УДК 517.956

І. Д. Пукальський

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ НЕРІВНОМІРНО ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З СТЕПЕНЕВИМИ ОСОБЛИВОСТЯМИ

Досліджується задача Коші для нерівномірно 2b-параболічних рівнянь з виродженням. Коефіцієнти параболічних рівнянь допускають степеневі особливості довільного порядку за будь-якими змінними на деякій множині точок. За допомогою апріорних оцінок і теорем Арчела і Рісса встановлено існування та інтегральне зображення єдиного розв'язку поставленої задачі Коші. Знайдено оцінки розв'язку задачі Коші та його похідних в гельдерових просторах зі степеневою вагою. Порядок степеневої ваги визначається через величини порядків степеневих особливостей і вироджень коефіцієнтів 2b-параболічних рівнянь.

Ключові слова: задача Коші, степеневі особливості, інтерполяційні нерівності, гельдерові простори, апріорні оцінки

Важливим питанням в теорії рівнянь з частинними похідними є встановлення умов коректності поставлених задач. Останні десятиліття особливу увагу приділяють здачам для рівнянь з виродженням. Рівняння з виродженнями за просторовими змінними описують різні процеси. Рівняннями із сингулярним оператором Бесселя у тілах із симетрією моделюються дифузійні процеси, радіальні коливання, тепло-масообмін при вирощуванні монокристалів [7].

У монографії [8] досліджено у нормованих просторах Діні параболічні системи з оператором Бесселя, які вироджуються на межі області та близькі за внутрішніми властивостями до рівномірно параболічних систем. Для цих систем вивчено задачу Коші, загальну *B*-параболічну крайову задачу в компактній області, задачу з ваговими крайовими умовами в півпросторі. Праця [9] в основному присвячена дослідженню задачі Коші та крайових задач для рівнянь і систем рівнянь параболічного типу, коефіцієнти яких мають степеневі особливості певного порядку.

Дослідженню властивостей фундаментального розв'язку і встановлення коректної розв'язності задачі Коші для параболічних рівнянь з виродженням за деякими змінними присвячено праці [2–4].

У роботах [5, 10–12] в обмежених циліндричних областях вивчено задачі з нелокальними та інтегральними умовами за часовою змінною для параболічних рівнянь зі степеневими особливостями довільного порядку в коефіцієнтах рівняння і крайової умови за будь-якими змінними на деякій множині точок. Класичним розв'язкам крайових задач з імпульсною дією для параболічних рівнянь другого порядку, коефіцієнти яких мають степеневі особливості, присвячено праці [6,13].

У цій статті розглядається задача Коші для $2b$-параболічного рівняння зі степеневими особливостями довільного порядку в коефіцієнтах за будь-якими змінними на деякій множині точок. За допомогою апріорних оцінок і теореми Арчела доведено існування єдиного розв'язку поставленої задачі та встановлено оцінки його похідних у гельдерових просторах зі степеневою вагою.

Постановка задачі і основний результат. Нехай Ω – деяка обмежена область, $\dim\Omega \le n-1$, t_0, T – фіксовані додатні числа, $0 < t_0 < T$, $D = \{(t,x) | t \in [0,T), x \in \overline{\Omega}\} \cup \{(t,x) | t = t_0, x \in R^n\}$, $\Pi = [0,T) \times R^n$.

В області Π розглянемо задачу Коші знаходження функції $u(t,x)$, яка задовольняє при $(t,x) \in \Pi \setminus D$ рівняння

$$(Lu)(t,x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{|k|=2b} A_k(t,x)\partial_x^k - \sum_{|k|<2b} B_k(t,x)\partial_x^k\right] u(t,x) = f(t,x) \qquad (1)$$

і початкову умову за змінною t

$$u(0,x)=\varphi(x)\,,\quad x\in R^n\setminus\overline{\Omega}\,, \tag{2}$$

$$\partial_x^k=\partial_{x_1}^{k_1}\partial_{x_2}^{k_2}\ldots\partial_{x_n}^{k_n}\,,\ \ |k|=k_1+k_2+\ldots+k_n\,.$$

Степеневі особливості коефіцієнтів диференціального виразу L у точці $P(t,x)\in\Pi\setminus D$ характеризуватимуть функції $s_1\left(\beta_i^{(1)},t\right)$ і $s_2\left(\beta_i^{(2)},x\right)$: $s_1\left(\beta_i^{(1)},t\right)=|t-t_0|$ при $|t-t_0|\le 1$, $s_1\left(\beta_i^{(1)},t\right)=1$ при $|t-t_0|\ge 1$; $s_2\left(\beta_i^{(2)},x\right)=\rho^{\beta_i^{(2)}}(x)$ при $\rho(x)\le 1$, $s_2\left(\beta_i^{(2)},x\right)=1$ при $\rho(x)\ge 1$, $\rho(x)=\inf\limits_{z\in\overline{\Omega}}|x-z|$, $\beta_i^{(\nu)}\in(-\infty,\infty)$, $\nu\in\{1,2\}$, $\beta^{(\nu)}=\left(\beta_1^{(\nu)},\beta_2^{(\nu)},\ldots,\beta_n^{(\nu)}\right)$, $\beta=\left(\beta^{(1)},\beta^{(2)}\right)$.

Позначимо через $l,q^{(1)},q^{(2)},\gamma^{(1)},\gamma^{(2)},\mu_{k_i}^{(1)},\mu_{k_i}^{(2)}$, $i\in\{1,\ldots,n\}$, $\mu_0^{(1)},\mu_0^{(2)}$ – дійсні числа, $q^{(\nu)}\ge 0$, $\gamma^{(\nu)}\ge 0$, $l\ge 0$, $\mu_{k_i}^{(\nu)}\ge 0$, $\mu_0^{(\nu)}\ge 0$, $[l]$ – ціла частина числа l, $\{l\}=l-[l]$, $P(t,x)$, $P_1\left(t^{(1)},x^{(1)}\right)$, $P_2\left(t^{(2)},x^{(2)}\right)$, $H_r\left(t^{(1)},x^{(2)}\right)$ – довільні точки із Π, $x^{(1)}=\left(x_1^{(1)},\ldots,x_n^{(1)}\right)$, $x^{(2)}=\left(x_1^{(1)},\ldots,x_{r-1}^{(1)},x_r^{(2)},x_{r+1}^{(1)},\ldots,x_n^{(1)}\right)$, Q – довільна замкнена підобласть Π. Покладемо $\left(k,\mu_k^{(\nu)}\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\mu_{k_i}^{(\nu)}$, $\left(k,\gamma^{(\nu)}-\beta^{(\nu)}\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\left(\gamma^{(\nu)}-\beta_i^{(\nu)}\right)$.

Означимо простори, в яких вивчається задача (1), (2).

$C^l(\gamma;\beta;q;\Pi)$ – множина функцій $u:(t,x)\in\overline{Q}$, які мають неперервні частинні похідні в області $\overline{Q}\setminus D$ вигляду $\partial_t^j\partial_x^k u$, $2bj+|k|\le[l]$, для яких скінченна норма

$$\|u;\gamma;\beta;q;\Pi\|_l=\sum_{2bj+|k|\le[l]}\|u;\gamma;\beta;q;\Pi\|_{2bj+|k|}+\langle u;\gamma;\beta;q;\Pi\rangle_l\,,$$

де

$$\|u;\gamma;\beta;0;\Pi\|_0=\sup_{P\in\overline{Q}}\|u(P)\|\equiv\|u;\Pi\|_0\,,$$

$$\|u;\gamma;\beta;q;\Pi\|_{2bj+|k|}=\sup_{P\in\overline{Q}}\Big[s_1\left(q^{(1)},t\right)s_2\left(q^{(2)},x\right)s_1\left((2bj+|k|)\gamma^{(1)},t\right)\times$$

$$\times s_2\left((2bj+|k|)\gamma^{(2)},x\right)\left|\partial_t^j\partial_x^k u(P)\right|\prod_{i=1}^{n}s_1\left(-k_i\beta_i^{(1)},t\right)s_2\left(-k_i\beta_i^{(2)},x\right)\Big],$$

$$\langle u;\gamma;\beta;q;\Pi\rangle_l=\sum_{2bj+|k|=[l]}\Bigg\{\sum_{r=1}^{n}\sup_{(P_1,H_r)\subset\overline{Q}}\Big[s_1\left(q^{(1)},t^{(1)}\right)s_2\left(q^{(2)},\tilde{x}\right)s_1\left([l]\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)\times$$

$$\times s_2\left([l]\gamma^{(2)},\tilde{x}\right)\prod_{i=1}^{n}s_1\left(-k_i\beta_i^{(1)},t^{(1)}\right)s_2\left(-k_i\beta_i^{(2)},\tilde{x}\right)s_1\left(\{l\}\left(\gamma^{(1)}-\beta_r^{(1)}\right),t^{(1)}\right)\times$$

$$\times s_2\left(\{l\}\left(\gamma^{(2)}-\beta_r^{(2)}\right),\tilde{x}\right)\left|x_r^{(1)}-x_r^{(2)}\right|^{-\{l\}}\left|\partial_t^j\partial_x^k u(P_1)-\partial_t^j\partial_x^k u(H_r)\right|\Big]\Bigg\}+$$

$$+\sum_{2bj+|k|=[l]}\Bigg\{\sum_{r=1}^{n}\sup_{(P_2,H_r)\subset\overline{Q}}s_1\left(q^{(1)},\tilde{t}\right)s_2\left(q^{(2)},x^{(2)}\right)s_1\left(l\gamma^{(1)},\tilde{t}\right)s_2\left(l\gamma^{(2)},x^{(2)}\right)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}s_1\left(-k_i\beta_i^{(1)},\tilde{t}\right)s_2\left(-k_i\beta_i^{(2)},x^{(2)}\right)\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|^{-\left\{\frac{l}{2b}\right\}}\left|\partial_t^j\partial_x^k u(P_2)-\partial_t^j\partial_x^k u(H_r)\right|,$$

$$s_1\left(q,\tilde{t}\right)=\min\left\{s_1\left(q,t^{(1)}\right),s_1\left(q,t^{(2)}\right)\right\},$$

$$s_2\left(q,\tilde{x}\right)=\min\left\{s_2\left(q,x^{(1)}\right),s_2\left(q,x^{(2)}\right)\right\}.$$

Щодо задачі (1), (2), вважаємо виконаними умови:

а) коефіцієнти рівняння (1) $A_k(t,x)\prod_{i=1}^{n} s_1\left(k_i\beta_i^{(1)},t\right)s_2\left(k_i\beta_i^{(2)},x\right)\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$, $B_k(t,x)\prod_{i=1}^{n} s_1\left(k_i\mu_{k_i}^{(1)},t\right)s_2\left(k_i\mu_{k_i}^{(2)},x\right)\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$, $1\le|k|\le 2b-1$, $B_0(t,x)s_1\left(\mu_0^{(1)},t\right)\times$ $\times s_2\left(\mu_0^{(2)},x\right)\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$, $B_0(t,x)\le K<\infty$ і виконується умова рівномірної параболічності [15, с. 9] для рівняння

$$\left[\partial_t-\sum_{|k|=2b}A_k(t,x)\prod_{i=1}^{n}s_1\left(k_i\beta_i^{(1)},t\right)s_2\left(k_i\beta_i^{(2)},x\right)\partial_x^{|k|}\right]u(t,x)=f(t,x)\,; \tag{3}$$

б) функції $f(t,x)\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;2b;\Pi)$, $\varphi(x)\in C^{2b+\alpha}\left(\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;R^n\right)$,

$$\gamma^{\nu}=\max\left\{\max_i\beta_i^{(\nu)},\max_i\frac{k_i\left(\mu_{k_i}^{(\nu)}-\beta_i^{(\nu)}\right)}{2b-|k|},\frac{\mu_0^{(\nu)}}{2b}\right\},\ \nu\in\{1,2\},\ \tilde{\gamma}=\left(0,\gamma^{(2)}\right),\ \tilde{\beta}=\left(0,\beta^{(2)}\right).$$

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай для задачі (1), (2) виконані умови а), б). Тоді існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) із простору* $C^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$ *і справджується нерівність*

$$\|u;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2b+\alpha}\le C\left(\left\|\varphi;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;R^n\right\|_{2b+\alpha}+\|f;\gamma;\beta;2b;\Pi\|_{\alpha}\right). \tag{4}$$

Якщо $f\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$ *і для задачі (1), (2) виконані умови а), б), то єдиний розв'язок задачі (1), (2) в області* Π *визначається інтегралами Стілтьєса з борелівською мірою*

$$u(t,x)=\int_0^t\int_{R^n}Z(t,x;d\tau,d\xi)f(\tau,\xi)+\int_{R^n}Z(t,x;0,d\xi)\varphi(\xi). \tag{5}$$

Для доведення теореми 1 встановимо спочатку розв'язність допоміжних задач Коші з гладкими коефіцієнтами. З множини одержаних розв'язків виділимо збіжну підпослідовність, граничне значення якої буде розв'язком задачі (1), (2).

Інтерполяційні нерівності та оцінка розв'язків допоміжних задач Коші. Нехай $\Pi_m=\Pi\cap\left\{(t,x)\in\Pi\,\middle|\,s_1(1,t)\ge m_1^{-1},s_2(1,x)\ge m_2^{-1}\right\}$, $m=(m_1,m_2)$, $m_1\ge1$, $m_2\ge1$, послідовність областей, яка при $m_1\to\infty$, $m_2\to\infty$ збігається до Π.

Розглянемо в області Π задачу знаходження розв'язків рівняння

$$(L_1u_m)(t,x)\equiv\left[\partial_t-\sum_{|k|=2b}a_k(t,x)\partial_x^k-\sum_{|k|\le 2b-1}b_k(t,x)\partial_x^k\right]u_m(t,x)=f_m(t,x)\,, \tag{6}$$

які задовольняють при $t=+0$ початкову умову

$$u_m(0,x)=\varphi_m(x)\,. \tag{7}$$

Тут коефіцієнти a_k, b_k, функції f_m, φ_m в областях Π_m співпадають з A_k, B_k, f, φ відповідно, а в областях $\Pi\setminus\Pi_m$ є неперервним продовженням коефіцієнтів A_k, B_k і функцій f, φ із областей Π_m в області $\Pi\setminus\Pi_m$ із збереженням гладкості і норми [14, с. 82].

Позначимо через $H^l(\gamma;\beta;q;\Pi)$ сукупність функцій простору $C^l(\Pi)$ з нормою $\|u_m;\gamma;\beta;q;\Pi\|_l$, еквівалентною при фіксованих m_1, m_2 гельдеровій нормі, яка визначається так само, як і $\|u;\gamma;\beta;q;\Pi\|_l$, тільки замість функцій $s_1\left(a^{(1)},t\right)$, $s_2\left(a^{(2)},x\right)$ беремо відповідно $d_1\left(a^{(1)},t\right)$, $d_2\left(a^{(2)},x\right)$, де $d_1\left(a^{(1)},t\right)=\max\left(s_1\left(a^{(1)},t\right),m_1^{-a^{(1)}}\right)$ при

$a^{(1)} \geq 0$ і $d_1\left(a^{(1)},t\right) = \min\left(s_1\left(a^{(1)},t\right), m_1^{-a^{(1)}}\right)$ при $a^{(1)} \leq 0$; $d_2\left(a^{(2)},x\right) = \max\left(s_2\left(a^{(2)},x\right), m_2^{-a^{(2)}}\right)$ при $a^{(2)} \geq 0$ і $d_2\left(a^{(2)},x\right) = \min\left(s_2\left(a^{(2)},x\right), m_2^{-a^{(2)}}\right)$ при $a^{(2)} \leq 0$.

Встановимо інтерполяційні нерівності для норми $\|u_m;\gamma;\beta;q;\Pi\|_l$.

Лема. *Нехай* $u_m \in H^l(\gamma;\beta;0;\Pi)$. *Тоді для* $\tilde{\varepsilon} \in (0,1)$ *існує така стала* $C(\tilde{\varepsilon})$, *що виконуються нерівності*

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2bj+|k|\leq\lambda} \leq \tilde{\varepsilon}^{l-\lambda}\langle u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\rangle_l + C(\tilde{\varepsilon})\|u_m;\Pi\|_0, \quad \lambda < l. \tag{8}$$

Доведення. Нехай $P(t,x)$ довільна фіксована точка в області Π, $\Pi^{(1)} = \{(\tau,\xi) \mid |t-\tau| \leq \frac{\varepsilon^{2b}}{2b} d_1\left(2b\gamma^{(1)},t\right) d_2\left(2b\gamma^{(2)},x\right), |x_r - \xi_r| \leq \frac{\varepsilon}{2} d_1\left(\gamma^{(1)} - \beta_r^{(1)},t\right) d_2\left(\gamma^{(2)} - \beta_r^{(2)},x\right), r \in \{1,2,\ldots,n\}\}$. На гіперплощині $t = \tau$ розглянемо точки $P_1\left(\tau,\xi^{(1)}\right)$, $P_2\left(\tau,\xi^{(2)}\right)$, $\xi^{(1)} = \left(\xi_1^{(1)},\ldots,\xi_n^{(1)}\right)$, $\xi^{(2)} = \left(\xi_1^{(1)},\ldots,\xi_{r-1}^{(1)},\xi_r^{(2)},\xi_{r+1}^{(1)},\ldots,\xi_n^{(1)}\right)$, для яких $\left|\xi_r^{(2)} - \xi_r^{(1)}\right| = \varepsilon d_1\left(\gamma^{(1)} - \beta_r^{(1)},t\right) d_2\left(\gamma^{(2)} - \beta_r^{(2)},x\right)$.

За теоремою про «середнє» існує точка $P_3\left(\tau,\xi^{(3)}\right)$ така, що при $2bj + |k| = [l] - 1$ маємо

$$\partial_t^j \partial_x^k u_m(P_1) - \partial_t^j \partial_x^k u_m(P_2) = \varepsilon d_1\left(\gamma^{(1)} - \beta_r^{(1)},t\right) d_2\left(\gamma^{(2)} - \beta_r^{(2)},x\right) \partial_{\xi_r} \partial_t^j \partial_x^k u_m(P_3).$$

Оскільки $u_m \in H^l(\gamma;\beta;0;\Pi)$, точка P довільна і $d_1\left(\gamma^{(1)} - \beta_r^{(1)},\tau\right) d_2\left(\gamma^{(2)} - \beta_r^{(2)},\xi^{(3)}\right) \leq 2 d_1\left(\gamma^{(1)} - \beta_r^{(1)},t\right) d_2\left(\gamma^{(2)} - \beta_r^{(2)},x\right)$, то

$$d_1\left((2bj+|k|)\gamma^{(1)},\tau\right) d_2\left((2bj+|k|)\gamma^{(2)},\xi^{(3)}\right) d_1\left(\gamma^{(1)} - \beta_r^{(1)},\tau\right) d_2\left(\gamma^{(2)} - \beta_r^{(2)},\xi^{(3)}\right) \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{n} d_1\left(-k_i\beta_i^{(1)},\tau\right) d_2\left(-k_i\beta_i^{(2)},\xi^{(3)}\right) \left|\partial_{\xi_3} \partial_t^j \partial_x^k u_m(P_3)\right| \leq \frac{2}{\varepsilon}\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{[l]-1}. \tag{9}$$

Нехай $2bj + |k| = [l]$, $P_4\left(\tau^{(1)},\xi^{(1)}\right) \in \Pi^{(1)}$, $\left|\tau - \tau^{(1)}\right| \leq \frac{\varepsilon^{2b}}{2b} d_1\left(2b\gamma^{(1)},t\right) d_2\left(2b\gamma^{(2)},x\right)$. Враховуючи нерівність

$$\left|\partial_t^j \partial_x^k u_m(P_4)\right| \leq \left|\partial_t^j \partial_x^k u_m(P_3)\right| + \left|\partial_t^j \partial_x^k u_m(P_1) - \partial_t^j \partial_x^k u_m(P_3)\right|$$
$$\varepsilon d_1\left(\{l\}\left(\gamma^{(1)} - \beta_r^{(1)}\right),t\right) d_2\left(\{l\}\left(\gamma^{(2)} - \beta_r^{(2)}\right),x\right) \left|\xi_r^{(1)} - \xi_r^{(3)}\right|^{-\{l\}} +$$
$$+ \left|\partial_t^j \partial_x^k u_m(P_4) - \partial_t^j \partial_x^k u_m(P_1)\right| \varepsilon d_1\left(2b\left\{\frac{l}{2b}\right\}\gamma^{(1)},t\right) d_2\left(2b\left\{\frac{l}{2b}\right\}\gamma^{(2)},x\right) \left|\tau^{(1)} - \tau\right|^{-\left\{\frac{l}{2b}\right\}},$$

маємо

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{[l]} \leq \varepsilon^{\alpha}\langle u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\rangle_l + \frac{C}{\varepsilon}\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{[l]-1}. \tag{10}$$

Аналогічно встановлюється нерівність

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{[l]-1} \leq \varepsilon\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{[l]} + \frac{C}{\varepsilon}\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{[l]-2}. \tag{11}$$

Враховуючи нерівності (10), (11), доведемо нерівність (8) для всіх $2bj + |k| < [l]$. Доведення проведемо методом математичної індукції по $[l]$. Нехай при $[l] = 1$ нерівність (8) доведено. Вважаємо, що нерівність (8) є правильною для $[l] = N > 1$. Доведемо її для $[l] = N + 1$. Нехай $2bj + |k| = N$. Маємо

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_N \le \varepsilon \|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{N+1} + \frac{C}{\varepsilon}\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{N-1} \le$$

$$\le \varepsilon\left(\varepsilon_1^{\alpha}\langle u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\rangle_{N+1+\alpha} + \frac{C}{\varepsilon_1}\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_N\right) + \frac{C}{\varepsilon}\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{N-1}.$$

За припущенням

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{N-1} \le \varepsilon_2 \|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_N + C(\varepsilon_2)\|u_m;\Pi\|_0,$$

тому

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_N \le \varepsilon_3^{1+\alpha}\langle u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\rangle_{N+1+\alpha} + C(\varepsilon_3)\|u_m;\Pi\|_0. \quad (12)$$

При $[l] > N$ маємо

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_N \le \tilde{\varepsilon}^{l-N}\langle u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\rangle_l + C(\tilde{\varepsilon})\|u_m;\Pi\|_0. \quad (13)$$

Враховуючи нерівності (11)–(13), одержуємо нерівність (8).

При виконанні умов а), б) існує єдиний класичний розв'язок задачі Коші (7), (8) [15, с. 269] в просторі $H^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$. Встановимо оцінку норми $\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2b+\alpha}$.

Правильна така теорема.

Теорема 2. *Якщо виконані умови а), б), то для розв'язку задачі (6), (7) правильна оцінка*

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2b+\alpha} \le C\left(\|f_m;\gamma;\beta;2b;\Pi\|_{\alpha} + \|\varphi_m;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;R^n\|_{2b+\alpha} + \|u_m;\Pi\|_0\right). \quad (14)$$

Доведення. Використовуючи інтерполяційні оцінки (8), маємо

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2b+\alpha} \le \left(1+\varepsilon^{\alpha}\right)\langle u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\rangle_{2b+\alpha} + C(\varepsilon)\|u_m;\Pi\|_0.$$

Із визначення півнорми випливає існування в Π точок $P_1\left(t^{(1)},x^{(1)}\right)$, $P_2\left(t^{(2)},x^{(2)}\right)$, $H_r\left(t^{(1)},x^{(2)}\right)$, для яких правильна нерівність

$$\frac{1}{2}\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2b+\alpha} \le E_1 + E_2, \quad (15)$$

де

$$E_1 = \sum_{2bj+|k|=2b}\sum_{r=1}^{n}\Bigg[s_1\left(2b\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)s_2\left(2b\gamma^{(2)},\tilde{x}\right)\prod_{r=1}^{n}s_1\left(-k_i\beta_i^{(1)},t^{(1)}\right)s_2\left(-k_i\beta_i^{(2)},\tilde{x}\right)\times$$

$$\times s_1\left(\alpha\left(\gamma^{(1)}-\beta_r^{(1)}\right),t^{(1)}\right)s_2\left(\alpha\left(\gamma^{(2)}-\beta_r^{(2)}\right),\tilde{x}\right)\left|x_r^{(1)}-x_r^{(2)}\right|^{-\alpha}\left|\partial_t^j\partial_x^k u_m(P_1)-\partial_t^j\partial_x^k u_m(H_r)\right|\Bigg],$$

$$E_2 = \sum_{2bj+|k|=2b}\sum_{r=1}^{n}\Bigg[s_1\left((2b+\alpha)\gamma^{(1)},\tilde{t}\right)s_2\left((2b+\alpha)\gamma^{(2)},x^{(2)}\right)\prod_{r=1}^{n}s_1\left(-k_i\beta_i^{(1)},\tilde{t}\right)\times$$

$$\times s_2\left(-k_i\beta_i^{(2)},x^{(2)}\right)\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|^{-\frac{\alpha}{2b}}\left|\partial_t^j\partial_x^k u_m(P_2)-\partial_t^j\partial_x^k u_m(H_r)\right|\Bigg].$$

Якщо $\left|x_r^{(1)}-x_r^{(2)}\right| \ge \frac{\varepsilon}{4}n^{-1}d_1\left(\gamma^{(1)}-\beta_r^{(1)},\tilde{t}\right)d_2\left(\gamma^{(2)}-\beta_r^{(2)},\tilde{x}\right) \equiv N_1$, ε – довільне дійсне число із $(0,1)$, то

$$E_1 \le 2\varepsilon^{-\alpha}\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2b}. \quad (16)$$

Якщо $\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right| \ge \frac{\varepsilon^{2b}}{2b}d_1\left(2b\gamma^{(1)},\tilde{t}\right)d_2\left(2b\gamma^{(2)},\tilde{x}\right) \equiv N_2$, то

$$E_2 \le 2\varepsilon^{-\alpha}\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2b}. \quad (17)$$

Застосовуючи інтерполяційні нерівності (8) до (16), (17), знаходимо

$$E_1 + E_2 \le 2\varepsilon^{\alpha}\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2b+\alpha} + C(\varepsilon)\|u_m;\Pi\|_0. \quad (18)$$

Нехай $\left|x_r^{(1)}-x_r^{(2)}\right| \le N_1$, $\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right| \le N_2$. Будемо вважати

$$d_2\left(\gamma^{(2)},\tilde{x}\right)=\min\left(d_2\left(\gamma^{(2)},x^{(2)}\right),d_2\left(\gamma^{(2)},x^{(1)}\right)\right)\equiv d\left(\gamma^{(2)},x^{(1)}\right),$$
$$d_1\left(\gamma^{(1)},\tilde{t}\right)=\min\left(d_1\left(\gamma^{(1)},t^{(1)}\right),d_1\left(\gamma^{(1)},t^{(2)}\right)\right)\equiv d\left(\gamma^{(1)},t^{(1)}\right),$$
$P_1\left(t^{(1)},x^{(1)}\right)\in\Pi$. Запишемо задачу (6), (7) у вигляді

$$(L_1u_m)(t,x)\equiv\left[\partial_t-\sum_{|k|=2b}a_k\left(P_1\right)\partial_x^k\right]u_m(t,x)=f_m(t,x)+\sum_{|k|\le 2b-1}b_k(t,x)\partial_x^k u_m+$$
$$+\sum_{|k|=2b}\left[a_k\left(t,x\right)-a_k\left(P_1\right)\right]\partial_x^k u_m\equiv F_m\left(t,x\right), \tag{19}$$
$$u_m(0,x)=\varphi_m(x). \tag{20}$$

В задачі (19), (20) зробимо заміну $u_m(t,x)=v_m(t,y)$, $y_i=d_1\left(\beta_i^{(1)},t^{(1)}\right)\times$ $\times d_2\left(\beta_i^{(2)},x^{(1)}\right)x_i$. Тоді $v_m(t,y)$ буде розв'язком задачі Коші

$$(L_2v_m)(t,y)\equiv\left[\partial_t-\sum_{|k|=2b}a_k\left(P_1\right)\prod_{i=1}^{n}d_1\left(k_i\beta_i^{(1)},t^{(1)}\right)d_2\left(k_i\beta_i^{(2)},x^{(1)}\right)\partial_y^k\right]v_m(t,y)=$$
$$=F_m(t,Y), \tag{21}$$
$$v_m(0,y)=\varphi_m(Y), \tag{22}$$
де $Y=\left(d_1^{-1}\left(\beta_1^{(1)},t^{(1)}\right),d_2^{-1}\left(\beta_1^{(2)},x^{(1)}\right)y_1,\ldots,d_1^{-1}\left(\beta_n^{(1)},t^{(1)}\right),d_2^{-1}\left(\beta_n^{(2)},x^{(1)}\right)y_n\right)$.

Позначимо через $y_i^{(1)}=d_1\left(\beta_i^{(1)},t^{(1)}\right)d_2\left(\beta_i^{(2)},x^{(1)}\right)x_i^{(1)}$, $P_1\left(t^{(1)},x^{(1)}\right)\equiv R_1\left(t^{(1)},y^{(1)}\right)$, $K_\delta=\left\{(t,y)\in\Pi,\left|t-t^{(1)}\right|\le(4\delta)^{2b}N_1,\left|y_i-y_i^{(1)}\right|\le 4\delta N_1^{\frac{1}{2b}}n^{-1},i\in\{1,\ldots,n\}\right\}$. Візьмемо функцію $\eta(t,y)$, яка має другі неперервні частинні похідні за змінною t, неперервні частинні похідні порядка $2b+1$ за змінними y і задовольняє умови

$$\eta(t,y)=\begin{cases}1,\ (t,y)\in K_{1/2},0\le\eta(t,y)\le 1;\\ 0,\ (t,y)\notin K_{3/4},\left|\partial_t^j\partial_y^k\eta\right|\le C_{kj}d_1^{-1}\left((2bj+|k|)\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)d_2^{-1}\left((2bj+|k|)\gamma^{(2)},x^{(1)}\right).\end{cases}$$

Тоді функція $\omega_m(t,y)=v_m(t,y)\eta(t,y)$ буде розв'язком задачі Коші.

$$(L_2\omega_m)(t,y)=\omega_m\partial_t\eta+\sum_{|k|=2b}a_k\left(P_1\right)\prod_{i=1}^{n}d_1\left(k_i\beta_i^{(1)},t^{(1)}\right)d_2\left(k_i\beta_i^{(2)},x^{(1)}\right)\times$$
$$\times\left(\sum_{0<|p|\le|k|}C_{|k|}^{|p|}\partial_y^{k-p}v_m\partial_y^p\eta\right)+F_{m\eta}=\Phi(t,y;v_m), \tag{23}$$
$$\omega_m(0,y)=\eta(0,y)\varphi_m(Y). \tag{24}$$

Зазначимо, що коефіцієнти рівняння (23), згідно з умовою а), обмежені сталими, незалежними від точки P_1. Тому, використовуючи теорему 4.1 із [8, с. 43], для довільних точок $M_1\left(\tau^{(1)},z^{(1)}\right)\in K_{1/2}$, $M_2\left(\tau^{(2)},z^{(2)}\right)\in K_{1/2}$ правильна нерівність

$$d^{-\alpha}\left(M_1,M_2\right)\left|\partial_t^j\partial_y^k\omega_m(M_1)-\partial_t^j\partial_y^k\omega_m(M_2)\right|\le$$
$$\le c\left(\left\|\Phi_m\right\|_{C^\alpha(K_{3/4})}+\left\|\eta\varphi_m\right\|_{C^{2b+\alpha}(K_{3/4}\cap\{t=0\})}\right), \tag{25}$$
$d\left(M_1,M_2\right)$ – параболічна відстань між M_1 і M_2, $2bj+|k|=2b$.

Враховуючи властивості функції $\eta(t,y)$, нерівності (8), одержимо

$$\|\Phi_m\|_{C^{\alpha}(K_{3/4})} \le c\Big[d_1^{-1}\big((2b+\alpha)\gamma^{(1)}, t^{(1)}\big) d_2^{-1}\big((2b+\alpha)\gamma^{(2)}, x^{(1)}\big)\times$$
$$\times\big(\|v_m; K_{3/4}\|_0 + \|F_m; \gamma; 0; 2b; K_{3/4}\|_\alpha + \|v_m; \gamma; 0; 0; K_{3/4}\|_{2b}\big)\Big], \tag{26}$$
$$\|\varphi_\eta\|_{C^{2b+\alpha}(K_{3/4}\cap\{t=0\})} \le c d_1^{-1}\big((2b+\alpha)\gamma^{(1)}, t^{(1)}\big) d_2^{-1}\big((2b+\alpha)\gamma^{(2)}, x^{(1)}\big)\times$$
$$\times\|\varphi_m; \tilde{\gamma}; 0; 0; K_{3/4}\cap\{t=0\}\|_{2b+\alpha}.$$

Із визначення простору $H^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$ випливає справедливість нерівностей

$$c_1\|v_m;\gamma;0;0;K_{3/4}\|_l \le \|u_m;\gamma;\beta;0;V_{3/4}\|_l \le c_2\|v_m;\gamma;0;0;K_{3/4}\|_l,$$
$$V_\delta = \Big\{(t,x)\in\Pi, \big|t-t^{(1)}\big| \le (4\delta)^{2b} N_1, \big|x_i - x_i^{(1)}\big| \le 4\delta n^{-1} N_2, i\in\{1,2,\ldots,n\}\Big\}.$$

Підставляючи (26) у (25) і повертаючись до змінних (t,x), знаходимо

$$E_1 + E_2 \le c\Big(\|F_m;\gamma;\beta;2b;V_{3/4}\|_\alpha + \|\varphi_m;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;V_{3/4}\cap\{t=0\}\|_{2b+\alpha} +$$
$$+\|u_m;\gamma;\beta;0;V_{3/4}\|_{2b} + \|u_m;V_{3/4}\|_0\Big). \tag{27}$$

Для знаходження норми $\|F_m;\gamma;\beta;2b;V_{3/4}\|_\alpha$ досить оцінити півнорми кожного доданка виразу $F_m(t,x)$. Скориставшись нерівностями (8), одержимо

$$\|F_m;\gamma;\beta;2b;V_{3/4}\|_\alpha \le c_2\big(\|f_m;\gamma;\beta;2b;V_{3/4}\|_\alpha + \varepsilon_2\|u_m;\gamma;\beta;0;V_{3/4}\|_{2b+\alpha}\big) + c_3\|u_m;V_{3/4}\|_0. \tag{28}$$

Підставляючи (28) в (27), знаходимо

$$E_1 + E_2 \le c_2\big(\|f_m;\gamma;\beta;2b;V_{3/4}\|_\alpha + \varepsilon_2\|u_m;\gamma;\beta;0;V_{3/4}\|_{2b+\alpha}\big) +$$
$$+c_1\|\varphi_m;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;V_{3/4}\cap\{t=0\}\|_{2b+\alpha} + c_3\|u_m;V_{3/4}\|_0\Big). \tag{29}$$

Використовуючи нерівності (13), (18), (28) і вибираючи ε, ε_2 досить малими, одержимо нерівність (14).

В задачі (6), (7) зробимо заміну

$$u_m(t,x) = \varphi_m(x) + W_m(t,x), \tag{30}$$

одержимо задачу Коші для розв’язку $W_m(t,x)$

$$(L_1W_m)(t,x) = f_m(t,x) - (L_1\varphi_m)(x),$$
$$W_m(0,x) = 0. \tag{31}$$

Правильна теорема.

Теорема 3. *Якщо $W_m(t,x)$ – єдиний класичний розв’язок задачі (31) і виконані умови а), б), то для $W_m(t,x)$ виконується нерівність*

$$\|W_m;\Pi\|_0 \le c\|L_1W_m;\gamma;\beta;2b;\Pi\|_\alpha, \tag{32}$$

де стала c не залежить від m.

Доведення. За умов на гладкість коефіцієнтів диференціального виразу L_1 і функцій f_m, φ_m існує єдиний розв’язок задачі (31), який належить простору $H^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$ і має при кожному фіксованому m_1, m_2 скінченну норму [15, с. 269].

Для встановлення нерівності (32) скористаємось методикою доведення зауваження 2 [1, с. 79]. Припустимо, що нерівність (32) не виконується в будь-якій замкнутій області $\overline{Q}\subset\Pi$. Тоді існує послідовність функцій $V_m^{(n)}\in H^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$ таких, що $\|V_m^{(n)};\Pi\| = 1$, $V_m^{(n)}(0,x) = 0$ і $L_1V_m^{(n)}$ прямує до нуля при $n\to\infty$. Із нерівності (14) випливає, що норми $\|V_m^{(n)};\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2b+\alpha}$ рівномірно обмежені. Тому існує підпослідовність $V_m^{(n_i)}$, яка при $n_i\to\infty$ збігається до розв’язку $V_m^{(0)}\in$

$H^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$ однорідної задачі Коші. Оскільки розв'язок задачі Коші єдиний, то $V_m^{(0)} \equiv 0$, що суперечить рівності $\left\|V_m^{(n)};\Pi\right\| = 1$.

Слід зазначити, що

$$\left\|L_1 W_m;\gamma;\beta;0;\Pi\right\|_{2b+\alpha} \le c\left(\| f_m;\gamma;\beta;2b;\Pi\|_\alpha + \left\|\varphi_m;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;R^n\right\|_{2b+\alpha}\right). \qquad (33)$$

Доведення теореми 1. Оскільки

$$\| f_m;\gamma;\beta;2b;\Pi\|_\alpha \le c\| f;\gamma;\beta;2b;\Pi\|_\alpha,$$

$$\left\|\varphi_m;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;R^n\right\|_{2b+\alpha} \le c\left\|\varphi;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;R^n\right\|_{2b+\alpha},$$

то використовуючи нерівності (14), (33), одержимо

$$\left\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\right\|_{2b+\alpha} \le c\left(\| f;\gamma;\beta;2b;\Pi\|_\alpha + \left\|\varphi;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;R^n\right\|_{2b+\alpha}\right). \qquad (34)$$

Права частина нерівності (34) не залежить від m_1, m_2 і послідовності

$$\left\{W_m^{(j,k)}\right\} = \left\{d_1\left((2bj+|k|)\gamma^{(1)},t\right)d_2\left((2bj+|k|)\gamma^{(2)},x\right)\prod_{i=1}^{n} d_1\left(-k_i\beta_i^{(1)},t\right)\times\right.$$

$$\left.\times d_2\left(-k_i\beta_i^{(2)},x\right)\left|\partial_t^j\partial_x^k u_m\right|\right\}, \quad 2bj+|k|\le 2b$$

рівномірно обмежені і рівностепенно неперервні в будь-якій замкнутій області $\overline{Q}\subset\Pi$. За теоремою Арчела існують послідовності $\left\{W_{m(l)}^{(j,k)}\right\}$, рівномірно збіжні при $m(l)\to\infty$ до $W^{(j,k)}$. Переходячи до границі при $m(l)\to\infty$ в задачі (6), (7), одержимо, що $u(t,x) = W^{(0,0)}$ – єдиний розв'язок задачі (1), (2), $u\in C^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$ і справедлива оцінка (4).

Оскільки $C^\alpha(\gamma;\beta;0;\Pi)\subset C^\alpha(\gamma;\beta;2b;\Pi)$, то для $f\in C^\alpha(\gamma;\beta;0;\Pi)$ правильна оцінка

$$\| f;\gamma;\beta;2b;\Pi\|_\alpha \le c\| f;\gamma;\beta;0;\Pi\|_\alpha. \qquad (35)$$

Використовуючи оцінки (4), (35) для розв'язку задачі (1), (2) встановлюємо правильність оцінки

$$\left\|u;\gamma;\beta;0;\Pi\right\|_{2b+\alpha} \le c\left(\| f;\gamma;\beta;0;\Pi\|_\alpha + \left\|\varphi;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;R^n\right\|_{2b+\alpha}\right).$$

Зазначимо, що простір $C_\alpha \equiv C^\alpha(\gamma;\beta;0;\Pi)\times C^{2b+\alpha}\left(\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;R^n\right)$ вкладається в простір $C(\Pi)$, $C_\alpha\subset C(\Pi)$. Тому, використовуючи теорему Рісса, можна вважати, що при фіксованих $(t,x)\in\Pi$ лінійний неперервний функціонал $u(t,x)$ породжує борелівську міру $Z(t,x;G)$, яка визначається на σ-алгебрі підмножин G області Π, включаючи Π і всі її відкриті підмножини такі, що значення функціоналу визначається формулою (5).

1. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. – М.: ИЛ, 1962. – 205 с.
2. *Ivasishen S.D., Eidelman S.D.* 2*b*-parabolic equations with degeneration in some of the variables. Dokl. Akad. Nauk. 1998. Vol. 360. No 3. P. 303-305.
3. *Івасишен С.Д., Літовченко В.А.* Задача Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова з недодатним родом // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 10. – С. 1330-1350.
4. *Івасишен С.Д., Мединський І.П., Пасічник Г.С.* Параболічні рівняння з виродженнями на початковій гіперплощині // Буковинський мат. журн. – 2016. – **4**, № 3-4. – 57-68 с.
5. *Inna M. Isaryuk and Ivan D. Pukal'skii.* The boundary-value problems for parabolic equations with a nonlocal condition and degenerations // Journal of Mathematical Sciences. – Vol. 207, №1, May, 2015. – P. 26-38.
6. *Ісарюк І.М., Пукальський І.Д.* Крайові задачі з імпульсними умовами для параболічних рівнянь з виродженням // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – **59**, №3. – 2016. – С. 55-67.

7. *Конаков П.К., Веревочкин Г.Е.* Тепло- и массообмен при получении монокристаллов. – М.: Металлургия, 1971. – 387 с.
8. *Матійчук М.І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Інститут математики НАН України, 1999. – 176 с.
9. *Матійчук М.І.* Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці: Прут, 2003. – 248 с.
10. *I.D. Pykal'skyi and I.M. Isaryuk.* Nonlocal parabolic boundary-value problems with singularities // Journal of Mathematical Sciences. – Vol. 208, №3. – July, 2015. – P. 327-343.
11. *Пукальський І.Д.* Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями. – Чернівці: Рута, 2008. – 253 с.
12. *Пукальський І.Д.* Задача с косой производной для неравномерно параболического уравнения // Дифф. уравнения. – 2001. – **37**, №12. – С. 1637-1645.
13. I. *D. Pukal'skii.* Boundary-value problem for parabolic equations with impulsive conditions and degeneration. Journal of Mathematical Sciences, Vol 223, N1. May 2017. p. 60-71.
14. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – Москва: Мир, 1968. – 427 с.
15. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.

И. Д. Пукальский
ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НЕРАВНОМЕРНО ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СТЕПЕННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

Исследуется задача Коши для неравномерно 2b-параболических уравнений с вырождением. Коэффициенты параболических уравнений допускают степенные особенности произвольного порядка по любым переменным на некотором множестве точек. С помощью априорных оценок и теорем Арчела и Рисса установлено существование и интегральное изображение единственного решения поставленной задачи Коши. Найдены оценки решения задачи Коши и его производных в гельдеровых пространствах со степенным весом. Порядок степенного веса определяется через величины порядков степенных особенностей и вырожденных коэффициентов 2b-параболических уравнений.
Ключевые слова: задача Коши, степенные особенности, интерполяционные неравенства, гельдерово пространство, априорные оценки.

I. D. Pukal`skii
CAUCHY`S PROBLEM FOR NON-UNIFORM PARABOLIC EQUATIONS WITH A POWER SINGULARITIES OF ARBITRARY ORDER

The Cauchy`s problem for irregular 2b-parabolic equations with degenerations is being investigated. Coefficients of a parabolic equations admits power singularities of arbitrary order on any variables on some set of points. Using prior estimates and the theorems of Archer and Riesz existence and integral represented the unique solution to the Cauchy problem it is established. Estimates of the solution of Cauchy`s problem and derivatives in Hölder spaces with a power weight are found. The order of the power-law weight is defined in terms of quantities of the power singularities and degenerations of coefficients of 2b-parabolic equations.
Keywords: Cauchy`s problem, power singularities, interpolation inequalities, Hölder spaces, prior estimates.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці
Одержано 06.10.21

E-mail: i.pukalsky@chnu.edu.ua

Тел.: **0994011009, (0372) 58-48-64**