Оптимальне керування в крайовій задачі для еліптичних рівнянь з виродженням

Іван Пукальський

i.pukalsky@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Богдан Яшан

b.yashan@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Нехай D обмежена область в R^n з межею ∂D, $\dim D = n$, Ω – деяка обмежена область, $\overline{\Omega} \subset \overline{D}$, $\dim \Omega \le n-1$. Розглянемо в області D задачу знаходження функцій $(u(x, q_1(x), q_2(x)), q_1(x), q_2(x))$ на яких функціонал

$$I(q_1, q_2) = \int\limits_D F_1(x; u(x, q_1(x), q_2(x)), q_1(x))dx +$$

$$+ \int\limits_{\partial D} F_2(x, u(x, q_1(x), q_2(x)), q_2(x))d_x S \tag{1}$$

досягає мінімуму в класі функцій $q \in V = \{q | q_1 \in C^{\alpha}(D),\ q_2 \in C^{1+\alpha}(D),$ $\nu_{11}(x) \le q_1(x) \le \nu_{12}(x),\ \nu_{21}(x) \le q_2(x) \le \nu_{22}(x)\}$ із яких $u(x, q_1(x), q_2(x))$ задовольняє при $x \in D \backslash \Omega$ рівняння з параметром μ

$$\Big[\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_i(x) \partial_{x_i} + A_0(x) + \mu \Big] u(x, q_1, q_2) = f(x, q_1(x)), \tag{2}$$

а на межі області ∂D крайову умову

$$\lim_{x \longrightarrow z \in \partial D} \Big[\sum_{k=1}^{n} B_k(x) \partial_{x_k} u + B_0(x) u - \varphi(x, q_2(x)) \Big] = 0. \tag{3}$$

Порядок особливостей коефіцієнтів рівняння (2) і крайової умови (3) у точці $P(x) \in D$ характеризуватимуть функції $s(\beta_i, x)$: $s(\beta_i, x) = \rho^{\beta_i}(x)$ при $\rho(x) \le 1$, $s(\beta_i, x) = 1$ при $\rho(x) \ge 1$, $\beta_i \in (-\infty, \infty)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\rho(x) = \inf\limits_{z \in \overline{\Omega}} |x - z|$.

Означимо простори, в яких вивчається задача (1)–(3). $C^l(\gamma; \beta; a; D)$ – множина функцій u: $x \in \overline{D}$, які мають неперервні частинні похідні в області $D \backslash \overline{\Omega}$ вигляду ∂_x^k, $|k| \le [l]$, для яких скінченна норма

$$||u; \gamma; \beta; a; D||_l = \sum_{|k| \le [l]} ||u; \gamma; \beta; a; D||_k + \langle u; \gamma; \beta; a; D \rangle_l,$$

де

$$||u;\gamma;\beta;a;D||_k=\sup_{P\in\overline{D}} s((a+|k|)\gamma;x)|\partial_x^k u(P)|\prod_{i=1}^n s(-k_i\beta_i,x),$$

$\partial_x^k=\partial_{x_1}^{k_1},...,\partial_{x_n}^{k_n}$, $|k|=k_1+\cdots+k_n$.

Щодо задачі (1)–(3) вважаємо виконаними умови:

а) коефіцієнти рівняння (1) $A_{ij}(x)s(\beta_i,x)s(\beta_j,x)\in C^\alpha(\gamma;\beta;0;D)$, $A_i(x)s(\mu_i,x)\in C^\alpha(\gamma;\beta;0;D)$, $\mu_i\geq 0$, $A_0(x)s(\mu_0;x)\in C^\alpha(\gamma;\beta;0;D)$, $\mu_0\geq 0$, $A_0(x)\leq 0$ і виконується умова рівномірної еліптичності

$$C_1|\xi|^2\leq\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x)s(\beta_i,x)s(\beta_j,x)\xi_i\xi_j\leq C_2|\xi|^2,$$

б) $B_k(x)s(\beta_k,x)\in C^{1+\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$, $B_0(x)s(\delta_0,x)\in C^{1+\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$, $\delta_0\geq 0$, $B_0(x)|_{\partial D}>0$, вектор $b^{(s)}=\{s(\beta_1,x)b_1(x),...,s(\beta_n,x)b_n(x)\}$ утворює з напрямком зовнішньої нормалі $\overrightarrow{n}$ до ∂D в точці $P(x)\in\partial D$ кут менший за $\frac{\pi}{2}$;

в) функції $f(x,q_1)\in C^\alpha(\gamma;\beta;2;D)$, $\varphi(x,q_2)\in C^{1+\alpha}(\gamma;\beta;1;D)$, $\gamma=\max\{\max_i\beta_i,\max_i(\mu_i-\beta_i),\delta_0,\frac{\mu_0}{2}\}$.

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай для задачі* (2) – (3) *виконані умови а)–в). Тоді існує единий розв'язок задачі* (2) – (3) *із простору* $C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$ *і справджується нерівність*

$$\|u;\gamma;\beta;0;D\|_{2+\alpha}\leq c\|f;\gamma;\beta;2;D\|_\alpha+\|\varphi;\gamma;\beta;1;D\|_{1+\alpha}. \tag{4}$$

Якщо $f\in C^\alpha(\gamma;\beta;0;D)$, $\varphi\in C^{1+\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$ *і для задачі виконуються умови а)–б), то единий розв'язок задачі* (2), (3) *в області* D *визначається інтегралом Стілтьєса з борелівською мірою*

$$u(x)=\int_D Z_1(x,d\xi),f(\xi,q_1(\xi))+\int_{\partial D} Z_2(x,d_\xi S),\varphi(\xi,q_2(\xi)).$$

.

Необхідні і достатні умови існування розв'язку задачі (1) – (3) встановлюються за допомогою методики праці [1].

1. Пукальський І., Яшан Б. Багатоточкова крайова задача оптимального керування для параболічних рівнянь з виродженням // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2020. – Том. 63, № 4. – С. 17–33.