Про задачу Коші для параболічних за Ейдельманом систем

Івасюк Г.П., Фратавчан Т.М.

h.ivasjuk@chnu.edu.ua, t.fratavchan@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Розглядається задача Коші для параболічної за Ейдельманом системи N диференціальних рівнянь із частинними похідними вигляду

$$A(t,x,\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}})u(t,x) := \Big(I_N\partial_t - \sum_{\|\alpha\|\le 2b} A_\alpha(t,x)\partial_x^\alpha\Big)u(t,x) = f(t,x),\ (t,x)\in\Pi_T,$$

$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x),\ x\in\mathbb{R}^n, \tag{1}$$

де n, N, b_1, …, b_n– задані натуральні числа, I_N – одинична матриця порядку N, b – найменше спільне кратне чисел $b_1,\dots,b_n$; $m := (m_1,\dots,m_n)$, $m_0 := 2b$, $m_j := 2b/(2b_j)$, $j\in\{1,\dots,n\}$; $\|\overline{\alpha}\| := \sum\limits_{j=0}^{n} m_j\alpha_j$, якщо $\overline{\alpha} := (\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}_+^{n+1}$; $\|\alpha\| := \sum\limits_{j=1}^{n} m_j\alpha_j$, якщо $\alpha := (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}_+^n$; $M := \sum\limits_{j=0}^{n} m_j$; $\partial_x^\alpha := (\partial_{x_1}^{\alpha_1},\dots,\partial_{x_n}^{\alpha_n})$, $\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} := (\partial_t^{\alpha_0},\partial_x^\alpha)$; $u := \mathrm{col}(u_1,\dots,u_N)$ – невідома, $f := \mathrm{col}(f_1,\dots,f_N)$, $\varphi := \mathrm{col}(\varphi_1,\dots,\varphi_N)$ – задані вектор-функції; $\Pi_T := \{(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1}\,\big|\,t\in(0,T], x\in\mathbb{R}^n\}$, де T – задане додатне число.

Задача (1) у позитивних просторах Гельдера обмежених та спеціальним чином швидкозростаючих функцій на даний час досить добре вивчена. У теорії таких задач важливу роль відіграє фундаментальна матриця розв'язків (ФМР) та її властивості. Фундаментальною в теорії таких задач є праця С.Д. Івасишена та С.Д. Ейдельмана [1]. В ній одержано досить точні властивості ФМР задачі Коші та породжених нею потенціалів, знайдено класи коректності задачі Коші для лінійних систем при різних припущеннях щодо неоднорідностей системи і початкових функцій. Зокрема, за умов

А: система диференціальних рівнянь задачі (1) є рівномірно параболічна за Ейдельманом [1] в шарі Π_T;

Б: коефіцієнти системи задачі (1) обмежені, задовольняють рівномірну умову Гельдера за x, неперервні за t, при цьому неперервність за t коефіцієнтів $A_\alpha(t,x)$, $\|\alpha\| = 2b$, рівномірна відносно $x\in\mathbb{R}^n$;
існує фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші (1) $\Gamma(t,x;\tau,\xi) = (\Gamma_{kj}(t,x;\tau,\xi))_{k,j=1}^N$ та відомі її оцінки

$$|\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}}\Gamma_{kj}(t,x;\tau,\xi)| \le C_{\overline{\alpha}}(t-\tau)^{1-(M-\|\overline{\alpha}\|)/(2b)}E_c(t-\tau,x-\xi), \tag{2}$$

$$0 \le \tau < t \le T,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ \|\overline{\alpha}\| \le 2b, \{k,j\} \subset \{1,\ldots,n\},$$

де $E_c(t,x) := \exp\{-c\sum\limits_{j=0}^{n} t^{1-q_j}|x_j|^{q_j}\}$, $C_{\overline{\alpha}} > 0$, $c > 0$. У монографії [2] підсумовуються всі основні результати, одержані до 2004 року в теорії $\overrightarrow{2b}$-параболічних (параболічних за Ейдельманом) систем, зокрема, коректна розв'язність задачі Коші у різних функціональних просторах.

Основним результатом доповіді є доведення теореми про коректну розв'язність задачі (1) у введених негативних просторах Гельдера. Для цього спочатку побудувано спряжені оператори Гріна, досліджено їх властивості у позитивних просторах Гельдера спеціально підібраних спадних функцій, потім за допомогою норм спряжених операторів у позитивних просторах Гельдера введено негативні простори Гельдера. Відповідні результати для параболічних крайових задач для систем параболічних за Петровським були одержані С.Д. Івасишеним у праці [3].

Щоб сформулювати основний результат, наведемо означення позитивних та відповідних негативних просторів Гельдера. При цьому за позитивні простори візьмемо простори, в яких діють спряжені оператори. Нехай $T_1 > T$, $c_1 = c/2$, де c – стала з оцінок (2); l і λ – задані числа відповідно з множин $\mathbb{Z}_+^1$ і $(0,1)$; $\triangle_t^{\tau} f(t,\cdot) := f(t,\cdot) - f(\tau,\cdot)$; $\triangle_{x_j}^{y_j} f(\cdot,x) := f(\cdot,x) - f(\cdot,x(y_j))$, $x(y_j) := (x_1,\ldots,x_{j-1},y_j,x_{j+1},\ldots,x_n)$, $j \in \{1,\ldots,n\}$.

Через $H_{c_1}^{l+\lambda}$ позначимо простір функцій $u : \Pi_T \to \mathbb{C}_{N1}$, які мають неперервні похідні $\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}}$, $\|\overline{\alpha}\| \le l$, і мають скінченну норму

$$\|u\|_{c_1}^{l+\lambda} := \sum_{0 \le l-\|\overline{\alpha}\| \le 2b} \sup_{\substack{\{t,\beta\}\subset[0,T],\\ t\ne\beta, x\in\mathbb{R}^n}} \Big(|\triangle_t^{\beta} \partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} u(t,x)| \times$$

$$\times |t-\beta|^{-(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/(2b)} (E_{c_1}(T_1-t,x) + E_{c_1}(T_1-\beta,x))^{-1} \Big) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{0 \le l-\|\overline{\alpha}\| \le m_j} \sup_{\substack{(t,x)\in\Pi_T,\\ y_j\in\mathbb{R}, x_j\ne y_j}} \Big(|\triangle_{x_j}^{y_j} \partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} u(t,x)| \times$$

$$\times |x_j - y_j|^{-(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/m_j} (E_{c_1}(T_1-t,x) + E_{c_1}(T_1-t,x(y_j)))^{-1} \Big) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{l} \sum_{\|\overline{\alpha}\|=j} \sup_{(t,x)\in\Pi_T} \big(|\, \partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} u(t,x)| (E_{c_1}(T_1-t,x))^{-1} \big);$$

$C_{c_1}^{l+\lambda}$ – простір функцій $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}_{N1}$, для яких існують неперервні похідні ∂_x^α, $\|\alpha\| \le l$, і є скінченною норма

$$|v|_{c_1}^{l+\lambda} := \sum_{j=1}^{n} \sum_{0\le l-\|\alpha\|\le m_j} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ y_j\in\mathbb{R}, x_j\ne y_j}} \Big(|\triangle_{x_j}^{y_j} \partial_x^\alpha v(x)| \times$$

$$\times |x_j - y_j|^{-(l-\|\alpha\|+\lambda)/m_j} (E_{c_1}(T_1, x) + E_{c_1}(T_1, x(y_j)))^{-1} \Big) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{l} \sum_{\|\alpha\|=j} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \big(| \ \partial_x^\alpha v(x)| (E_{c_1}(T_1, x))^{-1} \big);$$

$\dot{H}_{c_1}^{l+\lambda}$ – сукупність функцій з простору $H_{c_1}^{l+\lambda}$, які задовольняють умову $\partial_t^{\alpha_0} u|_{t=T} = 0$, $\alpha_0 \in \{0, \ldots, [(l+\lambda)/(2b)]\}$; $H^{l+\lambda}$ і $C^{l+\lambda}$ – простори Гельдера обмежених функцій, які означені в [2].

Для неперервних і обмежених функцій $u : \Pi_T \to \mathbb{C}_{N1}$ визначимо такі негативні норми

$$||u||^{-(l+\lambda)} := \sup_{g\in \dot{H}_{c_1}^{l+\lambda}} \frac{|(u,g)_{L_2(\prod_T)}|}{||g||_{c_1}^{l+\lambda}},$$

$$|u|_{t=0}|^{-(l+\lambda)} := \sup_{g\in C_{c_1}^{l+\lambda}} \frac{|[u|_{t=0}, g]_{L_2(\mathbb{R}^n)}|}{|g|_{c_1}^{l+\lambda}},$$

де

$$(u,g)_{L_2(\prod_T)} := \int\limits_0^T dt \int_{\mathbb{R}^n} u'(t,x)\overline{g(t,x)}dx,$$

$$[u|_{t=0}, g]_{L_2(\mathbb{R}^n)} := \int_{\mathbb{R}^n} u'(0,x)\overline{g(x)}dx,$$

тут штрих означає транспонування, а риска – комплексну спряженість.

Через $H^{-(l+\lambda)}$ позначимо замикання простору $H^{2b+\lambda}$ функцій $u := col(u_1, ..., u_N)$ за нормою

$$|||u|||^{-(l+\lambda)} := \sum_{j=1}^{N} (||u_j||^{-(l+\lambda)} + |u_j|_{t=0}|^{-(l+2b+\lambda)}).$$

Для $-\infty < -(l+\lambda) < -2b$ через $\mathcal{H}^{-(l+\lambda)}$ позначимо замикання множини $H^\lambda \times C^{2b+\lambda}$ функцій $F := col(f_1, ..., f_N, \varphi_1, ..., \varphi_N)$, де $f_j \in H^\lambda, \varphi_j \in C^{2b+\lambda}, j \in \{1, ..., N\}$, за нормою

$$||F||_A^{-(l+\lambda)} := \sum_{j=1}^{N} \Big(||f_j||^{-(l+\lambda)} + |\varphi_j|^{-(l+\lambda)} \Big).$$

Теорема. *Нехай A_α, $||\alpha|| \leq 2b$,– обмежені та нескінченно диференційовні функції в Π_T. Тоді для кожного нецілого s, $|s| > 2b$ замикання за неперервністю оператора A здійснює взаємно однозначне та неперервне відображення між просторами H^s та $\mathcal{H}^{s-2b}$.*

1. Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д. $\overrightarrow{2b}$-параболические системы // Тр. семинара по функц. анализу. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1968. – Вып. 1. – С. 3 – 175, 271 – 273.
2. S. D. Eidelman, S. D. Ivasyshen, A. N. Kochubei Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – 152. – 390 p.
3. Ивасишен С.Д. Матрицы Грина граничных задач для параболических по И.Г. Петровскому систем общего вида, Мат. сб. **114 (1, 4)**, (1981), С. 110–166, 523–565.