УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 519.21, 517.937

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ЛОКАЛЬНОГО ВЛИЯНИЯ ДВИЖУЩИХСЯ ОБЪЕКТОВ

© 2020 г. В. А. Литовченко

Для псевдодифференциального уравнения супердиффузии выяснено его общую стохастическую природу. Развивая идею Хольцмарка показано, что функция Грина задачи Коши для этого уравнения является распределением вероятностей силы локального влияния движущихся объектов в системе с взаимодействием, происходящим по степенному закону.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим классическое уравнение диффузии

$$\partial_t u(t;x) - b\triangle_x u(t;x) = 0, \quad 0 < t \le T,\, x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

в котором $\triangle_x$ – n-мерный оператор Лапласа, действующий по пространственной переменной x, а $b > 0$ – фиксированный параметр. Фундаментальным решением задачи Коши для (1) является функция

$$G(t;x) = \mathbb{F}\big[e^{-bt|\xi|^2}\big](t;x) \equiv (\sqrt{4\pi bt})^{-n} e^{-\frac{|x|^2}{4bt}}, \tag{2}$$

где $\mathbb{F}$ – оператор преобразования Фурье, а $|\cdot|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Уравнение (1) сыграло важную роль в создании классической теории параболических уравнений с частными производными, т. е. дифференциальных уравнений фундаментальное решение задачи Коши для которых относительно переменной x имеет типичные для $G(t;\cdot)$ свойства поведения на бесконечности. Известными представителями таки уравнений являются уравнения, параболические по Петровскому [1], по Шилову [2], по Житомирскому [3, 4] или же, по Сироте [5] и т. д. Эти уравнения возникают при изучении различных естественных процессов, связанных с диффузией и тепломассообменом.

Уравнение (1) имеет отношение и к теории случайных процессов. Функция $G(t;\cdot)$ является плотностью вероятностного перехода случайного процесса Винера [6] – источника многих диффузионных процессов.

Классическое уравнение диффузии (1) также находится в истоках современной теории параболических псевдодифференциальных уравнений (ПДУ) с однородными точечно-негладкими символами псевдодифференцирования. Заменив в конструкции уравнения (1) оператор Лапласа $-\triangle_x$ на оператор Рисса [7] дробного дифференцирования $A_\alpha := (-\triangle_x)^{\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha > 0$, получим класс ПДУ

$$\partial_t u(t;x) + bA_\alpha u(t;x) = 0, \quad 0 < t \le T,\, x \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

из соответствующим символом псевдодифференцирования $|\cdot|^\alpha$, содержащий при $\alpha = 2$ исходное уравнение (1). В частности поэтому (3) при соответствующих α унаследовало название "уравнение изотропной супердиффузии" [8, с. 251].

Функция

$$G_\alpha(t;x) = \mathbb{F}\big[e^{-bt|\xi|^\alpha}\big](t;x), \quad 0 < t \le T,\, x \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

является фундаментальным решением задачи Коши для уравнения (3).

Изучением свойств функции $G_\alpha(t;\cdot)$ занимались многие исследователи. При этом оказалось, что в отличии от классического случая $\alpha = 2\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, эта функция при непарных значениях α имеет уже не экспоненциальное убывание на бесконечности, а степенное. Первые оценки функции $G_\alpha(t;\cdot)$ и её производных методом преобразования Фурье были получены С.Д. Эйдельманом совместно с Я.М. Дринём в [9, 10] при условии, что $\alpha > 1$:

$$|\partial_x^k G_\alpha(t;x)| \le c_1 t(t^{1/\alpha} + |x|)^{-(n+|k|+[\alpha])}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+^n,\, t \in (0;T],\, x \in \mathbb{R}^n$$

(здесь $[\cdot]$ – целая часть числа, а $|k| = k_1 + \ldots + k_n$). Точное асимптотическое поведение $G_\alpha(t;\cdot)$ в окрестности бесконечно удаленных точек установлено М.В. Федорюком в [11]:

$$G_\alpha(t;\cdot) \sim |\cdot|^{-n-\alpha}, \quad t > 0, \ \alpha \ge 1. \tag{5}$$

Спустя некоторое время W.R. Schneider [12] с помощью преобразование Меллина выражает функцию $G_\alpha(t;\cdot)$ через специальные H-функции Фокса и, как следствие, получает асимптотику (5). Используя элементы теории обобщенных функций в сочетании с гармоническим анализом А.Н. Кочубей впервые получил точные оценки производных функции $G_\alpha(t;\cdot)$ при $\alpha \ge 1$ и $n > 1$ [13]:

$$|\partial_x^k G_\alpha(t;x)| \le c_1 t(t^{1/\alpha} + |x|)^{-(n+|k|+\alpha)}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+^n,\, t \in (0;T],\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

В работе [14] оценки (6) распространены на случай $\alpha > 0$.

При некоторых α уравнение (3) находит важное приложение в теории случайных процессов. Оператор A_α при $\alpha \le 2$ является производящим оператором симметрично устойчивого процесса П. Леви с переходной функцией G_α [15, 16]. Яркими представителями таких процессов являются случайные процессы Коши ($\alpha = 1$), Хольцмарка ($\alpha = 3/2$), Гаусса–Винера ($\alpha = 2$) и др. В современной литературе приведено много примеров реальных применений распределений Коши, Гаусса, Хольцмарка и Парето в астрономии, ядерной физики, экономике, социологии, в промышленной и военной отраслях [17-22]. Каждое из них характеризует стохастические особенности ПДУ (3) при том или ином значении $\alpha \in (0;2]$.

В настоящей работе установлено общую стохастическую природу уравнения (3) при $\alpha \in (0;2)$. Показано, что фундаментальное решение G_α задачи Коши для этого уравнения при некоторых условиях на параметр b является распределением вероятностей силы F локального влияния движущихся объектов в системе, в которой взаимодействие происходит согласно некоему степенному закону. Отметим, что случаю классической Ньютоновской гравитации соответствует уравнение (3) при $\alpha = 3/2$ (нестационарная задача Хольцмарка [23, 24]).

2. ЗАДАЧА О ЛОКАЛЬНОМ ВЛИЯНИИ ДВИЖУЩИХСЯ ОБЪЕКТОВ

В вакуумной Евклидовой среде $\mathbb{R}^3$ рассматривается счетная система свободно движущихся изолированных объектов Z_j, в каждом из которых сосредоточен некий потенциал p_j, при этом, произвольный объект системы с потенциалом P взаимодействует с другим объектом с потенциалом p согласно закону

$$F = G\frac{P \cdot p}{|r|^\beta} r^\circ, \quad \beta > 0. \tag{7}$$

Здесь F – сила взаимодействия, G – весовая константа, r – вектор расстояния между объектами, а $r^\circ := r/|r|$ – орт вектора r.

Задача состоит в исследовании силы $F(t)$ воздействия в момент времени t на единицу потенциала произвольного объекта Z_0 этой системы его ближайшим окружением.

Поскольку $F(t)$ – величина с относительно быстрыми, резкими отклонениями, вызванными мгновенным изменением локального распределения объектов из окружения Z_0, то целесообразно рассматривать $F(t)$ как случайную величину.

Найдем распределение $W_\beta^t(F)$ для силы $F(t)$ при следующих предположениях. Будем полагать, что распределение объектов в окружении Z_0 подвергается флуктуациям и, что объекты с различным потенциалом p встречаются в системе с некоторым вполне определенным, эмпирически установленным законом. При этом, в каждый момент времени t флуктуации плотности объектов подчинены условию постоянства их средней плотности на единицу объема:

$$n(t;r;p) \equiv n(t).$$

Пусть рассматриваемый объект Z_0 находится в начале координат координатной системы пространства $\mathbb{R}^3$, а его сферическое окружение радиуса R в момент времени t содержит $N(t)$ объектов. Тогда, согласно сказанному,

$$F(t) = G\sum_{j=1}^{N(t)} \frac{p_j}{|r_j|^{\beta+1}} r_j \equiv \sum_{j=1}^{N(t)} F_j$$

и

$$N(t) = \frac{4}{3}\pi R^3 n(t). \tag{8}$$

Вначале для фиксированного t рассмотрим распределение $W^t_{\beta,R}(F)$ в центре сферической окрестности радиуса R, охватывающей $N(t)$ объектов системы и найдем вероятность $W^t_{\beta,R}\big(F_\circ\big)dF_\circ$ того, что величина $F(t)$ попадает в куб $[F_\circ(t); F_\circ(t) + dF_\circ(t)] \subset \mathbb{R}^3$. Применив известный метод Маркова [22, с. 152], получим:

$$W^t_{\beta,R}\big(F_\circ(t)\big) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-i(\xi,F_\circ(t))} A_R(\xi)d\xi,$$

где

$$A_R(\xi) := \prod_{j=1}^{N(t)} \int\limits_0^{+\infty} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{K}_R(0)} e^{i(\xi,F_j)}\tau_j(t;r_j;p_j)dr_j\Bigg)dp_j.$$

Здесь $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{K}_R(0)$ – шар радиуса R с центром в начале координат, а $\tau_j(t;r_j;p_j)$ – распределение вероятностей того, что в момент времени t j-тый объект с потенциалом p_j находится в положении r_j. Если теперь учесть, что имеют место лишь флуктуации, совместимые с пространственным постоянством средней плотности, то тогда

$$\tau_j(t;r_j;p_j) = \frac{3\tau(t;p)}{4\pi R^3},$$

где $\tau(t;p)$ – частота, с которой встречаются объекты с различным потенциалом в момент времени t.

Отсюда приходим к равенству

$$A_R(\xi) = \Bigg(\frac{3}{4\pi R^3}\int\limits_0^{+\infty} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{K}_R(0)} e^{i(\xi,\eta)}\tau(t;p)dr\Bigg)dp\Bigg)^{N(t)},$$

в котором

$$\eta := Gpr/|r|^{\beta+1}. \tag{9}$$

Устремив теперь $R \to +\infty$ и $N(t) \to +\infty$, согласно (8) получим:

$$W^t_\beta(F) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-i(\xi,F(t))} A(t;\xi)d\xi, \tag{10}$$

где

$$A(t;\xi) := \lim_{R\to\infty}\Bigg[\frac{3}{4\pi R^3}\int\limits_0^{+\infty} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{K}_R(0)} e^{i(\xi,\eta)}\tau(t;p)dr\Bigg)dp\Bigg]^{4\pi R^3 n(t)/3}.$$

Поскольку для каждого t

$$\frac{3}{4\pi R^3}\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_{\mathbb{K}_R(0)}\tau(t;p)dr\right)dp = 1,$$

то

$$A(t;\xi) = \lim_{R\to\infty}\left[1 - \frac{3}{4\pi R^3}\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_{\mathbb{K}_R(0)}(1 - e^{i(\xi,\eta)})\tau(t;p)dr\right)dp\right]^{4\pi R^3 n(t)/3}. \qquad (11)$$

Далее, абсолютная сходимость в (11) интеграла с переменной интегрирования r на всем пространстве $\mathbb{R}^3$ при $\beta > 3/2$ позволяет записать равенство (11) в виде

$$A(t;\xi) = \lim_{R\to\infty}\left[1 - \frac{3}{4\pi R^3}\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^3}(1 - e^{i(\xi,\eta)})\tau(t;p)dr\right)dp\right]^{4\pi R^3 n(t)/3},$$

а затем, прийти к изображению

$$A(t;\xi) = e^{-n(t)B_\beta(t;\xi)}, \qquad (12)$$

в котором

$$B_\beta(t;\xi) := \int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^3}(1 - e^{i(\xi,\eta)})\tau(t;p)dr\right)dp.$$

Найдем значение интегрального выражения с предыдущего равенства. Для этого в его внутреннем интеграле перейдем от переменной r к η согласно правилу (9). Учитывая равенство

$$dr = \frac{1}{\beta}\big(Gp/|\eta|^{1+\beta}\big)^{3/\beta}d\eta,$$

получим:

$$B_\beta(t;\xi) = \frac{G^{3/\beta}}{\beta}\left(\int\limits_0^{+\infty}p^{3/\beta}\tau(t;p)dp\right)\int\limits_{\mathbb{R}^3}(1 - e^{i(\xi,\eta)})|\eta|^{-3(1+\beta)/\beta}d\eta \equiv$$

$$\equiv \frac{G^{3/\beta} < p^{3/\beta} >}{\beta}\int\limits_{\mathbb{R}^3}(1 - e^{i(\xi,\eta)})|\eta|^{-3(1+\beta)/\beta}d\eta.$$

Отсюда, с помощью несложных преобразований приходим к равенству

$$B_\beta(t;\xi) = \frac{G^{3/\beta} < p^{3/\beta} >}{\beta}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\big(1 - \cos(\xi,\eta)\big)|\eta|^{-3(1+\beta)/\beta}d\eta.$$

Если теперь перейти к сферической системе координат с осью аппликат, направленной по вектору ξ, то последнее равенство примет вид

$$B_\beta(t;\xi) = \frac{G^{3/\beta} < p^{3/\beta} >}{\beta}\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_0^{2\pi}\big(1 - \cos(|\xi||\eta|l)\big)|\eta|^{2-3(1+\beta)/\beta}d\varphi\right)dl\right)d|\eta|$$

или, что то же,

$$B_\beta(t;\xi) = \frac{(G|\xi|)^{3/\beta} < p^{3/\beta} >}{\beta}\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_0^{2\pi}\big(1 - \cos(\rho l)\big)\rho^{-1-3/\beta}d\varphi\right)dl\right)d\rho =$$

$$= \frac{2\pi(G|\xi|)^{3/\beta} < p^{3/\beta} >}{\beta} \int\limits_0^{+\infty} \Big(\int\limits_{-1}^{1} \big(1 - \cos(\rho l)\big) dl \Big) \rho^{-1-3/\beta} d\rho.$$

Вычислив внутренний интеграл, получим:

$$B_\beta(t;\xi) = \frac{4\pi(G|\xi|)^{3/\beta} < p^{3/\beta} >}{\beta} \int\limits_0^{+\infty} (\rho - \sin\rho)\rho^{-2-3/\beta} d\rho.$$

Отметим, что интеграл с последнего равенства сходится лишь при $\beta > 3/2$. Проинтегрировав его по частям, придем к изображению

$$B_\beta(t;\xi) = \frac{4\beta\pi\mathrm{I}(\beta)}{3(\beta+3)} \big(G|\xi|\big)^{3/\beta} < p^{3/\beta} >, \quad t \geq 0, \xi \in \mathbb{R}^3, \beta > 3/2, \tag{13}$$

в котором

$$\mathrm{I}(\beta) := \begin{cases} \frac{\beta}{3-\beta}\Gamma(2-3/\beta)\cos\frac{(2-3/\beta)\pi}{2}, & \frac{3}{2} < \beta < 3, \\ \frac{\pi}{2}, & \beta = 3, \\ \Gamma(1-3/\beta)\sin\frac{(1-3/\beta)\pi}{2}, & \beta > 3 \end{cases}$$

(здесь $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера).

Объединяя равенства (10), (12) и (13), окончательно находим:

$$W_\beta^t(F) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-i(\xi,F)} e^{-a_\beta(t)|\xi|^{3/\beta}} d\xi,$$

где

$$a_\beta(t) := \frac{4\beta\pi\mathrm{I}(\beta)}{3(\beta+3)} G^{3/\beta} n(t) < p^{3/\beta} > .$$

Таким образом, доказано утверждение.

Теорема 1. *При раннее указанных предположениях, для каждого $\beta > 3/2$ функция*

$$W_\beta^t(F) = \mathbb{F}^{-1}\Big[e^{-a_\beta(t)|\xi|^{3/\beta}}\Big](t;F), \tag{14}$$

является распределением вероятностей силы $F(t)$ локального влияния движущихся объектов в системе с взаимодействием, происходящим согласно степенному закону (7).

3. СВЯЗЬ С ПДУ

Сравнивая равенства (4) и (14), находим общность структуры распределения вероятностей $W_\beta^t(\cdot)$ и фундаментального решения $G_\alpha(\cdot)$ задачи Коши для ПДУ (3). Это сходство наводит на мысль, что функция $W_\beta^t(\cdot)$ является решением уравнения (3) при $\alpha = 3/\beta$ с соответствующим коэффициентом b. Убедимся в этом.

Предположим непрерывную дифференцируемость коэффициента $a_\beta(\cdot)$ на промежутке $[0;T]$. Непосредственно с [14] следует, что для всех $\beta > 3/2$ функция $W_\beta^t(x)$ на множестве $(0;T] \times \mathbb{R}^3$ дифференцируема по t и бесконечно дифференцируема по переменой x, причем для ее производных выполняются оценки:

$$|\partial_x^k W_\beta^t(x)| \leq c_1 t (t^{\frac{\beta}{3}} + |x|)^{-(3+|k|+\frac{3}{\beta})}; \tag{15}$$

$$|\partial_t \partial_x^k W_\beta^t(x)| \leq c_2 t^{\beta-1} (t^{\frac{\beta}{3}} + |x|)^{-(3+|k|+\frac{3}{\beta})},$$

с некоторыми положительными постоянными c_1 и c_2.

Оценка (15) обеспечивает принадлежность $W^t_\beta(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}^3)$ при каждом фиксированном $t \in (0;T]$, что в свою очередь гарантирует существование преобразования Фурье функции $W^t_\beta(\cdot)$ и выполнение равенства

$$\mathbb{F}[W^t_\beta(x)](t;\xi) = e^{-a_\beta(t)|\xi|^{\frac{3}{\beta}}}, \quad t \in (0;T], \xi \in \mathbb{R}^3. \tag{16}$$

Зафиксируем произвольно $t \in (0;T]$ и для $\triangle t \neq 0$ рассмотрим

$$W^{t+\triangle t}_\beta(x) - W^t_\beta(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-i(x,\xi)-a_\beta(t)|\xi|^{\frac{3}{\beta}}} \Big(e^{-(a_\beta(t+\triangle t)-a_\beta(t))|\xi|^{\frac{3}{\beta}}} - 1\Big) d\xi. \tag{17}$$

Согласно теореме Лагранжа о конечных приращениях, имеем

$$a_\beta(t+\triangle t) - a_\beta(t) = a'_\beta(t+\theta\triangle t)\triangle t, \qquad \theta \in (0;1).$$

Отсюда, учитывая непрерывность $a'_\beta(\cdot)$, получаем покомпактную равномерную сходимость:

$$\Big(e^{-(a_\beta(t+\triangle t)-a_\beta(t))|\xi|^{\frac{3}{\beta}}} - 1\Big)/\triangle t \underset{\triangle t \to 0}{\overset{\xi\in\mathbb{K}_0(R)}{\rightrightarrows}} - a'_\beta(t)|\xi|^{\frac{3}{\beta}} \quad (\forall R > 0). \tag{18}$$

Кроме этого, воспользовавшись еще раз теоремой Лагранжа, находим:

$$\Big|\Big(e^{-\big(a'_\beta(t+\theta\triangle t)|\xi|^{\frac{3}{\beta}}\big)\triangle t} - 1\Big)/\triangle t\Big| = \big|a'_\beta(t+\theta\triangle t)\big| |\xi|^{\frac{3}{\beta}} e^{-a'_\beta(t+\theta\triangle t)|\xi|^{\frac{3}{\beta}}(\hat\theta\triangle t)} \leq$$

$$\leq a|\xi|^{\frac{3}{\beta}} e^{a|\triangle t||\xi|^{\frac{3}{\beta}}}, \qquad \hat\theta \in (0;1),\ a := \sup_{t\in[0;T]} |a'_\beta(t)|.$$

Тогда для всех $0 < |\triangle t| \leq a_\beta(t)/(2a)$ и $\xi \in \mathbb{R}^3$ выполняются оценки:

$$e^{-a_\beta(t)|\xi|^{\frac{3}{\beta}}} \Big|\Big(e^{-(a_\beta(t+\triangle t)-a_\beta(t))|\xi|^{\frac{3}{\beta}}} - 1\Big)/\triangle t\Big| \leq a|\xi|^{\frac{3}{\beta}} e^{-(a_\beta(t)-a|\triangle t|)|\xi|^{\frac{3}{\beta}}} \leq$$

$$\leq 4a e^{-\frac{a_\beta(t)}{4}|\xi|^{\frac{3}{\beta}}} \sup_{\rho>0}\{\rho e^{-\rho}\}. \tag{19}$$

Соотношения (18) и (19) обосновывают правильность равенства

$$\lim_{\triangle t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-i(x,\xi)-a_\beta(t)|\xi|^{\frac{3}{\beta}}} \cdot \frac{e^{-(a_\beta(t+\triangle t)-a_\beta(t))|\xi|^{\frac{3}{\beta}}} - 1}{\triangle t} d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-i(x,\xi)-a_\beta(t)|\xi|^{\frac{3}{\beta}}} \cdot \lim_{\triangle t\to 0} \left\{\frac{e^{-(a_\beta(t+\triangle t)-a_\beta(t))|\xi|^{\frac{3}{\beta}}} - 1}{\triangle t}\right\} d\xi,$$

согласно которому с (17) приходим к

$$\partial_t W^t_\beta(x) = -\frac{a'_\beta(t)}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{\frac{3}{\beta}} e^{-i(x,\xi)-a_\beta(t)|\xi|^{\frac{3}{\beta}}} d\xi, \qquad t \in (0;T],\ \xi \in \mathbb{R}^3.$$

Учитывая теперь (16), окончательно находим:

$$\partial_t W^t_\beta(x) = -a'_\beta(t)\mathbb{F}^{-1}\left[|\xi|^{\frac{3}{\beta}}\mathbb{F}[W^t_\beta](t;\xi)\right](t;x), \quad t \in (0;T],\ x \in \mathbb{R}^3.$$

Таким образом, распределение $W^t_\beta(\cdot)$ при $\beta > 3/2$ является классическим решением уравнения

$$\partial_t u(t;x) + a'_\beta(t)A_\alpha u(t;x) = 0, \quad t \in (0;T],\ x \in \mathbb{R}^3, \tag{20}$$

дробного порядка $\alpha = 3/\beta$.

Далее, выясним вопрос о существовании предельного значения распределения $W^t_\beta(\cdot)$ в точке $t = 0$. Сначала рассмотрим случай $a_\beta(0) \neq 0$. Согласно равенству (16), а также, известной формуле преобразования Фурье свертки элементов класса Лебега $L_1(\mathbb{R}^3)$, имеем:

$$\mathbb{F}[W^t_\beta](t;\xi) = e^{-\int\limits_0^t a'_\beta(\tau)d\tau|\xi|^\alpha} \cdot e^{-a_\beta(0)|\xi|^\alpha} = \mathbb{F}[\hat{G}_\alpha](t;\xi)\cdot\mathbb{F}[W^0_\beta](t;\xi) = \mathbb{F}[\hat{G}_\alpha * W^0_\beta](t;\xi),$$

или, что то же самое,

$$W^t_\beta(x) = \big(\hat{G}_\alpha * W^0_\beta\big)(t;x), \quad t \in (0;T],\ x \in \mathbb{R}^3,$$

где

$$\hat{G}_\alpha(t;\cdot) := \mathbb{F}^{-1}\left[e^{-\int\limits_0^t a'_\beta(\tau)d\tau|\xi|^\alpha}\right](t;\cdot).$$

Покажем теперь, что для каждой непрерывной ограниченной на $\mathbb{R}^3$ функции $\varphi(\cdot)$ выполняется предельное соотношение

$$\big(\hat{G}_\alpha * \varphi\big)(t;\cdot) \underset{t\to+0}{\rightarrow} \varphi(\cdot). \tag{21}$$

Для этого воспользуемся равенством

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \hat{G}_\alpha(t;x)dx = 1, \quad t \in (0;T],$$

согласно которому

$$\Big|\big(\hat{G}_\alpha * \varphi\big)(t;x) - \varphi(x)\Big| \le \int\limits_{\mathbb{R}^3} \big|\hat{G}_\alpha(t;\xi)\big||\varphi(x-\xi) - \varphi(x)|d\xi \equiv \mathfrak{I}(t;x).$$

Поскольку $\varphi(\cdot)$ – непрерывная функция на $\mathbb{R}^3$, то для каждого $x \in \mathbb{R}^3$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существует $t_\circ$ такое, что $t_\circ^{\frac{1}{2\alpha}} < \varepsilon$ и $|\varphi(x-\xi) - \varphi(x)| < \varepsilon$, как только лишь $|\xi| < t_\circ^{\frac{1}{2\alpha}}$. Тогда

$$\mathfrak{I}(t;x) < \varepsilon \int\limits_{|\xi|<t_\circ^{\frac{1}{2\alpha}}} \big|\hat{G}_\alpha(t;\xi)\big|d\xi + \int\limits_{|\xi|\ge t_\circ^{\frac{1}{2\alpha}}} \big|\hat{G}_\alpha(t;\xi)\big||\varphi(x-\xi) - \varphi(x)|d\xi \le \varepsilon\mathfrak{I}_1(t) + \mathfrak{I}_2(t;x),$$

где

$$\mathfrak{I}_1(t) := \int\limits_{\mathbb{R}^3} \big|\hat{G}_\alpha(t;\xi)\big|d\xi, \quad \mathfrak{I}_2(t;x) := \int\limits_{|\xi|\ge t_\circ^{\frac{1}{2\alpha}}} \big|\hat{G}_\alpha(t;\xi)\big||\varphi(x-\xi) - \varphi(x)|d\xi.$$

Далее, учитывая оценки [14]

$$|\partial^k_x \hat{G}_\alpha(t;x)| \le c_1 t(t^{1/\alpha} + |x|)^{-(3+|k|+\alpha)}, \quad k \in \mathbb{Z}^3_+,\ t \in (0;T],\ x \in \mathbb{R}^3, \tag{22}$$

и ограниченность функции $\varphi(\cdot)$ на $\mathbb{R}^3$, для всех $t \in (0;T]$ и $x \in \mathbb{R}^3$ находим:

$$\mathfrak{I}_1(t) \le c_1 t \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{d\xi}{(t^{1/\alpha} + |\xi|)^{3+\alpha}} = c_1 \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{dz}{(1+|z|)^{3+\alpha}} \equiv c_2;$$

$$\mathfrak{I}_2(t;x) \le c_3 t \int\limits_{|\xi| \ge t_\circ^{\frac{1}{2\alpha}}} |\xi|^{-(3+\alpha)} d\xi = c_3 t \int\limits_{t_\circ^{\frac{1}{2\alpha}}}^{+\infty} \rho^{-(1+\alpha)} d\rho = c_4 t t_\circ^{-1/2}.$$

С последнего неравенства следует, что для всех $x \in \mathbb{R}^3$ и $t \le t_\circ$

$$\mathfrak{I}_2(t;x) \le c_4 t_\circ^{1/2} < c_4 \varepsilon^\alpha.$$

Следовательно,

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists t_\circ < \varepsilon^{2\alpha} \ \forall t \le t_\circ : \qquad \mathfrak{I}(t;x) < c_2 \varepsilon + c_4 \varepsilon^\alpha,$$

т. е., выполняется предельное соотношение (21).

Функция $W_\beta^0(\cdot)$ бесконечно дифференцируема и ограничена на $\mathbb{R}^3$, поэтому, согласно (21), для $W_\beta^t(\cdot)$ выполняется соотношение

$$W_\beta^t(\cdot) \underset{t \to +0}{\to} W_\beta^0(\cdot). \tag{23}$$

Таким образом, распределение $W_\beta^t(\cdot)$ является классическим решением задач Коши (20), (23).

Пусть теперь $a_\beta(0) = 0$, тогда

$$a_\beta(t) = \int\limits_0^t a'_\beta(\tau) d\tau, \qquad t \in (0;T].$$

Отсюда, согласно (16), получаем равенство

$$W_\beta^t(\cdot) = \hat{G}_\alpha(t;\cdot), \qquad t \in (0;T]. \tag{24}$$

Соотношение (21) характеризует свойство "δ-подобия" функции $\hat{G}_\alpha(t;\cdot)$ в пространстве S' распределений Шварца [25]:

$$\hat{G}_\alpha(t;\cdot) \underset{t \to +0}{\to} \delta(\cdot) \tag{25}$$

(здесь $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака). Поэтому при $a_\beta(0) = 0$ распределение $W_\beta^t(\cdot)$ является решением задачи Коши (20), (25), которое в обычном понимании удовлетворяет уравнению (20), а начальному условию (25) – в смысле слабой сходимости в пространстве S'.

Подытожим вышесказанное в виде следующего утверждения.

Теорема 2. *Если $\beta > 3/2$ и $a_\beta(\cdot)$ – непрерывно дифференцируемая функция на промежутке $[0;T]$, то распределение вероятностей $W_\beta^t(\cdot)$ на множестве $(0;T] \times \mathbb{R}^3$ является классическим решением задачи Коши* (20), (23) *при $a_\beta(0) \ne 0$. А в случае $a_\beta(0) = 0$, $W_\beta^t(\cdot)$ – фундаментальное решение этой задачи для уравнения* (20).

Замечание 1. Равенство (24) раскрывает следующий смысл фундаментального решения задачи Коши для ПДУ (20): $\hat{G}_\alpha$ *– первичное распределение вероятностей локального влияния на рассматриваемый объект со стороны его движущегося окружения, которое характеризует этот процесс с самого начала его возникновения, т. е. с того момента, когда в окружении объекта впервые возникли элементы локального воздействия.*

Замечание 2. ПДУ (20) превращается в классическое уравнение диффузии при $\beta = 3/2$. Однако значение $\beta = 3/2$ хотя и является предельным для интервала $(3/2; +\infty)$ сходимости случайных процессов локального влияния движущихся объектов, но к этому множеству оно не относится. Это означает, что процесс классической диффузии происходит по законам, которые имеют несколько иную природу нежели законы случайных завихрений локального влияния движущихся объектов, хотя они и являются предельно близки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Petrowsky I.* Über das Cauchyche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen // Math. Sbornik. – 1937. – **2**, №5. – P. 815–870.
2. *Шилов Г. Е.* Об условиях корректности задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Успехи мат. наук. – 1955. – **10**, №4. – С. 89–100.
3. *Житомирский Я.И.* Задача Коши для некоторых типов параболических по Г.Е. Шилову систем линейных уравнений в частных производных с непрерывными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1959. – **23**. – С. 925–932.
4. *Litovchenko V.A., Dovzhytska I.M.* Stabilization of solutions to Shilov-type parabolic systems with nonnegative genus // Siberian Mathematical Journal. – 2014. – **55**. – P. 276–283.
5. *Shirota T.* O Cauchy problem for linear partial differential equations with variable coefficients // Osaka Mathem. Journ. – 1957. – **8**, №1. – P. 43–59.
6. *Wiener N.* Differential space // J. Math. and Phys. – 1923. – **2**. – P. 131–174.
7. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688 с.
8. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. – Ульяновск : Артишок, 2008. – 512 с.
9. *Эйдельман С.Д., Дринь Я.М.* Необходимые и достаточные условия стабилизации решения задачи Коши для параболических псевдодифференциальных уравнений // Приближенные методы математического анализа. – К., 1974. – С. 60–69.
10. *Дрінь Я.М.* Вивчення одного класу параболічних псевдодиференціальних операторів у просторах гельдерових функцій // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1974. – № 1. – С. 19–21.
11. *Федорюк М.В.* Асимптотика функции Грина псевдодифференциального параболического уравнения // Дифф. уравн. – 1978. – **14**, № 7. – С. 1296–1301.
12. *Schneider W.R.* Stable distributions: Fox function representation and generalization // Lecture Notes Phus. – 1986. – V. 262. – P. 497–511.
13. *Кочубей А.Н.* Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1988. – **52**, № 5. – С. 909–934.
14. *Litovchenko V.A.* Cauchy problem with Riesz operator of fractional differentiation // Ukrainian Mathematical Journal – 2005. – **57**, №12. – P. 1936–1957.
15. *Levy P.* Calcul des probabilities. – Paris: Gauthier–Villars et Cie, 1925. – 350 p.
16. *Золотарев В.М.* Одномерные устойчивые распределения. – М.: Наука, 1983. – 304 с.
17. *Mandelbrot B.* The Pareto-Levy law and the distribution of income // Internat. Econ. Rev. – 1960. – **1**. – P. 79–106.
18. *Собельман И.И.* Введение в теорию атомных спектров. – М.: Физматгиз, 1963. – 640 с.
19. *Кац М.* Вероятность и смежные вопросы в физике. – М.: Мир, 1965. – 407 с.
20. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах. Т.2 – М.: Мир, 1984. – 738 с.
21. *Никифоров А.Ф., Новиков В.Г., Уваров В.Б.* Квантово-статистические модели высокотемпературной плазмы и методы расчета росселандовых пробегов и уравнений состояния. – М.: Физматлит, 2000. – 400 с.
22. *Агекян Т.А.* Теория вероятностей для астрономов и физиков. – М.: Наука, 1974. – 264 с.
23. *Holtsmark J.* Ü ber die Verbreiterung von Spektrallinier // Annalen der Physik. –1919. – **58**. – S. 577–630.
24. *Chandrasekhar S.* Stohastic problems in physics and astronomy // Reviews of modern Physics. –1943. – **15**, №1. – P. 1–89.
25. *Schwartz L.* Theorie des distributions. **1**. – Paris : Hermann, 1951. – 169 p.

Черновицкий национальный университет,
Украина

Поступила в редакцию
*.07.2020 г.