Олег Бадло
Науковий керівник – доц. Сікора В.С.

Про скорочення перебору всеможливих варіантів розмірностей піфагорової кімнати

Задача піфагорової кімнати – це гіпотеза існування прямокутного паралелепіпеда з цілочисельними вимірами, у якого всі діагоналі граней та четверта внутрішня діагональ задаються натуральними числами. Алгебраїчною мовою ці умови для паралелепіпеда зі сторонами a, b, c визначаються співвідношеннями

$$(1)\ a, b, c \in \mathbb{N};\ (2)\ \sqrt{a^2+b^2}, \sqrt{a^2+c^2}, \sqrt{b^2+c^2} \in \square;$$

$$(3) \sqrt{a^2+b^2+c^2} \in \square.$$

Умови (2) та (3) випливають з умови щодо цілочисельність діагоналей та формул для їх знаходження.

Досі не знайдено жодної трійки чисел які задовольняли би всім цим трьом умовам одночасно. Проте не наведено й доведення неможливості такої побудови – проведено перебір всіх можливих чисел до 10^{12}, але позитивних результатів немає. Саме скорочення кількості всеможливих варіантів для перебору і є метою нашого дослідження.

Розглянемо всеможливі квадрати цифр. Зауважимо, що всі вони закінчуються на 0, 1, 4, 5, 6 або 9. Звідси отримуємо необхідну умову можливості добування кореня з числа: якщо деяке ціле число є повним квадратом натурального числа, то його остання цифра є 0, 1, 4, 5, 6 або 9. В усіх інших випадках число не є повним квадратом. Нехай $M_1 = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$.

Теорема 1. *Піфагорова кімната зі сторонами a, b, c існуватиме лише тоді, коли остання цифра виразів*

$$a^2+b^2, a^2+c^2, b^2+c^2, a^2+b^2+c^2 \in M_1.$$

Домовимося також, що трійки, котрі відрізняються лише порядком запису елементів ми вважатимемо однією трійкою – для наших міркувань вони абсолютно однакові.

Застосуємо теорему 1 для всіх $a, b, c \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Тоді з її допомогою та за допомогою перерахунку можна відкинути 160 трійок та отримати 60 можливих закінчень. Проте й цю кількість можна ще трохи скоротити. Для цього враховуємо, що можливі виміри піфагорової кімнати перебираються послідовно, то варто розглядати лише трійки a, b, c, що НСД $(a, b, c) = 1$ Отже, знаючи лише останню цифру деякого числа, можна перевірити її подільність на 2 та на 5. Після цього залишається 48 трійок можливих закінчень. На цьому етапі отримуємо, що в кожній трійці одна з останніх цифр числа є або 0, або 5. А тому в піфагоровій кімнаті один з вимірів повинен бути кратним 5. Загальна кількість трійок (без тих що відрізняються лише порядком запису) дорівнює $\overline{C}_{10}^{3} = 220$. Таким чином, залишається $\frac{48}{220} 100\% \approx 21{,}8\%$ можливостей для перебору, тобто, відповідно, ми відкидаємо $\approx 78{,}2\%$ варіантів для перебору.

Після такого відкидання із 48 елементів побудуємо множину $A_1 = \left\{\{ a_n, b_n, c_n\}, \text{де } n = \overline{1, 48} \right\}$ та перейдемо до розгляду двох останніх цифр даного числа. Використовуючи аналогічні міркування, будуємо множину $M_2 = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 21, 44, 69, 96, 56, 89, 24, 61, 41, 84, 29, 76\}$. Єдина відмінність в тому що ми розглянемо не всі можливі значення для останніх двох ацифр, а тільки ті, останні цифри яких ще й належать до A_1. Отримуємо $48 \cdot 10^3$ варіантів. Застосувавши далі теорему 1, отримуємо 8600 трійок. Таких трійок $\overline{C}_{100}^{3} = 171700$, ми зменшили кількість переборів на 94,991%. Потім із 8600 можливих трійок формуємо множину A_2 аналогічно до A_1. і т.д.

Очевидно, цей алгоритм можна проводити безмежно довго, з гіпотетичним скороченням відсотку варіантів. Єдиний недолік цього скорочення варіантів – для машинного перебору є потреба в збереженні трійок, згенерованих під час попередньої ітерації. Проте можна зупинитися після будь якої кількості цифр та продовжувати звичайний перебір всеможливих варіантів враховуючи тільки уточнення, розраховані до цього.

Список літератури

1. Walter Steurer, Sofia Deloudi. Crystallography of Quasicrystals: Concepts, Methods and Structures. – Springer, 2009. – Т. 126. – С.91–92.

2. David Wells. The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry. – New York : Penguin Books, 1991. – С. 260–261.