мають місце співвідношення:

$$\ln \{L(\eta/\eta_0)\} = \ln \{\lambda(\eta/\eta_0)^{1-D}\} \Rightarrow \ln \{N(\eta/\eta_0)\} = \ln \{\lambda(\eta/\eta_0)^D\} \Rightarrow,$$

$$D = \frac{\ln(N) - \ln(\lambda)}{\ln(\eta_0) - \ln(\eta)}. \quad (2.4.18)$$

Оскільки, при $\eta \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$, $\ln(N) \gg \ln(\lambda)$, і $\ln(\eta_0) \ll \ln(\mu)$, то для обчислення фрактальної розмірності можна користуватися асимптотичною формулою:

$$D \approx \frac{\ln(N)}{\ln(1/\eta)}. \quad (2.4.19)$$

Під час дослідження будь-якої ділянки лінії узбережжя ми отримуємо те ж саме значення фрактальної розмірності, але менше значення λ , ніж для усієї лінії узбережжя. Таким чином, величину λ (фізична розмірність якої - довжина у дробовому степені D) можна визначати, як деяку міру лінії узбережжя (будь-якої іншої фрактальної лінії). Не дивлячись на те, що фрактальні лінії не мають довжини, різні ділянки таких кривих можна порівнювати за їх мірою. Розглянемо

дві ділянки однієї і тієї ж лінії узбережжя, яка характеризується фрактальною розмірністю D . Для довжин ламаних, що апроксимують ці ділянки можна записати $L_1(\eta) = \lambda_1 \eta^{1-D}$, $L_2(\eta) = \lambda_2 \eta^{1-D}$. Очевидно, що співвідношення цих довжин $L_1(\eta)/L_2(\eta) = \lambda_1/\lambda_2$ не залежить від довжини ланцюжка апроксимуючої ламаної - способу виміру лінії узбережжя, а залежить тільки від властивостей самої лінії узбережжя.

Постійність фрактальної розмірності вздовж усієї кривої не обов'язкова. Для того щоб неперервна крива була фрактальною, необхідно, щоб співвідношення (2.4.16) з $D > 1$ здійснювалось локально, поблизу кожної точки кривої. Фрактальні криві, для яких величина D постійна, називаються однорідними, якщо величина D змінюється, то такі фрактальні криві називаються неоднорідними.

Наведений вище приклад фрактальної лінії легко можна перенести на об'єкт будь-якої топологічної розмірності. Наприклад, у випадку фрактальних поверхонь, для їх покриття використовуються куби і тоді для величини хаусдорфової розмірності отримуємо $D > 2$.

Вище було введено поняття фракталу на прикладі лінії та поверхні - множини точок, які знаходяться у просторі. У загальному випадку для Хаусдорфової розмірності фрактальної множини отримуємо $D > D_T$, де D_T - його топологічна розмірність, що завжди дорівнює цілому числу (для лінії $D_T = 1$, для поверхні $D_T = 2$, для об'ємного тіла $D_T = 3$ і т. п.).

Таким чином, можна ввести наступне визначення фракталу (за Мандельбротом). Фракталом називається множина, Хаусдорфова розмірність якої строго більша за її топологічну розмірність.

Через те, що у поданому визначенні не конкретизується природа множини, фрактальні властивості можуть мати не тільки геометричні об'єкти - множини точок, але і множини довільного походження. Тому під час розгляду фракталів у фізиці можна говорити не тільки про опис конкретних властивостей геометричних об'єктів, а й про використання концепції фракталів.

Це визначення, виявилось, незадовільним у тому, що воно виключало безліч множин, які очевидно повинні бути віднесені до класу фракталів. Було запропоновано багато інших визначень, але усі вони мають ті чи інші недоліки.

Професор К. Фолкнер вважає, що термін 'фрактал' повинен визначатися подібно до того, як в біології визначається термін 'життя'. Не існує ніякого чіткого і точного його визначення, проте є список властивостей, що визначають живі істоти, наприклад: здатність до відтворення, руху або існування, до деякої міри, незалежно від навколишнього середовища. Більшість живих істот має перераховані властивості, хоча існують живі істоти, що є винятками. Таким же чином більш правильно і точніше розуміти під фракталом множину, що має певні властивості, аніж шукати точне визначення, яке, ймовірно, виключить деякі цікаві випадки.

Отже, коли ми вважаємо множину F фракталом, ми розуміємо, що вона має наступні властивості:

- 1) Множина F має тонку структуру, тобто деталі в малих масштабах.
- 2) Множина F занадто нерегулярна, щоб бути описаною на традиційній геометричній мові, і локально і глобально.
- 3) Часто множина F має наближену або статистичну самоподібність.
- 4) Звичайно, 'фрактальна розмірність' множини F (визначена деяким способом) більша за топологічну розмірність.
- 5) У більшості випадків складна множина F визначається дуже простим способом, можливо рекурсивно.

2.4.4.2. Приклади фракталів

Розглянемо найпростіші геометричні моделі однорідних детермінованих фрактальних множин, які є вихідними геометричними образами для реальних фізичних моделей і найчастіше використовуються для оптичних досліджень. Запишемо вирази для Хаусдорфової розмірності та розмірності подібності таких об'єктів.

2.4.4.2.1.Крива Коха

Тріадна крива Коха є однією з найпростіших геометричних моделей найпростіших фрактальних кривих. Розгляд цього об'єкту дає наочне уявлення про основні властивості фрактальних кривих. Для побудови кривої Коха береться відрізок довжиною L , який називається затравкою. При побудові замкненої кривої як затравка може використовуватись також будь-який правильний багатокутник з довжиною сторони L (наприклад, рівнобічний трикутник). Затравка - це нульове покоління кривої Коха. Для генерації першого

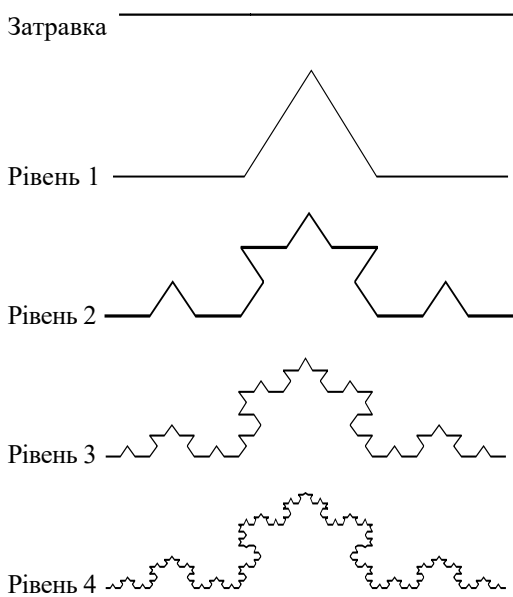


Рис.2.4.2. Тріадна крива Коха.

покоління кривої Коха кожна ланка затравки підлягає такій операції: відрізок, довжиною L поділяється на 3 рівні частини, середня частина вилучається і замінюється двома другими сторонами побудованого на її базі рівностороннього трикутника. На наступній стадії, описаній вище операції підлягає кожна з сторін, утвореної при першій генерації, фігури. На n -му кроці виходить ламана лінія, яка називається передфракталом. Передфрактал і

проміжні стадії його отримування зображені на рис.2. Далі зазначена процедура повторюється $n \rightarrow \infty$ разів. В результаті цього отримується безперервна крива, яка ніде не має дотичної - тріадна крива Коха.

З'ясуємо, як отримується вираз для фрактальної розмірності кривої Коха.

На n -му кроці число ланок N , довжина ланки апроксимуючої ламаної лінії η , а також її сумарна довжина $L(\eta)$ визначаються наступним чином:

$$N = 4^n, \eta = L/3^n, L(\eta) = 3L(4/3)^n . \quad (2.4.20)$$

З урахуванням цього числа поколінь буде: $n = \ln(L/\mu)/\ln 3$, а довжина передфракталу n -го покоління (рівня) визначиться, як:

$$L(\eta) = 3L \exp\{\alpha \ln(L/\eta)\} = 3L(L/\eta)^\alpha, \quad (2.4.21)$$

де $\alpha = (\ln 4 - \ln 3) / \ln 3 \approx 0,262$.

Співвідношення (2.4.21) аналогічне співвідношенню Річардсона (2.4.20) для довжини берегової лінії, якщо покласти $D = 1 + \alpha = \log_3 4$ і $\lambda = 3L^D$.

Розглянута крива Коха, як неважко помітити, є самоподібною множиною. Саме ця властивість кривої Коха визначає фрактальний характер залежності $L(\eta)$. Продемонструємо цю властивість. Для будь-якої ділянки тріади Коха між двома найближчими вершинами ми можемо вибрати масштабний множник $r(N) = (1/3)^n$, де n - будь-яке число, і покрити вихідну ділянку кривої Коха його $N = 4^n$ зменшеними копіями, виконуючи над ними паралельні переноси та повороти. Враховуючи властивості тріади Коха (2.4.20) знаходимо $D_s = \log_3 4 = 1.26185\dots$. Неважко помітити, що значення фрактальної розмірності кривої Коха (степені у співвідношенні Річардсона) і розмірності самоподібності цієї кривої співпадають.

З кривих Коха можна побудувати апертури Коха, які досить часто досліджуються в оптиці. На рис.3 показано пряму (а) та інвертовану (б) апертури Коха.

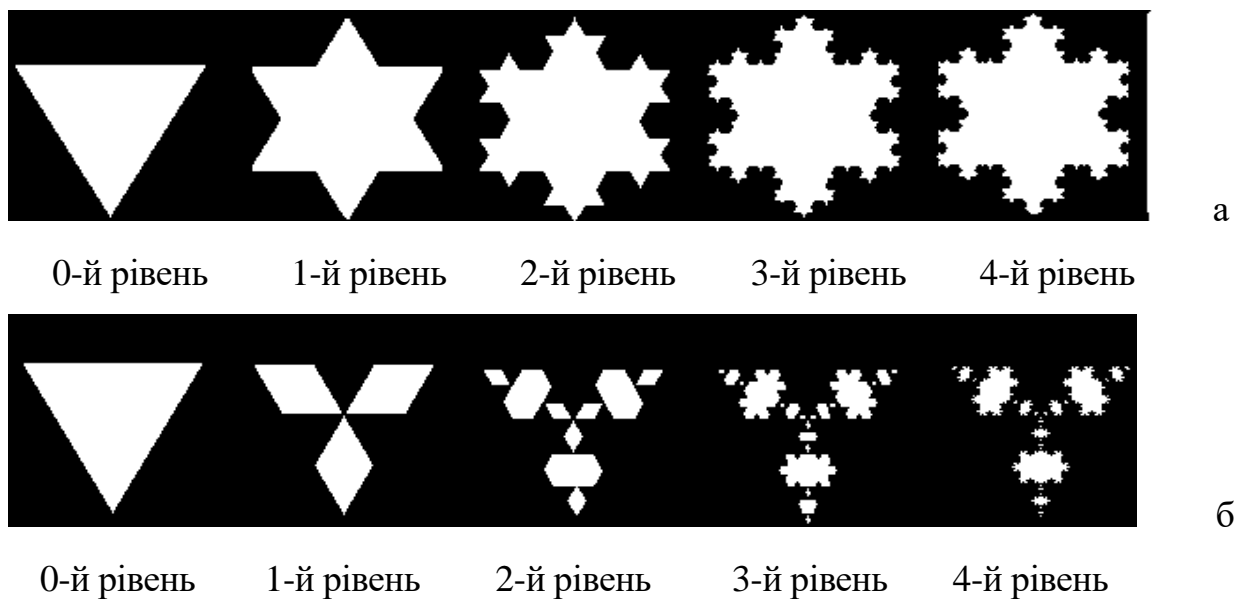


Рис.2.4.3. Прямі (а) та інвертовані (б) апертури Коха до 4-х рівнів.

2.4.4.2.2. Множина Кантора

Розглянемо ще один приклад детермінованої фрактальної множини з розмірністю $D_S < 1$ - множину Кантора, або канторівський пил. Затравкою тріадної канторівської множини є відрізок одиничної довжини (нульове покоління). Елементарна операція для генерації наступного покоління полягає в розділі відрізка на три рівні частини і відкиданні центральної частини. Після використання цієї операції нескінченне число разів стосовно відрізків, які залишилися утворюється множина Кантора (рис.2.4.4).

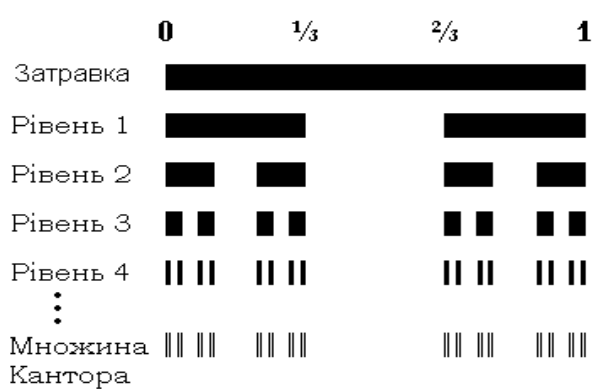


Рис.2.4.4. Множина Кантора

З'ясуємо властивості множини Кантора. В n -му поколінні ця множина складається з $N = 2^n$ відрізків довжиною $l = (1/3)^n$ кожний. Чевидно, що "довжина" канторівської множини - сума довжин інтервалів, які залишилися - дорівнює нулю, оскільки

$L = \lim_{n \rightarrow \infty} lN = \lim_{n \rightarrow \infty} (2/3)^n = 0$. Отже сума довжин вилучених інтервалів дорівнює

одиниці. Дійсно, довжина вилученого відрізка на кроці n дорівнює $(1/3)^n$. Ці довжини утворюють геометричну прогресію з першим членом та знаменником рівним $1/3$. Кількість вилучених на n -му кроці відрізків дорівнює 2^{n-1} . Таким чином, для довжини вилученої частини канторівської множини знаходимо:

$$L_- = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1.$$

Збудована таким чином на інтервалі прямої $[0,1]$ множина не є самоподібною. Для одержання самоподібної множини Кантора її необхідно розширити за допомогою екстраполяції. На інтервалі $[0,3]$ канторівська множина будується шляхом покриття інтервалів $[0,1]$ і $[2,3]$ канторівськими множинами із затравкою

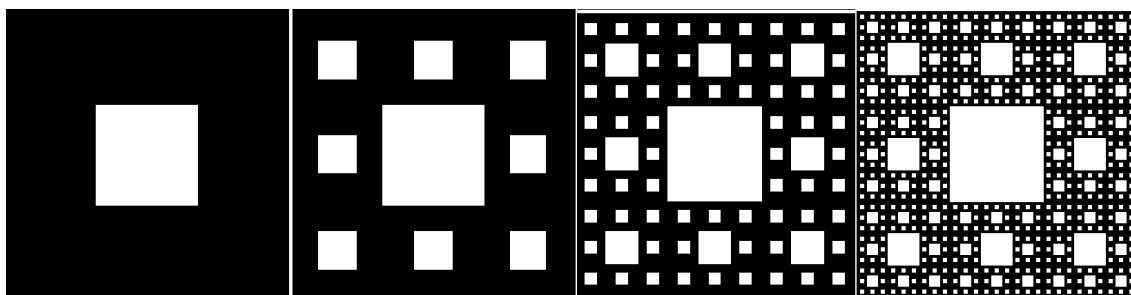
у вигляді одиничного відрізка. Повторюючи необмежену кількість разів означену процедуру, можна отримати самоподібну множину на усій прямій. Коефіцієнт подібності канторівської множини, як бачимо з побудови, дорівнює $r = 1/3$. Якщо змінити масштаб довжин в r разів, то для того щоб покрити початкову множину, нам знадобиться $N = 2$ її зменшених копій. Таким чином, за допомогою (2.4.19) для розмірності подібності тріадної канторівської множини знаходимо:

$$D_S = \ln N / \ln(r^{-1}) = \log_3 2.$$

Для самоподібних фрактальних множин, як це було показано раніше на прикладі кривої Коха, розмірність подібності дорівнює фрактальній розмірності. Таким чином, для фрактальної розмірності тріадної канторівської множини можна записати $D = D_S = 0,63092\dots$

2.4.4.2.3. Килими Серпинського

Продовжимо побудову плоских та об'ємних геометричних фрактальних множин на прикладі килима та серветки Серпинського. Як затравка для килима використовується квадрат, а утворюючий елемент має $N = 8$ квадратів одержаних із затравки перетворенням подібності з коефіцієнтом подібності $r = 1/3$. Послідовні стадії побудови килима Серпинського зображені на рис.5. Розмірність подібності килима Серпинського $D_S = \ln 8 / \ln 3 = 1,89\dots$



1-й рівень

2-й рівень

3-й рівень

4-й рівень

Рис.2.4.5. Килими Серпинського.

Подібним чином будується трикутна серветка Серпинського, затравкою для котрої обирається рівносторонній трикутник (рис.2.4.6).

Слід звернути увагу на суттєву різницю між килимом та серветкою. В

трикутній серветці елементарні комірки з'єднані вершинами, а в килимі – вздовж своїх сторін. У зв'язку з цим, мінімальне число точок, які потрібно вилучити для розрізання фрактала у випадку трикутної серветки Серпинського, скінчене і дорівнює двом, а для килима Серпинського - нескінченне. Таке мінімальне число точок називається розгалуженістю фрактала. Конкретне значення розгалуженості несуттєве, але деякі фізичні властивості фракталів із скінченною та нескінченною розгалуженістю суттєво різні.

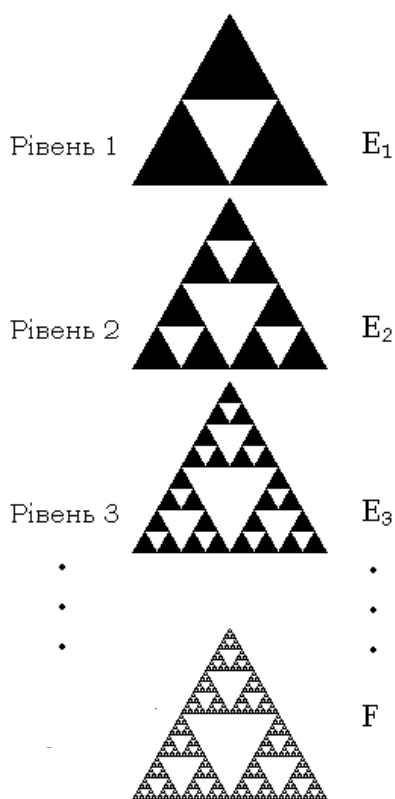


Рис.2.4.6. Трикутна серветка Серпинського

Аналогічно може бути побудований об'єкт під назвою губка Серпинського. Як затравка у цьому випадку використовується куб, який розбивається на 27 конгруентних кубиків, поділом ребер на три рівні частини, після чого центральний кубик та шість прилеглих до нього кубиків вилучаються. Як килим та серветка Серпинського, губка є лінією, розмірність самоподібності якої за формулою (2.4.11) з $N = 20-7$, $r = 1/3$ дорівнює $D_S = 2.73\dots$

Криві Серпинського використовуються як моделі багатьох фізичних явищ (явища поблизу точок фазових переходів у спіновому склі, в теорії протікання і т.д.).

Фрактальні властивості шорстких поверхонь, броунівського руху та турбулентності ми розглянемо більш детально в наступних розділах.

2.4.4.3. Мультифрактальні об'єкти

Поряд з фрактальною концепцією для визначення мультимасштабних явищ, що з'являються в багатьох фізичних ситуаціях, тепер широко використовується і мультифрактальна концепція. В своїй сучасній формі мультифрактальний підхід в основному пристосований до статистичного опису масштабних

властивостей сингулярних мір. Прикладами таких мір є розподіл перепадів напруги в мережі випадкових опорів, розподіл ймовірності росту на межі дифузно-обмеженої сукупності, і просторовий розподіл поля розсіювання повністю розвиненої турбулентності. Мультифрактальний формалізм полягає в розкладі фрактальної міри на переплетені множини, які характеризуються параметром α і спектром розмірності $f(\alpha)$. Було показано, що так званий спектр розмірності сильно пов'язаний з узагальненою фрактальною розмірністю D .

У фізиці, так само, як і в інших прикладних науках, фрактали проявляють себе не тільки як сингулярні міри, але і як сингулярні функції. Наприклад, графіки різних видів випадкових шляхів (броунівський рух), геологічні форми, межі розділу, що розвиваються в процесі росту, значення швидкостей в турбулентних потоках, форма ДНК, що кодує послідовність нуклеотидів, фінансові часові показники і таке інше.

Концепція фрактальної міри вперше з'явилася в роботах Б. Мандельброта (1974 р.) при описі просторових розподілів областей розсіювання в турбулентних потоках. З того часу ця нова концепція виявилася дуже зручною для моделювання сингулярних об'єктів, що з'являються в багатьох фізичних ситуаціях.

Застосування цих методів до вивчення дифракції на мультифрактальних об'єктах може виявитись корисним для розробки методів їх діагностики і потребує проведення досліджень в цьому напрямку.

НЕ 2.5. ПИТАННЯ ПРАКТИЧНОГО ХАРАКТЕРУ

2.5.1. Інтерференційні вимірювання статистичних моментів поля оптичного випромінювання

Для знаходження діагностичних взаємозв'язків статистичних параметрів оптично-неоднорідних об'єктів та поля оптичного випромінювання розсіяного ними ми досліджували наступні статистичні

моменти поля: дисперсію амплітуди σ_A^2 та фази σ_φ^2 поля; змішаний момент амплітуди та квадрату фази $m_{A\varphi^2}$; індекс мерехтіння β^2 та поперечну функцію когерентності $\Gamma_\perp(\rho)$ поля.

Безпосередньо поміряти статистичні моменти амплітуди та фази поля неможливо, оскільки ми користуємося квадратичними за амплітудою детекторами, які реєструють інтенсивність хвилі, не розділяючи її часові коливання. Тому вимірювання статистичних моментів поля оптичного випромінювання можливе лише для інтенсивності. Але тут у пригоді стають інтерференційні методи. Так, інтерференційно міряючи видність, можна визначити функцію когерентності поля. Це стосується й інших статистичних моментів поля.

Для прикладу розглянемо випадковий фазовий екран, на який падає плоска хвиля. У площині екрана модулюється тільки фаза хвилі, а амплітуда залишається незмінною. При віддаленні від екрана фазова модуляція зменшується, а амплітуда наростає. Те, що дисперсія фази екрана менша за одиницю, означає, що в полі випромінювання в довільній зоні реєстрації буде присутня регулярна складова.

Накладемо на об'єктне поле опорну хвилю, співвісно регулярній складовій поля, тобто отримаємо нуль інтерференційної смуги. Тоді результат інтерференційного складання буде:

$$I_p(x, y) = A_0^2 + A^2(x, y) + 2A_0A(x, y)\cos\varphi(x, y), \quad (2.5.1)$$

де $I_p(x, y)$ - інтенсивність результуючого поля в точці (x, y) ; $A(x, y)$ - амплітуда об'єктної хвилі; A_0 - амплітуда плоскої опорної хвилі, тобто $\varphi(x, y)$ - різниця фаз об'єктної та опорної хвиль.

Мінімальне значення інтенсивності результуючого поля буде спостерігатися при виконанні наступних умов: середня фаза об'єктної хвилі протилежна фазі опорної хвилі: $\varphi(x, y) = \pi + \tilde{\varphi}(x, y)$; середня по

площі амплітуда об'єктної хвилі $\langle A(x, y) \rangle$ дорівнює амплітуді опорної хвилі (не інтенсивності): $\langle A(x, y) \rangle = A_0$, де $\varphi(x, y)$ - флуктуації фази об'єктного поля відносно середнього значення π .

Тоді співвідношення (2.5.1) переписеться:

$$I_p(x, y) = A_0^2 + A^2(x, y) - 2A_0A(x, y)(1 - 2\sin^2 \frac{\varphi(x, y)}{2}). \quad (2.5.1)$$

Враховуючи, що флуктуації фази об'єктної хвилі малі ($\varphi \leq 20^\circ$) і проводячи усереднення по площі аналізованої ділянки, можна отримати:

$$\langle I_p(x, y) \rangle = \langle A^2(x, y) \rangle - \bar{A}^2(x, y) + A_0 \langle A(x, y) \varphi^2(x, y) \rangle, \quad (2.5.3)$$

де $\langle A^2(x, y) \rangle$ - середнє значення квадрата амплітуди;

$\bar{A}(x, y) = \langle A(x, y) \rangle$ - середнє значення амплітуди.

Врахуємо той факт, що $A(x, y) = \bar{A}(x, y) + \tilde{A}(x, y)$, розділимо праву та ліву частини рівняння (2.5.3) на інтенсивність опорного пучка

$I_0 = A_0^2 = \bar{A}^2(x, y)$. Тоді:

$$\frac{\langle I_p(x, y) \rangle}{I_0} = \frac{\langle A^2(x, y) \rangle - \bar{A}^2(x, y)}{\bar{A}^2(x, y)} + \left\langle \frac{\tilde{A}(x, y)}{\bar{A}^2(x, y)} \varphi^2(x, y) \right\rangle + \langle \varphi^2(x, y) \rangle = \sigma_A^2 + m_{A\varphi^2} + \sigma_\varphi^2, \quad (2.5.4)$$

де $\frac{\langle A^2(x, y) \rangle - \bar{A}^2(x, y)}{\bar{A}^2(x, y)}$ - нормована по інтенсивності дисперсія амплітуди

поля;

$\left\langle \frac{\tilde{A}(x, y)}{\bar{A}^2(x, y)} \varphi^2(x, y) \right\rangle$ - змішаний кореляційний момент поля третього

порядку;

$\langle \varphi^2(x, y) \rangle$ - дисперсія фази поля.

Отже, вибираючи ту чи іншу зону реєстрації, ми можемо визначати відповідні статистичні параметри поля.

Як приклад розглянемо граничне поле. Дисперсія амплітуди поля та змішаний кореляційний моменти дорівнюють нулю. Отже, отримуємо:

$$\frac{\langle I_p(x,y) \rangle}{I_0} = \langle \varphi^2(x,y) \rangle = \sigma_\varphi^2. \quad (2.5.5)$$

Тобто, помірявши нормовану інтенсивність, можна отримати дисперсію фази граничного поля, а отже, й дисперсію фази об'єкта. Наведене вище співвідношення дає зв'язок довільного моменту фази граничного поля з результуючою інтенсивністю:

$$\frac{\langle I_p^{n/2}(x,y) \rangle}{I_0^{n/2}} = \langle \varphi^n(x,y) \rangle = \sigma_\varphi^n. \quad (2.5.6)$$

Це співвідношення дозволяє розрахувати коефіцієнти ексцесу та асиметрії розподілу фази об'єкта з вимірювань розподілу інтенсивності поля. Так:

$$K_a = \frac{\langle \varphi^3(x,y) \rangle}{\sigma_\varphi^3} = \frac{\langle I_p^{3/2}(x,y) \rangle}{I_0^{3/2}}, \quad (2.5.7)$$

$$K_e = \frac{\langle \varphi^4(x,y) \rangle}{\sigma_\varphi^4} - 3 = \frac{\langle I_p^2(x,y) \rangle}{I_0^2} - 3.$$

Тобто, маючи дисперсію фази об'єкта, коефіцієнти асиметрії та ексцесу, можна з достатньою точністю побудувати функцію розподілу фази об'єкта.

2.5.2. Вимірювання дисперсії фази та амплітуди поля

Для вимірювання дисперсії фази поля скористаємося співвідношенням (2.5.5), яке записане для граничного поля. Вимірювання статистичних параметрів граничного поля вимагає введення вимірювального пристрою безпосередньо в площину об'єкта, що, звісно, неможливо. У цьому випадку

можна вчинити так. Площину граничного поля спроектувати в площину реєстрації, і там, строго співвісно, накласти опорну хвилю в схемі інтерферометра Майкельсона або Маха-Цандера. Досягнувши протифазності пучків, необхідно вирівняти амплітуди опорної та об'єктної хвиль і за інтенсивністю результуючого поля та інтенсивністю опорної хвилі визначити дисперсію фази граничного поля.

Якщо ж інтенсивності опорного та об'єктного пучків неоднакові, то ми можемо це врахувати:

$$\sigma_{\varphi}^2 = 1 - \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2\sqrt{I_r}\sqrt{I_o}} \quad (2.5.8)$$

Вимірювання дисперсії амплітуди поля також можливе в інтерференційному розташуванні (рис 2.5.1). Вернімося до розглянутого вище співвідношення (2.5.1). У випадку протифазності опорного та об'єктного пучків, інтенсивність результуючого поля визначиться співвідношенням:

$$I_p = \frac{1}{S} \iint_S [A(x, y) - A_0]^2 dx dy, \quad (2.5.9)$$

де S – площа поперечного перетину пучка.

Умову для мінімального значення інтенсивності результуючого поля (екстремуму функції) можна знайти, прирівнявши до нуля першу частинну похідну:

$$\frac{\partial I_p}{\partial A} = \frac{2}{S} \iint_S [A(x, y) - A_0] dx dy = 0. \quad (2.5.9)$$

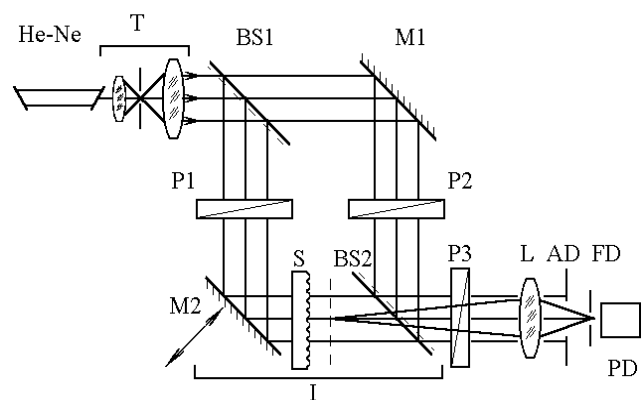


Рис 2.5.1. Експериментальна схема для вимірювання дисперсії амплітуди поля для пропускаючих об'єктів: He-Ne-лазер; Т-телескопічна система; BS1, BS2 - світлоподільники; M1, M2 - дзеркала; I – інтерферометр; P1, P2, P3 - поляризатори; S - зразок; L – об'єктив; PD – фотодетектор; AD, FD – апертурна та польова діафрагми

Звідси випливає:

$$A_0 = \frac{1}{S} \iint_S A(x, y) dx dy = \langle A(x, y) \rangle. \quad (2.5.10)$$

Дійсно, мінімум інтенсивності результуючого поля буде у випадку протифазності опорного й об'єктного пучків та рівності їх амплітуд.

Експериментальна схема для вимірювання дисперсії амплітуди може базуватися на інтерферометрі Майкельсона для відбиваючих об'єктів або Маха – Цандера – для пропускаючих (рис 2.5.1).

Методика вимірювання дисперсії амплітуди наступна. За допомогою поляризаторів вирівнюємо інтенсивності опорного та об'єктного пучків.

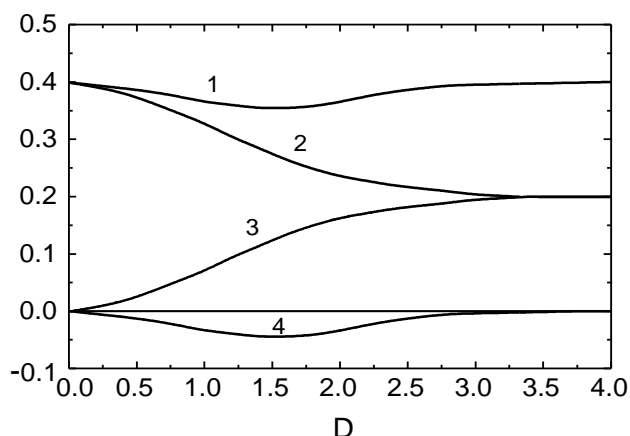


Рис 2.5.2. Типові залежності: $\langle I_S(x, y) \rangle / I_0$ (крива 1), σ_φ^2 (крива 2), σ_A^2 (крива 3) та $m_{A\varphi}$ (крива 4) від хвильового параметра D

Досягаємо мінімуму результуючої інтенсивності за рахунок протифазності пучків, пересуваючи дзеркало М2. Досягаємо більш глибокого мінімуму результуючого поля за рахунок вирівнювання амплітуд пучків за допомогою поляризатора Р3. Вимірюємо значення інтенсивності опорного I_o та об'єктного I_r пучків,

почергово перекриваючи об'єктний і опорний пучки. Розраховуємо

$$\text{дисперсію амплітуди поля за формулою: } \sigma_A^2 = \frac{I_o - I_r}{I_r}.$$

$$(2.5.11)$$

Знаючи дисперсію фази та амплітуди поля, можна визначити змішаний кореляційний момент амплітуди та квадрату фази поля $m_{A\varphi}^2$.

$$\text{У рамках моделі ВФЕ можна записати: } \sigma_S^2 = \sigma_A^2 + \sigma_\varphi^2.$$

Отже, помірявши σ_S^2 у граничному полі та σ_A^2 в довільній зоні, можна

розрахувати σ_φ^2 у довільній зоні.

З основного інтерференційного співвідношення можна визначити змішаний кореляційний момент амплітуди та квадрату фази поля:

$$\frac{\langle I_p(x,y) \rangle}{I_0} - \sigma_A^2 - \sigma_\varphi^2 = \frac{\langle I_p(x,y) \rangle}{I_0} - \sigma_S^2 = m_{A\varphi^2}. \quad (2.5.12)$$

Для гауссового розподілу фази даний змішаний момент дорівнює нулю в довільній зоні реєстрації. Його відхилення від нуля свідчить про відхилення від нормального розподілу фази об'єкта.

На рис 2.5.2 показано типовий вигляд залежностей $\frac{\langle I_p(x,y) \rangle}{I_0}, \sigma_A^2, \sigma_\varphi^2, \sigma_S^2, m_{A\varphi^2}$ від зони реєстрації.

2.5.3. Вимірювання поперечної функції когерентності поля

Для статистично однорідних флуктуації фази, розподілених за нормальним законом розподілу ймовірностей, в рамках моделі ВФЕ, між характеристиками об'єкту та поперечною функцією когерентності поля $\Gamma_\perp(\rho)$ існує взаємозв'язок:

$$\Gamma_\perp(\rho) = \Gamma_g(\rho) = \exp\{\sigma_S^2[K(\rho) - 1]\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}D_S(\rho)\right\}, \quad (2.5.13)$$

де $K(\rho)$ - коефіцієнт кореляції фази екрана, а $\sigma_S^2 K(\rho)$ - відповідає поперечній кореляції функції фази екрана $\Psi_S(\rho)$; $D_S(\rho)$ - структурна функція фази екрана. Співвідношення (2.5.13) працює незалежно від відстані до об'єкта.

Поперечна функція когерентності поля вимірюється в інтерферометрі поперечного зсуву. Це може бути інтерферометр Юнга, Маха – Цандера, поляризаційні інтерферометри та інші.

Між пучками інтерферометра зсуву задавалося поперечне зміщення

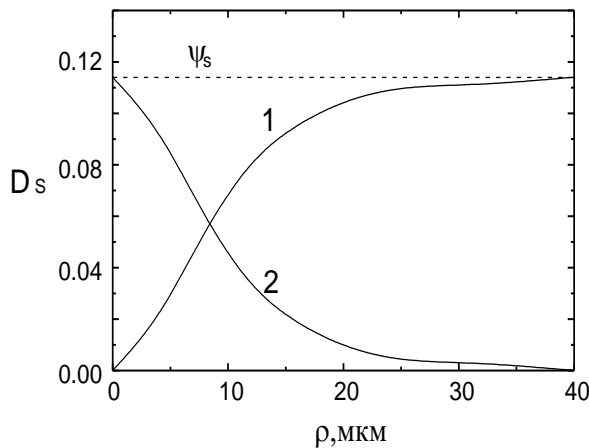


Рис 2.5.13. Типовий вигляд структурної (крива 1) та кореляційної (крива 2) функцій об'єкта.

ρ . При цьому вимірюється видність інтерференційної картини $V = I_{\max} - I_{\min} / I_{\max} + I_{\min}$, яка у випадку рівності інтенсивностей інтерферуючих пучків відповідає ступеню когерентності результуючого поля.

Одержана таким чином залежність $\Gamma_{\perp}(\rho)$ на рис 2.5.13

була вихідною для знаходження дисперсії та коефіцієнта кореляції фази об'єкта. Так, логарифмуючи співвідношення (2.5.13), отримаємо:

$$\ln \Gamma_{\perp}(\rho) = \sigma_S^2 [K(\rho) - 1] = -\frac{1}{2} D_S(\rho). \quad (2.5.14)$$

бласть насичення $D_S(\rho)$ відповідає $K_S(\rho) = 0$.

Відповідно, ордината області насичення дає значення дисперсії фази об'єкта σ_S^2 . Використовуючи залежність $D_S(\rho)/2$ і знаючи σ_S^2 , можна знайти кореляційну функцію фази об'єкта $\Psi_S(\rho)$.

2.5.4. Поляризаційно-інтерференційні вимірювання функції когерентності поля

Поперечна функція когерентності поля, що утворилося в результаті взаємодії оптичного випромінювання та світлорозсіюючого об'єкта, в багатьох випадках містить однозначну інформацію про цей об'єкт. Така інформація може бути корисною при дослідженні фазово-неоднорідних

об'єктів, шорстких поверхонь, дисперсних середовищ та фрактальних об'єктів. Конкретні діагностичні зв'язки поперечної функції когерентності поля з параметрами об'єктів будуть розглянуті в наступних розділах, а в цьому параграфі описуються методи вимірювання змішаних статистичних моментів поля другого порядку, зокрема функції когерентності поля. Ця задача стає ще більш актуальною у зв'язку з можливістю визначення кореляційного експонента з функції когерентності поля (п. 2.4). Традиційно функції когерентності поля міряються в схемі Юнга та інтерферометрі Маха-Цандера. Досить перспективними виявилися поляризаційні інтерферометри вимірювання функції когерентності поля. Розглянемо їх більш детально.

Щоб забезпечити достатню точність на практиці вимірювання поперечної та поздовжньої функцій когерентності слід проводити окремо. Це спричиняє використання дещо відмінних між собою схем їх вимірювання.

Ідея поляризаційного інтерферометра для вимірювання поздовжньої функції когерентності поля полягає у формуванні у двох каналах інтерферометра рівноінтенсивних, ортогональних циркулярно-поляризованих пучків. У результаті строго співвісного суміщення цих пучків утворюється результуючий лінійно-поляризований пучок. Причому азимут поляризації задає різницю ходу між пучками, а степінь поляризації – степінь когерентності поля. Оскільки точність визначення азимута поляризації за допомогою гоніометричної системи складає кутові секунди, що відповідає різниці ходу хвиль $10^{-4} - 10^{-5} \lambda$, то точність поляризаційного інтерферометра значно перевищує точність традиційного.

Вимірювання поперечної функції когерентності поля можна проводити в схемі поляризаційного інтерферометра, наведеній на рис 2.5.4. Просторове розділення звичайного та незвичайного променів відбувається на першій поверхні кристалічної плоско паралельної пластини 3, головна оптична вісь якої паралельна цій поверхні. Для спостереження

інтерференційної картини в такому інтерферометрі, необхідно розташувати кристалічну пластинку між двома схрещеними поляризаторами 1 та 4 так, щоб її головна оптична вісь складала кут 45° з площинами пропускання поляризаторів. Величина поперечного зміщення між променями залежить від двопроменезаломлення матеріалу пластини 3, її товщини та кута падіння досліджуваного пучка на пластину. Проте значне збільшення кута падіння променя на пластину приводить до зростання різниці інтенсивності звичайного та незвичайного променів за рахунок збільшення різниці між френелевими коефіцієнтами відбивання для променів з ортогональною поляризацією. Для зменшення цього ефекту кристалічну пластину занурюють в імерсію 2, значення показника заломлення якої лежить між значеннями показника заломлення для звичайного та незвичайного променів. Хоча ця процедура створює певні експлуатаційні труднощі.

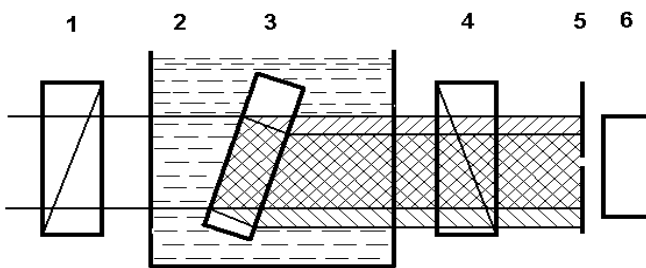


Рис 2.5.4. Схема поляризаційного інтерферометру: 1 - поляризатор, 2 - кювета з імерсійною рідиною, 3 - чвертьхвильова пластинка, 4 - поляризатор, 5 - польова діафрагма, 6 - фотоприймач.

Відомі поляризаційні інтерферометри, які не мають цих недоліків але зберігають всі переваги, притаманні поляризаційним інтерферометрам.

Поляризаційний інтерферометр для вимірювання поперечної

функції когерентності поля зображено на рис 2.5.5. Він складається з двох ідентичних двопроменезаломлюючих клинів, що утворюють плоскопаралельну пластину і розташовані між схрещеними поляризаторами. Причому головні оптичні осі клинів 2 та 3 утворюють кут 45° з площинами поляризації поляризаторів 1 та 5.

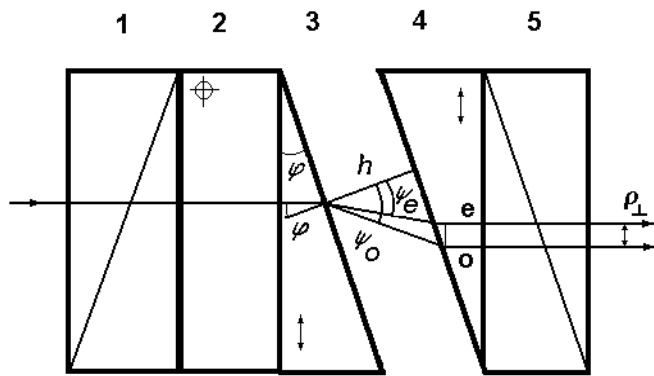


Рис 2.5.5. Оптична схема поляризаційного інтерферометра

На рис 2.5.5 показано хід звичайного “о” та незвичайного “е” променів у такій системі. Просторове розділення променів відбувається на виході з першого клина 2. При нормальному падінні вхідного променя на

поверхню пластини, що прилягає до прямого кута призми, кути заломлення звичайного та незвичайного променів ψ_o та ψ_e визначаються зі співвідношень:

$$\sin \psi_o = \frac{n_o}{n} \sin \varphi, \quad \sin \psi_e = \frac{n_e}{n} \sin \varphi, \quad (2.5.15)$$

де φ - кут падіння, що дорівнює куту призми, n_o та n_e - показники заломлення звичайного та незвичайного пучків відповідно; n - показник заломлення навколишнього середовища.

Поздовжнє зміщення між звичайним та незвичайним пучками компенсується плоско паралельною пластинною 2 з того самого матеріалу, що й клини, з товщиною, рівною сумарній товщині клинів, та орієнтацією головної оптичної осі ортогонально до орієнтації осі клинів.

Поперечне зміщення між пучками ρ_{\perp} задається відстанню між клинами h і залежить від кута клина та двопронезаломлення матеріалу клина. З геометричної побудови на рис 2.5.5 можна отримати:

$$\rho_{\perp} = h(\operatorname{tg} \psi_o - \operatorname{tg} \psi_e) \cos \varphi. \quad (2.5.16)$$

Отже, ρ_{\perp} лінійно залежить лише від h (параметри φ, ψ_o, ψ_e - постійні для конкретної схемної реалізації). Прокалібрувавши такий інтерферометр (побудувавши залежність $\rho_{\perp} = f(h) = ah$), можна починати вимірювання поперечної функції когерентності поля. Для кальцитових клинів, з $\varphi = 6^{\circ}$,

маємо $a = 0,0171$.

Проте в схемі на рис 2.5.5 поперечне зміщення ρ_{\perp} супроводжується поздовжнім ρ_{\parallel} , яке можна визначити так:

$$\rho_{\parallel} = \left[\left(\frac{1}{\cos \psi_o} - \frac{1}{\cos \psi_e} \right) - n_e (\operatorname{tg} \psi_o - \operatorname{tg} \psi_e) \sin \varphi \right] h = bh. \quad (2.5.17)$$

Для того самого прикладу кальцитових клинів, з $\varphi = 6^{\circ}$, $b = 0,00013$, тобто в 130 разів менше, ніж a . Але таке співвідношення між поперечним та поздовжнім зміщеннями буде тільки у випадку переміщення другого клина вздовж напрямку, що визначається кутом заломлення звичайного або незвичайного (немає значення якого) променів на першому клині. Хоча на практиці і це невелике поздовжнє зміщення можна компенсувати незначною зміною товщини пластини 2 (рис 2.5.17).

Будь-який інший напрямок переміщення клина приведе до появи поздовжнього зміщення між пучками, що у випадках значного перевищення масштабу поздовжньої модуляції поля масштабів поперечної, зручно використати для калібровки поперечного зміщення по екстремальним значенням інтенсивності результуючого поля (кратність різниці ходу λ).

Приклад експериментальної реалізації поляризаційного інтерферометра поперечного зсуву показано на рис 2.5.18. Кальцитовий клин переміщується за допомогою електромеханічного модулятора. Направляючими для паралельного переміщення служать дві еластичні сталі мембрани, а керування переміщенням здійснюється за допомогою зміни напруги в соленоїді, що знаходиться в полі постійного магніту.

Поздовжню функцію когерентності поля можна міряти в тому самому оптичному розташуванні, зображеному на рис 2.5.17, але кристалічні клини 3 та 4 повинні знаходитися на мінімально можливій відстані і переміщення другого клину повинно здійснюватися вздовж гіпотенузи клина. На практиці, для того щоб задати постійну відстань між клинами,

між ними, поза робочою апертурою, ставиться тефлонова прокладка товщиною 10-50 мкм. Це забезпечує постійну (невелику) відстань між клинами та запобігає пошкодженню робочих поверхонь клинів.

Точність вимірювання поперечної та поздовжньої функції когерентності поля залежить від досліджуваного поля. Поле когерентного оптичного випромінювання можна умовно розділити на два типи: з регулярною когерентною складовою та без неї.

У першому випадку поле має вигляд квазіспекл-поля. Відповідно, функція когерентності поля спадає від одиниці до якогось постійного значення, величина якого визначається співвідношенням регулярної та випадкової складових поля. Для забезпечення експресності вимірювання функції когерентності такого поля необхідно працювати в нулі інтерференційної смуги, тобто розподіл інтенсивності результуючого поля, зумовленого регулярною складовою, по всій площі аналізу повинен бути однорідним. Візуально досягти високої однорідності поля проблематично, адже поле промодульоване випадковою складовою. Тому, постає завдання автоматизації процесу юстування системи на нуль інтерференційної смуги.

У другому випадку ми маємо розвинуте спекл-поле з нулями амплітуди. При введенні поперечного чи поздовжнього зсуву(в результуючому полі), у відповідних інтерферометрів, у результуючому полі з'являються смуги або кільця відповідно. Це змушує переходити до локальних вимірювань видності, а отже, і функції когерентності результуючого поля.

Для розв'язання цих проблем було розроблено універсальну систему для вимірювання статистичних моментів поля, включаючи функцію когерентності, як для поля з регулярною складовою, так і для розвинутого спекл-поля. Розглянемо цю систему.

Такий комплекс діагностики повинен дозволити вимірювання розподілу інтенсивності поля (для визначення індексу мерехтіння, кореляційної функції інтенсивності, спектра потужності інтенсивності

поля), співвісного накладання опорної хвилі (для отримання зображення об'єкта, дисперсії фази граничного поля, дисперсії амплітуди та змішаних моментів поля) та вимірювання поперечної функції когерентності поля в різних зонах реєстрації (для визначення кореляційної функції, спектра потужності та оцінки кореляційного експонента поля). Всі ці операції можна виконати за допомогою системи, оптична схема якої наведена на рис 2.5.6.

Як джерело оптичного випромінювання використовується одномодовий He-Ne-лазер L. Телескопічна система T формує хвилю з плоским фронтом. Світлоподільники BS1, BS2 та дзеркала M1, M2 утворюють інтерферометр Маха –Цандера, в одному з плечей якого розташовано досліджуваний пропускаючий об'єкт S (варіант схеми для відбиваючого об'єкта принципово не відрізняється і тому не розглядається). Поляризатори P1 та P2 дозволяють регулювати інтенсивність опорного каналу інтерферометра. Введення в хід променів інтерференційного блока I дозволяє виконувати амплітудне розділення об'єктного пучка та задавати поперечний зсув між отриманими компонентами. Об'єктив O проектує довільний поперечний переріз поля випромінювання, розсіяного об'єктом, на приймальну матрицю CCD-камери. Отримане зображення передається в комп'ютер для подальшої обробки.

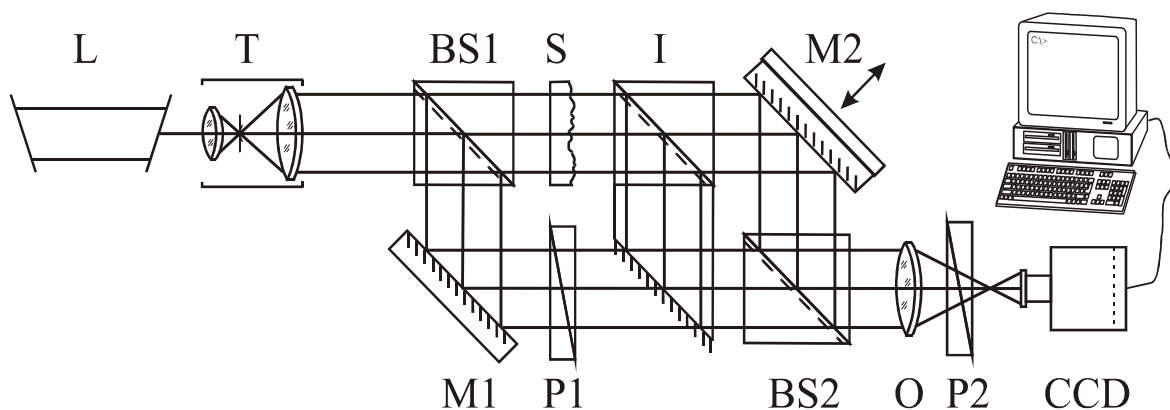


Рис 2.5.6. Схема експериментальних досліджень: L - He-Ne-лазер, T -телескопічна система, $BS1$, $BS2$ - світлоподільники, $M1$, $M2$ - дзеркала, S – досліджуваний об’єкт, $P1$, $P2$ - поляризатори, I – інтерференційний блок, O – об’єктив, CCD – цифрова камера

Розглянемо функціональні можливості такої системи.

Інтерференційний блок виведений і опорна хвиля перекрита.

Уцьому випадку, переміщуючи разом об’єктив O та CCD -камеру вздовж ходу променів, можна зареєструвати двохмірний розподіл інтенсивності поля для довільної зони реєстрації. Далі розраховуються довільні статистичні моменти та кореляційні функції розподілу інтенсивності.

Інтерференційний блок виведений, накладається опорна хвиля.

Такий варіант використовується для полів з регулярною складовою і дозволяє безпосередньо визначити дисперсію фази граничного поля, дисперсію амплітуди та змішаних моментів поля в різних зонах реєстрації та отримати двомірний фазовий рельєф досліджуваного об’єкта.

Побудуємо зображення досліджуваного об’єкту в площині CCD -камери за допомогою об’єктива O . Результат інтерференційного складання двох хвиль, одна з яких є плоскою, інша – фазово-модульованою хвилею, записується співвідношенням (2.5.10). У випадку малих флуктуацій фази об’єкта, тобто $\varphi(x, y) < 20^\circ$, з цього співвідношення витікає вираз для дисперсії фази граничного поля (2.5.14). Для експериментальної реалізації цього співвідношення ми повинні вирівняти амплітуди опорної та об’єктної хвиль і зробити їх протифазними: $\langle A(x, y) \rangle = A_0, \langle \varphi(x, y) \rangle = \varphi_0 + \pi$.

Система на рис 2.5.16 дозволяє виконати ці операції.

Рельєф фазового об’єкта можна отримати, якщо середня фаза об’єктної хвилі в граничному полі буде відрізнятися від фази опорної хвилі на $\pi/2$. Тоді при рівних інтенсивностях опорної та об’єктної хвилі отримаємо двомірний рельєф об’єкта:

$$h(x, y) = \frac{1}{k(n-1)} \left(\frac{\langle I_S(x, y) \rangle}{2I_0} - 1 \right). \quad (2.5.18)$$

В обох випадках прецизійні регулювання різниці ходу в плечах інтерферометра виконуються за допомогою дзеркала M2, закріпленого на п'єзокераміці.

Інтерференційний блок введений.

Це приводить до перекривання опорного каналу та утворення інтерферометра поперечного зсуву для вимірювання поперечної функції когерентності поля. Поперечний зсув між пучками здійснюється за допомогою дзеркала M2. Якщо поле оптичного випромінювання має регулярну складову, то видність інтерференційної картини оцінюється відносно неї. Для заданого поперечного зсуву, при строго співвісних пучках (в нулі інтерференційної смуги) достатньо поміряти мінімальне та максимальне значення інтенсивності результуючого поля, як суму сигналів від усіх фоточутливих елементів матриці, і розрахувати видність інтерференційної картини.

Особливістю даного інтерферометра є те, що він дозволяє також досліджувати спекл-поля без регулярної складової. Проте процедура зняття інформації та її обробка в цьому випадку дещо інша. Для заданого поперечного зсуву, за допомогою дзеркала M2 між пучками задається модуляція різниці ходу в межах довжини хвилі. Це приведе до модуляції інтенсивності від мінімального до максимального значення на кожному елементі CCD-камери. Далі сумуються всі максимальні і мінімальні значення інтенсивності по всіх елементах CCD-камери та визначається видність складного інтерференційного поля. Маючи видність інтерференційної картини для різних поперечних зсувів між пучками, будуємо поперечну функцію когерентності поля.

З отриманої, у такий спосіб, поперечної функції когерентності поля можна визначити: дисперсію фази та кореляційну функцію фазового

об'єкта; його спектр потужності як фур'є-перетворення від кореляційної функції; кореляційний експонент поля розсіяного випромінювання.

Рекомендована література

1. Born, Max; Wolf, Emil. Principles of optics : electromagnetic theory of propagation, interference, and diffraction of light (7th (expanded) 60th anniversary ed.). Cambridge University Press. 2019.
2. Ангельський О.В., Максимяк П.П. ”Комп’ютерне та фізичне моделювання розсіювання світла неоднорідними об’єктами” Чернівці, “ЧНУ”, 2017.-332 с.
3. Angelsky O. V., Maksimyak P. P., Hanson S. The Use of Optical-Correlation Techniques for Characterizing Scattering Object and Media. - Bellingham: SPIE Press PM71, 1999. - 194p.
4. Мохунь І.І., Вікторовська Ю.Ю., Галушко Ю.К. Оптичні технології в інформаційній техніці. – Чернівці: Чернів. нац. ун-т, 2021. – 301 с.
5. S.M. Rytov, Yu.A. Kravtsov, V. I. Tatarskii Principles of Statistical Radiophysics 4: Wave Propagation Through Random Media, Springer Berlin, Heidelberg, 1989.

Допоміжна література

1. O.V.Angelsky, P.P.Maksimyak “Optical correlation diagnostics of surface roughness” in Optical Correlation Applications and Techniques, (SPIE Press, Bellingham, 2007)”.
2. O.V.Angelsky, P.P.Maksimyak Chapter 2. Optical correlation diagnostics of surface roughness in coherent-domain optical methods Biomedical Diagnostics Environmental and Material Science (V.V. Tuchin, ed.), Kluwer Academic Publishers, 2004. – P.67-119.
3. Oleg Angelsky, Peter Maksymyak, Claudia Zenkova, Olexander Ushenko and Jun Zheng (November 29th 2021). New Trends of Optical Measurements [Online First], IntechOpen, DOI: 10.5772/intechopen.100589. Available from: <https://www.intechopen.com/online-first/791314>.
4. Гудмен Дж. Статистическая оптика, М.:Мир,1988.