Про фундаментальний розв'язок ультрапараболічного рівняння, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження і можуть зростати

Галина Пасічник

pasichnyk.gs@gmail.com

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Нехай m, n – задані натуральні числа такі, що $m \le n$; $N := m+n$; $X := (x,y)$, якщо $x := (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ і $y := (y_1, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$, $T > 0$. Розглядаються рівняння вигляду

$$\Big(\partial_t - \sum_{j=1}^{m} x_j \partial_{y_j} - \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}(t,x)\partial_{x_j}\partial_{x_l} - \sum_{j=1}^{n} a_j(t,x)\partial_{x_j} - a_0(t,x)\Big)u(t,X) = 0,$$

$$t \in (0,T], \quad X \in \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

Рівняння (1) є виродженим рівнянняи Колмогорова другого порядку, його коефіцієнти a_{jl}, $\{j,l\} \subset \{1, ..., n\}$, a_j, $j \in \{1, ..., n\}$, і a_0 не залежать від змінних виродження y_j, $j \in \{1, ..., m\}$.

У праці [1] для нього побудовано фундаментальний розв'зок задачі Коші у випадку, коли коефіцієнти є обмеженими функціями. При цьому умови на коефіцієнти рівняння є такими, як у випадку невироджених рівнянь.

У праці [2] розглянуто рівняння (1), у якому $a_{jl}(t,x) = a_{jl}$, $\{j,l\} \subset \{1, ..., n\}$, і $a_j = \beta\, x_j$, $j \in \{1, ..., n\}$, $a_0(t,x) = 0$, причому $a_{jl} = a_{lj}$ і β – дійсні сталі. У цьому виадку знайдено явну формулу для фундаментального роз'язку задачі Коші.

Тут розглядається рівняння, коефіцієнти якого можуть зростати відповідним чином.

Припускається, що виконуються наступні умови на коефіцієнти рівняння (1).

A_1. Рівняння без вироджкння

$$\Big(\partial_t - \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}(t,x)\partial_{x_j}\partial_{x_l} - \sum_{j=1}^{n} a_j(t,x)\partial_{x_j} - a_0(t,x)\Big)u(t,x) = 0,$$

$$t \in (0,T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

є [3, 4] дисипативним параболічним з характеристикою дисипації D.

Зазначимо, що $D : \mathbb{R}^n \to [1, \infty)$ необмежено зростає при $|x| \to \infty$.

A_2. Існують неперервні похідні $\partial_x^k a_{jl}$, $\{j,l\} \subset \{1, ..., n\}$, $\partial_x^l a_j$, $j \in \{1, ..., n\}$, $\partial_x^k a_0$, $|k| \le 2$, для яких справджуються оцінки

$|\partial_x^k a_{jl}(t,x)| \le C(D(x))^{|k|(1-\varepsilon)}$,

$|\partial_x^k a_j(t,x)| \le C(D(x))^{1+|k|(1-\varepsilon)}$,

$|\partial_x^k a_0(t,x)| \le C(D(x))^{2+|k|(1-\varepsilon)}$, $t \in [0,T]$, $\quad x \in \mathbb{R}^n$,

де $C > 0$, $\varepsilon \in (0,1)$; функції $a_{jl}(t,x)$, $\{j,l\} \subset \{1,...,n\}$, $b_j(t,x) \equiv a_j(t,x)\times$ $\times D(x)^{-1}$, $j \in \{1,...,n\}$, $b_0(t,x) \equiv a_0(t,x)D(x)^{-2}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, неперервні за t рівномірно щодо $x \in \mathbb{R}^n$.

A_3. Похідні $\partial_x^k a_{jl}$, $\{j,l\} \subset \{1,...,n\}$, $\partial_x^k a_j$, $j \in \{1,...,n\}$, $\partial_x^k a_0$, $|k| \le 2$, задовольняють локальну умову Гельдера за x з показником $\lambda \in (0,1)$ рівномірно щодо $t \in [0,T]$.

За цих умов знайдено оцінку фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння (1) та його похідних. Одержані оцінки можна використовувати до дослідження розв'язності задачі Коші.

1. Івасишен С.Д., МединськийІ.П. Класичний фундаментальний розв'язок виродженого рів-няння Колмогорова, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження // Буковинський мат. журн. – 2014. – **2**, № 2–3. – С. 94–106.
2. Бабич О.О., Івасишен С.Д., Пасічник Г.С. Фундаментальний розв'язок задачі Коші для виродженого параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів // Наук. вісник Чернівець. нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича. Сер.: математика: зб. наук. пр. – Чернівці: Чернівець. нац. ун-т, 2011. – **1**, № 1–2. – С.13–24.
3. Івасишен С.Д., Пасічник Г.С. Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для дисипативних $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. НАН України. – 1999. – N 6. – С. 18–22.
4. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – **152**. – 390 p.