ЧЕРНІВЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЮРІЯ ФЕДЬКОВИЧА
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ
ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

ПМ&ІТ
2022

ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 60-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій

22-24 вересня 2022 року

Чернівці – 2022

Про нелокальну за часом задачу для сингулярного параболічного рівняння

Василь Городецький, Ольга Мартинюк, Роман Петришин

o.martynyuk@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича

Нехай α – фіксоване число з множини $(1,+\infty)\setminus\{2,3,4,\dots\}$. Символом Φ_α позначимо сукупність функцій $\varphi \in C(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R}\setminus\{0\})$, які задовольняють умову

$$\exists a = a(\varphi) > 0 \forall k \in \mathbb{Z}_+ \exists c_k = c_k(\varphi) > 0 \forall \sigma \in \mathbb{R}\setminus\{0\} : |\sigma^k \varpi^{(k)}(\sigma)| \leq c_k e^{-a|\sigma|^\alpha}$$

(якщо $k = 0$, то $\sigma \in \mathbb{R}$).

Символом Ψ_α позначимо Фур'є-образ простору Φ_α при перетворенні Бесселя $\Psi_\alpha = F_{B_\nu}[\Phi_\alpha]$, $F)B_\nu[\varphi]$ – парна і обмежена на $\mathbb{R}$ функція.

Символом Ψ'_α позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів, визначених на просторі основних функцій Ψ_α зі слабкою збіжністю, а його елементи називатимемо узагальненими функціями.

Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + Au(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \tag{1}$$

де A – псевдобесселевий оператор у просторі Ψ_α, розглянутий у п. 1 ($A = F^{-1}_{B_\nu}[|\sigma|^\alpha F_{B_\nu}]$).

Під розв'язком рівняння (1) розуміємо функцію $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, яка: 1) неперервно диференційовна за змінною t; 2) $u(t,\cdot) \in \mathcal{D}(A) \equiv \Psi_\alpha$ при кожному $t > 0$; 3) $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (1).

Нелокальну багатоточкову за часом задачу для рівняння (1) можна ставити так: знайти функцію $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, яка задовольняє рівняння (1) і умову

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k u(t_k,\cdot) = f, \quad f \in \Psi'_{\alpha,*}, \tag{2}$$

де $\Psi'_{\alpha,*}$ – клас згортувачів у просторі Ψ_α, $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \dots, \mu_m\} \subset (0,+\infty)$, $\{t_1,\dots,t_m\} \subset (0,+\infty)$ – фіксовані числа, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < +\infty$, $\mu > \sum_{k=1}^{m} \mu_k$.

Теорема 1. *Нелокальна багатоточкова за часом задача* (1), (2) *коректно розв'язна, розв'язок дається формулою*

$$u(t,x) = f * G(t,x), (t,x) \in \Omega,$$

$u(t,\cdot) \in \Psi_\alpha$ *при кожному* $t > 0$.