Літовченко В.А.

ПРИНЦИП МАКСИМУМУ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛОКАЛЬНИХ ФЛУКТУАЦІЙ ГРАВІТАЦІЙНИХ ПОЛІВ РІССА СУТО ДРОБОВОГО ПОРЯДКУ

The parabolic pseudodifferential equation with the Riesz fractional differentiation operator of $\alpha \in (0;1)$ order, which acts on a spatial variable, is considered in the paper. This equation naturally summarizes the known equation of fractal diffusion of purely fractional order. It arises in the mathematical modeling of local vortices of nonstationary Riesz gravitational fields caused by moving objects, the interaction between the masses of which is characterized by the corresponding Riesz potential. The fundamental solution of the Cauchy problem for this equation is the density distribution of the probabilities of the force of local interaction between these objects, it belongs to the class of Polya distributions of symmetric stable random processes. Under certain conditions, for the coefficient of local field fluctuations, an analogue of the maximum principle was established for this equation. This principle is important in particular for substantiating the unity of the solution of the Cauchy problem on a time interval where the fluctuation coefficient is a non-decreasing function.

Key words and phrases: fractal diffusion equation, pseudodifferential equation with the Riesz operator, potential of Riesz, stable symmetric random processes by Polya, Cauchy problem, the principle of maximum, nonstationary gravitational field, local influence of moving objects.

Yu. Fed'kovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine
e-mail: *v.litovchenko@chnu.edu.ua*

Introduction

Нехай $\mathbb{R}^n$ – Евклідів простір розмірності n зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ і нормою $|r| = (r,r)^{1/2}$; $\mathbb{Z}_+^n$ – множина всіх n-вимірних мультиіндексів; $\mathbb{R} := \mathbb{R}^1$ і $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{Z}_+^1$. Оператор перетворення Фур'є позначимо символом $\mathbb{F}$.

Розглянемо систему рухомих об'єктів Z_j з масами m_j, в якій взаємодія підпорядкована потенціалу М.Рісса [23], тобто гравітаційний вплив між її двома довільними об'єктами маси M і m описується законом

$$F = G\frac{Mm}{|r|^\beta}r^0, \quad \beta > 0, \tag{1}$$

УДК 519.21, 517.937
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35R11, 60G22, 26A33.
Information on some grant ...

де G – відповідна гравітаційна стала, r – вектор відстані між цими об'єктами, а $r^0 := r/|r|$ – орт вектора $r \in \mathbb{R}^3$. Простішим прикладом таких систем є зоряні галактики, в яких об'єктами Z_j є зірки, а взаємодія між ними описується відомим законом Ньютона (1) з $\beta = 2$.

Зрозуміло, що сила F впливу на розглядуваний об'єкт Z_0 визначається його локальним оточенням. Оскільки об'єкти системи перебувають у постійному русі, то це оточення непередбачувано змінюється, тому F зручно розглядати як випадкову величину.

Нехай об'єкт Z_0 знаходиться в початку координат системи. У [17] встановлено, що нестаціонарний розподіл $W_\beta(F;t)$ ймовірностей сили $F(t)$, яка діє на одиницю маси об'єкта Z_0 у момент часу t, визначається рівністю

$$W_\beta(F;t) = \mathbb{F}^{-1}\Big[e^{-a_\beta(t)|\xi|^{3/\beta}}\Big](F;t), \quad \beta > 3/2, \tag{2}$$

де $a_\beta(\cdot)$ – так званий коефіцієнт локальної флуктуації гравітаційного поля системи, який визначається емпіричним розподілом об'єктів у системі та їх середньою масою. Якщо цей коефіцієнт $a_\beta(\cdot)$ на проміжку $(0;T]$ є додатною, неперервно-диференційовною функцією такою, що $a_\beta(0) = 0$, то розподіл W_β на множині $\mathbb{R}^3 \times (0;T]$ є фундаментальним розв'язком задачі Коші для псевдодиференціального рівняння (ПДР) [17]

$$\partial_t u(x;t) + a'_\beta(t) A_\nu u(x;t) = 0, \qquad t \in (0;T],\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Тут $n = 3$, $\nu := 3/\beta$, A_ν – оператор Рісса дробового диференціювання порядку ν, тобто $A_\nu = (-\Delta)^{\nu/2}$, де Δ – оператор Лапласса [26].

Рівняння (3) у простішому випадку $a'_\beta(t) \equiv \mathrm{conct}$ відоме, як "рівняння фрактальної дифузії" [20] або ж, "рівняння ізотропної супердифузії" [31, с.251]. Важливий приклад для мотивації дослідження рівняння фрактальної дифузії наведено в монографії [4]. Тут запропоновано ймовірнісну модель випадкового блукання частинки X прижками в довжину і показано, що ймовірність $u(x;t)$ перебування частинки X на момент часу t в просторовій точці x, є розв'язком рівняння (3) при $a'_\beta(t) \equiv 1$. Траекторія руху такої частинки є суцільною ламаною лінією із неперердбачуваною довжиною ланки та зміною напрямку руху в точках зламу. Процеси такого типу в природі спостерігаються досить часто, їх яскравими представниками є "рискання" голодної акули, а також політ стрижа [22, 32, 10, 19]. У контексті задачі про локальний вплив рухомих об'єктів у гравітаційному полі [17], стає зрозуміло, що зміна напрямку руху тієї ж акули відбувається тоді, коли в її полі осяжності з'являються об'єкти поживи, більш привабливі, ніж були попередні, при цьому ступінь привабливості може бути описаний законом (1) з відповідним значенням β, що в свою чергу, дозволяє визначити порядок відповідного рівняння фрактальної дифузії. Все це дозволяє краще зрозуміти роль порядку рівняння фрактальної дифузії в зазначеній моделі про "блукання Леві" частинки X [4].

Рівняння фрактальної дифузії є джерелом багатьох випадкових процесів [13]. Загалом відомо, що оператор Рісса A_ν, тобто дробовий Лапласіан, є нескінченно малий генератор процесів Леві [2, 1]. У зв'язку з цим зазначимо, що кожен розподіл $W_\beta(\cdot;t)$, $\beta > 3/2$, при фіксованому $t \in (0;T]$ відноситься до класу розподілів П.Леві

$$\mathcal{L}_\nu(\cdot) = \mathbb{F}^{-1}[e^{-b|\xi|^\nu}](\cdot), \quad \nu \in (0;2], \tag{4}$$

симетричних стійких випадкових процесів [14, 33]. При цьому, W_2 – відомий розподіл Хольцмарка [12].

Очевидно, що $W_\beta = \mathcal{L}_\nu$ при $\nu = 3/\beta$ і $b = a_\beta(t)$, $t \in (0;T]$. Ця рівність характеризує загальну природу симетричних стійких випадкових процесів Леві. Кожен такий процес $\mathcal{L}_\nu$ при $\nu \in (0;2)$ можна розглядати як процес локального впливу рухомих об'єктів у відповідному гравітаційному полі М.Рісса.

З огляду на історію розвитку симетричних стійких випадкових процесів, фундаментальній праці П. Леві [14], в якій він повною мірою довів, що функція $\mathcal{L}_\nu(\cdot)$ є щільністю розподілу ймовірностей лише при $\nu \in (0;2]$, передували дослідження угорського математика Пойя [21], який цей факт встановим значно раніше для випадку $\nu \in (0;1)$. Саме тому розподіли Леві $\mathcal{L}_\nu(\cdot)$ порядку $\nu \in (0;1)$ у класичній літературі прийнято називати ще розподілами Пойя.

Враховуючи результати досліджень, проведених у [17], ми пропонуємо рівняння (3), яке природньо узагальнює рівняння фрактальної дифузії, називати ПДР локальних флуктуацій гравітаційних полів Рісса, спричинених рухомими об'єктами.

Для зручності, фундаментальний розв'язок задачі Коші для ПДР (3) позначимо $G_\nu(x;t)$:

$$G_\nu(x;t) := \mathbb{F}^{-1}\left[e^{-\int\limits_0^t a'_\beta(\tau)d\tau|\xi|^\nu}\right](x;t), \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in (0;T]. \tag{5}$$

Дослідження задачі Коші для ПДР (3) та відповідної функції $G_\nu(x;t)$ у випадку, коли коефіцієнт $a_\beta(\cdot)$ – строго зростаюча функція на проміжку $(0;T]$, проводилось у багатох працях [6, 5, 8, 9, 3, 7, 15, 16] (див. детальний огляд у [17]). Тут при $\nu \in [1;2]$ розроблено різні методи дослідження властивостей фундаментального розв'язку $G_\nu(x;t)$, сформулювано твердження про коректну розв'язність задачі Коші в класах гельдерових функцій, з'ясовано типові властивості класичних розв'язків ПДР (3), зокрема, встановлено аналог принципу максимуму. При цьому, випадок $\nu \in (0;1)$ виявився істотно проблематичним і досі залишається мало дослідженим.

З плином часу коефіцієнт локальної флуктуації $a_\beta(t)$ може втрачати свою інтенсивність, тобто перетворюватись у спадну функцію. А це означає, що коефіцієнт $a'_\beta(t)$ ПДР (3) може набувати від'ємних значень на деякій частині проміжку $(0;T]$. Цей факт робить рівняння (3) особливим у порівнянні з рівняннями, що розглядались раніше у вище зазначених працях. Він не дозволяє для (3) безпосередньо скористатися результатами цих досліджень. Тому, властивості функції розподілу W_β, а отже, і фундаменального розв'язку G_ν для ПДР (3), потребують окремого дослідження. Важливо також дослідити задачу Коші для рівняння (3) при $\nu \in (0;2)$, зважаючи на її значення в теорії стійких симетричних випадкових процесів.

Предмет наших досліджень – можливість поширення результатів з [7] про принцип максимуму на випадок рівняння (3) судо дробового порядку $\nu \in (0;1)$ та з'ясування його відповідних наслідків.

1 Псевдодиференціальний оператор Рісса

Нехай $\mathbb{N}$ – множина всіх натуральних чисел, $\mathbb{N}_m := \{1;\ldots;m\}$, $\mathbb{C}^l(Q)$ – клас усіх неперервно диференційовних до порядку l функцій на множині Q, $\mathbb{S} = \mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$ – простір Л. Шварца визначених на $\mathbb{R}^n$ нескінченно диференційовних швидко спадних функцій [27], а $\Pi_Q := \{(x;t) : \ x \in \mathbb{R}^3, t \in Q\}$.

Як уже зазначалось, оператором Рісса дробового диференціювання називається дробовий степінь оператора Лапласа, взятого зі знаком "мінус" [26]: $A_\nu = (-\triangle)^{\nu/2}$. На елементах простору Шварца швидко спадних функцій цей оператор визначається рівністю

$$(A_\nu f)(\cdot) = \mathbb{F}^{-1}[|\xi|^\nu \mathbb{F}[f]](\cdot), \quad f \in \mathbb{S}. \tag{6}$$

Однак класична форма дробового диференціювання (6) не придатна для розширення оператора A_ν на ширші класи функцій. Якщо врахувати відому формулу перетворення Фур'є згортки

$$\mathbb{F}[f * \varphi] = \mathbb{F}[f] \cdot \mathbb{F}[\varphi]$$

і покласти

$$\widetilde{\|\cdot\|}^{\nu} = \mathbb{F}^{-1}[|\xi|^\nu](\cdot),$$

то рівність (6) можна формалізувати до більш зручної для розширення форми

$$(-\triangle)^{\nu/2} f = \widetilde{\|\cdot\|}^{\nu} * f. \tag{7}$$

Реалізація цієї схеми стала можливою завдяки появі теорії розподілів Шварца [27]. Саме тлумачачи оператор $\mathbb{F}^{-1}$ у сенсі узагальнених функцій, можна явно знайти $\widetilde{\|\cdot\|}^{\nu}$ [26]:

$$\widetilde{\|\cdot\|}^{\nu} = \frac{(2\pi)^n}{\gamma_n(\nu)} \begin{cases} |\cdot|^{-\nu-n}, & \nu + n + 2k \neq 0, \nu \neq 2k, \\ |\cdot|^{-\nu-n} \ln|\cdot|^{-1}, & \nu + n + 2k = 0, \\ (-\triangle)^{\nu/2}\delta(\cdot), & \nu = 2k, \end{cases}$$

де $\delta(\cdot)$ – дельта-функція Дірака, а $\gamma_n(\nu)$ – спеціальний нормуючий множник. При $\mathrm{Re}\nu < 0$ функція $\widetilde{\|\cdot\|}^{\nu}$ локально сумовна. Згортку з цією функцією називають потенціалом Рісса [26]

$$I^\nu f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\|x-y\|}^{\nu} f(y)dy, \tag{8}$$

а саму функцію $\widetilde{\|\cdot\|}^{\nu}$ – ріссовим ядром. Вперше потенціал з ядром $|\cdot|^{-\nu-n}$, $\mathrm{Re}\nu < 0$, з'явився в дисертаційній роботі О. Фростмана [11], виконаної під керівництвом М. Рісса. Широке використання оператора I^ν починається з праць М. Рісса [23, 24]. Дослідженням потенціалів Рісса в просторах $L_p(\mathbb{R}^n)$ сумовних за Лебегом функцій займалися С. Соболєв [28], G.Thorin [30] та ін.

У випадку $\mathrm{Re}\nu > 0$ інтеграл (8) має порядок особливості в точці x більший за розмірність простору $\mathbb{R}^n$. Такий інтеграл завжди розбігається, тому реалізація згортки (7) у вигляді (8) потребує коректного означення. Зміст інтегралу (8) можна надати шляхом його регуляразації, наприклад, відніманням відрізка ряду Тейлора функції f або взяттям скінченної різниці f:

$$(-\triangle)^{\nu/2} f(x) = \frac{1}{d_{n,l}(\nu)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{(\triangle_y^l f)(x)}{|y|^{n+\nu}} dy, \quad l > \nu. \tag{9}$$

Тут

$$(\triangle_y^l f)(x) = \sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k l!}{k!(l-k)!} f(x - ky)$$

– скінченна різниця функції f у точці x порядку l з кроком y, а $d_{n,l}(\nu)$ – спеціальний нормуючий множник, який вибирається так, щоб $(-\triangle)^{\nu/2}$ не залежав від l. Так визначений оператор $(-\triangle)^{\nu/2}$, $\mathrm{Re}\nu > 0$, у класичній літературі прийнято називати оператором Рісса дробового диференціювания порядку ν, який ми тут позначаємо символом A_ν.

У рамках просторів Лебега $L_p(\mathbb{R}^n)$ гіперсингулярний інтеграл (9) породжує обернений оператор до потенціалу Рісса I^ν. Реалізація дробового диференціювання Рісса $(-\triangle)^{\nu/2}$ у вигляді гіперсингулярного інтеграла при $0 < \nu < 2$ вперше з'явилась у праці І. Стейна [29]. Загальний випадок $0 < \nu$ розглядався П. Лізоркіним [18] і С. Самком [25]. У [25] також проводилось дослідження нормуючих множників $d_{n,l}(\nu)$ як функцій параметра ν, з'ясовувалась збіжність гіперсингулярних інтегралів (9) на диференційовних функціях та можливість пониження порядку l скінченних різниць.

Отже, при $n = 3$ і $\nu \in (0; 1)$ для оператора A_ν з рівняння (3) на елементах f простору $\mathbb{S}$ правильне таке зображення:

$$(A_\nu f)(x) = c(\nu) \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{f(x) - f(x+y)}{|y|^{3+\nu}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{10}$$

в якому [25]

$$c(\nu) := \frac{1}{d_{n,1}(\nu)} \equiv \frac{\nu(1+\nu)}{4\pi\Gamma(1-\nu)\sin\big((1-\nu)\pi/2\big)}$$

(тут $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функція Ейлера.)

Зазначимо, що інтеграл з рівності (10) збігається абсолютно, наприклад, для обмежених гельдерових функцій з порядком, більшим за ν, тому формула (10) дозволяє застосовувати оператор A_ν до функцій із ширших класів ніж простір $\mathbb{S}$.

Означення 1. *Сукупність усіх визначених на $\mathbb{R}^3$ функцій f, для яких має зміст права частина зображення* (10) *позначимо через $\mathcal{D}(A_\nu)$ і назвемо областю визначення оператора A_ν.*

Очевидно, що стала функція $f(x) \equiv C$ належить до множини $\mathcal{D}(A_\nu)$ при кожному $\nu \in (0; 1)$, при цьому, $A_\nu f = 0$.

Відомості про розширення оператора Рісса дробового диференціювання на ширші класи функцій нам знадобляться при встановленні принципу максимум для ПДР (3) в наступному пункті.

2 Принцип максимуму та його наслідки

Безпосередньо виходячи зі структури (5) фундаментального розв'язку G_ν, для його існування в класичному сенсі необхідно вимагати, щоб коефіцієнт $a_\beta(\cdot)$ локальної флуктуації поля був елементом класу $\mathbb{C}^1([0;T])$ причому

$$a_\beta(t) > a_\beta(0) \quad (\forall t \in (0;T]).$$

Виконання цієї умови зобов'язує зростати функцію $a_\beta(\cdot)$, якщо не на всьому проміжку $(0;T]$, то хоча б на деякій його частині $(0;t_0)$, $t_0 < T$. При цьому, на $[t_0;T]$ функція $a_\beta(\cdot)$ може бути незростаючою. У цьому випадку маємо:

$$a'_\beta(t_0) = 0; \quad a'_\beta(t) > 0, \quad t \in (0;t_0); \quad a'_\beta(t) \le 0, \quad t \in [t_0;T].$$

Таку точку t_0 будемо називати **точкою перевалу інтенсивності** коефіцієнта локальної флуктуації $a_\beta(\cdot)$ на проміжку $(0;T]$. Також, множину $[t_1;t_2] \subset [0;T]$, на якій $a_\beta(\cdot)$ неспадає, тобто

$$a'_\beta(t) \ge 0, \quad t \in [t_1;t_2],$$

назвемо **проміжком стабільної інтенсивності** коефіцієнта $a_\beta(\cdot)$. Говоритимемо, що множина $[t_1;t_2]$ – **проміжок затухання інтенсивності** коефіцієнта $a_\beta(\cdot)$, якщо

$$a'_\beta(t) \le 0, \quad t \in [t_1;t_2].$$

Очевидно, що якщо t_0 – перша точка перевалу інтенсивності $a_\beta(\cdot)$, то відрізок $[0;t_0]$ є проміжком стабільної інтенсивності цього коефіцієнта.

Правильне таке твердження.

Теорема 1. *Нехай $[t_1;t_2] \subset [0;T]$, а u – неперервний за сукупністю змінних класичний розв'язок ПДР (3). Тоді якщо $[t_1;t_2]$ – проміжок стабільної інтенсивності коефіцієнта $a_\beta(\cdot)$ і для u виконується граничне співвідношення*

$$\lim_{|x|\to+\infty} u(x;t) = 0 \quad (\forall t \in (t_1;t_2]), \tag{11}$$

то цей розв'язок на множині $\Pi_{[t_1;t_2]}$ зберігає знак, який він має в точці t_1 тобто:

$$u(x;t_1) > 0,\ x \in \mathbb{R}^3 \ \Rightarrow\ u(x;t) \ge 0,\ (x;t) \in \Pi_{[t_1;t_2]};$$

$$u(x;t_1) < 0,\ x \in \mathbb{R}^3 \ \Rightarrow\ u(x;t) \le 0,\ (x;t) \in \Pi_{[t_1;t_2]};$$

$$u(x;t_1) = 0,\ x \in \mathbb{R}^3 \ \Rightarrow\ u(x;t) = 0,\ (x;t) \in \Pi_{[t_1;t_2]}.$$

Якщо ж $[t_1;t_2]$ – проміжок затухання інтенсивності коефіцієнта $a_\beta(\cdot)$ і

$$\lim_{|x|\to+\infty} u(x;t) = 0 \quad (\forall t \in [t_1;t_2)),$$

то u на $\Pi_{[t_1;t_2]}$ зберігає знак, який він має в точці t_2.

Доведення. Користуватимемось тут таким позначенням:

$$Lw(x;t) = \partial_t w(x;t) + a'_\beta(t) A_\nu w(x;t).$$

Розглянемо спочатку випадок проміжку $[t_1;t_2]$ стабільної інтенсивності коефіцієнта $a_\beta(\cdot)$. Нехай $u(x;t_1)\geq 0$, $x\in\mathbb{R}^3$, і

$$\lambda=\inf_{(x;t)\in\Pi_{[t_1;t_2]}} u(x;t).$$

Скористаємось методом від протилежного. Припустимо, що $\lambda<0$. Розглянемо допоміжну функцію

$$v_+(x;t)=u(x;t)+(t-t_1)\chi_+,\quad (x;t)\in\Pi_{(0;T]},$$

де χ_+ – фіксоване число таке, що $0<\chi_+<-\lambda/T$.

Очевидно, що на множині $\Pi_{(0;T]}$ функція v_+ диференційовна за змінною t і неперервна за сукупністю змінних, причому

$$\inf_{(x;t)\in\Pi_{[t_1;t_2]}} v_+(x;t)<0.$$

Крім цього,

$$v_+(x;t_1)=u(x;t_1)\geq 0,\quad x\in\mathbb{R}^3,$$

і, згідно зі співвідношенням (11),

$$v_+(x;t)\underset{|x|\to\infty}{\to}(t-t_1)\chi_+>0,\quad t\in(t_1;t_2].$$

З цього ми робимо висновок, що функція v_+ на множині $\Pi_{[t_1;t_2]}$ має від'ємний глобальний мінімум у якійсь т.$(x_*;t_*)$, де $t_1<t_*\leq t_2$. Тоді обов'язково виконується нерівність

$$v_+(x_*;t_*)-v_+(x_*+y;t_*)\leq 0\quad (\forall y\in\mathbb{R}^3).$$

При цьому, згідно з необхідними умовами екстремуму, правильні співвідношення

$$\partial_t v_+(x_*;t_*)=0 \text{ if } t_*<t_2;\quad \partial_t v_+(x_*;t_*)\leq 0 \text{ if } t_*=t_2.$$

У зв'язку з цим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{v_+(x_*;t_*)-v_+(x_*+y;t_*)}{|y|^{3+\nu}}dy\leq 0.$$

Тоді згідно із зображенням (10)

$$A_\nu v_+(x_*;t_*)\leq 0\quad (\forall\nu\in(0;1)).$$

Звідси знаходимо, що

$$Lv_+(x_*;t_*)=\partial_t v_+(x_*;t_*)+a'_\beta(t_*)A_\nu v_+(x_*;t_*)=a'_\beta(t_*)A_\nu v_+(x_*;t_*)\leq 0.$$

З іншого боку, для всіх $(x;t)\in\Pi_{(0;T]}$ маємо

$$Lv_+(x;t)=L\big(u(x;t)+(t-t_1)\chi_+\big)=Lu(x;t)+L((t-t_1)\chi_+)=$$

$$= L((t-t_1)\chi_+) = \chi + (t-t_1)a'_\beta(t)A_\nu\chi_+ = \chi_+ > 0.$$

Одержали протиріччя.

Отже, наше припущення про те, що $\lambda < 0$ – хибне. Тому $\lambda \geq 0$ і

$$u(x;t) \geq \lambda \geq 0, \quad (x;t) \in \Pi_{[t_1;t_2]},$$

при цьому, якщо $u(x;t_1) = 0$, $x \in \mathbb{R}^3$, то і $\lambda = 0$, тобто

$$\inf_{(x;t)\in\Pi_{[t_1;t_2]}} u(x;t) = 0. \tag{12}$$

У випадку $u(x;t_1) \leq 0$, $x \in \mathbb{R}^3$, діємо аналогічно. Припускаємо, що

$$\mu = \sup_{(x;t)\in\Pi_{[t_1;t_2]}} u(x;t) > 0$$

і розглядаємо вже функцію

$$v_-(x;t) = u(x;t) - (t-t_1)\chi_-, \quad (x;t) \in \Pi_{(0;T]},$$

(тут χ_- – фіксоване число таке, що $0 < \chi_- < \mu/T$). Тоді

$$\sup_{(x;t)\in\Pi_{[t_1;t_2]}} v_-(x;t) > 0.$$

На множині $\Pi_{(0;T]}$ функція v_- також диференційовна за змінною t і неперервна за сукупністю змінних. Крім цього,

$$v_-(x;t_1) = u(x;t_1) \leq 0, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

і

$$v_-(x;t) \underset{|x|\to\infty}{\to} (t_1 - t)\chi_- < 0, \quad t \in (t_1;t_2].$$

Тому v_- має додатний глобальний максимум на $\Pi_{[t_1;t_2]}$ в якійсь т.$(x_*;t_*) \in \Pi_{(t_1;t_2]}$. При цьому,

$$\partial_t v_-(x_*;t_*) = 0 \text{ if } t_* < t_2; \quad \partial_t v_-(x_*;t_*) \geq 0 \text{ if } t_* = t_2,$$

а також,

$$v_-(x_*;t_*) - v_-(x_* + y;t_*) \geq 0 \quad (\forall y \in \mathbb{R}^3).$$

Тоді

$$A_\nu v_-(x_*;t_*) \geq 0 \quad (\forall \nu \in (0;1)).$$

Звідси знаходимо, що

$$Lv_-(x_*;t_*) = \partial_t v_-(x_*;t_*) + a'_\beta(t_*)A_\nu v_-(x_*;t_*) = a'_\beta(t_*)A_\nu v_-(x_*;t_*) \geq 0.$$

Але з іншого боку, маємо

$$Lv_-(x;t) = L\big(u(x;t) - (t-t_1)\chi_-\big) = Lu(x;t) - L((t-t_1)\chi_-) =$$

$$= -L((t-t_1)\chi_-) = -(\chi_- + (t-t_1)a'_\beta(t)A_\nu\chi_-) = -\chi_- < 0,$$

для всіх $(x;t) \in \Pi_{(0;T]}$.

Одержане протирічча доводить, що $\mu \le 0$. У нашому випадку, це означає виконання співвідношення

$$u(x;t) \le \mu \le 0, \quad (x;t) \in \Pi_{[t_1;t_2]}.$$

При цьому, якщо $u(x;t_1) = 0$, $x \in \mathbb{R}^3$, то $\mu = 0$, тобто

$$\sup_{(x;t)\in\Pi_{[t_1;t_2]}} u(x;t) = 0.$$

Остання рівність у поєднанні з (12) забезпечують виконання тотожності

$$u(x;t) \equiv 0 \quad \forall (x;t) \in \Pi_{[t_1;t_2]},$$

для $u(x;t_1) = 0$, $x \in \mathbb{R}^3$.

У випадку проміжку $[t_1;t_2]$ затухання інтенсивності коефіцієнта $a_\beta(\cdot)$ міркування проводяться аналогічно за допомогою відповідних функцій

$$v_\pm(x;t) = u(x;t) \pm (t_2 - t)\chi_\pm, \quad (x;t) \in \Pi_{(0;T]}.$$

Теорема доведена.

Зважаючи на лінійність оператора L ПДР (3), для класичних розв'язків цього рівняння, які мають граничну поведінку (11), безпосередньо з теореми 1 випливають такі твердження.

Наслідок 1. *На проміжку $[t_1;t_2]$ стабільної інтенсивності коефіцієнта $a_\beta(\cdot)$:*

1) у точці t_1 неможливе розгалуження розв'язків відповідного ПДР (3), тобто на множині $\Pi_{[t_1;t_2]}$ не існує двох різних розв'язків u_1 і u_2 цього рівняння таких, що

$$u_1(x;t_1) = u_2(x;t_1), \quad x \in \mathbb{R}^n;$$

2) якщо розв'язки u_1 і u_2 рівняння (3) на гіперплощині $t = t_1$ мають різні значення, тобто

$$u_1(x;t_1) < u_2(x;t_1), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

то

$$u_1(x;t) \le u_2(x;t), \quad (x;t) \in \Pi_{[t_1;t_2]};$$

3) задача Коші для рівняння (3) може мати не більше одного класичного розв'язку, що прямує до нуля при $|x| \to \infty$.

References

[1] Applebaum D. *Lévy Processes and stochastic calculus* Cambridge: Cambridge University Press, 2009. https://doi.org/10.1017/CBO9780511809781

[2] Bertoin J. *Lévy Processes, volume 121 of Cambridge Tracts in Mathematics* Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

[3] Blumenthal R.M., Getoor R.K. *Some theorems on stable processes* Trans. Amer. math. Soc. 1960, **95**, 263–273.

[4] Bucur C., Valdinoci E. *Non-local diffusion and applications* Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana 20, Springer, 2016. DOI: 10.1007/978-3-319-28739-3

[5] Drin' Ya.M. *Investigation of a class of parabolic pseudo-differential operators on classes of Hölder continuous functions* Dopovidi AN Ukr. SSR, Ser. A 1974, No. 1, 19-22 (Ukrainian).

[6] Drin' Ya.M. and Eidelman S.D. *Necessary and sufficient conditions for stabilization of solutions of the Cauchy problem for parabolic pseudo-differential equations* In: Approximate Methods of Mathematical Analysis, Kiev Gos. Ped. Inst., Kiev 1974, 60–69 (Russian).

[7] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. *Analytic Methods in the Theory of Differential and Pseudo-Differential Equations of Parabolic Type* Operator theory: Adv. and Appl., Birkhäuser Basel 2004, **152**.

[8] Fedoryuk M.V. *Asymptotic properties of Green's function of a parabolic pseudodifferential equation* Diff. Equations 1978, **14**, 923–927.

[9] Schneider W.R. *Stable distributions: Fox function representation and generalization* Lecture Notes Phus. 1986, **262**, 497–511.

[10] Friedman A. *PDE problems arising in mathematical biology* Netw. Heterog. Media. 2012, **7** No. 4, 691–703. doi: 10.3934/nhm.2012.7.691

[11] Frostman O. *Potentiel d'equilibre et capacité des ensembles avec quelques applications a la théorie des fonctions* Medd. Lunds Univ. Mat. Sémin. 1935, **3**, 1–118.

[12] Holtsmark J. *Über die Verbreiterung von Spektrallinier* Annalen der Physik 1919, **58**, 577–630.

[13] Jacob N. *Pseudo differential operators and Markov Processes. In 3 vol.* London: Imperial College Press, 2001, 2002, 2005.

[14] Lévy P. *Calcul des probabilities* Paris: Gauthier–Villars et Cie, 1925.

[15] Litovchenko V.A. *Cauchy problem with Riesz operator of fractional differentiation* Ukr. Math. J. 2005, **57**, 1937–1956. https://doi.org/10.1007/s11253-006-0040-6

[16] Litovchenko V.A. *The Cauchy problem for one class of parabolic pseudodifferential systems with nonsmooth symbols* Sib. Math. J. 2008, **49**, 300–316. https://doi.org/10.1007/s11202-008-0030-z

[17] Litovchenko V.A. *Holtsmark Fluctuations of Nonstationary Gravitational Fields* Ukr. Math. J. 2021, **73** № 1, 69 -76. DOI 10.1007/s11253-021-01909-y

[18] Lizorkin P. *Description of the spaces* $L_p^r(\mathbb{R}^n)$ *in terms of difference singular integrals* Math. Sb. 1970, **81** No. 1, 79–91 (Russian).

[19] Montefusco Eugenio, Pellacci Benedetta, and Verzini Gianmaria *Fractional diffusion with Neumann boundary conditions: the logistic equation* Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 2013, **18** No. 8, 2175—2202. doi: 10.3934/dcdsb.2013.18.2175

[20] Oliver Ibe *Markov Processes for Stochastic Modeling. 2nd Edition* Elsevier, 2013. https://doi.org/10.1016/C2012-0-06106-6

[21] Polya G. *Herleitung des Gausschen Fehlergesetzes aus einer Funktionalgleichung* Math. Z. 1923, **18**, 96–108.

[22] Reynolds Andy *Liberating Lévy walk research from the shackles of optimal foraging* Physics of Life Reviews 2015, **14**, 59–83.

[23] Riesz M. *Potentiels de divers ordres et leurs fonctions de Green* C. R. Congrès Intern. Math. Oslo 1936, **2**, 62-63.

[24] Riesz M. *Integrales de Riemann-Liouville et potentiels* Acta Litt. Acad. Sci. Szeged. 1938, **9**, 1–42.

[25] Samko S.G. *Spaces of Riesz potentials* Izv. AN SSSR. Ser. Math. 1976, **40** No. 5, 1143–1172 (Russian).

[26] Samko S.G., Kilbas A.A. and Marichev O.I. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications* Amsterdam: Gordon and Breach, 1993.

[27] Schwartz L. *Theorie Des Distributions* Hermann Paris, 1951.

[28] Sobolev S.L. *On a theorem of functional analysis* Math. Sb. 1938, **4** No. 3, 471–497 (Russian).

[29] Stein E. *The characterisation of functions arising as potentials* Bull. Amer. Math. Soc. 1961, **67** No. 1, 102–104.

[30] Thorin G. *Convexiti theorems* Comm. Semin. Math. L'Univ. Lund. Uppsala. 1948, **9**, 1–57.

[31] Uchaikin V.V. *Fractional Derivatives Method* Ulyanovsk: Atrishok, 2008 (Russian).

[32] Viswanathan G.M., Afanasyev V., Buldyrev Sergey V., Havlin Shlomo, Luz M.G., Raposo E.P., Stanley H.Eugene *Lévy flights in random searches* Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 2000, **282** No. 1-2, 1–12. https://doi.org/10.1016/S0378-4371(00)00071-6

[33] Zolotarev V.M. *One-dimensional stable distributions* Nauka, Moscow, 1983 (Russian).

Received 01.07.2013

Літовченко В.А. *Принцип максимуму для рівняння локальних флуктуацій гравітаційних полів Рісса суто дробового порядку* // Буковинський матем. журнал. — 2014. — Т.6, №1. — С. 10–20.

У роботі розглададається параболічне псевдодиференціальне рівняння з оператором Рісса дробового диференціювання порядку $\alpha \in (0;1)$, який діє за просторовою змінною. Це рівняння природньо узагальнює відоме рівняння фрактальної дифузії суто дробового порядку. Воно виникає при математичному моделюванні локальних завихрень нестаціонарних гравітаційних полів Рісса, спричинених рухомими об'єктами, взаємодія між масами яких характеризується відповідним потенціалом Рісса. Фундаментальний розв'язок задачі Коші для цього рівняння є щільністю розподілу ймовірностей сили локальної взаємодії між цими об'єктами, він відноситься до класу розподілів Пойя симетричних стійких випадкових процесів. За певних умов на коефіцієнт локальних флуктуацій поля, встановлено аналог принципу максиму для цього рівняння, за допомогою якого обгрунтовано єдиність розв'язку задачі Коші на часовому проміжку, де цей коефіцієнт є неспадною функцією.