Числовий аналіз епідеміологічних моделей із запізненням

Тетяна Луник, Ігор Черевко

tetianka1999@gmail.com, i.cherevko@chnu.edu.ua
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

В роботі розроблено прикладний веб-застосунок для автоматизації моделювання початкових задач для диференціально-різницевих рівнянь. Проведено числовий аналіз динамічних SIR моделей із запізненням, що описують пандемію Covid-19.

1. Різницеві схеми для початкових задач диференціально-різницевих рівнянь

У багатьох реальних прикладних процесах в біології, екології, медицині та інших технологічних процесах відбуваються часові затримки (запізнення). Вони пов'язані із тривалістю певних прихованих процесів (інкубаційні періоди) в медицині, використання різноманітних датчиків для вимірювання та передачі сигналів в техніці тощо. Введення ефекту запізнення в диференціальні рівняння, що описують такі процеси є необхідним для побудови адекватних математичних моделей у вигляді систем диференціально-різницевих та диференціально-функціональних рівнянь [1]-[2].

Знайти точний розв'язок диференціально-різницевих рівнянь вдається тільки у найпростіших випадках, тому методи побудови наближених розв'язків таких рівнянь мають важливе значення. У даній роботі для числового моделювання початкових задач для диференціальних рівнянь із запізненням використовуються наближені алгоритми, які є узагальненням різницевих схем для розв'язування звичайних диференціальних рівнянь [4]. Різні підходи до побудови аналогічних різницевих схем розглядалися в працях [5]-[6].

Будемо розглядати початкову задачу для диференціально-різницевого рівняння запізнюючого типу

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \tag{1}$$

$$x(t) = \varphi(t),\ t \in E_{t_0}, \tag{2}$$

де $t \in R$, $x(t) \in R^n$, $\tau > 0$, $E_{t_0} = [t_0, t_0 - \tau]$ – початкова множина.

Введемо рівномірну сітку

$$\omega = \left\{ t_n = nh, n = -m, -m-1, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, k, k = \frac{T}{h}, m = \frac{\tau}{h} \right\}.$$

Будемо позначати через y_n наближене значення точного розв'язку $x(t_n)$ в точці $t = t_n$. У роботі [4] одержано сім'ю θ різницевих схем для задачі

(1)–(2)

$$y_{n+1} = y_n + h\left[(1-\theta)f(t_n, y_n, v_n) + \theta f(t_{n+1}, y_{n+1}, v_{n+1})\right]. \qquad (3)$$

Якщо $\theta = 0$, тоді одержуємо $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n, v_n)$ узагальнення явної різницевої схеми Ейлера. У випадку $\theta = 1$ дістаємо узагальнення неявної різницевої схеми Ейлера $y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}, v_{n+1})$, а при $\theta = \frac{1}{2}$ маємо узагальнення різницевої схеми трапецій (неявна різницева схема Адамса другого порядку) для інтегрування диференціальних рівнянь із запізненням.

Зауваження 1. *Якщо запізнення τ та крок h не є раціонально залежними, то апроксимація $x(t-\tau)$ в точці $t = t_n$ здійснюється за правилом*

$$x(t_n - \tau) \approx v_n = \begin{cases} \varphi(t_n - \tau), \text{ якщо } t_n - \tau < 0, \\ v_n^i, \text{ якщо } t_n - \tau \geq 0. \end{cases}$$

Значення v_n^i обчислюється за таким алгоритмом:

1) знаходимо i такий, що $t_k \leq t_k - \tau < t_{k+1}$;

2) значення v_n^i знаходимо використовуючи лінійну інтерполяцію за точками (t_i, x_i), (t_{i+1}, x_{i+1}):

$$v_n^i = \frac{t_n - \tau - t_i}{h} y_{i+1} + \frac{t_{i+1} - t_n + \tau}{h} y_i.$$

Теорема. *[4] Якщо розв'язок початкової задачі (1.1)–(1.2) двічі неперервно диференційована функція, то різницева схема (1.7) збіжна з першим порядком малості по h.*

2. Комп'ютерне моделювання SIR моделей із запізненням

Для автоматизації моделювання систем із запізненням за допомогою наведених в роботі числових алгоритмів розроблено прикладне програмне забезпечення. Для його розробки використано мову програмування Python та фреймворк Python Flask Framework. Розроблений додаток представляє собою набір структурованих сторінок для розв'язання диференціально-різницевих рівнянь та побудови графіків знайдених розв'язків. Для керування додатком розроблено інтерактивне меню, що забезпечує можливість вибору задачі та ввід початкових даних. Особливу властивість має поле "Початкова функція", яке дозволяє ввести не просто числове значення, а формулу з дотриманням синтаксису Python і введене співвідношення буде використовуватись як повноцінна частина коду.

Розглянемо модифіковану епідеміологічну модель Кермака–Макендріка, врахувавши інкубаційний період перебігу захворювання τ_2, а також, що через час τ_1 набутий імунітет втрачається і особини знову можуть заразитись [7]:

$$y_1'(x) = -y_1(x)y_2(x-\tau_1) + y_2(x-\tau_2),$$
$$y_2'(x) = y_1(x)y_2(x-\tau_1) - y_2(x),$$
$$y_3'(x) = y_2(x) - y_2(x-\tau_1).$$

За допомогою розробленого додатку знайдено наближені розв'язки моделі Кермака–Макендріка з різними комбінаціями запізнень τ_1, τ_2 та початковими умовами $y_1(0) = 5$, $y_2(0) = 1$, $y_3(x) = 0$. Із отриманих розв'язків можемо зробити висновок, що періодичні спалахи інфекції (при фіксованому інкубаційному періоді $\tau_1 = 1$) виникають, якщо імунітет втрачається за час $\tau_2 \geq 7$. Епідемія стабілізується, якщо $\tau_2 \leq 6$.

Досліджено SIR модель, що описує поширення захворювання Covid-19 в популяції розміру, яка містить три "компартменти": $S(t)$ – кількість сприйнятливих осіб, які ще не інфіковані хворобою, $I(t)$ – кількість інфекційних осіб, $R(t)$ – кількість осіб, які одужали та мають імунітет

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S(t-\tau_1)I(t-\tau_1),$$
$$\frac{dI}{dt} = \beta S(t-\tau_1)I(t-\tau_1) - \gamma I(t-\tau_2) - aI(t),$$
$$\frac{dR}{dt} = \gamma I(t-\tau_2).$$

Вважаємо, що хвороба має інкубаційний період вірусу $\tau_1 > 0$ (орієнтовно 3 дні), а період відновлення $\tau_2 > 0$ (орієнтовно 1-3 тижні). Ефективність моделі перевірялася в роботі [8] шляхом порівняння її прогнозів з реальними даними в Німеччині, Італії, Кувейті та Омані у липні 2020. Параметри β, γ і α змінюються для оптимального підгонки даних.

За допомогою розробленого додатку знайдено наближений розв'язок цієї моделі з початковими параметрами $\beta = 0,17$, $\gamma = 0,03$, $\alpha = 0,01$, $\tau_1 = 3$, $\tau_2 = 9$ та початковими функціями $\varphi(x) = 1$, $\psi(x) = 0,1$, $\xi(x) = 0$ для країни Німеччина.

Одержані числові результати добре узгоджуються із реальними даними 2020 року в Німеччині та одержаними результатами в роботі [8].

1. Gopalsamy K. Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics. – Netherlands. Kluwer Academic Pub. Dordrecht, 1992. – 512 p.
2. Arino, J. and van den Driessche. Time delays in epidemic models: modeling and numerical considerations. – Delay Differential Equations and Applications, 2006. – P. 539-578.
3. Schiesser W.E. Time Delay ODE/PDE Models. Applications in Biomedical Science and Engineering. – Boca Rona, 2019. – 250 p.

4. Луник Т.В., Черевко І.М. Моделювання математичних моделей біології та імунології із запізненням. Буковинський математичний журнал. – 2021. – Том. 8, №2. – С. 92- 98.
5. Bellen A., Zenaro M. Numerical methods for delay differential equations. – New York : Oxford University Press, 2003. – 395 p.
6. Fathalla A. Rihan. Delay Differential Equations and Applications to Biology. – Springer, 2021. – 303 p.
7. Братусь А., Новожилов А., Платонов А. Динамические системы и модели в биологии. – М.: Физматлит, 2010. – 436 с.
8. Ebraheem H., Alkhateeb N., Badran H., Sultan E. Delayed Dynamics of SIR Model for COVID-19 // Open Journal of Modelling and Simulation. – 2021. – V. 9. – P. 146-158.