ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

УДК 330.101: 519.866
JEL Classification: C 510, C 610

© Бойчук М.В., Маханець Л.Л., 2021
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

СТОХАСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО ДИНАМІЧНОГО РОЗВИТКУ УЗАГАЛЬНЕНОЇ СТАТИЧНОЇ МІЖГАЛУЗЕВОЇ ЕКОНОМІКИ З РІЗНИМИ ВИДАМИ ДІЯЛЬНОСТІ ПРИ МІЖГАЛУЗЕВОМУ ІНВЕСТУВАННІ ТА ІНВЕСТИЦІЙНОМУ ЗАПІЗНЕННІ

Запропонована стохастична модель оптимального динамічного розвитку узагальненої статичної міжгалузевої економіки з різними видами діяльності при міжгалузевому інвестуванні та інвестиційному запізненні та проведено її дослідження. Встановлено, що оптимальні керування за споживанням, за валовими інвестиціями, за робочими силами, за валовими продукціями, за кінцевими продукціями та момент перемикання керувань не залежать від коефіцієнтів при вінерівських процесах у динаміках капіталів галузей і є детермінованими величинами. Доведено, що оптимальні керування є кусково–неперервними функціями, а оптимальні траєкторії неперервними та кусково–диференційованими функції на розглядуваному часовому проміжку.

Ключові слова: оптимальний динамічний розвиток, узагальнена статична міжгалузева економіка, види діяльності, міжгалузеве інвестування, інвестиційне запізнення, магістральний процес, правий процес, оптимальний процес, момент перемикання керувань.

Постановка проблеми. Як відомо економічні показники є випадковими величинами. Також не врахуванні в економіко–математичних моделях деяких економічних показників приводить до виникнення випадковостей (стохастики).

Крім того, у статичній міжгалузевій економіці Леонтьєва припускається, що продукція виробляється одним рівнем діяльності (процесом), а в узагальненій міжгалузевій моделі економіки Леонтьєва є можливість виробляти продукцію різними способами (рівнями діяльності, процесами) [1, с.239].

Тому актуальним є як в теоретичному так і практичному плані дослідження стохастичних моделей оптимального динамічного розвитку узагальненої статичної міжгалузевої економіки з різними видами діяльності при міжгалузевому інвестуванні та інвестиційному запізненні з використанням вінерівських і пуасонівських процесів.

А це можливо оскільки в [2] приведено економічне обґрунтування використання вінерівських і пуассонівських процесів при стохастичному моделюванні.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У [3] проведено дослідження детермінованої моделі оптимального динамічного розвитку статичної міжгалузевої економіки з одиничним видом діяльності (один спосіб виробництва) при міжгалузевому інвестуванні без запізнення та з допомогою достатніх умов оптимальності.

У [4] проведено дослідження детермінованої моделі оптимального динамічного розвитку статичної міжгалузевої економіки з одиничним видом діяльності (один спосіб виробництва) при міжгалузевому інвестуванні з інвестиційним запізненням та з допомогою достатніх умов оптимальності зі запізненням.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Економіка країни потребує зовнішніх фінансових ресурсів, а це вимагає формалізації галузевих пріоритетів щодо інвестування із метою максимальної раціоналізації використання доступних інвестиційних коштів. Розробка економіко-математичних моделей міжгалузевої економіки з різними видами діяльності при міжгалузевому інвестуванні з інвестиційним запізненням дозволить формувати ефективну інвестиційну політику.

Формулювання цілей статті. Запропонувати стохастичну модель оптимального динамічного розвитку узагальненої статичної міжгалузевої економіки з різними видами діяльності при міжгалузевому інвестуванні з інвестиційним запізненням та використанні вінерівських і пуассонівських процесів.

Виклад основного матеріалу дослідження. Спершу приведемо детерміновану економіко математичну модель у вигляді припущень, а потім на її основі формалізуємо стохастичну модель.

Сформулюємо припущення для побудови детермінованої економіко–математичної моделі.

Припущення 1. Будемо вважати, що в економіці існує n виробничих технологій і виробляється m видів продукції. Позначимо кількість ресурсу i та обсяг живої праці (робочої сили), які необхідні для виробництва одиниці продукції виду j у галузі j при використанні технології v відповідно як

$$a_{ij}^{(v)},\ v=1,\dots,v(i),\ i,j=\overline{1,m},$$

$$L_j^{(v)},\ v=1,\dots,v(j),\ j=\overline{1,m}$$

то узагальнену матрицю коефіцієнтів прямих затрат (узагальнену матрицю Леонтьєва) та вектор коефіцієнтів затрат робочої сили можна подати як

$$\begin{array}{cccccc} & \textit{галузь } 1 & \textit{галузь } 2 & & \textit{галузь } m & \\ A= & \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)}\dots a_{11}^{(v(1))} & a_{12}^{(1)}\dots a_{12}^{(v(2))} & \cdots\cdots & a_{1m}^{(1)}\dots a_{1m}^{(v(m))} \\ a_{21}^{(1)}\dots a_{21}^{(v(1))} & a_{22}^{(1)}\dots a_{22}^{(v(2))} & \cdots\cdots & a_{2m}^{(1)}\dots a_{2m}^{(v(m))} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1}^{(1)}\dots a_{m1}^{(v(1))} & a_{m2}^{(1)}\dots a_{m2}^{(v(2))} & \cdots\cdots & a_{mm}^{(1)}\dots a_{mm}^{(v(m))} \end{pmatrix}} & , \end{array}$$

$$L=\left(L_1^{(1)},\dots,L_1^{(v(1))},L_2^{(1)},\dots,L_2^{(v(2))},\cdots\cdots,L_m^{(1)},\dots,L_m^{(v(m))}\right)^T,$$

де T – операція транспонування матриць.

Матриця коефіцієнтів випуску одержується з одиничної матриці шляхом "розширення".

$$E=\begin{pmatrix} 1\dots1 & 0\dots0 & \cdots\cdots & 0\dots0 \\ 0\dots0 & 1\dots1 & \cdots\cdots & 0\dots0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0\dots0 & 0\dots0 & \cdots\cdots & 1\dots1 \end{pmatrix}.$$

Виразимо вектор обсягу випуску валової продукції (рівень діяльності) X та вектор кінцевої продукції (попиту) Y у момент часу $t-\tau$ ($t\in[t_0,T]$, $\tau>0$ – інвестиційне запізнення) відповідно вище наведеним матриці коефіцієнтів прямих затрат та матриці коефіцієнтів випуску як

$$X=\left(X_1^{(1)},\dots,X_1^{(v(1))},\dots\dots,X_m^{(1)},\dots,X_m^{(v(m))}\right)^T,$$

$$Y=\left(Y_1,Y_2,\dots\dots,Y_m\right)^T.$$

Кожна галузь вибирає із числа доступних їй технологій одну визначену технологію з обмежень у момент $t-\tau$ – обмеження в матричній формі запису

$$(E-A)X(t-\tau)\ge Y(t-\tau),\ X(t-\tau)\ge 0,\ t\in[t_0,T] \qquad (1)$$

або в покомпонентній формі запиту

$$\sum_{v=1}^{v(i)}\sum_{j=1}^{m}\left(\delta_{ij}-a_{ij}^{(v)}\right)X_j^{(v)}(t-\tau)\ge Y_i(t-\tau),\ X_j^{(v(j))}(t-\tau)\ge 0,$$

$$v=1,\dots,v(i),\ j,i=\overline{1,m},\ t\in[t_0,T],$$

де δ_{ij} – символ Кронекера: $\delta_{ij}=0$ при $i\ne j$, $\delta_{ij}=1$ при $i=j$.

Припущення 2. Реалістично вважати, що валовий випуск продукції (рівень діяльності) обмежений не тільки робочою силою в залежності від вибору діяльності періоду виробництва також і основними фондами, головними складовими елементами яких є виробничі будівлі та обладнання, а також земля та багато інших важливих ресурсів.

Обмеження валових випусків зумовлені обмеженістю ресурсів, які представимо у вигляді системи нерівностей вигляду "$\le$" (менше–рівне). Позначимо обсяг ресурсу i необхідного для випуску одиниці продукції кожного процесу (технології) в галузі j як

$$\gamma_{ij}^{(v)},\ v=1,\ldots,v(j),\ i,j=\overline{1,m},$$

а в наявності обсягу ресурсу i як

$$\gamma_i,\ i=\overline{1,m},$$

то реально досяжний обсяг валового випуску повинен задовольняти обмеження в момент часу $t-\tau$ в матричній формі запису

$$\Gamma X(t-\tau)\le\gamma(t-\tau),\ t\in[t_0,T] \tag{2}$$

або в покомпонентній формі запису

$$\sum_{v=1}^{v(i)}\sum_{j=1}^{m}\gamma_{ij}^{(v)}X_j^{(v)}(t-\tau)\le\gamma_i(t-\tau),\ t\in[t_0,T],\ i=\overline{1,m},$$

де $\gamma=(\gamma_1,\ldots\gamma_{m1})^T$ – вектор кусково–неперервних функцій на $[t_0,T]$,

$$\begin{array}{cccccc} & \textit{галузь }1 & \textit{галузь }2 & & \textit{галузь }m & \\ \Gamma= & \left(\begin{matrix}\gamma_{11}^{(1)}\cdots\gamma_{11}^{(v(1))} \\ \gamma_{21}^{(1)}\cdots\gamma_{21}^{(v(1))} \\ \cdots\cdots \\ \gamma_{m1}^{(1)}\cdots\gamma_{m1}^{(v(1))}\end{matrix}\right. & \begin{matrix}\gamma_{12}^{(1)}\cdots\gamma_{12}^{(v(2))} \\ \gamma_{22}^{(1)}\cdots\gamma_{22}^{(v(2))} \\ \cdots\cdots \\ \gamma_{m2}^{(1)}\cdots\gamma_{m2}^{(v(2))}\end{matrix} & \begin{matrix}\cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots\end{matrix} & \left.\begin{matrix}\gamma_{1m}^{(1)}\cdots\gamma_{1m}^{(v(m))} \\ \gamma_{2m}^{(1)}\cdots\gamma_{2m}^{(v(m))} \\ \cdots\cdots \\ \gamma_{mm}^{(1)}\cdots\gamma_{mm}^{(v(m))}\end{matrix}\right) & .\end{array}$$

Припущення 3. Динаміка руху капіталів $K_j^{(v)}$ відбувається за законом – приріст капіталу $K_j^{(v)}$ дорівнює різниці між валовими інвестиціями I_j та амортизаційними відрахуваннями $\mu_j^{(v)}K_j^{(v)}$ у момент часу t [4, с.89].

$$\dot K_j^{(v)}(t)=-\mu_j^{(v)}K_j^{(v)}(t)+I_j(t-\tau),\ v=1,\ldots,v(j),\ j=\overline{1,m},\ t\in[t_0,T] \tag{3}$$

де $\mu_j^{(v)}\in(0;1)$ – норма амортизації j–ої галузі,

$$\dot K_j^{(v)}(t)=\frac{\partial}{\partial t}K_j^{(v)},\ K=\left(K_1^{(1)},\ldots,K_1^{(v(1))},\ldots\ldots,K_m^{(1)},\ldots,K_m^{(v(m))}\right)^T.$$

Припущення 4. На валові продукції накладаються обмеження $X_j^{(v)}(t-\tau)=F_j^{(v)}\left(K_j^{(v)}(t-\tau),L_j^{(v)}(t-\tau)\right)$, $v=1,\ldots,v(j)$, $j=\overline{1,m}$, (4) – валові продукції є макровиробничими функціями, де $F_j^{(v)}\left(K_j^{(v)},L_j^{(v)}\right)$ – макровиробнича функція, яка залежить від капіталу $K_j^{(v)}$ та робочої сили $L_j^{(v)}$ із властивостями: двічі неперервно–диференційована, монотонно зростаюча та вгнута по кожному з аргументів [5, с. 6–7],

$$F_j^{(v)}\left(0,L_j^{(v)}\right)=F_j^{(v)}\left(K_j^{(v)},0\right)=F_j^{(v)}(0,0)=0,\ v=1,\ldots,v(j),\ j=\overline{1,m}.$$

Припущення 5. Кінцевий випуск продукції Y_i i–ої галузі складає валові інвестиції I_i та невиробниче споживання (споживання) C_i у момент часу $t-\tau$ [5, с. 27–29]

$$Y_i(t-\tau)=\tilde I_i(t-\tau)+C_i(t-\tau),\ i=\overline{1,m},\ t\in[t_0,T]. \tag{5}$$

Причому $\tilde I_i$ характеризує міжгалузеві інвестиційні зв'язки по валовим інвестиціям [4]

$$\tilde I_i(t-\tau)=\sum_{j=1}^{m}\chi_{ij}I_j(t-\tau),\ i=\overline{1,m},\ t\in[t_0,T],$$

де $\chi = \left(\chi_{ij}\right)$, $(m \times m)$ – матриця міжгалузевих ознак інвестиційних зв'язків, $\sum_{i=1}^{m} \chi_{ij} = 1$ для $\forall j$, $\chi_{ij} = 0$ при $i > r$. Причому, маємо r фондоутворюючих галузей та $(m-r)$ нефондоутворюючих.

При цьому для фондоутворюючих галузей

$$Y_i(t-\tau) = \sum_{j=1}^{m} \chi_{ij} I_j(t-\tau) + C_i(t-\tau),\ i = \overline{1,r},\ t \in [t_0, T], \tag{6}$$

а для нефондоутворюючих

$$Y_i(t-\tau) = C_i(t-\tau),\ i = \overline{r+1,m},\ t \in [t_0, T],\ I = \left(I_1, \ldots, I_m\right)^T,\ C = \left(C_1, \ldots, C_m\right)^T. \tag{7}$$

Припущення 6. На споживання C, на валові інвестиції I, на робочі сили L та на кінцевий стан капіталів $K(T)$ накладається обмеження

$$C_i(t-\tau) \ge C_i^{(\min)},\ I_i(t-\tau) \ge 0,\ L_i^{(v)}(t-\tau) \ge 0,\ \sum_{i=1}^{m} \sum_{v=1}^{v(i)} L_i^{(v)}(t-\tau) \le N(t-\tau),$$

$$t \in [t_0, T],\ K_j^{(v)}(T) \ge K_{jT}^{(v)},\ v = 1, \ldots, v(j),\ j = \overline{1,m}$$

де N – кусково–неперервна функція на $[t_0, T]$,

$$K_T = \left(K_{1T}^{(1)}, \ldots, K_{1T}^{(v(1))}, \ldots\ldots, K_{mT}^{(1)}, \ldots, K_{mT}^{(v(m))}\right)^T.$$

Припущення 7. Задаються передісторії капіталів

$$\begin{aligned} & K_i^{(v)}(\theta) = K_{i0}^{(v)}(\theta),\ \theta \in [t_0 - \tau, t_0],\ v = 1, \ldots, v(i),\ i = \overline{1,m}, \\ & K_0 = \left(K_{10}^{(1)}, \ldots, K_{10}^{(v(1))}, \ldots\ldots, K_{m0}^{(1)}, \ldots, K_{m0}^{(v(m))}\right)^T. \end{aligned} \tag{8}$$

Таким чином, отримали економіко–математичну модель (1)–(8)

$$\begin{aligned} & \dot{K}_i^{(v)}(t) = -\mu_i^{(v)} K_i^{(v)}(t) + I_i(t-\tau),\ t \in [t_0, T], \\ & K_{i0}^{(v)}(\theta) = K_{i0}^{(v)},\ K_i^{(v)}(t) \ge 0,\ L_i^{(v)}(t-\tau) \ge 0,\ K_i^{(v)}(T) \ge K_{iT}, \\ & C_i(t-\tau) \ge C_i^{(\min)},\ I_i(t-\tau) \ge 0, \\ & \sum_{v=1}^{v(i)} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{(v)} F_j^{(v)}\left(K_j^{(v)}(t-\tau), L_j^{(v)}(t-\tau)\right) \ge \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} \chi_{ij} I_j(t-\tau) + C_i(t-\tau), i = \overline{1,r}, \\ C_i(t-\tau), i = \overline{r+1,m}, \end{cases} \\ & \sum_{v=1}^{v(i)} \sum_{j=1}^{m} \gamma_{ij}^{(v)} F_j^{(v)}\left(K_j^{(v)}(t-\tau), L_j^{(v)}(t-\tau)\right) \le \gamma_i(t-\tau),\ v = 1, \ldots, v(i),\ i = \overline{1,m}, \\ & t \in [t_0, T]. \end{aligned} \tag{9}$$

Перейдемо до формалізації стохастичної моделі.

Стохастична модель. Нехай $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$– імовірнісний простір із σ– алгеброю $\left\{\mathfrak{F}_t, t \in [t_0, T]\right\} \subset \sigma$, множиною елементарних подій та мірою (імовірністю) P; $\xi_i^{(v)}(t) \equiv \xi_i^{(v)}(t, \omega) \in \mathbb{R}$ – $\mathfrak{F}_t$–вимірний вінерівський процес із нульовим математичним сподіванням приросту $M\left(d\xi_i^{(v)}(t)\right) = 0$ та дисперсією приросту $M\left(d\xi_i^{(v)}(t)\right)^2 = 1$ (d –диференціал), $\omega \in \Omega$, $t \in [t_0, T]$, $v = 1, \ldots, v(i)$, $i = \overline{1,m}$, $\eta_i^{(v)}(t) \equiv \eta_i^{(v)}(t, \omega) \in \mathbb{R}$ – $\mathfrak{F}_t$–вимірний пуассонівський процес із математичним сподіванням $M\eta_i^{(v)}(t)=\lambda_i^{(v)}(t-t_0)$, $\lambda_i^{(v)}\equiv const_i^{(v)}$, $\omega\in\Omega$, $t\in[t_0,T]$, $v=1,\ldots,v(i)$, $i=\overline{1,m}$, $\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел [6,с.7–8].

На ймовірністному просторі $\{\Omega,\mathfrak{F},P\}$ заданий вектор випадкових процесів $K(t)\equiv K(t,\omega)$, $\omega\in\Omega$, який задовольняє:

– диференціальну модель у формі Іто [6;7] для динаміки капіталів

$$dK_j^{(v)}(t)=\left[-\mu_i^{(v)}K_i^{(v)}(t)+I_i(t)\right]dt+\alpha_i^{(v)}(t)d\xi_i^{(v)}(t)+\beta_i^{(v)}(t)d\eta_i^{(v)}(t),\ t\in[t_0,T], \qquad (10)$$

або в формальному (звичному) записі [8, с.158]

$$\dot{K}_i^{(v)}(t)=-\mu_i^{(v)}K_i^{(v)}(t)+I_i(t-\tau)+\alpha_i^{(v)}(t)\dot{\xi}_i^{(v)}(t)+\beta_i^{(v)}(t)\dot{\eta}_i^{(v)}(t),\ t\in[t_0,T],$$

– передісторії за капіталами

$$K_i^{(v)}(\theta)=K_{i0}^{(v)}(\theta)\in\mathfrak{F}_0,\ \theta\in[t_0-\tau,t_0], \qquad (11)$$

– обмеження на кінцеві стани системи $K_i^{(v)}(T)$

$$K_i^{(v)}(T)\geq K_{iT}^{(v)},\ v=1,\ldots,v(i),\ i=\overline{1,m}. \qquad (12)$$

Накладаються обмеження на стан капіталів K, на споживання C, на валові інвестиції I, на робочу силу L та на валову продукцію $X=F(K,L)$

$$\begin{gathered}
K_i(t)\geq 0,\ C_i(t-\tau)\geq C_i^{(\min)}, I_i(t-\tau)\geq 0,\ L_i^{(v)}(t-\tau)\geq 0,\\
X_i^{(v)}(t-\tau)=F_i^{(v)}\left(K_i^{(v)}(t-\tau),L_i^{(v)}(t-\tau)\right),\\
\sum_{v=1}^{v(i)}\sum_{j=1}^{m}\left(\delta_{ij}-\alpha_{ij}^{(v)}\right)F_j^{(v)}\left(K_j^{(v)}(t-\tau),L_j^{(v)}(t-\tau)\right)\geq\begin{cases}\sum_{j=1}^{m}\chi_{ij}I_j(t-\tau)+C_i(t-\tau), i=\overline{1,r},\\ C_i(t-\tau), i=\overline{r+1,m},\end{cases}\\
\sum_{v=1}^{v(i)}\sum_{j=1}^{m}\gamma_{ij}^{(v)}F_j^{(v)}\left(K_j^{(v)}(t-\tau),L_j^{(v)}(t-\tau)\right)\leq\gamma_i(t-\tau),,\\
\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{v(i)}\sum_{j=1}^{m}L_j^{(v)}(t-\tau)\leq N(t-\tau),\ t\in[t_0,T],
\end{gathered} \qquad (13)$$

де $\alpha_i^{(v)}$, $\beta_i^{(v)}$, $v=1,\ldots,v(i)$, $i=\overline{1,m}$ та N – кусково–неперервні функції на $[t_0,T]$.

За критерій мети в умовах досконалої конкуренції візьмемо максимізацію середнього інтегрального прибутку на часовому відрізку $[t_0,T]$

$$\begin{gathered}
M_{t,\varphi}\int_t^T\sum_{i-1}^{m}\left[q_iY_i(t-\tau,\varphi(t))-I_i(t-\tau,\varphi(t))\right]dt=M_{t,\varphi}\int_t^T\left[\sum_{i=1}^{m}q_i\times\right.\\
\left.\times\sum_{j=1}^{m}\begin{Bmatrix}\chi_{ij}I_j(t-\tau,\varphi(t))+C_i(t-\tau), i=\overline{1,r}\\ C_i(t-\tau), i=\overline{r+1,m}\end{Bmatrix}-I_i(t-\tau),\varphi(t)\right]dt\to\max_{C,I,L},
\end{gathered} \qquad (14)$$

де $M_{t,\varphi}$ – умовне математичне сподівання при умові, що вектор

$$K(t-\tau)=\left(K_1^{(1)}(t-\tau),\ldots,K_1^{(v(1))}(t-\tau),\ldots\ldots,K_m^{(1)}(t-\tau),\ldots,K_m^{(v(m))}(t-\tau)\right)^T$$

дорівнює деякому кусково–неперервному вектору $\varphi(t)=(\varphi_1^{(1)}(t),...,\varphi_1^{(v(1)}(t),......,\varphi_m^{(1)}(t),...,\varphi_m^{(v(m)}(t))^T$ при $t\in[t_0,T]$ [8, с. 118], $Y_i(t-\tau,\varphi(t))\equiv Y_i(t-\tau)$, $I_i(t-\tau,\varphi(t))\equiv I_i(t-\tau)$, $i=\overline{1,m}$, $t\in[t_0,T]$.

Економіко–математична модель (10)–(14) є задачею оптимального керування, в якій керуваннями виступають споживання C, валові інвестиції I та робоча сила L, а фазовою траєкторією – капітали галузей K.

Для дослідження задачі оптимального керування (10)–(14) використаємо стохастичні достатні умови оптимальності [8, с.117–119, с.158, с.162].

Саме дослідження проведено в три етапи:

1) визначення магістрального процесу;
2) знаходження правого процесу та моменту перемикання керувань;
3) побудови оптимального процесу.

Під магістральним процесом слід розуміти оптимальний процес без урахування обмежень на кінцеві стани системи (3) на проміжку часу від початкового часового обліку t_0 до моменту перемикання керувань ζ , а під правим процесом оптимальний процес із урахуванням обмежень на кінцеві стани системи (3) на часовому проміжку від моменту перемикання керувань ζ до горизонту планування T .

1. Магістральний процес. Магістральний процес містить магістральні керування за споживанням $C_{маг}$, за валовими інвестиціями $I_{маг}$, за робочими силами $L_{маг}$, за валовими продукціями $X_{маг}$ і кінцевими продукціями $Y_{маг}$ та відповідних магістральних траєкторій (магістралей) $K_{маг}$.

Магістральні керування. За стохастичними достатніми умовами оптимальності [8, с.117–119, с.158, с.162] задачу стохастичного оптимального керування (10)–(14) без урахування обмежень на кінцеві стани системи $K\left(T\right)$ замінимо задачею детермінованої оптимізації функцій багатьох змінних із крайовою умовою

$$\begin{gathered}
\inf R\left(t,K,C,I,L\right) \equiv \inf_{C,I,L}\left\{\partial V/\partial t + \sum_{i=1}^{m}\sum_{v=1}^{v(i)}\sum_{j=1}^{m}\left\{\partial V\middle/\partial K_j^{(v)}\right.\right. \times \\
\times\left[-\mu_j^{(v)}K_j^{(v)} + I_j\right] + 0.5\alpha_j^{(v)}\,\partial^2 V\Big/\partial\left(K_j^{(v)}\right)^2 + \\
+\lambda_j^{(v)}\left[V\left(t,K_1^{(1)},\ldots,K_1^{(v(1))},\ldots\ldots,K_j^{(1)}+\beta_j^{(1)},\ldots,K_j^{(v(j))}+\beta_j^{(v(j))},\ldots\ldots,K_m^{(1)},\ldots,K_m^{(v(m))}\right)-\right. \\
\left.-V\left(t,K_1^{(1)},\ldots,K_1^{(v(1))},\ldots\ldots,K_j^{(1)},\ldots,K_j^{(v(j))},\ldots\ldots,K_m^{(1)},\ldots,K_m^{(v(m))}\right)\right]- \\
-\sum_{i=1}^{m}\left\{q_i\begin{Bmatrix}\sum_{j=1}^{m}\chi_{ij}I_j + C_i,\ i=\overline{1,r}\\ C_i,\ i=\overline{r+1,m}\end{Bmatrix} - I_i\right\} = 0,\ t\in\left[t_0,T\right], \\
V\left(T,K_T\right) = 0\,,
\end{gathered} \tag{15}$$

де шукана функція V неперервно–диференційована на декартовому добутку $\left(t,K\right)\in\left[t_0,T\right]\times\left\{K\geq 0\right\}$. де $\left\{K\geq 0\right\}$ слід розуміти як $\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{v=1}^{v(i)}\bigcup_{j=1}^{m}\left\{K_j^{(v)}\geq 0\right\}$. Невідому функцію V будемо шукати у вигляді

$$V\left(t,K\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{v=1}^{v(i)}\sum_{j=1}^{m}K_j^{(v)}\left(t\right),\ t\in\left[t_0,T\right] \tag{16}$$

та підставимо її в рівняння Беллмана (15).

Із задачі оптимізації (15) та обмежень (13) сформуємо задачу нелінійного програмування

$$\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{m}\sum_{v=1}^{v(i)}\sum_{j=1}^{m}\left[-\mu_j^{(v)}K_j^{(v)} + I_j\right] - \sum_{i=1}^{m}\left\{q_i\begin{Bmatrix}\sum_{j=1}^{m}\chi_{ij}I_j + C_i, i=\overline{1,r}\\ C_i, i=\overline{r+1,n}\end{Bmatrix} - I_i\right\}\to\min_{C,I,L}, \\
\sum_{i=1}^{m}\sum_{v=1}^{v(i)}\sum_{j=1}^{m}\left\{\left[-\mu_j^{(v)}K_j^{(v)} + I_j\right] + \lambda_j^{(v)}\beta_j^{(v)}\right\} - \sum_{i=1}^{m}\left\{q_i\begin{Bmatrix}\sum_{j=1}^{m}\chi_{ij}I_j + C_i, i=\overline{1,r}\\ C_i, i=\overline{r+1,m}\end{Bmatrix} - I_i\right\} = 0, \\
K_i^{(v)}\left(t\right)\geq 0, C_i\left(t-\tau\right)\geq C_i^{(\min)},\ I_i\left(t-\tau\right)\geq 0\ ,\ L_i^{(v)}\left(t-\tau\right)\geq 0\ , \\
\sum_{v=1}^{v(i)}\sum_{j=1}^{m}\left(\partial_{ij}-\alpha_{ij}^{(v)}\right)F_j^{(v)}\left(K_j^{(v)}\left(t-\tau\right),L_j^{(v)}\left(t-\tau\right)\right)\geq\begin{cases}\sum_{j=1}^{m}\chi_{ij}I_j\left(t-\tau\right)+C_i\left(t-\tau\right), i=\overline{1,r},\\ C_i\left(t-\tau\right), i=\overline{r+1,m},\end{cases} \\
\sum_{v=1}^{v(i)}\sum_{j=1}^{m}\gamma_{ij}^{(v)}F_j^{(v)}\left(K_j^{(v)}\left(t-\tau\right),L_j^{(v)}\left(t-\tau\right)\right)\leq\gamma_i\left(t\right),\ i=\overline{1,m}\,,
\end{gathered} \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{\nu(i)}\sum_{j=1}^{m}L_j^{(\nu)}(t-\tau)\le N(t-\tau),\ t\in[t_0,T].$$

Задачу нелінійного програмування (17) можна розв'язати сумісним використанням методу кроків [9, с.17] та одного з чисельних градієнтних методів [10, с.269–284] і тим самим знайти магістральні керування за споживанням $C_{маг}(t-\tau)$, за валовими інвестиціями $I_{маг}(t-\tau)$ та за робочою силою $L_{маг}(t-\tau)$, $t\in[t_0,T]$.

А магістральні керування за кінцевими продукціями $Y_{маг}(Y_{1маг},\dots,Y_{mмаг})^T$ обчислюються за формулами

$$Y_{iмаг}(t-\tau)=\begin{cases}\sum_{j=1}^{m}\chi_{ij}I_{jмаг}(t-\tau)+C_{iмаг}(t-\tau), i=\overline{1,r},\\ C_{iмаг}(t-\tau), i=\overline{r+1,m},\end{cases}\quad t\in[t_0,T],\ i=\overline{1,m}.$$

Відповідні стохастичні магістральні траєкторії (магістралі) можна очистити сумісним використанням методу кроків [9, с.17] та одного з числових методів [7, с.269–276; 11] із стохастичної динаміки капіталів (10) при стохастичній передісторії (11).

А середні магістралі за капіталами галузей як

$$K_{iмаг}^{(\nu,c)}(t)=MK_{iмаг}^{(\nu)}(t),\ \nu=1,\dots,\nu(i),\ i=\overline{1,m},\ t\in[t_0,T].$$

Тоді магістральні керування за валовими продукціями визначаються за формулами

$$X_{iмаг}^{(\nu)}(t-\tau)=F_j^{(\nu)}\left(K_{iмаг}^{(\nu)}(t-\tau),L_{iмаг}^{(\nu)}(t-\tau)\right),\ t\in[t_0,T],\ \nu=1,\dots,\nu(i),\ i=\overline{1,m}.$$

Слід зауважити, що магістральні керування $C_{маг}$, $I_{маг}$, $L_{маг}$, $X_{маг}$ і $Y_{маг}$ не залежать від коефіцієнтів при вінерівських процесах у динаміці капіталів (10) та є детермінованими величинами.

Таким чином, знайшли стохастичний і середній магістральний процес $\{K_{маг}(t)$, $C_{маг}(t-\tau)$, $I_{маг}(t-\tau)$, $L_{маг}(t-\tau)$, $X_{маг}(t-\tau)$, $Y_{маг}(t-\tau)$, $t\in[t_0,T]\}$.

Але магістральний процес одержаний при неврахуванні обмежень на кінцеві стани системи (3). Перевіримо виконання цих обмежень для середніх кінцевих станів магістралей

$$K_{маг}^{(c)}=\left(K_{маг}^{(1,c)},\dots,K_{1маг}^{(\nu(1),c)},\dots\dots,K_{mмаг}^{(1,c)},\dots,K_{mмаг}^{(\nu(m),c)}\right)^T.$$

Якщо виконуються нерівності

$$K_{iмаг}^{(\nu,c)}(T)\ge K_{iT}^{(\nu)},\ \nu=1,\dots,\nu(i),\ i=\overline{1,m},\qquad(18)$$

то визначений магістральний процес $\{K_{маг}(t)$, $C_{маг}(t-\tau)$, $I_{маг}(t-\tau)$, $L_{маг}(t-\tau)$, $X_{маг}(t-\tau)$, $Y_{маг}(t-\tau)$, $t\in[t_0,T]\}$ є оптимальним процесом $\{K_{ОП}(t)$, $C_{ОП}(t-\tau)$, $I_{ОП}(t-\tau)$, $L_{ОП}(t-\tau)$, $X_{ОП}(t-\tau)$, $Y_{ОП}(t-\tau)$, $t\in[t_0,T]\}$.При невиконанні однієї із нерівностей (18) необхідно проводити визначення правого процесу.

2. Правий процес. Правий процес містить праві керування за споживанням $C_{ПР}$, за валовими інвестиціями $I_{ПР}$, за робочими силами $L_{ПР}$, за валовими продукціями $X_{ПР}$ та за кінцевими продукціями $Y_{ПР}$ і момент перемикання керувань ζ.

Праві керування. Нехай виконуються нерівності для середніх кінцевих станів магістралей

$$K_{iмаг}^{(\nu,c)}(T)<K_{iT}^{(\nu)},\ \nu=1,\dots,\nu(i),\ i=\overline{1,m}.\qquad(19)$$

Для інших випадків нерівностей (19) дослідження проводиться аналогічно.

При виконанні нерівності (19) середні стани капіталів K повинні монотонно зростати $(\dot{K}>0)$, тобто з використанням властивостей вінерівських і пуассонівських процесів

$$M d\xi_i^{(v)}(t) = 0,\ M d\eta_i^{(v)}(t) = d\left(M\eta_i^{(v)}(t)\right) = d\left(\lambda_i^{(v)}(t-t_0)\right) = \lambda_i^{(v)} dt,$$
$$v = 1,\ldots,v(i),\ i = \overline{1,m}$$

повинні виконуватися нерівності

$$\dot{K}_i^{(v)}(t) = -\mu_i^{(v)} K_i^{(v)}(t) + I_i(t-\tau) + \lambda_i^{(v)} \beta_i^{(v)} > 0,\ t \in [t_0, T],\ v = 1,\ldots,v(i),\ i = \overline{1,m}. \quad (20)$$

Із нерівності (20) та обмежень на керування і стан системи сформуємо задачу нелінійного програмування по визначенню правих керувань

$$\begin{aligned}
&\max\left(-y(t)\right),\ -\mu_i^{(v)} K_i^{(v)}(t) + I_i(t-\tau) + \lambda_i^{(v)} \beta_i^{(v)}(t) \ge \varepsilon_0,\\
&K_{iмаг}^{(v,c)}(t) \le K_i^{(v)}(t) \le K_{iT}^{(v)},\ I_i(t) \ge 0,\ L_i^{(v)}(t) \ge 0,\ v = 1,\ldots,v(i),\\
&\sum_{v=1}^{v(i)} \sum_{j=1}^{m} \left(\delta_{ij} - a_{ij}^{(v)}\right) F_j^{(v)}\left(K_j^{(v)}(t-\tau), L_j^{(v)}(t-\tau)\right) \ge\\
&\ge \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \chi_{ij} I_j(t-\tau) + C_i(t-\tau), i = \overline{1,r},\\ C_i(t-\tau), i = \overline{r+1,m}, \end{cases}\\
&\sum_{v=1}^{v(i)} \sum_{j=1}^{m} \gamma_{ij}^{(v)} F_j^{(v)}\left(K_j^{(v)}(t-\tau), L_j^{(v)}(t-\tau)\right) \le \gamma_i(t),\ i = \overline{1,m},\\
&\sum_{i=1}^{m} \sum_{v=1}^{v(i)} \sum_{j=1}^{m} L_j^{(v)}(t-\tau) - y(t) = N(t-\tau),\ t \in [t_0, T],\\
&K_i^{(v)}(\theta) = MK_{i0}^{(v)}(\theta),\ \theta \in [t_0 - \tau, t_0],\ v = 1,\ldots,v(i),\ i = \overline{1,m},
\end{aligned} \quad (21)$$

де $\varepsilon_0 > 0$ досить мале задане число.

Задачу нелінійного програмування можна розв'язати сумісним використанням методу кроків [9, с.17] та із чисельних градієнтних методів [10, с.269–286] і тим самим знайти праві керування за споживанням і $C_{ПР}(t-\tau)$, за валовими інвестиціями $I_{ПР}(t-\tau)$ та за робочими силами $L_{ПР}(t-\tau)$, $t \in [t_0, T]$.

Якщо задача нелінійного програмування не має розв'язку, то це означає, що кінцеві стани K_T недосяжні та необхідно послабити умови та обмеження вхідної інформації моделі (10)–(14).

Нехай задача (21) має розв'язок $C_{ПР}$, $I_{ПР}$, $L_{ПР}$. Перейдемо до визначення перемикання керувань та який знайдемо із задачі оптимальної швидкодії. Формалізуємо цю задачу.

Нехай $t_{C,I,L}(K)$ є перший момент попадання точкою K у множину

$$D_{\varepsilon_1} = \left\{K \in \mathbb{R}^m \mid K_{iмаг}^{(v,c)}(t) - \varepsilon_i \le K_i^{(v)}(t) \le K_{iмаг}^{(v,c)}(t) + \varepsilon_1 \le K_{iT}^{(v)}\right\}$$

при русі динамічної системи (10) у зворотному напрямку осі O_t із стану K_T в момент $t = T$ та при обмеженнях на керування (13), де $\varepsilon_1 > 0$ – досить мале задане число.

Задача оптимальної швидкості полягає в мінімізації першого попадання точкою K в D_{ε_1}

$$t_{c*,I*,L*}(K) = \min_{C,I,L} t_{C,I,L}(K). \quad (22)$$

Для дослідження цієї задачі оптимальної швидкодії використаємо стохастичні достатні умови оптимальності [8, с.158, с.162], за якими запишемо рівняння Беллмана з крайовою умовою

$$\inf_{C,I,L} \tilde{R}\left(t,K,C,I,L,\tilde{V}\right) \equiv \inf_{C,I,L}\left\{\partial\tilde{V}/\partial t + \sum_{i=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{\nu(i)}\sum_{j=1}^{m}\left\{\left(-\mu_j^{(\nu)}K_j^{(\nu)} + I_i\right)\partial\tilde{V}/\partial K_j^{(\nu)} + \right.\right.$$
$$+0.5\alpha_j^{(\nu)}\left(t\right)\partial^2\tilde{V}/\partial\left(K_j^{(\nu)}\right)^2 + \tag{23}$$
$$+\lambda_j^{(\nu)}\left[\tilde{V}\left(t,K_1^{(1)},\ldots,K_1^{(\nu)},\ldots\ldots,K_j^{(\nu)}+\beta_j^{(\nu)},\ldots\ldots,K_m^{(\nu(m))}\right)-\right.$$
$$\left.\left.\left.-\tilde{V}\left(t,K_1^{(1)},\ldots,K_1^{(\nu(1))},\ldots\ldots,K_j^{(\nu)},\ldots\ldots,K_m^{(\nu(m))}\right)\right]-1=0,\right.\right.$$
$$\tilde{V}\left(\zeta,K\left(\zeta\right)\right)=0\,,\ t\in\left[\zeta,T\right],\ \zeta\in\left(t_0,T\right)$$

при обмеженнях на керування за валовими інвестиціями
$$0 \le I_i\left(t-\tau\right) \le I_{iПР}\left(t-\tau\right),\ t\in\left[\zeta,T\right], \tag{24}$$

де шукана функція $\tilde{V}$ є неперервно–диференційованою по t і K на декартовому добутку $\left[t_0,T\right]\times\left\{K\ge 0\right\}$ та яку будемо шукати у вигляді
$$\tilde{V}\left(t,K\right) = l\sum_{i=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{\nu(i)}\sum_{j=1}^{m}\left[K_j^{(\nu)}\left(t\right)-K_j^{(\nu)}\left(\zeta\right)\right]. \tag{25}$$

Підставимо (25) в (23).

Щоб керування за валовими інвестиціями $I_i^* = I_{iПР}$, необхідно щоб функція $\tilde{R}$ по I_i була спадною на $\left[0;I_{iПР}\left(t-\tau\right)\right]$, а відповідно стала l повинна бути від'ємною $\left(l<0\right)$.

Підставимо $I_i = I_i\left(\zeta-\tau\right)$, $K_i^{(\nu)} = K_{iмаг}^{(\nu)}\left(\zeta\right)$, $\nu=1,\ldots,\nu\left(i\right)$, $i=\overline{1,m}$ та $t=\zeta$ у рівняння Беллмана
$$l\sum_{i=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{\nu(i)}\sum_{j=1}^{m}\left\{\left[-\mu_j^{(\nu)}K_{jмаг}^{(\nu)}\left(\zeta\right)+I_{iмаг}\left(\zeta\right)\right]+\lambda_j^{(\nu)}\beta_j^{(\nu)}\left(\zeta\right)\right\}-1=0\,,\ \zeta\in\left(t_0,T\right) \tag{26}$$

одержимо нелінійне алгебраїчне рівняння (26) для визначення моменту перемикання керування ζ, який можна знайти методом ділення відрізка навпіл, методом "золотого перерізу" та ін. [12, с.17–23].

Вибором сталої $l<0$ можна домогтися виконання умови $\zeta\in\left(t_0,T\right)$.

Зауважимо, що момент перемикання керувань не залежить від коефіцієнтів при вінерівських процесах у динаміці капіталів (10) і є детермінованою величиною. Перейдемо до визначення правих траєкторій за капіталами галузей.

Праві траєкторії. Стохастичні праві траєкторії $K_{ПР}$ обчислюються сумісним використанням методу кроків [9, с.17] та одного із чисельних методів [7, с.269–276; 11] із стохастичної динаміки (10) при стохастичній початковій умові

$$K\left(\zeta\right)=K_{маг}\zeta\ ,\ \text{де}\ K_{ПР}=\left(K_{1ПР}^{(1)},\ldots,K_{1ПР}^{(\nu(1))},\ldots\ldots,K_{mПР}^{(1)},\ldots,K_{mПР}^{(\nu(m))}\right)^T.$$

А середні праві траєкторії як $K_{ПР}^{(c)}\left(t\right)=MK_{ПР}\left(t\right)$, $t\in\left[\zeta,T\right]$.

Тоді праві керування за валовими продукціями знаходяться за формулами
$$X_{iПР}^{(\nu)}\left(t-\tau\right)=F_{i\zeta}^{(\nu)}\left(K_{iПР}^{(\nu)}\left(t-\tau\right),L_{iПР}^{(\nu)}\left(t-\tau\right)\right),\ \nu=1,\ldots,\nu\left(i\right),\ i=\overline{1,m}.$$

Слід зауважувати, що праві керування C, I, L, X, Y не залежить від коефіцієнтів при вінерівських процесах у динаміці капіталів (10) і є детермінованими величинами.

Таким чином, одержали правий процес
$$\left\{K_{ПР}\left(t\right),\ C_{ПР}\left(t-\tau\right),\ I_{ПР}\left(t-\tau\right),\ L_{ПР}\left(t-\tau\right),\ X_{ПР}\left(t-\tau\right),\ Y_{ПР}\left(t-\tau\right)\right\}.$$

Перейдемо до побудови оптимального процесу.

3. Оптимальний процес. За достатніми умовами оптимальності [8, с.117–119; 12, с.155–196] склейка у момент перемикання стохастичного магістрального

$$\left\{K_{маг}(t),\ C_{маг}(t-\tau),\ I_{маг}(t-\tau),\ L_{маг}(t-\tau),\ X_{маг}(t-\tau),\ Y_{маг}(t-\tau),\ t\in[\zeta,T]\right\}$$

і стохастичного та середнього правого

$$\left\{K_{ПР}(t),\ C_{ПР}(t-\tau),\ I_{ПР}(t-\tau),\ L_{ПР}(t-\tau),\ X_{ПР}(t-\tau),\ Y_{ПР}(t-\tau),\ t\in[\zeta,T]\right\}$$

процесів дає стохастичний та середній оптимальний процес

$$\left\{K_{ОП}(t),\ C_{ОП}(t-\tau),\ I_{ОП}(t-\tau),\ L_{ОП}(t-\tau),\ X_{ОП}(t-\tau),\ Y_{ОП}(t-\tau),\ t\in[\zeta,T]\right\}.$$

Причому, оптимальні керування за споживанням $C_{ОП}$, за валовими інвестиціями $I_{ОП}$, за робочими силами $L_{ОП}$, за валовими продукціями $X_{ОП}$ та за кінцевими продукціями $Y_{ОП}$ – кусково–неперервні функції на $[t_0,T]$, а оптимальні траєкторії за капіталами $K_{ОП}$– кусково–диференційовані функції на $[t_0,T]$.

При стохастичному моделюванні необхідно знати довірчі проміжки для реальних значень оптимальних траєкторій за капіталами при заданому довірчому рівні (ймовірністю).

Нехай проведено обчислювальний експеримент по визначенню оптимальних траєкторій за капіталами та отримано Q ансамблів: $K_{iОП}^{(\nu,j)}(t)$, $j=\overline{1,Q}$, $\nu=1,\ldots,\nu(i)$, $i=\overline{1,m}$,

Обчислимо вибіркові величини нормальної генеральної сукупності оптимальних траєкторій за капіталами [14, с.213]:

– вибіркові середні

$$\overline{K}_{iОП}^{(\nu)}(t)=Q^{-1}\sum_{j=1}^{Q}K_{iОП}^{(\nu,j)}(t),\ t\in[t_0,T],\ \nu=1,\ldots,\nu(i),\ i=\overline{1,m};$$

– вибіркові дисперсії

$$\sigma^2_{K_{iОП}^{(\nu)}}(t)=(Q-1)^{-1}\sum_{j=1}^{Q}\left(K_{iОП}^{(\nu,j)}(t)-K_{iОП}^{(\nu)}(t)\right)^2,\ t\in[t_0,T],\ \nu=1,\ldots,\nu(i),\ i=\overline{1,m}.$$

Зауважимо, що середні вибіркові $\overline{K}_{iОП}^{(\nu)}$ дорівнюють середнім оптимальним траєкторіям за капіталами галузей $K_{iОП}^{(\nu,c)}$, $\nu=1,\ldots,\nu(i)$, $i=\overline{1,m}$, вище визначених.

Довірчі проміжки для дисперсії нормальної генеральної сукупності оптимальних траєкторій за капіталами галузей при заданій імовірності $\theta\in(0;1)$ мають вигляд

$$\left(\frac{(Q-1)\sigma^2_{K_{iОП}^{(\nu)}}(t)}{\chi^2_{1-\theta}(Q-1)}-\underset{межа}{нижня};\frac{(Q-1)\sigma^2_{K_{iОП}^{(\nu)}}(t)}{\chi^2_{\theta}(Q-1)}-\underset{межа}{верхня}\right),$$

де $\chi^2_\theta\left[\chi^2_{1-\theta}\right]-\theta[1-Q]$ – квантиль розподілу Пірсона (χ^2 – хі квадрат) із $(Q-1)$ ступенями вільності при довірчому рівні $\theta\in(0;1)$ (таблиця [14, с.238–239]).

Тоді довірчими проміжками для реальних значень оптимальних траєкторій за капіталами при довірчому рівні $\theta\in(0;1)$ є

$$\begin{pmatrix}\overline{K}_{iОП}^{(\nu)}(t)-\dfrac{\sigma_{K_{iОП}^{(\nu)}}(t)t_\theta(Q-1)}{\sqrt{Q}}-\underset{межа}{нижня};\\ \overline{K}_{iОП}^{(\nu)}(t)+\dfrac{\sigma_{K_{iОП}^{(\nu)}}(t)t_\theta(Q-1)}{\sqrt{Q}}-\underset{межа}{верхня}\end{pmatrix},\ \nu=1,\ldots,\nu(i),\ i=\overline{1,m},\ t\in[t_0,T],$$

де $t_\theta - \theta$ – квантиль двостороннього розподілу Ст'юдента з $(1-Q)$ ступенями вільності при довірчому рівні $\theta \in (0;1)$ (таблиця [14, с.236–237]).

Таким чином, отримали довірчі проміжки для реальних значень оптимальних траєкторій за капіталами галузей за заданою імовірністю. Наведені результати дослідження сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. Нехай для запропонованої моделі оптимального динамічного розвитку узагальненої міжгалузевої економіки з різними видами діяльності при міжгалузевому інвестуванні та інвестиційному запізнені як задачі оптимального керування (10) – (14) виконуються умови:

1) детерміновані сталі $\alpha_{ij}^{(v)} \ge 0$, $\gamma_{ij}^{(v)} \ge 0$, $\mu_j^{(v)} \in (0;1)$, $\chi_{ij} \ge 0$ та $\sum_{i=1}^{m} \chi_{ij} = 1$ для $\forall j = \overline{1,m}$, $K_{iT}^{(v)} > 0$, $\lambda_j^{(v)}$, $q_i > 0$, $v = 1,\dots,v(i)$, $i = \overline{1,m}$, $0 \le t_0 \le T$; стохастичні сталі: $K_{i0}^{(v)} \ge 0$, $v = 1,\dots,v(i)$, $i = \overline{1,m}$;

2) функції $\alpha_i^{(v)}$, $\beta_i^{(v)}$, $v = 1,\dots,v(i)$, γ_i, $i = \overline{1,m}$ та N –кусково–неперервні на $[t_0,T]$;

3) макровиробничі функції $F_i^{(v)}\left(K_i^{(v)} \ge 0, L_i^{(v)} \ge 0\right) \ge 0$ – двічі неперервно–диференційовані, монотонно зростаючі та вгнута по кожному з аргументів;

4) задача нелінійного програмування (21) має розв'язок.

Тоді задача нелінійного програмування (10)–(14) має оптимальний процес

$$\left\{K_{ОП}(t),\ C_{ОП}(t-\tau),\ I_{ОП}(t-\tau),\ L_{ОП}(t-\tau),\ X_{ОП}(t-\tau),\ Y_{ОП}(t-\tau),\ t \in [t_0,T]\right\}.$$

Причому, оптимальні керування за споживанням $C_{ОП}$, за валовими інвестиціями $I_{ОП}$, за робочими силами $L_{ОП}$, за валовими продукціями $X_{ОП}$ і за кінцевими продукціями $Y_{ОП}$ – кусково–неперервні функції, а оптимальні траєкторії за капіталами галузей – неперервні та кусково–диференційовані функції на $[t_0,T]$. За заданою ймовірністю одержані довірчі проміжки для оптимальних траєкторій за капіталами галузей.

Алгоритм розрахунку оптимального процесу

1. Провести розрахунок магістральних керувань $C_{маг}$, $I_{маг}$ і $L_{маг}$ із розв'язування задачі нелінійного програмування (17).

2. Обчислити відповідні стохастичні та середні магістралі за капіталами і магістральні керування $X_{маг}$ та $Y_{маг}$ та сформувати магістральний процес.

3. Перевірити виконання обмежень (3) для середніх кінцевих магістралей за капіталами. Якщо виконуються нерівності (3), то визначений магістральний процес є оптимальним. Вихід із алгоритму. При не виконанні хоча б однієї з нерівностей (3) перехід на блок 4.

4. Перевірити існування розв'язку задачі нелінійного програмування (21). Якщо не існує, то вихід із алгоритму. При існуванні – перехід на блок 5.

5. Обчислити праві керування $C_{ПР}$, $I_{ПР}$, $L_{ПР}$ із розв'язування задачі нелінійного програмування (21).

6. Провести розрахунок моменту перемикання керувань ζ із розв'язання нелінійного алгебраїчного рівняння (26).

7. Обчислити відповідні стохастичні та середні праві траєкторії за капіталами $K_{ПР}$ і праві керування $X_{ПР}$ і $Y_{ПР}$ та сформувати правий процес.

8. Обчислити стохастичний і середній оптимальний процес як склейку в момент ζ стохастичного та середнього правого процесу.

9. Провести розрахунок за заданою ймовірністю довірчих проміжків для реальних значень оптимальних траєкторій за капіталами галузей. Вихід із алгоритму.

Модельний (тестовий) приклад. Проведемо чисельне моделювання при таких даних:

$$F_1^{(1)}\left(K_1^{(1)},L_1^{(1)}\right) = 9\left(K_1^{(1)}\right)^{0.23}\left(L_2^{(1)}\right)^{0.77},\ F_1^{(2)}\left(K_1^{(2)},L_1^{(2)}\right) = 10\left(K_1^{(2)}\right)^{0.25}\left(L_1^{(2)}\right)^{0.75},$$

$$F_2^{(1)}\left(K_2^{(1)},L_2^{(1)}\right) = 12\left(K_2^{(1)}\right)^{1/3}\left(L_2^{(1)}\right)^{2/3},\ F_3^{(1)}\left(K_3^{(1)},L_3^{(1)}\right) = 15\left(K_3^{(1)}\right)^{0.2}\left(L_3^{(1)}\right)^{0.8},$$

$$F_3^{(1)}\left(K_3^{(2)},L_3^{(2)}\right) = 13\left(K_3^{(2)}\right)^{0.18}\left(L_3^{(2)}\right)^{0.82},\ r = 1,\ m = 3,\ \tau = 0.30,$$

$$\mu_1^{(1)}=0.06,\ \mu_1^{(2)}=0.07,\ \mu_2^{(1)}=0.08,\ \mu_3^{(1)}=0.09,\ \mu_3^{(2)}=0.95,\ t_0=0,\ T=10,\ \lambda_1^{(1)}=3,\ \lambda_3^{(2)}=9.5,$$

$$\lambda_2^{(1)}=4,\ \lambda_3^{(1)}=5,\ \lambda_3^{(2)}=6,\ \alpha_1^{(1)}=8,\ \alpha_1^{(2)}=8.5,\ \alpha_2^{(1)}=9,\ \alpha_3^{(1)}=10.6,\ \alpha_3^{(2)}=11,\ \beta_1^{(1)}=6,\ \beta_1^{(2)}=6.5,$$

$$\beta_2^{(1)}=8,\ \beta_3^{(1)}=7,\ \beta_3^{(2)}=7.5,$$

$$K_{10}^{(1)}(y)=4.5,\ K_{10}^{(2)}(y)=5,\ K_{20}^{(1)}(y)=4,\ K_{30}^{(1)}(y)=3.5,\ K_{30}^{(2)}(y)=3,\ y\in[0,10],\ K_{1T}^{(1)}=348,$$

$$K_{1T}^{(2)}=350,\ K_{2T}^{(1)}=40,\ K_{3T}^{(1)}=23,\ K_{3T}^{(3)}=25,$$

$$C_1^{(min)}=0.1,\ C_2^{(\min)}=0.2,\ C_3^{(\min)}=0.3,\ q_1=15,\ q_2=10,\ q_3=5,$$

$$\begin{array}{c} \textit{галузь}\,1 \quad \textit{галузь}\,2 \quad \textit{галузь}\,3 \\ A=\begin{pmatrix} 0.395 & 0.409 & 0.528 & 0.096 & 0.087 \\ 0.089 & 0.092 & 0.003 & 0.226 & 0.201 \\ 0.087 & 0.092 & 0.006 & 0.054 & 0.049 \end{pmatrix} \end{array},\ \chi=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{c} \textit{галузь}\,1 \quad \textit{галузь}\,2 \quad \textit{галузь}\,3 \\ \Gamma=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.03 & 0.01 & 0.02 & 0 \\ 0 & 0.028 & 0.025 & 0.03 & 0 \end{pmatrix} \end{array},\ \gamma=\begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2(t) \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix},$$

функції γ_2 та γ_3 задані відповідно таблично (табл.1, табл.2), $N(t)=1311.68$.

Таблиця 1

Числове задання функції γ_2

t	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
γ_2	0.2424	0.3134	0.3843	0.5234	0.6625	0.9371	1.2116	2.0574	2.9031	3.8163	4.7295	7.4002	10.0709

Продовження таблиці 1

t	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,25	9,5	9,75	10
γ_2	17,0051	23,9393	38,1412	52,3430	86,3353	120,3275	150,0371	185,3980	229,3834	283,7411

Таблиця 2

Числове задання функції γ_3

t	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5
γ_3	0,3533	0,4337	0,5806	0,7275	1,0175	1,3073	2,1627	3,0181	3,9298	4,9298	9,9419

Продовження таблиці 2

t	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,25	9,5	9,75	10
γ_3	15.0423	19.7830	24.5236	39.0289	53.5342	100,4512	118.3182	110.5166	180.9572	223.9572	277.0486

$$Q=20,\ \theta=0.090,\ t_\theta(19)=1.729,\ \chi^2_{0.1}(19)=27.20.$$

У результаті розрахунку одержали такі результати (для I галузі вибраний 2-й процес $v=v(2)$, для II галузі – 1-й процес $v=v(1)$, для III галузі – 1-й процес $v=v(1)$).

1) Оптимальні траєкторії за капіталами вибраних процесів відповідних галузей (табл.3)

Таблиця 3

Оптимальні траєкторії за капіталами

t	$\overline{K_{1ОП}^{(2)}} \pm \frac{\sigma_{K_{1ОП}^{(2)}} t_\theta}{\sqrt{Q}}$	$\overline{K_{2ОП}^{(1)}} \pm \frac{\sigma_{K_{2ОП}^{(1)}} t_\theta}{\sqrt{Q}}$	$\overline{K_{3ОП}^{(2)}} \pm \frac{\sigma_{K_{3ОП}^{(1)}} t_\theta}{\sqrt{Q}}$
0	5	4	3
1	4.79 ± 0.5548	3.65 ± 0.4015	2.7 ± 0.297
2	4.72 ± 0.5464	3.47 ± 0.3817	2.54 ± 0.2794
3	4.98 ± 0.5876	3.28 ± 0.3608	2.36 ± 0.2596
4	5.94 ± 0.6928	3.19 ± 0.3509	2.25 ± 0.2475
5	8.55 ± 0.9026	3.31 ± 0.3641	2.26 ± 0.2486
6	15 ± 1.65	3.89 ± 0.388	2.52 ± 0.251
7	30.43 ± 3.3473	5.52 ± 0.554	3.36 ± 0.337
8	66.86 ± 7.3546	9.59 ± 0.958	5.54 ± 0.555
9	152.55 ± 16.6805	19.38 ± 1.937	10.83 ± 1.081
9.25	188.05 ± 18.805	23.46 ± 0.2341	13.04 ± 0.1314
9.5	231.99 ± 23.199	28.51 ± 0.2859	15.61 ± 0.1570
9.75	286.37 ± 28.635	34.78 ± 0.3481	19.81 ± 0.1979
10	353.66 ± 35.368	42.54 ± 0.4249	25 ± 0.2491

У табл.3 приведені середні значення оптимальних траєкторій вибраних процесів відповідних галузей $\overline{K_{iОП}^{(j)}}$ та довірчі межі оптимальних траєкторій вибраних процесів відповідних галузей ($\overline{K_{iОП}^{(j)}} + \frac{\sigma_{K_{iОП}^{(j)}}(t_0)}{\sqrt{Q}}$ – нижня межа, $\overline{K_{iОП}^{(j)}} - \frac{\sigma_{K_{iОП}^{(j)}}(t_0)}{\sqrt{Q}}$) за заданих довірчим рівнем $\theta = 0.90$.

2) Оптимальні керування за валовими продукціями $\chi_{iОП}^{(j)}$, за валовими інвестиціями $I_{iОП}$, за робочими силами $L_{iОП}^{(j)}$ подані в табл.4, за споживанням $C_{iОП}$ та за кінцевими продукціями $Y_{iОП}$ вибраних процесів відповідних галузей – в табл.5.

Момент перемикання керувань $\zeta = 9.5$.

Таблиця 4

Оптимальні керування за валовими продукціями, за валовими інвестиціями та за робочими силами

t	$\chi_{1ОП}^{(2)}$	$\chi_{2ОП}^{(1)}$	$\chi_{3ОП}^{(1)}$	$I_{1ОП}$	$I_{2ОП}$	$I_{3ОП}$	$L_{1ОП}^{(2)}$	$L_{2ОП}^{(1)}$	$L_{3ОП}^{(1)}$
0	6.0615	2.4419	1.8090	0.117	0.028	0.017	0.3	0.046	0.054
1	10.2113	3.1041	2.3482	0.23	0.043	0.025	0.61	0.069	0.078
2	18.2547	4.4149	3.5336	0.51	0.075	0.043	1.33	0.12	0.13
3	34.0524	6.8797	6.0625	1.17	0.151	0.085	3	0.24	0.26
4	85.4077	11.5621	11.2519	2.7	0.33	0.183	9.64	0.53	0.57
5	139.4077	11.7051	21.5120	6.28	0.75	0.414	16.16	1.21	1.28
6	299.8950	21.4216	42.9937	14.69	1.73	0.954	37.78	2.81	2.96
7	713.4527	74.3228	89.6269	34.4	4.03	2.221	88.46	6.56	6.9
8	1561.9899	157.3561	195.34862	80.6	9.43	5.19	207.26	15.33	16.14
9	3636.4932	350.9124	386.1772	188.91	22.1	12.15	485.78	35.91	37.8
9.25	4495.3564	431.0231	543.3083	233.23	27.34	15.03	601.07	44.43	46.76
9.5	5558.1872	530.1017	667.5663	289.23	33.83	18.58	743.74	54.97	57.83
9.75	6875.0874	652.7848	830.1486	357.28	41.85	23	920.27	68.01	71.55
10	8502.3559	804.6035	1.31.2207	442.83	51.78	28.45	1139	84.15	88.53

Таблиця 5

Оптимальні керування за споживанням та за кінцевими продукціями

t	$C_{1ОП}$	$C_{2ОП}$	$C_{3ОП}$	$Y_{1ОП}$	$Y_{2ОП}$	$Y_{3ОП}$
0	0.223	0.414	0.560	0.385	0.414	0.560
1	0.224	0.417	0.562	0.522	0.417	0.562

2	0.227	0.418	0.560	0.855	0.418	0.560
3	0.228	0.419	0.559	1.634	0.419	0.559
4	0.230	0.421	0.558	3.443	0.421	0.558
5	0.231	0.422	0.556	7.675	0.422	0.556
6	0.233	0.423	0.555	17.607	0.423	0.555
7	0.235	0.424	0.554	40.886	0.424	0.554
8	0.238	0.427	0.553	95.458	0.427	0.553
9	0.240	0.429	0.552	223.4	0.429	0.553
9.25	0.243	0.430	0.550	275.843	0.430	0.550
9.5	0.244	0.433	0.310	341.884	0.432	0.310
9.75	0.241	0.437	0.305	422.1544	0.437	0.305
10	0.240	0.450	0.300	523.30	0.450	0.300

При проведенні розрахунку для розв'язування задач нелінійного програмування (17) і (21) використовувалось сумісне використання методу кроків [9] та градієнтний метод Гурвиця–Ерроу [10] при кожному фіксованому часі t, для стохастичних початкових задач із передісторія–сумісне використання методу кроків [9] та стохастичний аналог методу Рунге–Кутта [11], а для визначення моменту перемикання керувань із нелінійного алгебраїчного рівняння (26) – методом простого перебору для пошуку найменшого значення.

Висновки. Запропонована стохастична модель оптимального динамічного розвитку узагальненої статичної міжгалузевої економіки з різними видами діяльності при міжгалузевому інвестуванні та інвестиційному запізненні та проведено її дослідження. Для запропонованої стохастичної моделі

– проведено опис структури оптимального процесу,
– встановлено, що оптимальні керування за споживанням, за валовими інвестиціями, за робочими силами, за валовими продукціями, за кінцевими продукціями та момент перемикання керувань не залежить від коефіцієнтів при вінерівських процесах у динаміках капіталів галузей і є детермінованими величинами;
– встановлено, що оптимальні керування є кусково–неперервними функціями, а оптимальні траєкторії неперервними та кусково–диференційованими функції на розглядуваному часовому проміжку.

Список літератури

1. Математическая экономика на персональном компьютере / Под ред. М. Кубонива. Москва: Финансы и статистика, 1991. 304с.
2. Бойчук М.В., Семчук А.Р. Стохастическая модель полного цикла оптимальной эколого–экономической динамики. *Проблемы управления и информатики*, 2013. №2. С. 125 – 139.
3. Основы теории оптимального управления / Под ред. Ф.Б. Кротова. Москва: Высшая школа, 1990. 432с.
4. Бойчук М.В. Шмуригіна Н.М. Моделювання та оптимізація еколого–економічних систем міжгалузевих балансів з інвестиційним запізненням. Чернівці: «Місто», 2013. 212с.
5. Бойчук М.В. Семчук А.Р. Моделювання та оптимізація повного циклу однопродуктової макроекономіки зростання з урахування екологічного фактору. Чернівці: «Місто», 2012. 208с.
6. Скороход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів. Київ: «Либідь»,1990. 168с.
7. Ясинський В.К. Основи обчислювальних методів. Чернівці: «Золоті литаври», 2005. 396с.
8. Андреева Е.А. Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последействием. Москва: «Наука», 1992. 336с.
9. Эльсгольц Л.Э. Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Москва: Наука, 1971. 296с.
10. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. Москва: Высшая школа, 1986. 139с.
11. Никитин Н.Н. Разевич В.Д. Методы цифрового моделирования стохастических дифференциальных уравнений и оценка их погрешности. *Журнал вычислительной математики и математической физики,* 1978. Т.18, №1. С. 106 – 117.
12. Васильев Ф.П. Чисельные методы решения экстремальных задач. Москва: Наука, 1980. 518с.
13. Григорків В.С. Оптимальне керування в економіці: навчальний посібник. Чернівці: Чернівецький нац. університет, 2011. 200с.
14. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс. Москва: Дело, 1998. 248с.

References

1. Kuboniva, M. ed. (1991) *Matematicheskaya ekonomika na personal'nom komp'yutere [Mathematical Economics on a Personal Computer]*, Finansy i statistika, Moscow, 304p.
2. Boychuk, M.V., Semchuk, A.R. (2013) Stokhasticheskaya model' polnogo tsikla optimal'noy ekologo–ekonomicheskoy dinamiki [Stochastic model of the full cycle of optimal ecological and economic dynamics]. *Problems of control and informatics*,. No. 2. P. 125-139.
3. Krotov, F.B. ed. (1990) *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya [Fundamentals of the Optimal Control Theory]*, Vysshaya shkola, Moscow, 432p.
4. Boychuk M.V. Shmurygina N.M. (2013) *Modelyuvannya ta optymizatsiya ekoloho–ekonomichnykh system mizhhaluzevykh balansiv z investytsiynym zapiznennyam [Modeling and optimization of ecological and economic systems of intersectoral balances with investment delay]*, Misto, Chernivtsi, 212p.
5. Boychuk, M.V. Semchuk, A.R. (2012) Modelyuvannya ta optymizatsiya povnoho tsyklu odnoproduktovoyi makroekonomiky zrostannya z urakhuvannya ekolohichnoho faktoru [Modeling and optimizing a new cycle of single-product macroeconomics of increasing the improvement of the environmental factor], Misto, Chernivtsi, 208p.
6. Skorokhod, A.V. (1990) *Lektsiyi z teoriyi vypadkovykh protsesiv [Lectures on the theory of random processes]*, Libid, Kyiv, 168p.
7. Yasinsky, V.K. (2005) *Osnovy obchyslyuval'nykh metodiv [Basics of computational methods]*, Zoloti lytavry, Chernivtsi, 396p.
8. Andreeva, E.A. Kolmanovsky, V.B., Shaikhet, L.E. (1992) Upravleniye sistemami s posledeystviyem [Systems management with aftereffect], Nauka, Moscow, 336p.
9. Elsgolts, L.E. Norkin, S.B. (1971) Vvedeniye v teoriyu differentsial'nykh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentom [Introduction to the theory of differential equations with deviating argument], Nauka, Moscow, 296p.
10. Akulich, I.L. (1986) Matematicheskoye programmirovaniye v primerakh i zadachakh [Mathematical Programming in examples and tasks], Vysshaya shkola, Moscow, 139p.
11. Nikitin, N.N. Razevich, V.D. (1978) Metody tsifrovogo modelirovaniya stokhasticheskikh differentsial'nykh uravneniy i otsenka ikh pogreshnosti [Methods for digital modeling of stochastic differential equations and estimation of their error]. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*,. Vol.18, No.1. pp. 106-117.
12. Vasiliev, F.P. (1980) Chislennyye metody resheniya ekstremal'nykh zadach [Numerical methods for solving extremal problems], Nauka, Moscow, 518p.
13. Grigorkiv, V.S. (2011) Optymal′ne keruvannya v ekonomitsi [Optimal management in the economy: a guidebook], Chernivtsi nat. university, Chernivtsi, 200p.
14. Magnus, Ya.R., Katyshev, P.K., Peresetsky, A.A. (1998) Ekonometrika. Nachal'nyy kurs [Econometrics. Starting Course], Delo, Moscow, 248p.

Summary

Myroslav Boichuk, Liubov Makhanets

STOCHASTIC MODELING OF OPTIMAL DYNAMIC DEVELOPMENT OF GENERAL STATIC INTERBRANCH ECONOMY WITH DIFFERENT ACTIVITIES IN INTER-INDUSTRIAL INVESTMENT AND INVESTMENT DELAY

The stochastic model of optimal dynamic development of a generalized static intersectoral economy with different types of activities in intersectoral investing and investment lag is proposed in the paper. It is established that the optimal controls for consumption, gross investment, labor, gross output, final products and the moment of switching controls does not depend on the coefficients of Wiener's processes in the capital dynamics of industries. They are deterministic values. It is proved that the optimal controls are piecewise continuous functions, and the optimal trajectories are continuous and piecewise differentiated functions on the considered time interval.An algorithm for calculating the optimal process is presented. Numerical simulation of the test example is carried out. In the calculation, the combined use of the method of steps and the Hurwitz–Arrow gradient method at each fixed time was used to solve nonlinear programming tasks. The method of steps and stochastic analogue of Runge–Kutta method was used for stochastic initial tasks. And simple search method to find the smallest value was used for determining the moment of switching controls from nonlinear algebraic equation.

Key words: *optimal dynamic development, generalized static intersectoral economy, types of activity, intersectoral investment, investment delay, main process, right process, optimal process, moment of control switching.*