

Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

К.Ю. ЗЕНКОВА, О.В. АНГЕЛЬСЬКИЙ

**ОПТИЧНІ СИГНАЛИ.
ЇХ ПЕРЕТВОРЕННЯ В ІНФОРМАЦІЙНИХ І
ВИМІРЮВАЛЬНИХ ПРИЛАДАХ, СИСТЕМАХ МЕТРОЛОГІЇ
ТА КОМУНІКАЦІЇ**

Навчально-методичний посібник



Чернівці
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича
2022

УДК

3-563

Друкується за ухвалою Вченої ради
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича
(протокол № від 00.06.2022 р.)

Рецензенти:

Константинович А. В., доктор фіз.-мат. наук (головний науковий співробітник Інституту термоелектрики);

Федів В.І., доктор фіз.-мат. наук, професор (завідувач кафедри біологічної фізики та медичної інформатики Буковинського державного медичного університету).

Зенкова К. Ю., Ангельський О. В.

3-563 Оптичні сигнали. Їх перетворення в інформаційних і вимірювальних приладах, системах метрології і комунікації : навч.-метод. посібник. / К. Ю. Зенкова, О. В. Ангельський. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2022. 172 с.

ISBN 978-966-423-722-9

Розглянуто основи теорії перетворення оптичних сигналів, підходи до неперервних інтегральних перетворень, які використовуються в когерентній та некогерентній оптиці при описі оптичних явищ. Виокремлено основні властивості цих перетворень з точки зору конструювання оптичних сигналів у відповідних оптичних системах, способи отримання інтегральних образів типових оптичних сигналів. Наведено приклади використання інтегральних перетворень у задачах просторової оптичної фільтрації.

Для студентів інженерних спеціальностей навчальних закладів України, зокрема, які навчаються за спеціальностями 152 *Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка*, 172 *Телекомунікація та радіотехніка*, так і інших спеціальностей

УДК

© Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, 2022

© Зенкова К.Ю., Ангельський О.В., 2022

ISBN 978-966-423-722-9

ЗМІСТ

Передмова	
Вступ	
1. Загальний підхід до побудови ОВС	
1.1. Класифікація сигналів	
1.2. Типи ОВС	
Розділ 1. Математичні основи аналізу та синтезу ОВС	
1.1. Лінійні системи, методи їх дослідження та характеристики	
1.1.1. Фізичне обґрунтування рівняння згортки	
1.1.2. Сигнали з кількома змінними	
1.2. Перетворення Фур'є та його основні властивості	
1.2.1. Спектри періодичних сигналів	
1.2.2. Спектри неперіодичних сигналів	
1.3. Властивості Фур'є-спектрів.....	
1.3.1. Теорема про спектр суми	
1.3.2. Теорема про парність та непарність функцій	
1.3.3. Теорема про комплексно спряжене.....	
1.3.4. Теореми про зміщення та запізнення.....	
1.3.5. Зв'язок між скалярним добутком функції та спектрами. Рівність Парсеваля	
1.3.6. Функції кореляції	
1.3.7. Теорема згортки функцій	
1.3.8. Теорема про спектр похибки	
1.3.9. Теорема про спектр інтеграла.....	
1.3.10. Зміна масштабу та поворот системи координат при Фур'є-перетворенні.....	
1.3.11. Функції із обмеження спектром. Теорема Котельникова.....	
Контрольні питання та завдання	
Розділ 2. Хвильові поля у вільному просторі	
2.1. Просторові та кутові спектри хвильових полів	
2.2. Хвильове рівняння для монохроматичної хвилі	
2.3. Зміст просторових частот	
2.4. Розв'язок дифракційних задач. Наближення Кіргофа	

2.5. Наближені вирази для частотної та імпульсної характеристик вільного простору	
2.6. Принцип Гюйгенса-Френеля	
2.7. Наближення геометричної оптики.....	
2.8. Дифракція Френеля	
2.9. Дифракція Фраунгофера	
2.10. Вираз $\zeta(u_1, u_2)$ для значних та малих відстаней.....	
2.11. Властивості частотної характеристики вільного простору.....	

Контрольні питання та завдання.....

Розділ 3. Характеристика поля випромінювання в просторі

предметів.....

3.1. Характеристики і параметри когерентного поля	
3.2. Поняття просторової когерентності	
3.3. Фазові та групові швидкості в середовищі	
3.4. Функція кореляції та кутовий спектр потужності хвильових полів	
3.4.1. Визначення функції кореляції	
3.5. Інтегральні перетворення когерентних полів.....	
3.6. Кореляційна функція поля, отриманого через розсіювання однорідним випадковим екраном.....	
3.7. Кореляційна функція на значних відстанях	
3.8. Співвідношення між повздовжньою та поперечною кореляціями	
3.9. Кореляційна функція поля, розсіяного неоднорідним випадковим екраном.....	
3.9.1. Статистичний опис випадкових сигналів	
3.9.2. Властивості кореляційної функції	
3.10. Проходження випадкових сигналів через лінійні системи.....	
3.11. Багатовимірні випадкові процеси.....	
3.12. Модель неоднорідного випадкового екрана.....	
3.13. Математичний опис перетворення кореляційної функції у вільному просторі.....	
3.14. Апертурний синтез та інші аналогічні задачі.....	

3.15. Апертурний синтез при значних апертурах	
3.16. Зірковий інтерферометр.....	
3.17. Особливості апертурного синтезу	
3.18. Деякі властивості спектрів дійсної частини комплексної функції та умова визначення спектра комплексної функції по дійсній частині	
3.19. Апертурний синтез по кореляційній функції реальних полів	
3.20. Просторова фільтрація регулярних хвильових полів в оптичних системах	
3.21. Поля в ідеальних оптичних системах.....	
3.22. Отримання зображення реальним об'єктивом в оптично-спряжених площинах.....	
3.23. Зображення у фокальній площині	
3.24. Структура зображення, що створена реальним об'єктивом	
3.25. Характеристики та параметри некогерентного поля випромінювання. Обробка інформації методами некогерентної оптики	
3.25.1. Теорія некогерентної просторової фільтрації	
3.25.2. Області використання некогерентної просторової фільтрації	
3.25.3. Функції, синтезовані методами цифрової голографії.....	
3.25.4. Експериментальні умови	
3.25.5. Методи просторової фільтрації, що не використовують властивості дифракції	
Контрольні питання та завдання.....	
Список літератури	

Передмова

Спектральний аналіз сигналів та систем, а отже, їх обробка вже досить давно і міцно зайняло своє місце у різноманітних оптичних задачах, пов'язаних із дослідженням методів та створенням приладових комплексів інформаційно-вимірювального призначення. В основі такого підходу – припущення, зроблене французьким математиком Жаном Батістом Жозефом Фур'є про можливість зображення функцій, що описують складний коливальний процес, у вигляді сукупності окремих гармонійних складових зі своїми амплітудами та фазами.

За допомогою аналізу Фур'є просторова або часова функції розбиваються на синусоїдальні складові, кожна з яких має свою частоту, амплітуду та фазу. Перетворення Фур'є – це функція, що представляє амплітуду і фазу, що відповідають кожній частоті (часовій або просторовій). Перетворення можна отримати двома різними математичними методами, один із яких застосовується, коли вихідна функція безперервна, а інший – коли вона складається з безлічі окремих дискретних вимірів. Незалежно від способу отримання перетворення, для кожної частоти необхідно вказати два дійсні числа, які можна виразити у вигляді одного комплексного числа. Таким поданням користуються дуже широко, тому що воно дозволяє використовувати математичний апарат алгебри комплексних чисел. Теорія функцій комплексних змінних та перетворення Фур'є стали необхідними у численних розрахунках, що моделюють процеси в ланцюгах електричних сигналів, механічні коливання твердого тіла, поширення електромагнітних хвиль у різних середовищах, у цифровій обробці зображень тощо. Тепер вивчення перетворення Фур'є зводиться до пошуку ефективних способів переходу від самої функції до її інтегрального образу та назад.

Поряд із наведеним перетворенням Фур'є, у когерентній (некогерентній) оптиці досить часто зустрічаються й інші перетворення, наприклад, вейвлет-перетворення, або перетворення Гільберта, що дало, зокрема, назву цілому оптичному напрямку. У цьому навчальному посібнику на основі підібраних матеріалів представлені загальні властивості інтегральних перетворень з ядром класу Фур'є, які мають властивість зворотності та передбачають побудову багатокаскадних оптичних систем обробки інформації,

аналізу просторових спектрів потужності когерентних (частково-когерентних, некогерентних) систем, на основі введення функцій кореляції та автокореляції. Принцип подання матеріалу ґрунтується на властивостях перетворення оптичних сигналів у лінійних (нелінійних) системах, які в загальному випадку можуть бути стохастичними у зв'язку з процесами формування оптичного поля джерелами випромінювання, а також наявністю шумів і перешкод, врахування дифракційних спотворень сигналів у трактах передачі та приймальних пристроях.

Вступ

Останні століття відзначалися широким застосуванням автоматичних та автоматизованих оптичних вимірювальних систем (ОВС). Ці системи необхідні для вимірювання характеристик та параметрів фізичних і технологічних процесів, з метою керування рухомими об'єктами для передачі, обробки інформації.

Використання таких систем зумовлене перевагами електромагнітного випромінювання:

1. Процеси та явища у природі, у виробничій діяльності, що супроводжується електромагнітним випромінюванням пов'язані з відбиванням та розсіюванням випромінювання.
2. Застосування електромагнітного випромінювання як джерела або переносника інформації не супроводжується енергетичним втручанням у самі процеси.
3. Електромагнітне випромінювання оптичного діапазону володіє як властивостями джерела, так і переносника інформації, великою ємністю та пропускну здатністю. Інформація міститься в амплітуді, частоті, фазі; просторовій, часовій структурі, поляризації.
4. Швидкість поширення максимальна.
5. Просторова густина оптичного випромінювання забезпечує мінімальні розміри приймальної частини ОВС, порівняно з аналогічними в радіодіапазоні.
6. Легко піддається автоматизації систем управління, обробки та перетворення електромагнітного випромінювання.

1. Загальний підхід до побудови ОВС

Склад функціональних елементів ОВС, послідовність обробки та перетворення сигналів (рис. 1):

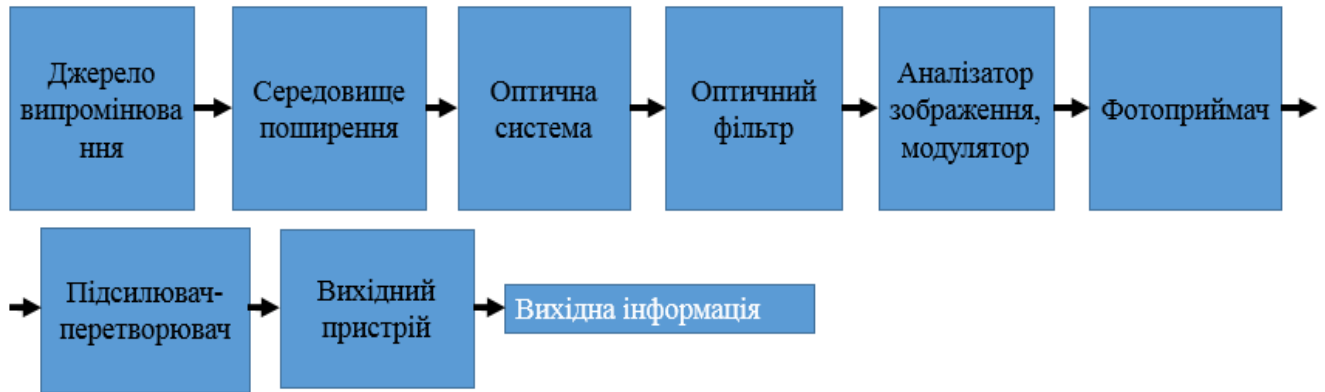


Рис. 1. Склад функціональних елементів ОВС

- джерело → інформаційне багатопараметричне поле; параметри → просторова, часова структура яскравості, спектральний склад, розподіл амплітуд та фаз, ступінь поляризації. Характеристики та параметри описують детермінованими та випадковими функціями;
- середовище → частина простору між джерелом та оптичною системою;
- оптична система → система первинної обробки інформації;
- оптичний фільтр → забезпечує вибіркове пропускання потоку випромінювання за спектральним складом для поліпшення сигнал/шум;
- аналізатор зображення (модулятор) перетворює розподіл освітленості в просторі зображення чи розподіл яскравості у просторі предметів у часову послідовність сигналів потоку;
- фотоприймач → перетворює оптичний сигнал в електронний;
- підсилювач – перетворювач → підсилення та перетворення сигналу;
- вихідний пристрій → залежить від типу та задач ОВС (індикаторний пристрій, аналоговий, цифровий, відеоконтрастний, пристрій запису інформації).

1.1. Класифікація сигналів

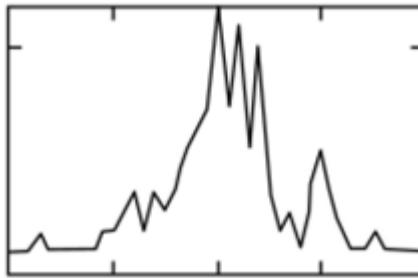
Сигнал від терміна “знак” – процес зміни фізичного стану об’єкта для відображення, реєстрації, передачі інформації (повідомлення). Сигнал вивчають за допомогою різних приладів та пристроїв (приймачі, вольтметри, осцилографи).

Математична модель → функція від часу, координат. Модель формується на основі явища.

Функції, що описують сигнали, можуть бути як дійсними, так комплексними. Створені моделі дають можливість порівнювати сигнали.

Сигнали є:

- одновимірні, багатовимірні;
- детерміновані → імовірність визначення максимальна;
- випадкові;



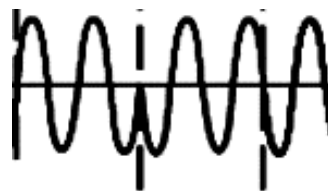
- імпульсні сигнали (коливання, які існують у межах кінцевого відрізка часу) → відеоімпульси, радіоімпульси.

Якщо $U_v(t)$ – відеоімпульс, то радіоімпульс



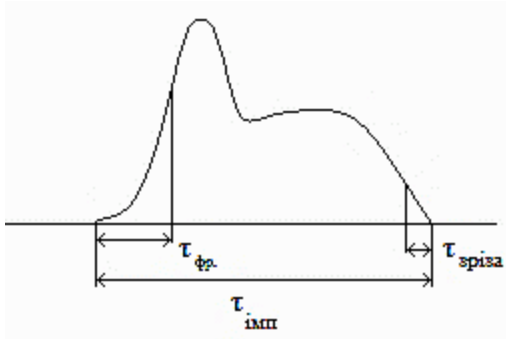
$$U_p(t) = U_v(t) \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Відеоімпульс



радіоімпульс

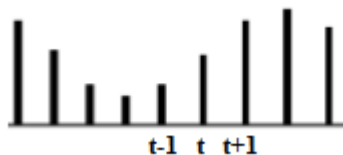
Радіоімпульс характеризується тонкою структурою: амплітудою, протяжністю імпульсу ($\tau_{\text{імп}}$), протяжністю фронту ($\tau_{\text{фр.}}$), протяжністю зрізу ($\tau_{\text{зріза}}$)



Уперше термін «відеоімпульс» використано в техніці телебачення. Сигнали бувають

- аналогові, дискретні, цифрові;
- континуальні (аналогові) \sim подібні до фізичного процесу;
- дискретні, які визначаються по кінцевій множині точок:

$\Delta t = t_{+1} - t$ – крок дискретизації.



Тут немає необхідності відтворювати сигнал у всі моменти часу. Тим самим по одній лінії зв'язку можна передавати повідомлення від різних джерел, утворюючи багатоканальний зв'язок.

- різновидом дискретного сигналу є цифровий сигнал
- Відлікові значення зображені як число:

111001011
101110110
000011100

Виокремлюють двійкову систему кодування сигналу. Будь-який аналоговий сигнал можна представити через набір прямокутників.

1.2. Типи ОВС

За характером ОВС поділяють на інформаційні, вимірювальні, відстежуючі.

- Інформаційні ОВС призначені для збору, обробки, передачі на контрольований пристрій інформації про структуру поля випромінювання в різних ділянках спектра: тепловізійні пристрої (фотографування картинок місцевості); медична діагностика (обстеження різних частин тіла); контроль оригінальності електронних схем; лазерні локатори; тепловізори (розпізнавання об'єктів та образів).

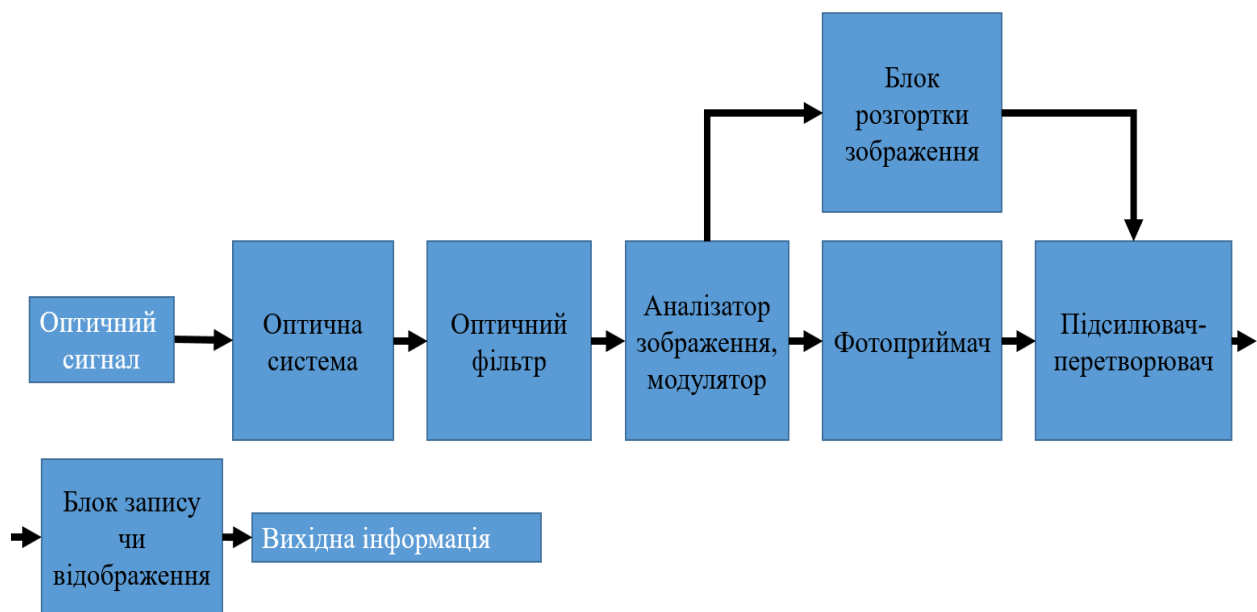


Рис. 2. Функціональна схема приймальної частини ОВС інформаційного типу

Синхронізований сигнал в блоці розгортки зображення призначений для прив'язки просторового розподілу ділянки поля спостереження до координат і часу, що необхідно для наступної обробки.

- ОВС вимірювального типу призначені для вимірювання об'єктів, процесів, координат, розмірів, дальності, швидкості руху, взаємної орієнтації об'єктів для вимірювання інтегральної та спектральної густини яскравості, поляризації.

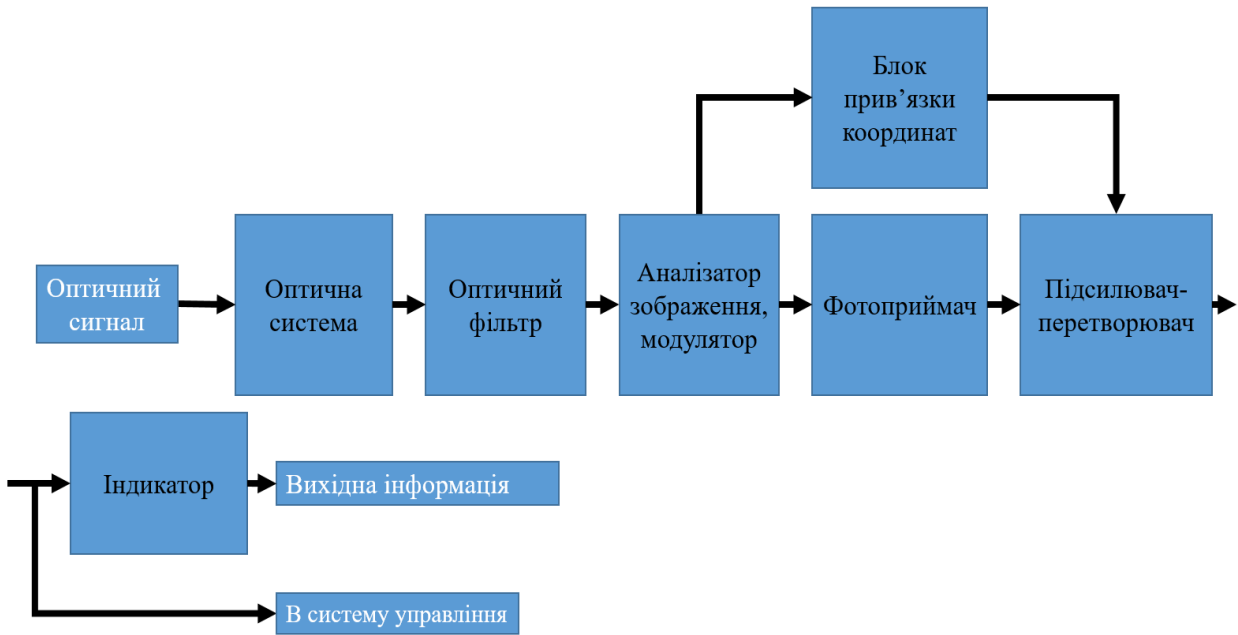


Рис. 3. Функціональна схема приймальної частини ОВС вимірювального типу

- ОВС відстежувального типу → автоматичний супровід окремих об'єктів (через аналіз власного або відбитого випромінювання); для підтримки параметрів випромінювання на заданому рівні. Наявність від'ємного зворотного зв'язку, що дозволяє усунути відмінності між вхідним та вихідним значеннями випромінювальної величини.

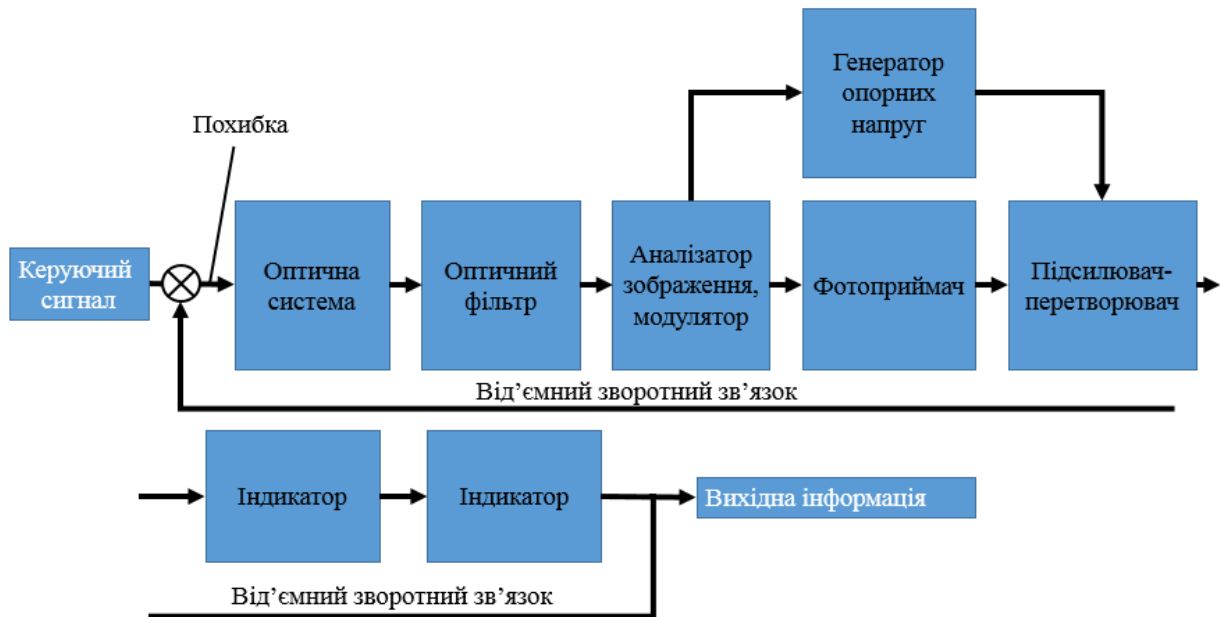


Рис. 4. Функціональна схема приймальної частини ОВС відстежувального типу

До цього типу відносять пристрої спостереження за окремими джерелами випромінювання (теплові, лазерні, головки самонаведення, пристрої механічної обробки деталей за фотокопіями або за кресленням, підтримка технологічного режиму).

Особливості ОВС: сигнали на вході та виході містять завади. Рівень завад може бути високим. Тому нормальне функціонування ОВС забезпечується при оптимізації обробки сигналів на всіх етапах перетворення. Для ОВС характерні два основних режими роботи: виявлення і нормальне функціонування.

Сучасні оптичні пристрої вимірювання та контролю – складні автоматичні системи, що складаються з оптичних, механічних, електромеханічних, розрахункових, електронних пристроїв високої точності. У різних частинах ОВС сигнали зазнають неперервного багатофункціонального перетворення, пов'язаного з підсиленням, оптичною обробкою, відповідно до задачі.

Основне завдання щодо проектуванню ОВС → вибір структури, параметрів, конструктивних розв'язків, для яких забезпечуються оптимальна обробка сигналів у всіх режимах роботи та в усьому діапазоні вимірювання корисних сигналів, завад, що мають місце при експлуатації. Розв'язок базується на сучасних статичних методах.

Отже, основна задача посібника - це викладання математичних методів, опис процесів перетворення сигналів від простору предмета до простору зображення, методів розрахунку та оптимізації структури і параметрів як окремих елементів оптичної вимірювальної системи, так і пристроїв у цілому.

Розділ 1

Математичні основи аналізу та синтезу ОВС [1, 2]

1.1. Лінійні системи, методи їх дослідження та характеристики

Довільна динамічна система перетворює функцію деяких незалежних змінних, що описують вхідний сигнал, в інші функції, що характеризують вихідний сигнал. Якщо система одновимірна, то вхідні і вихідні сигнали описуються функцією однієї незалежної змінної; для багатовимірних сигналів функції кількох змінних.

Одновимірна динамічна система:



Рис. 5. Умовне зображення одновимірної динамічної системи

У системі (або вузлі) здійснюється перетворення однієї функції в іншу згідно з рівняннями

$$y(x) = F\{g(x)\}, \quad (1)$$

$$F_y\{y(x)\} = F_g\{g(x)\}, \quad (2)$$

де F, F_y, F_g – оператори, що визначають закон перетворення відповідних функцій.

Нехай на вході одночасно кілька $g_i(x)$ сигналів.

Якщо сигнал на виході від сукупності вхідних сигналів можна представити сумою вихідних сигналів від кожного вхідного сигналу взятого окремо, то система – лінійна. Це є фундаментальна властивість лінійної системи.

Лінійні системи: електричне коло з параметрами, незалежними від напруги і струмів, прошарок простору.

Нелінійна система: фотографічна плівка, квадратичний детектор.

Для лінійної системи (вихідний сигнал):

$$F_y\{y(x)\} = \sum_{i=1}^n F_y\{y_i(x)\} = \sum_{i=1}^n F_g\{g_i(x)\}. \quad (3)$$

Оператор F є сума довільних сигналів від незалежних змінних x , тобто

$$F = a_n \frac{d^{(n)}}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{(n-1)}}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d^{(1)}}{dx^1} + a_0. \quad (4)$$

Використовуємо позначення $p = \frac{d}{dx}$,

$$F = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0. \quad (5)$$

Із врахуванням (5) закон зміни вихідного сигналу запишеться так:

$$F_y\{y(x)\} = a_n p^n y(x) + a_{n-1} p^{n-1} y(x) + \dots + a_1 p y(x) + a_0 y(x) = (a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) y(x). \quad (6)$$

Для вихідного сигналу оператор F_g може бути записаний аналогічно (інші коефіцієнти).

Для лінійних систем коефіцієнти $a_n \dots a_0$ не залежать від рівня самого сигналу.

Для дослідження динамічних систем у теорії систем використовуються декілька характерних вхідних сигналів $g(x)$ з реакцією $y(x)$, що повністю визначають властивості системи при роботі з довільними сигналами (імпульсні, одиничні, сходинокві і гармонійні).

Імпульсний сигнал (δ -функція) Дірака:

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty & \text{при } x = x_0 \\ 0 & \text{при } x \neq x_0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1, \quad (8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \delta(x - x_0) dx = \varphi(x_0), \quad \delta(ax) = \delta(x)/a. \quad (9)$$

Вихідний сигнал $y(x)$ при поданні на вхід лінійної системи імпульсного сигналу $\delta(x - x_0) = g(x)$ має назву **функції ваги** та позначається як $\tilde{\omega}(x) = y(x)$.

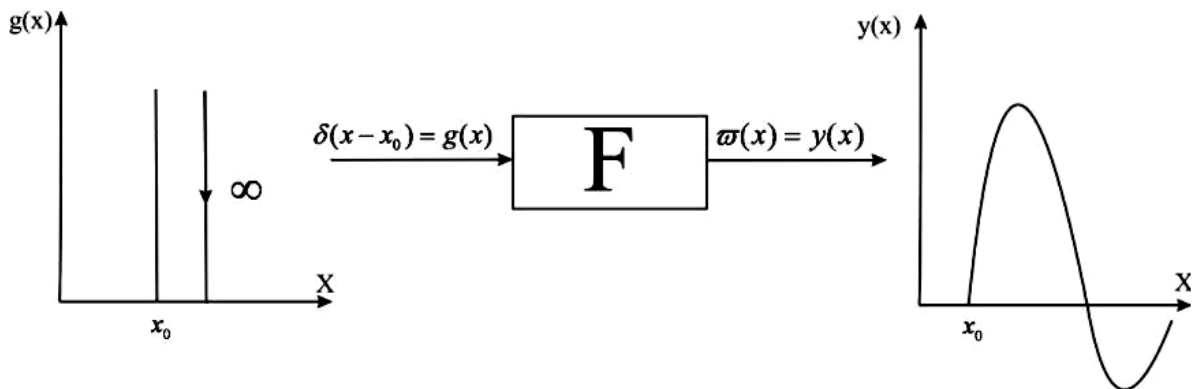


Рис. 6. Схема реакції лінійної системи на імпульсний сигнал

Одиничний сигнал $\sigma(x - x_0)$:

$$\sigma(x - x_0) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq x_0; \\ 0 & \text{при } x < x_0; \end{cases} \quad (10)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \sigma(x - x_0) dx = \int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) dx \quad (11)$$

$$\frac{d}{dx} \sigma(x - x_0) = \delta(x - x_0)$$

$$\sigma(x - x_0) = \int_{x_0}^x \delta(x - x_0) dx \quad (12)$$

Функцію $y(x) = h(x)$, що визначає сигнал на виході лінійної системи, коли на її вхід поданий сигнал

$$g(x) = \sigma(x - x_0), \quad (13)$$

називають **перехідною функцією системи**.

Між функцією ваги $\tilde{\omega}(x)$ та перехідною функцією $h(x)$ існує однозначний зв'язок, що впливає із властивостей лінійності системи.

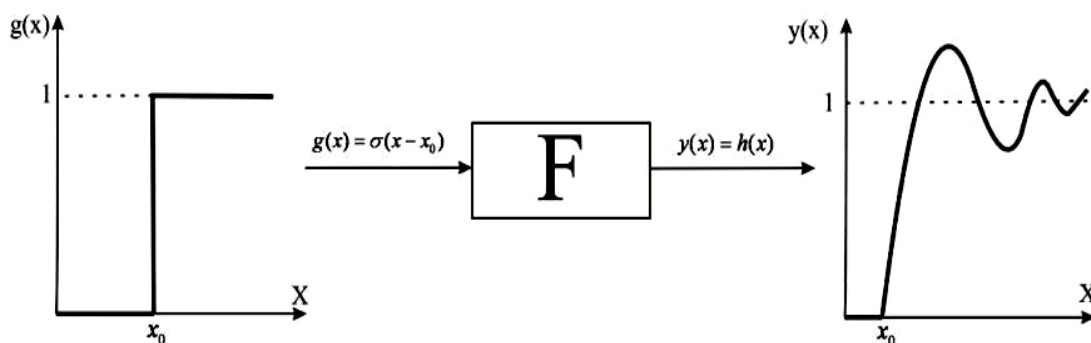


Рис. 7. Реакцію лінійної системи на сходишковий сигнал

$$\omega(x) = \frac{dh(x)}{dx}, \quad h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) dx. \quad (14)$$

Сигнал ділимо на окремі компоненти.

Якщо відомі функції $\tilde{\omega}(x)$ та $h(x)$, то можна знайти реакцію лінійної системи ($y(x)$) на довільний вхідний сигнал за допомогою інтеграла згортки:

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x - \varepsilon) g(\varepsilon) d\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x') g(x - x') dx'. \quad (15)$$

1.1.1. Фізичне обґрунтування рівняння згортки

Розглянемо довільний вхідний сигнал $g(t)$. Розкладемо цей сигнал у послідовність імпульсів довжиною Δt та амплітудою, рівною амплітуді даного сигналу в розглянуті моменти часу.

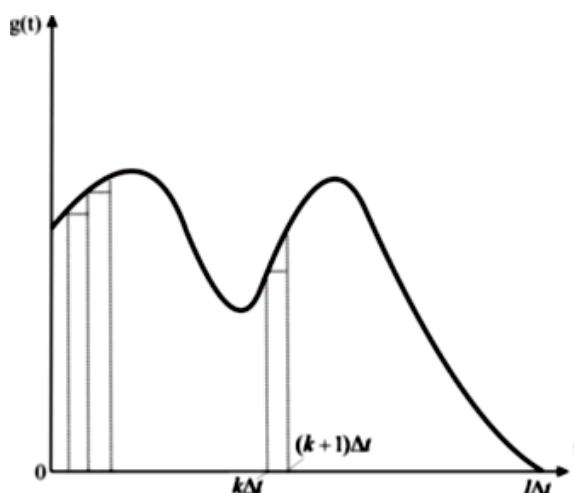


Рис. 8. Розклад довільного вхідного сигналу $g(t)$ у послідовність імпульсів

Нехай $g(0), g(\Delta t), g(2\Delta t) \dots g(k\Delta t) \dots$ - значення $g(t)$ в моменти $0, \Delta t, 2\Delta t \dots k\Delta t$.

$\tilde{\omega}_1(t)$ - відгук системи на імпульс довжиною Δt і амплітудою $\frac{1}{\Delta t}$ (швидкість руху імпульсу). Тоді величина $\tilde{\omega}_1(t) * \Delta t$ – відгук системи на імпульс довжиною Δt одиничної амплітуди.

Тому відгук системи y_0 на імпульс з амплітудою $g(0)$ у момент часу $t = 0$ буде $y_0 = g(0)\tilde{\omega}_1(t) * \Delta t$. Аналогічно відгук системи $y_{\Delta t}$ на імпульс з амплітудою $g(\Delta t)$ у момент $t = \Delta t$ буде $y_{\Delta t} = g(\Delta t)\omega_1(t - \Delta t)\Delta t$.

Продовжуючи підрахунок відліків системи для імпульсів у моменти часу $k\Delta t$ ($k = 0, 1, 2 \dots l$), отримаємо такий ланцюг рівностей:

$$\begin{cases} y_0 = g(0)\omega_1(t)\Delta t \\ y_{\Delta t} = g(\Delta t)\omega_1(t - \Delta t)\Delta t \\ y_{2\Delta t} = g(2\Delta t)\omega_1(t - 2\Delta t)\Delta t \\ \dots \\ y_{k\Delta t} = g(k\Delta t)\omega_1(t - k\Delta t)\Delta t \end{cases}$$

Повний вихідний сигнал $y(t)$ у довільний момент часу t від усієї сукупності вхідних сигналів як результат лінійності системи визначиться сумою:

$$y(t) = \sum_{k=0}^l g(k\Delta t)\omega_1(t - k\Delta t)\Delta t. \quad (16)$$

Згідно з принципом причинності відгук фізичної системи $\tilde{\omega}_1(t)$, повинен дорівнювати 0, для $t < 0$, тому $\tilde{\omega}_1(t - k\Delta t) = 0$, коли $t < k\Delta t$ (результат отримуємо після дії). Тому рівняння можна записати:

$$\begin{cases} y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k\Delta t)\omega_1(t - k\Delta t)\Delta t \\ y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k\Delta t)\omega_1(t - k\Delta t)\Delta t \end{cases} \quad (17)$$

Послідовність $g(k\Delta t) \rightarrow g(t)$, при $\Delta t \rightarrow 0$, відгук $\tilde{\omega}_1(t) \rightarrow$ імпульсного відгуку тобто $\tilde{\omega}_1(t) \rightarrow \omega(t)$.

При $\Delta t \rightarrow 0$, суми (17) можна замінити на інтеграли, вводячи $k\Delta t = t'$ та $\Delta t = dt'$.

$$\begin{cases} y(t) = \int_0^{\infty} g(t')\omega(t-t')dt' \\ y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t')\omega(t-t')dt' \\ y(t) = \int_0^t g(t')\omega(t-t')dt' \end{cases} \quad (18)$$

Вирази (18) носять назву **рівняння згортки**. Скорочений запис $y(t) = g(t) \otimes \tilde{\omega}(t)$.

Розглянемо проходження сигналу через лінійну систему гармонійного сигналу. Такий розгляд важливий з точки зору вимірювання динамічних характеристик системи. Сигнал $g(x) = g_m \sin(\omega_x x - \theta_g)$ називається **гармонічним сигналом**, де g_m - амплітуда, ω_x - частота, θ_g - фаза.

Оскільки для значення частоти ω_x амплітуда та фаза можуть мати різні значення, то вхідний гармонічний сигнал набуває вигляду

$$g(x) = g_m(\omega_x) \sin[(\omega_x x - \theta_g(\omega_x))]. \quad (19)$$

У теорії сигналів використовується комплексна форма зображення сигналу, що полегшує розрахунки:

$$g(x) = G(\omega_x) \exp(i\omega_x x), \quad (20)$$

$G(\omega_x) = g_m(\omega_x) \exp[-i\theta_g(\omega_x)]$ – комплексна амплітуда, що залежить від амплітуди та фази вхідного сигналу. Відповідно до формули Ейлера, комплексна частина сигналу (20) у точності відповідає гармонічному сигналу (19):

$$\begin{aligned} g_m(\omega_x) \exp\{i[(\omega_x x - \theta_g(\omega_x))]\} \\ = g_m(\omega_x) \{\cos[(\omega_x x - \theta_g(\omega_x))] + I \sin[(\omega_x x - \theta_g(\omega_x))]\}. \end{aligned}$$

Якщо на вхід подається гармонічний сигнал, то на виході також буде гармонічний (після завершення перехідних процесів у встановленому режимі), з тою ж частотою, але з іншими амплітудними та фазовими значеннями:

$$y(x) = y_m(\omega_x) \sin(\omega_x x - \theta_y(\omega_x)), \text{ або в комплексній формі}$$

$$y(x) = y_m(\omega_x) \exp\{i(\omega_x x - i\theta_y(\omega_x))\} = Y(i\omega_x) \exp(i\omega_x x). \quad (21)$$

Комплексна амплітуда $Y(i\omega_x)$ характеризує одночасно амплітуду та фазу сигналу.

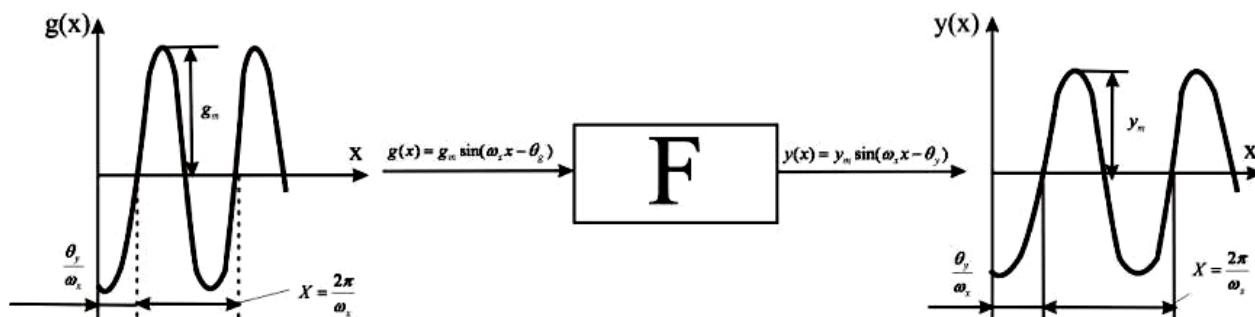


Рис. 9. Реакція системи на гармонійний сигнал

Зміну динамічних характеристик лінійної системи у встановленому режимі при подачі на вхід гармонічного сигналу в залежності від частоти ω_x можна визначити комплексною функцією $W(i\omega_x)$:

$$\begin{aligned} W(i\omega_x) &= \frac{y(x)}{g(x)} = \frac{Y(i\omega_x) \exp(i\omega_x x)}{G(i\omega_x) \exp(i\omega_x x)} = \\ &= \frac{y_m(\omega_x) \exp(-i\theta_y(\omega_x))}{g_m(\omega_x) \exp(-i\theta_g(\omega_x))} = \frac{y_m(\omega_x)}{g_m(\omega_x)} \exp i\theta(\omega_x), \end{aligned} \quad (22)$$

Тут $\theta(\omega_x) = \theta_g(\omega_x) - \theta_y(\omega_x)$ – різниця фаз між вхідним і вихідним сигналами для заданої частоти.

Функція $W(i\omega_x)$ називається **амплітудно-фазовою частотною передавальною функцією**.

Знайдемо вираз для функції $W(i\omega_x)$, коли в динаміці зв'язок між вхідним і вихідним сигналами визначається формулою $F_y\{y(x)\} = F_g\{y(x)\}$, а саме оператори F_y та F_g є операторами диференціювання у вигляді (4).

Тоді для вхідного гармонічного сигналу $g(x) = g_m(\omega_x) \exp(i\omega_x x)$ маємо:

$$\left[a_n \frac{d^{(n)}}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{(n-1)}}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d^{(1)}}{dx^1} + a_0 \right] y_m \exp(i\theta) = \left[b_m \frac{d^{(m)}}{dx^m} + b_{m-1} \frac{d^{(m-1)}}{dx^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{d^{(1)}}{dx^1} + b_0 \right] g_m \exp(i\omega_x x). \quad (23)$$

Проводячи диференціювання та скорочуючи на $\exp(i\omega_x x)$, отримаємо:

$$\begin{aligned} & [(i\omega_x)^n a_n + (i\omega_x)^{n-1} a_{n-1} + \dots + (i\omega_x) a_1 + a_0] y_m \exp(i\omega_x x) = \\ & = [(i\omega_x)^m b_m + (i\omega_x)^{m-1} b_{m-1} + \dots + (i\omega_x) b_1 + b_0] g_m. \end{aligned} \quad (24)$$

Вводимо комплексну амплітуду $Y(i\omega_x) = W(i\omega_x)G(i\omega_x)$. Тоді:

$$W(i\omega_x) = \frac{(i\omega_x)^n a_n + (i\omega_x)^{n-1} a_{n-1} + \dots + (i\omega_x) a_1 + a_0}{(i\omega_x)^m b_m + (i\omega_x)^{m-1} b_{m-1} + \dots + (i\omega_x) b_1 + b_0}. \quad (25)$$

Оскільки, згідно з (20), (22), функція $W(i\omega_x)$ – комплексна, то її можна зобразити у вигляді

$$W(i\omega_x) = A(\omega_x) \exp[i\theta(\omega_x)] = U(\omega_x) + iV(\omega_x), \quad (26)$$

де $A(\omega_x)$ називається **амплітудно-частотною характеристикою лінійної системи**, $\theta(\omega_x)$ – **фазово-частотною характеристикою**.

Відповідно до (22) та (24), ці характеристики будуть такими:

$$A(\omega_x) = \frac{y_m(\omega_x)}{g_m(\omega_x)} = [U^2(\omega_x) + V^2(\omega_x)]^{1/2}, \quad (27)$$

$$\theta(\omega_x) = \arctg \frac{V(\omega_x)}{U(\omega_x)}. \quad (28)$$

Ці параметри повністю задають динамічні властивості лінійної системи.

Значення амплітудно-фазової частотної передавальної функції $W(i\omega_x)$ та функції ваги $\tilde{\omega}_x$ дає можливість знайти сигнал на виході лінійної системи по вхідному сигналу довільної форми, а не лише для гармонійного.

Застосовуємо перетворення Фур'є до (15)

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\omega}(x') g(x - x') dx'$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(x) \exp(-i\omega_x x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\omega}(x') g(x - x') dx'] \exp(-i\omega_x x) dx. \quad (29)$$

Права частина (29) \rightarrow Фур'є перетворення від згортки двох функцій $\tilde{\omega}(x')$ та $g(x)$.

Згідно з властивостями такого перетворення:

$$Y(i\omega_x) = W(i\omega_x)G(i\omega_x), \quad (30)$$

$$Y(i\omega_x) = \int_{-\infty}^{\infty} y(x) \exp(-i\omega_x x) dx,$$

$$G(i\omega_x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp(-i\omega_x x) dx; \quad (31)$$

- спектри Фур'є вихідного та вхідного сигналів:

$$W(i\omega_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\omega}(x) \exp(-i\omega_x x) dx; \quad (32)$$

- спектри Фур'є функції ваги системи.

Для негармонійного сигналу амплітудо-фазова частотна передавальна функція $W(i\omega_x)$ містить багато спектральних гармонік і являє собою Фур'є-перетворення функції $\tilde{\omega}(x)$.

Зміст (32) \rightarrow функція $W(i\omega_x)$ – лінійний фільтр, що пропускає вхідні сигнали різних частот (спектральних гармонік) і тим самим характеризує динамічні властивості лінійної системи.

Якщо знайдений комплексний спектр $Y(i\omega_x)$ вихідного сигналу згідно з (27) та (28), то перехід до самого сигналу $y(x)$ здійснюється на основі зворотного Фур'є-перетворення.

1.1.2. Сигнали з кількома змінними

При роботі оптичної вимірювальної системи вхідні та вихідні сигнали дуже часто залежать від кількох незалежних параметрів. Дослідження динаміки таких лінійних систем здійснюється за допомогою функцій, описаних вище, але залежних від кількох змінних.

Нехай вхідний g та вихідний сигнал y є функціями n незалежних змінних x_1, x_2, \dots, x_n . Сукупність таких змінних позначимо вектором $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Відповідні сигнали запишуться у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} g &= g(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(\vec{x}) \\ y &= y(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(\vec{x}) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Введемо n - вимірну δ -функцію:

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}_0) = \begin{cases} \infty & \text{при } \vec{x} = \vec{x}_0 \ (x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}, \dots, x_{n0}) \\ 0 & \text{при } \vec{x} \neq \vec{x}_0 \ (x_1 \neq x_{10}, x_2 \neq x_{20}, \dots, x_{n0}) \end{cases} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) d\vec{x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_{10}, \vec{x}_2 - \vec{x}_{20}, \dots, \vec{x}_n - \vec{x}_{n0}) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1; \end{aligned} \quad (35)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) d\vec{x} = \varphi(\vec{x}_0); \quad (36)$$

$$\delta(a_1 x_1, a_2 x_2, \dots, a_n x_n) = \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} \delta(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (37)$$

Враховуючи, що при поданні на вхід лінійної системи сигналу $g(\vec{x}) = \delta(\vec{x} - \vec{x}_0)$ відгук системи (сигнал на вході) буде $y(\vec{x}) = \tilde{\omega}(\vec{x}) = \tilde{\omega}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Функція $\tilde{\omega}(\vec{x})$ – **n -вимірна функція ваги лінійної системи.**

Сигнал на виході такої системи визначається через вхідний сигнал та функцію ваги n -вимірним інтегралом згортки:

$$\begin{aligned}
y(\vec{x}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\omega}(\vec{x}) g(x - x') dx' = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\omega}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) \times g(\vec{x}_1 - \vec{x}'_{10}, \vec{x}_2 - \vec{x}'_{20}, \dots, \vec{x}_n \\
&\quad - \vec{x}'_{n0}) dx'_1 dx'_2 \dots dx'_n;
\end{aligned}$$

Частотний зв'язок між n -вимірними спектрами вихідного $Y(i\vec{\omega}_x)$ та вхідного $G(i\vec{\omega}_x)$ сигналів визначається виразом

$$Y(i\vec{\omega}_x) = W(i\vec{\omega}_x)G(i\vec{\omega}_x), \quad (38)$$

де $\vec{\omega}_x$ - n -вимірна кругова частота, що вводиться при використанні n -вимірного перетворення Фур'є.

Нехай задана функція $f(\vec{x})$. Її n -вимірний спектр визначається n - вимірним інтегралом Фур'є:

$$\begin{aligned}
F(i\vec{\omega}_x) &= F(i\vec{\omega}_{x_1}, i\vec{\omega}_{x_2}, \dots, i\vec{\omega}_{x_n}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}) \exp[-i\vec{\omega}_x \vec{x}] d\vec{x} = \\
&\int_{-\infty}^{\infty} \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \times \exp(i\omega_{x_1}, i\omega_{x_2}, \dots, i\omega_{x_n}) dx_1 dx_2 \dots dx_n
\end{aligned} \quad (39)$$

Відповідно до (37), спектри вхідного та вихідного сигналів визначаються так:

$$G(i\vec{\omega}_x) = \int_n \int_{-\infty}^{\infty} g(\vec{x}) \exp[-i\vec{\omega}_x \vec{x}] d\vec{x}, \quad (40)$$

$$Y(i\vec{\omega}_x) = \int_n \int_{-\infty}^{\infty} y(\vec{x}) \exp[-i\vec{\omega}_x \vec{x}] d\vec{x}. \quad (41)$$

При цьому n -вимірна амплітудно-фазова частотна передавальна функція задається функцією ваги:

$$W(i\vec{\omega}_x) = \int_n \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\omega}(\vec{x}) \exp[-i\vec{\omega}_x \vec{x}] d\vec{x}. \quad (42)$$

1.2. Перетворення Фур'є та його основні властивості

В аналізі та синтезі оптичних вимірювальних систем важливе місце посідає математичний апарат перетворення Фур'є. За допомогою такого апарату порівняно легко розв'язуються задачі спектрального аналізу динамічних лінійних систем.

1.2.1. Спектри періодичних сигналів

В абсолютному розумінні періодичних сигналів не існує, оскільки немає повторюваності того самого процесу нескінченну кількість разів. Але поняття періодичного сигналу застосовується до реальних процесів, що займають кінцеві інтервали часу та простору: дифракційні ґратки, випромінювання атомом квазімонохроматичного пучку хвиль і т.п.

А) Найпростішим періодичним сигналом є гармонічні коливання, що визначаються тригонометричними функціями косинуса та синуса часу або простору:

$$\varphi(t) = A \cos \left[\left(\frac{2\pi}{T} \right) t - \theta \right] = A \cos(\omega_t t - \theta) = A \cos \psi \quad \text{при } -\infty < t < \infty \text{ чи}$$

$$\varphi(x) = A \cos \left[\left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) x - \theta \right] = A \cos(\omega_x x - \theta) = A \cos \psi$$

при $-\infty < x < \infty$

Тут A – амплітуда, T – період коливань, $\omega_t = \frac{2\pi}{T}$ – кругова частота, $\nu = \frac{1}{T}$ – частота, $\lambda \equiv x$ – довжина хвилі, $\omega_x = \frac{2\pi}{\lambda}$ – кругова просторова частота, $f = \frac{1}{\lambda}$ – просторова частота, θ, ψ – початкова та повна фаза.

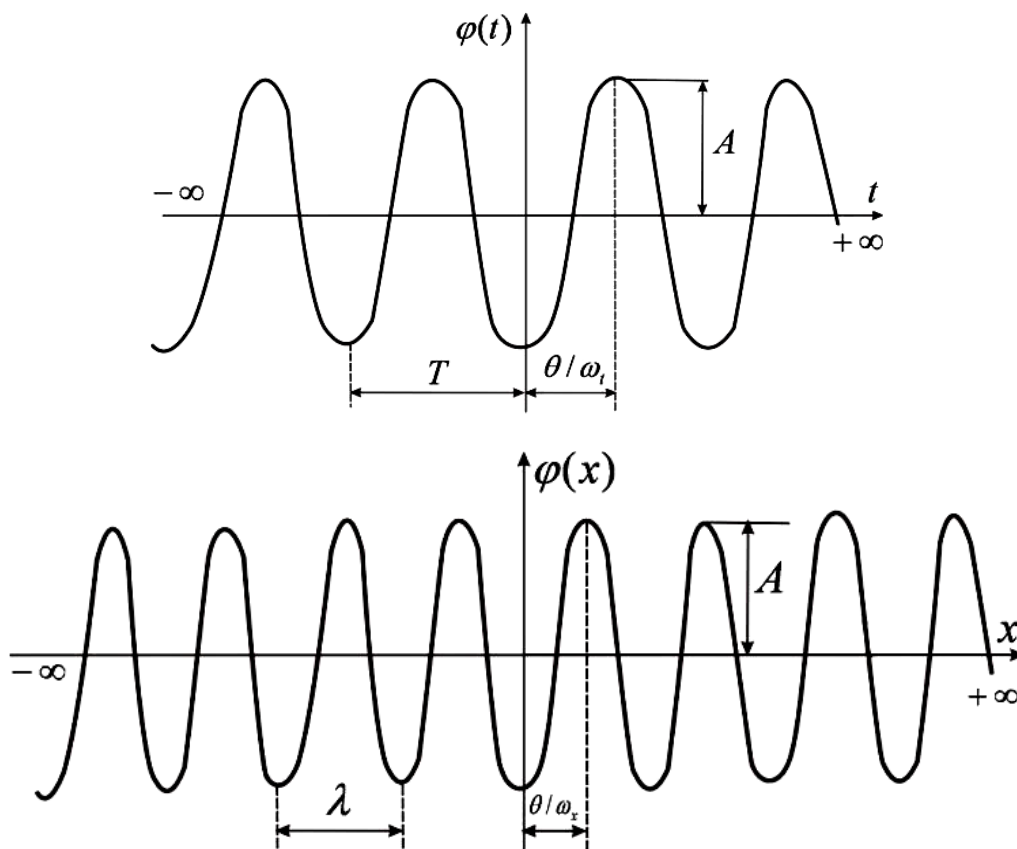


Рис. 10. Гармонічні коливання

Гармонічне коливання можна розглядати у вигляді дійсної (або уявної) частини комплексної змінної:

$$\varphi(t) = \operatorname{Re} \varphi_k(t) = A \operatorname{Re} e^{i\psi} = A \operatorname{Re} [\cos\psi + i\sin\psi] = A \cos\psi, \quad \psi = \omega t - \theta.$$

Комплексне зображення передбачає таку інтерпретацію: комплексний вектор $\varphi_k(t)$ обертається в комплексній площині з кутовою частотою ω . Якщо за годинниковою стрілкою – знак « $-$ », якщо проти – знак « $+$ » (рис.11).

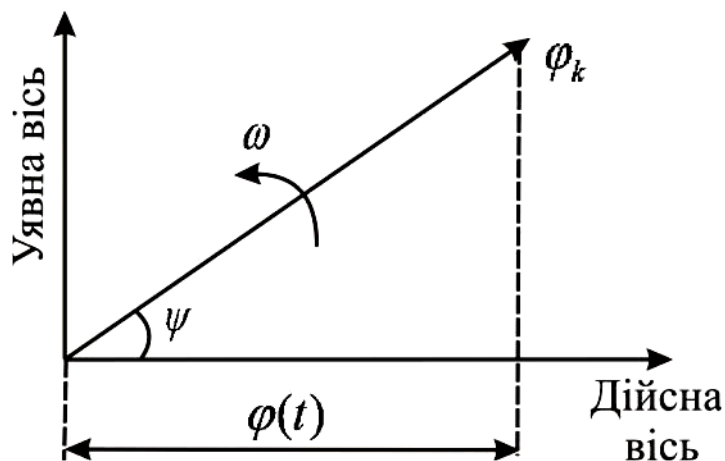


Рис. 11. Комплексне зображення гармонійного коливання

Модуль вектора $|\varphi_k| = A$. Проекцією $\varphi_k(t)$ на дійсну вісь і є сама функція $\varphi(t)$.

Гармонічне коливання $\varphi(t)$ можна також розглядати як суму двох комплексних коливань φ_{+k} і φ_{-k} (рис. 12) з однаковим модулем $0,5A$, що обертаються у протилежних напрямках:

$$\varphi(t) = \varphi_{+k}(t) + \varphi_{-k}(t) = 0,5Ae^{i\psi} + 0,5Ae^{-i\psi} = A\cos\psi.$$

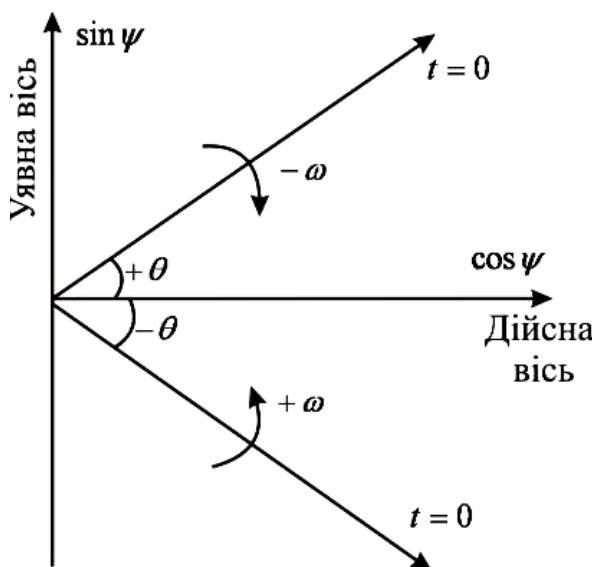


Рис. 12. Комплексне зображення гармонічного коливання у вигляді суми двох комплексних коливань $\varphi_{+k}(t)$ і $\varphi_{-k}(t)$

Один із доданків задає коливання з « від'ємною » частотою $\omega_- = -\omega_+$ та фазою $\theta_- = -\theta_+$. Знак « + » зазвичай опускається.

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \varphi_{+k}(t) + \varphi_{-k}(t) = 0,5Ae^{i(\omega_-t-\theta_-)} + 0,5Ae^{-i(\omega_-t-\theta_-)} \\ &= 0,5Ae^{i(-\omega_+t-\theta)} + 0,5Ae^{-i((-\omega_+)t+\theta_+)}.\end{aligned}$$

Б) Будь який складний періодичний процес може бути зображений за допомогою ряду Фур'є у вигляді суми елементарних гармонійних коливань.

Нехай функції $\varphi(x)$ та $\varphi(t)$ задані на інтервалі від x_1 до x_2 ($t_1 \div t_2$) і повторюються з періодом $\lambda \equiv X$ (чи T) та частотою $\omega_{x_1} = \frac{2\pi}{X}$, $\omega_t = \frac{2\pi}{T}$ (Рис. 13).

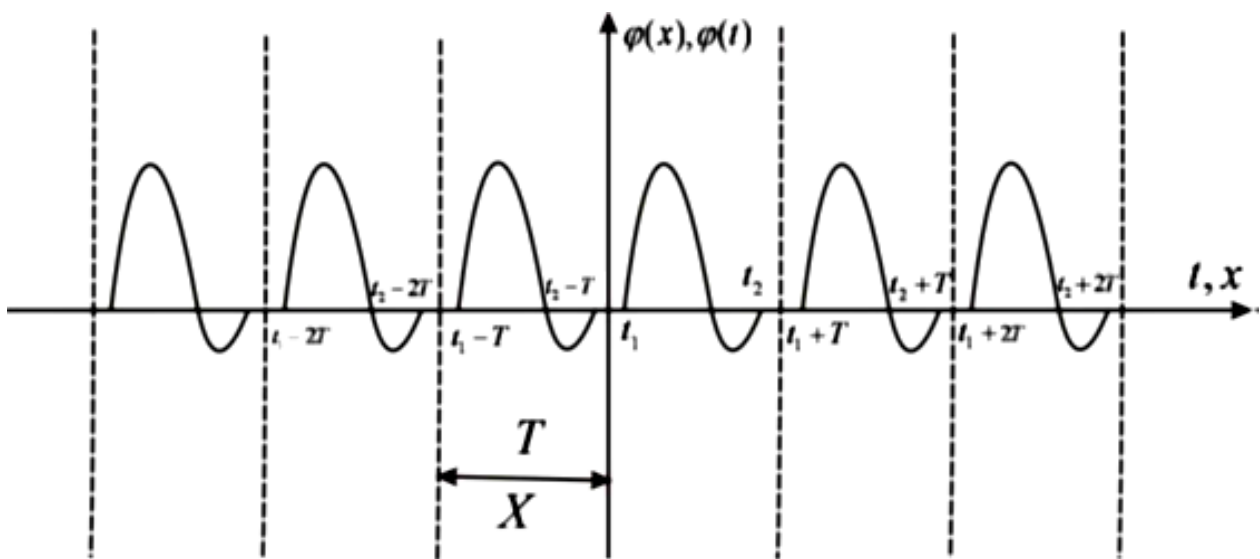


Рис. 13. Графік періодичного сигналу

$$\varphi(x) = \varphi(x + nX), \quad \varphi(t) = \varphi(t + nT), \quad n = 0, 1, 2 \dots \infty$$

Якщо $\varphi(t)$ задовольняє умову Діріхле, тобто неперервна в межах періоду або має в межах періоду скінченну кількість розривів, то її можна представити рядом Фур'є у вигляді суми тригонометричних функцій:

$$\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_{x_1} x + b_n \sin n\omega_{x_1} x), \quad (43)$$

$$\text{де } a_0 = \frac{2}{X} \int_{X_1}^{X_2} \varphi(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{X} \int_{X_1}^{X_2} \varphi(x) \cos n\omega_{x_1} x dx,$$

$$b_n = \frac{2}{X} \int_{X_1}^{X_2} \varphi(x) \sin n\omega_{x_1} x dx,$$

причому $\int_{X_1}^{X_2} dx$ може бути записаний як $\int_0^{X_\tau} dx$, де X_τ – протяжність одиничного імпульсу, тобто інтервал простору або часу, в межах якого одиничний імпульс $\varphi(x) \neq 0$.

Вводячи позначення $a_n = A_n \cos \theta_n$, $b_n = A_n \sin \theta_n$,

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \theta_n = \operatorname{arctg}\left(\frac{b_n}{a_n}\right),$$

вираз (41) можна записати:

$$\varphi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\cos n\omega_{x_1} x - \theta_n), \quad (44)$$

Оскільки

$$a_n \cos n\omega_{x_1} x + b_n \sin n\omega_{x_1} x = A_n (\cos \theta_n \cos n\omega_{x_1} x + \sin \theta_n \sin n\omega_{x_1} x) = A_n (\cos n\omega_{x_1} x - \theta_n),$$

$$A_0 = a_0.$$

Довільний періодичний процес може бути зображений у вигляді суми гармонічних складових і визначатися сукупностями значень A_n і θ_n .

Сукупність величин A_n називається **спектром амплітуд**, а сукупність величин θ_n – **спектром фаз**. Під словом ‘спектр’ розуміють спектр амплітуд. Графічно спектр амплітуд зображується вертикальними відрізками, що відповідають значенню n-ї гармоніки (рис. 14).

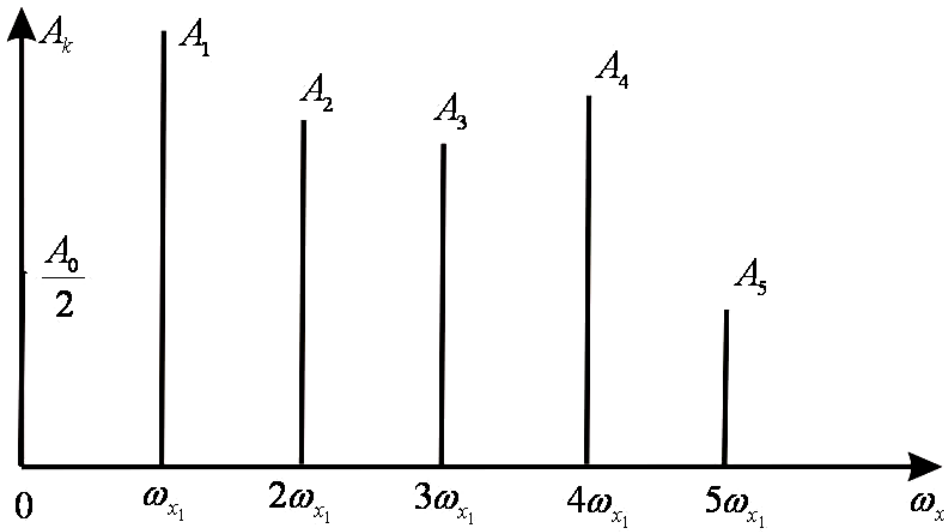


Рис. 14. Спектр періодичної функції

Спектр періодичної функції складається з окремих ліній, які відповідають дискретним частотам $0, \omega_{x_1}, 2\omega_{x_1}, 3\omega_{x_1}$ і т.п.

Дискретність спектра не є ознакою періодичності функції. Спектр періодичної функції буде не лише дискретним, а й гармонічним, тобто буде складатися з еквідистантно розміщених спектральних ліній – гармонік, кратних значенню ω_{x_1} . Функції, що мають дискретні спектри з довільно розміщеними на шкалі частот спектральними лініями, називаються **квазіперіодичними**.

Квазіперіодичними будуть модульовані коливання, суперпозиція із двох періодичних процесів, із некрatними частотами.

Поряд із дійсною формою періодичного процесу значне поширення отримала комплексна форма, основою якого є зображення окремого гармонічного коливання як суми комплексних векторів.

Спектр Фур'є періодичного процесу визначається рядом Фур'є:

$$F(i\omega_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-i\omega_x x} dx = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{A}_n \delta(n\omega_{x_1} - \omega_x),$$

$$\text{де } \bar{A}_n = A_n e^{-i\theta_n}.$$

Спектри Фур'є – сума гармонічних складових комплексних амплітуд.

Фізично результат множення на $\delta(n\omega_{x_1} - \omega_x) = \infty$ отримується через додавання нескінченної кількості періодично повторюваних процесів на інтервалі $[-\infty < x < +\infty]$.

Амплітудний спектр: $|F(i\omega_x)| = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \delta(\omega_x - n\omega_{x_1})$, тобто спектр Фур'є - це наявність характерних складових амплітудного спектра.

Можна записати: $F(i\omega_x) = \frac{2\pi}{X} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(i\omega_x) \delta(\omega_x - n\omega_{x_1})$, де $F_0(i\omega_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x) e^{-i\omega_x x} dx = \int_{-X_1}^{X_2} \varphi_0(x) e^{-i\omega_x x} dx$ або $F_0(i\omega_x) = \bar{A}_n \frac{X}{2}$, якщо вибираємо функцію $\varphi(x)$ для одного відліку на інтервалі $[-\frac{X}{2} \div \frac{X}{2}]$ чи $[-X_1 \div X_2]$.

Спектр амплітуд періодичної функції визначається дотичною (модулем) Фур'є перетворення одного відліку функції з дискретизацією частот, яка дорівнює $n\omega_{x_1} = \omega_x$ (рис. 15).

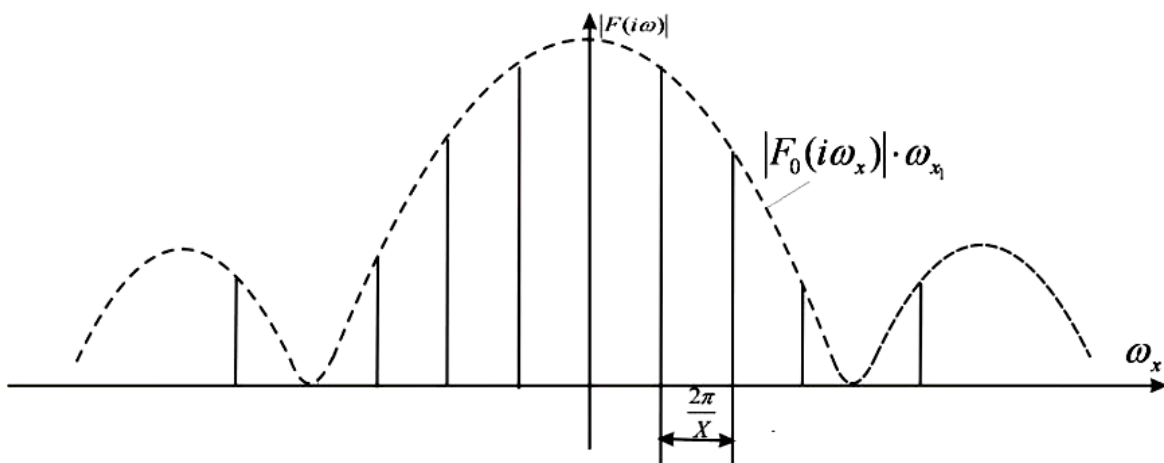


Рис. 15. Графік амплітудного спектра Фур'є періодичного сигналу

1.2.2. Спектри неперіодичних сигналів

Нехай функція $\varphi(x)$ (або $\varphi(t)$), яку називають сигналом, неперіодична. Для неї виконується умова $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)| dx = N < \infty$, що задовольняє умову Діріхле. Тобто $\varphi(x) \rightarrow 0$, при $x \rightarrow \pm\infty$. Функція $\varphi(x)$ відмінна від нуля на інтервалі $X_1 < X < X_2$ (рис. 16). Функція $\varphi(x) \neq [X_1 X_2]$.

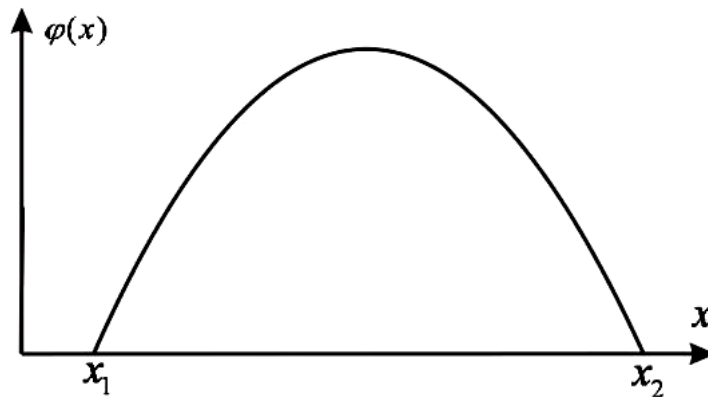


Рис. 16. Функція $\varphi(x)$ відмінна від нуля на інтервалі $X_1 < X < X_2$

Для проведення гармонійного аналізу побудуємо із функції $\varphi(x)$ нову функцію $\varphi'(x)$, шляхом її еквідистантного повторення з періодом $X > X_2 - X_1$:

$$\varphi'(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_{x_1} x + b_n \sin n\omega_{x_1} x) =$$

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\cos n\omega_{x_1} x - \theta_n) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \bar{A}_n e^{in\omega_{x_1} x}.$$

Амплітуди будуть тим меншими, чим більшим буде інтервал X .

$$A_0 = a_0 = \frac{2}{X} \int_{X_1}^{X_2} \varphi(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{X} \int_{X_1}^{X_2} \varphi(x) \cos n\omega_{x_1} x dx,$$

$$b_n = \frac{2}{X} \int_{X_1}^{X_2} \varphi(x) \sin n\omega_{x_1} x dx, \quad A_n = \frac{2}{X} \int_{X_1}^{X_2} \varphi(x) e^{-in\omega_{x_1} x} dx.$$

$$\bar{A}_n = A_n \cdot \exp(-i\theta_n).$$

Отримуються нескінченно малі амплітуди гармонійних складових, їхня кількість стає нескінченно великою на обмеженому відрізку просторових частот ω_x , оскільки основна частота $\omega_{x_1} = \frac{2\pi}{X}$, при $X \rightarrow \infty$, стає нескінченно малою, як і сама відстань між спектральними лініями, яка буде малою.

Неперіодична функція $\varphi(x)$ зв'язана з її спектральною густиною так:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(i\omega_x) e^{i\omega_x x} d\omega_x.$$

$$F(i\omega_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-i\omega_x x} dx$$

В шкалі просторових частот ($f_x = \frac{1}{x}$) можна записати:

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(if_x) e^{i2\pi f_x x} df_x$$

Вирази

$$F(i\omega_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-i\omega_x x} dx$$

$$F(if_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-i2\pi f_x x} dx$$

називають **прямим перетворенням Фур'є**, а функції $F(i\omega_x)$, $F(if_x)$ – **спектральною густиною**, **спектральною характеристикою**, **комплексним спектром Фур'є** функції $\varphi(x)$.

Вирази

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(i\omega_x) e^{i\omega_x x} d\omega_x$$

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(if_x) e^{i2\pi f_x x} df_x$$

зворотні перетворення Фур'є.

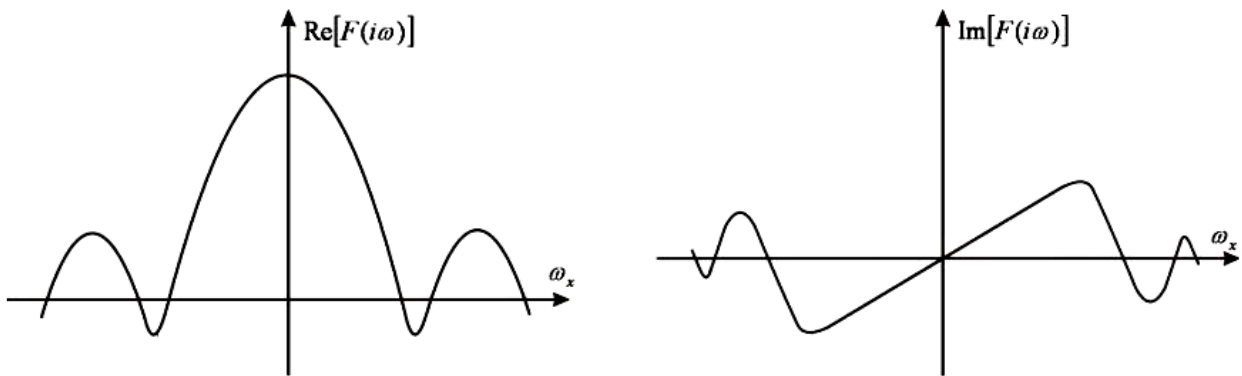


Рис. 17. $Re[(i\omega_x)]$ – завжди парна функція,
 $Im[(i\omega_x)]$ – непарна

Якщо $\varphi(x)$ – парна функція, то $\varphi(x) = \varphi(-x)$, тоді $F(i\omega_x)$ – парна, дійсна функція.

$$F(i\omega_x) = 2 \int_0^{\infty} \varphi(x) \cos \omega_x x dx.$$

Якщо $\varphi(x)$ – непарна функція, тобто $\varphi(x) = -\varphi(-x)$, тоді $F(i\omega_x)$, то

$$F(i\omega_x) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \sin \omega_x x dx = -2i \int_0^{\infty} \varphi(x) \sin \omega_x x dx$$

- комплексна непарна функція;

$$Im[F(i\omega_x)] = 2 \int_0^{\infty} \varphi(x) \sin \omega_x x dx.$$

Для функції залежної від n -аргументів:

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} F(i\vec{\omega}_x) e^{i\vec{\omega}_x \vec{x}} d\vec{\omega}_x;$$

$$F(i\vec{\omega}_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\vec{x}) e^{-i\vec{\omega}_x \vec{x}} d\vec{x}.$$

Тут $\vec{\omega}_x \vec{x} = \omega_{x_1} x_1 + \omega_{x_2} x_2 + \dots + \omega_{x_n} x_n$ - скалярний добуток n -вимірних векторів у просторі координат $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ та у просторі частот $\vec{\omega}_x = \{\omega_{x_1}, \omega_{x_2}, \dots, \omega_{x_n}\}$.

1.3. Властивості Фур'є спектрів

1.3.1. Теорема про спектр суми

Нехай функції $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ мають спектри $F_1(i\omega_x)$ та $F_2(i\omega_x)$. Спектр суми двох функцій дорівнює сумі спектрів цих функцій:

$$F(i\omega_x) = F_1(i\omega_x) + F_2(i\omega_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi_1(x) + \varphi_2(x)] e^{-i\omega_x x} dx$$

1.3.2. Теорема про парність та непарність функцій

Коли функція $\varphi(x)$ – парна функція, тобто $\varphi(x) = \varphi(-x)$, то:

$$F(i\omega_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-i\omega_x x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cos \omega_x x dx,$$

$$F(i\omega_x) = F(-i\omega_x) = F(\omega_x).$$

Якщо функція $\varphi(x)$ – непарна ($\varphi(x) = -\varphi(-x)$), то:

$$F(i\omega_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-i\omega_x x} dx = -i \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \sin \omega_x x dx.$$

При цьому $F(-i\omega_x) = -F(\omega_x)$.

1.3.3. Теорема про комплексно спряжене

Нехай $\varphi(x)$ – комплексний сигнал, $F(i\omega_x)$ – його спектральна густина.

Знайдемо спектральну гуштину сигналу, що спряжений з $\varphi(x)$, тобто $\varphi^*(x)$.

$$\varphi(x) = \varphi_{\partial}(x) + i\varphi_{im}(x),$$

$$\varphi^*(x) = \varphi_{\partial}(x) - i\varphi_{im}(x),$$

Нехай $F_c(i\omega_x)$ – шукана спектральна густина спряженого сигналу:

$$F_c(i\omega_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(x) e^{-i\omega_x x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\partial}(x) e^{-i\omega_x x} dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{im}(x) e^{-i\omega_x x} dx$$

Якщо

$$F_c(i\omega_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\partial}(x) e^{-i\omega_x x} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{im}(x) e^{-i\omega_x x} dx$$

тоді

$$F^*(-i\omega_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\partial}(x) e^{i\omega_x x} dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{im}(x) e^{i\omega_x x} dx.$$

Порівнюючи $F_c(i\omega_x)$ та $F^*(i\omega_x)$, отримаємо, що спектральна густина сигналу комплексно спряжена із заданим та визначається шляхом заміни знака в аргументі та спряження, тобто $F_c(i\omega_x) = F^*(-i\omega_x)$.

1.3.4. Теорема про зміщення та запізнення

У практиці часто є необхідність зміщувати шкали частот, часу на постійну величину. Теорема зміщення встановлює зв'язок між функціями зі зміщеними шкалами.

Змістимо сигнал $\varphi(x)$ по часу на x_0 . Тоді спостерігаємо за зміною спектральної густини:

$$F_{\text{зап}}(i\omega_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x - x_0) e^{-i\omega_x(x-x_0)} dx = e^{+i\omega_x x_0} F(i\omega_x),$$

якщо $x' = x - x_0$.

Це **теорема запізнення**. При зміщенні функції (сигналу) в часі відбувається модуляція спектральної потужності. Ширина зміщеної та незміщеної функції однакова.

Відповідно змістимо ω_x на величину ω_{x_0} .

$\varphi_{\text{зм}}(x) = \varphi(x) e^{i\omega_{x_0} x} = |\varphi(x)| e^{i[\omega_{x_0} x + \arg\varphi(x)]}$ - **теорема зміщення**.

Зміщення спектральної густини на ω_{x_0} приводить до модульованого сигналу з несучою частотою ω_{x_0} . Якщо задати, що $\varphi(x)$ - керуючий сигнал, то сигнал $\varphi_{\text{зм}}(x)$ виявляється модульованим за амплітудою та фазою.

1.3.5. Зв'язок між скалярним добутком функції та їх спектрами.

Рівність Парсеваля

Важливі співвідношення для функцій, що задовольняють перетворенням Фур'є, випливають зі співвідношення, отриманого Релеєм.

Нехай $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ – дійсні чи комплексні сигнали та $F_1(i\omega_x)$, $F_2(i\omega_x)$ – відповідні їм спектральні густини.

Скалярний добуток:

$$(\varphi_1 \varphi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^*(x) \varphi_2(x) dx,$$

$$(F_1 F_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1^*(i\omega_x) F_2(i\omega_x) d\omega_x.$$

Формула Релея встановлює зв'язок між скалярним добутком функцій та їх спектрами:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^*(x) \varphi_2(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1^*(i\omega_x) F_2(i\omega_x) d\omega_x,$$

або

$$(\varphi_1 \cdot \varphi_2) = \frac{1}{2\pi} (F_1 \cdot F_2).$$

При $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \varphi(x)$ отримуємо рівність, що називається **формулою Парсеваля**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(i\omega_x)|^2 d\omega_x.$$

Ця рівність відображає закон збереження енергії. Якщо $|\varphi(x)|^2$ – густина енергії на одиничному інтервалі x , то $|F(i\omega_x)|^2$ – енергія, що припадає на одиничний інтервал шкали ω_x ; повна енергія при переході від однієї шкали до іншої повинна залишатися однаковою.

1.3.6. Функції кореляції

Якщо у функцій φ_1 та φ_2 шкали зміщені на величину τ , то їх скалярний добуток буде називатись **функцією кореляції** φ_1 та φ_2 :

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^*(x) \varphi_2(x + \tau) dx.$$

На основі формул Релея та теореми запізнення:

$$K_{12}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1^*(i\omega_x) F_2(i\omega_x) e^{i\omega_x \tau} d\omega_x.$$

Функція взаємної кореляції $K_{12}(\tau)$ являє собою зворотне перетворення Фур'є від добутку функції $F_1^*(i\omega_x)F_1(i\omega_x)$. Функції $K_{12}(\tau)$ та $K(\tau)$ – посідають важливе місце в теорії когерентності, аналізі шумів оптичних вимірювальних систем, Фур'є-спектроскопії та при дослідженні різноманітних випадкових процесів.

Якщо $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)=\varphi(x)$, то функцію $K(\tau)$ називають **функцією автокореляції**, тобто

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^*(x)\varphi_2(x + \tau) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(i\omega_x)|^2 e^{i\omega_x\tau} d\omega_x.$$

1.3.7. Теорема згортки функцій

Спектральна густина згортки функцій φ_1 та φ_2 дорівнює добутку їх спектральних густин, тобто

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x - x')\varphi_2(x') dx' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(i\omega_x)F_2(i\omega_x) e^{i\omega_x x} d\omega_x.$$

$$\varphi_1 \otimes \varphi_2 = F_1 F_2.$$

1.3.8. Теорема про спектр похибки

Нехай спектр функції $\varphi(x)$ дорівнює $F(i\omega_x)$. Визначимо спектр $F_1(i\omega_x)$, що дорівнює похідній від заданого сигналу $\varphi'(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx}$.

$F_1(i\omega_x) = i\omega_x \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-i\omega_x x} d\omega_x = i\omega_x F(i\omega_x)$, тобто спектр похідної дорівнює спектру вихідної функції, помноженої на $i\omega_x$ (або $i2\pi f_x$ у представленні зворотних частот).

1.3.9. Теорема про спектр інтеграла

Нехай спектр функції $\varphi(x)$ дорівнює $F(i\omega_x)$. Знайдемо спектр $F_1(i\omega_x)$ інтеграла від заданої функції в межах від $-\infty$ до X , тобто

$$\varphi_1(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(x) dx.$$

Спектр інтеграла:

$$F_1(i\omega_x) = \frac{1}{i\omega_x} F(i\omega_x).$$

1.3.10. Зміна масштабу та поворот системи координат при Фур'є-перетворенні

При розрахунку оптичних систем часто виникає необхідність перетворення векторного аргументу \vec{x} функції $\varphi(\vec{x})$, пов'язаного зі зміною масштабу або поворотом системи координат.

Виникає питання: як знайти спектр функції φ після перетворення її аргументу.

Для функції $\varphi(\vec{x})$ її спектр Фур'є:

$$F(i\vec{\omega}_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\vec{x}) e^{-i\vec{\omega}_x \vec{x}} d\vec{x}.$$

Здійснимо лінійне перетворення n -вимірного аргументу \vec{x} у n -вимірний аргумент \vec{z} згідно з правилом:

$$\vec{z} = \hat{A}\vec{x}, \quad \vec{x} = \hat{A}^{-1}\vec{z}; \quad d\vec{x} = \det \hat{A}^{-1} d\vec{z}.$$

$\hat{A} = \|a_{ik}\|$, ($i, k=1, 2, \dots, n$) – $n \times n$ -вимірна матриця коефіцієнтів перетворення.

Тоді

$$F(i\vec{\omega}_z) = \det \hat{A}^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\vec{z}) e^{-i\vec{z}\hat{A}^{-1}\vec{\omega}_x} d(\vec{z}) = \det \hat{A}^{-1} \cdot F(i\hat{A}^{-1}\vec{\omega}_x).$$

$$\det \hat{A}^{-1} F(\hat{A}^{-1}\vec{\omega}_x)$$

Для двовимірного випадку:

$$\hat{A} = \begin{vmatrix} a_x & 0 \\ 0 & a_y \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}; \quad \det \hat{A} = a_x a_y;$$

$$\hat{A}^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_y} \end{vmatrix}; \quad \det \hat{A}^{-1} = \frac{1}{a_x a_y}.$$

$$\hat{A}^{-1} = \frac{\|A_{k,i}\|}{\det \hat{A}} - n \times n\text{- вимірна матриця, зворотна матриці } \hat{A};$$

$\det \hat{A}$ – визначник матриці \hat{A} ;

$A_{k,i}$ – алгебраїчне доповнення елементів a_{ik} прямої матриці \hat{A} .

Алгебраїчне доповнення

$$A_{ki} = (-1)^{k+i} M_{ki}, k - \text{стовбець, } i - \text{ряд.}$$

Якщо є функція $\varphi(\vec{x})$ і її спектр $F(i\vec{\omega}_x)$, то для знаходження спектра $F(i\vec{\omega}_z)$ функції $\varphi(\vec{z})$ необхідно помножити модуль початкового спектра на визначник матриці \hat{A}^{-1} , а аргумент $\vec{\omega}_x$ у просторі частот – на саму матрицю \hat{A}^{-1} .

При повороті системи координат заданої функції проти годинникової стрілки на кут ψ частотний спектр нової функції $F(i\omega_{x_1}, i\omega_{y_1})$ відповідає частотному спектрові $F(i\omega_x, i\omega_y)$ при повороті його просторових частот (ω_x, ω_y) за годинниковою стрілкою.

1.3.11. Функції з обмеженим спектром. Теорема Котельникова

При передачі реальних сигналів їх спектр завжди обмежений значенням смуги пропускання частотного тракту оптичної системи. Обмеження за спектром приводить до того, що відповідні сигнали можуть бути визначені кінцевою кількістю значень на визначеному інтервалі. Ця особливість випливає з теореми В.А. Котельникова: якщо функція $\varphi(x)$ не містить частот, більших ніж f_{xmt} , то вона повністю визначається шляхом задання її ординат у послідовних точках, які знаходяться на відстані $\frac{1}{2f_{xmt}}$ одна від одної.

Контрольні питання та завдання

1. Дайте визначення, що таке лінійні системи, навести методи їх дослідження та характеристики.
2. Проаналізувати структуру ОВС різного типу.
3. Пояснити реакцію лінійної системи на різного типу сигналів.
4. Надати фізичне обґрунтування рівняння згортки.
5. Проаналізувати сигнали з кількома змінними.
6. Пояснити перетворення Фур'є та з'ясувати його властивості.

Розділ 2. Хвильові поля у вільному просторі [3, 4]

2.1. Просторові та кутові спектри хвильових полів

Для отримання різних форм математичного зображення хвильових процесів використовують спектральний розклад, як самих полів, так і джерел за часовим, просторовим або кутовим зміщеннями. Існують різні форми запису полів із використанням комплексних функцій (комплексна амплітуда та комплексна фаза). Є можливість спектрального розкладу хвильового фронту як функції часу у вільному просторі.

З принципу суперпозиції хвильових полів отримаємо, що кожен спектральний компонент поля можна розглядати як окреме монохроматичне коливання, незалежно від наявності інших спектральних компонент.

Поняття комплексної амплітуди монохроматичного коливання можна перенести на хвильові поля, вважаючи, що монохроматичне хвильове поле в кожній точці являє собою монохроматичне коливання. Характерною рисою хвильового процесу є взаємозв'язок коливань, які відбуваються у різних точках та у різні моменти часу.

Розглянемо плоску скалярну монохроматичну хвилю:

$$2A \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} - u) \\ = A \exp(i\varphi + i\omega t + i\vec{k}\vec{r}) + A \exp(i\varphi - i\omega t - i\vec{k}\vec{r}),$$

де \vec{k} – хвильовий вектор, модуль якого $\frac{2\pi}{\lambda}$.

Тут плоска хвиля – сума двох комплексно спряжених доданків.

Як вираз для плоскої хвилі можна взяти один із двох доданків за умови можливості приєднання до нього комплексно спряженого доданка. Комплексно спряжений доданок можна додавати також після виконання будь-якої лінійної операції, навіть якщо вона виконується з одним із 2-х доданків, тобто коли вже отримано кінцевий результат.

Нас будуть цікавити лінійні операції, тому будемо розглядати лише другий член суми:

$$\rho(x, y, z) = A \exp(i\varphi) \exp(i\vec{k}\vec{r}) = A \exp(i\varphi) \exp[i(k_x x + k_y y + k_z z)]$$

Перетворюємо останній вираз, щоби ввести параметри плоскої хвилі явно.

Плоска хвиля задається частотою (довжиною хвилі), напрямком поширення, фазою коливання.

Довжина хвилі може бути визначена з рівняння

$$k^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} = \frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2.$$

Цей вираз демонструє, що напрямок поширення хвилі визначається величиною проекції хвильового вектору на осі ординат. У загальному випадку напрямок поширення задається двома кутами α та φ .

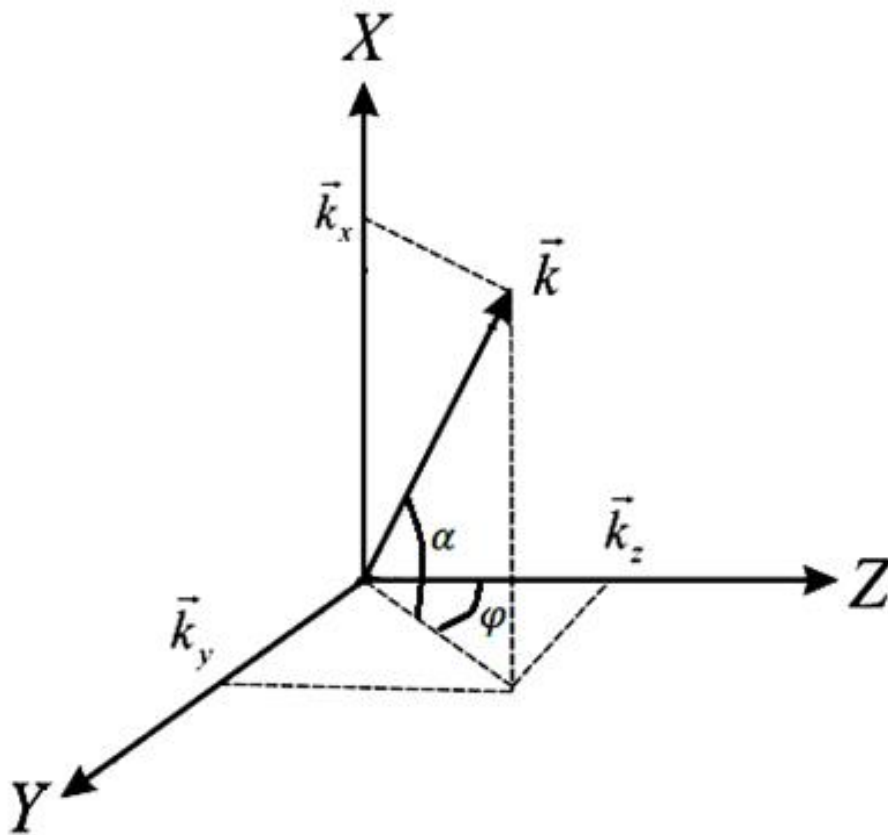


Рис. 18. Хвильовий вектор у декартовій системі координат

Тоді $k_x = k \sin \alpha$, $k_y = k \cos \alpha \sin \varphi$, $k_z = k \cos \alpha \cos \varphi$.

Нехай $k_x = u_1 = k \sin \alpha$, $k_y = u_2 = k \cos \alpha \sin \varphi$, тоді для k_z отримаємо:

$$k_z = \pm \sqrt{k^2 - u_1^2 - u_2^2}.$$

Комплексна амплітуда плоскої монохроматичної хвилі може бути записана так:

$$\rho(x, y, z) = A \exp(i\varphi) \exp\left(\pm iz\sqrt{k^2 - u_1^2 - u_2^2}\right) \exp[i(u_1 x + u_2 y)] \quad (1)$$

Цей вираз містить у явному вигляді характерні параметри хвилі: амплітуду A , довжину хвилі $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, фазу, напрямки поширення u_1 та u_2 .

Останній вираз задовольняє хвильовому рівнянню для довільних u_1 та u_2 , що змінюється в межах від мінус до плюс безмежності, лише якщо виконується умова:

$$u_1^2 + u_2^2 \leq k^2.$$

2.2. Хвильове рівняння для монохроматичної хвилі

Використовуємо отримане зображення плоскої монохроматичної хвилі (1) для побудови загального розв'язком хвильового рівняння.

Вважаємо, що хвильове рівняння – лінійне, для нього виконується принцип суперпозиції. Якщо (1) є розв'язком хвильового рівняння, то сума полів типу (1) теж буде розв'язком хвильового рівняння. Тобто якщо записуємо суму типу (1) з довільними амплітудами, фазами та напрямками поширення, то отримаємо розв'язок, який буде узагальненням (1).

Такий розв'язок може бути записаний як інтеграл від (1) по незалежних параметрах таких хвиль, якими є їх амплітуди, фази та напрямки поширення:

$$\rho(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} g(u_1, u_2) e^{\pm iz\sqrt{k^2 - u_1^2 - u_2^2}} e^{i(u_1x + u_2y)} du_1 du_2. \quad (2)$$

Тут $g(u_1, u_2)$ – комплексна функція, яка визначає амплітуду та фазу окремої плоскої хвилі з напрямком поширення, що задається сукупністю дійсних змінних u_1 та u_2 , містить поряд зі звичайними плоскими хвилями ще й неоднорідні хвилі. Це *представлення Релея опису хвилі*.

Вираз (2) є узагальненим поняттям комплексної амплітуди для неплоскої монохроматичної хвилі. Від цього виразу можна прийти до реального поля, якщо помножити на $\exp(-i\omega t)$ та додаючи до отриманого виразу комплексно спряжений доданок.

Вираз (2) є загальним розв'язком хвильового рівняння.

Можна побудувати точний розв'язок скалярного хвильового рівняння, що задовольняє граничну умову на площині $z = 0$.

Необхідно побудувати розв'язок для $z > 0$.

Вибираємо замкнену поверхню, що складається з площини $z = 0$ та півсфери при $z > 0$, причому при $z = 0$ хвильове рівняння має вигляд заданого поля, а на безмежній сфері перетворюються у нуль (умова випромінювання Кіргофа). Значення заданого поля записуємо у вигляді комплексної амплітуди на площині $z = 0$. Позначимо її $\rho(x, y, 0)$.

Тоді розв'язок (2) перетворюється у заданий при $z = 0$:

$$\rho(x, y, 0) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} g(u_1, u_2) e^{i(u_1x + u_2y)} du_1 du_2 \quad (3)$$

Отримаємо *інтеграл Фур'є*.

Відповідно,

$$g(u_1, u_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y, 0) e^{-i(u_1x + u_2y)} dx dy. \quad (4)$$

Визначивши $g(u_1, u_2)$, ми накладаємо граничні умови при $z = 0$.

Розв'язок двозначний, оскільки можна вибрати довільний із двох знаків перед координатою z у (2). Ця невизначеність усувається, якщо врахувати граничні умови на безмежній сфері.

Зміна знака z змінює затухаюче поле на наростаюче.

Неоднорідні хвилі отримуються при $u_1^2 + u_2^2 > k$. При цьому убуваюче з ростом z поле отримується, якщо перед z стоїть знак $\ll + \gg$.

Тоді

$$\rho(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} g(u_1, u_2) e^{iz\sqrt{k^2 - u_1^2 - u_2^2}} e^{i(u_1x + u_2y)} du_1 du_2, \text{ якщо } z > 0$$

$$\rho(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} g(u_1, u_2) e^{-iz\sqrt{k^2 - u_1^2 - u_2^2}} e^{i(u_1x + u_2y)} du_1 du_2, \text{ якщо } z < 0$$

(5)

$g(u_1, u_2)$ визначається як (4).

Останні два вирази задають комплексну амплітуду скалярного поля у всьому просторі у вигляді суперпозиції плоских хвиль різних напрямків (у тому числі неоднорідних) із різними амплітудами і фазами.

Функція $g(u_1, u_2)$, що визначає розподіл амплітуд і фаз плоских хвиль по напрямках, має назву **спектра хвильового поля або кутового спектра поля**.

“Кутовий спектр” відображає зв'язок аргументів u_1 та u_2 з кутами поширення відповідних плоских хвиль. Нехай задане поле не залежить від координат y .

Тоді $\rho(x, y, 0) = \rho(x, 0)$ і підставимо у (4):

$$g(u_1, u_2) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, 0) e^{-iu_1 x} dx \cdot \delta(u_2) = 2\pi \delta(u_2) g(u_1).$$

При довільному значенні z поле (1) запишеться як $\rho(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{iz\sqrt{k^2 - u^2}} e^{iux} du$ та не залежить від координати y .

2.3. Зміст просторових частот

Розглянемо співвідношення (3) та (4). Це інтеграли Фур'є для двох пар змінних u_1, u_2 та x, y . Змінні x та y – координати точок простору та мають розмірність довжини. Змінні u_1 та u_2 мають розмірність обернену до довжини. Ці змінні називають **просторовими частотами**.

Запишемо інтеграл Фур'є для довільної функції $f(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_f(\omega) e^{i\omega t} d\omega; \quad C_f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Вирази (3) та (4) представлені аналогічно.

Змінні u_1 та u_2 характеризуються такими самими властивостями, що й частота ω .

У цьому змісті u_1 та u_2 – просторові частоти. Функція $g(u_1, u_2)$ – просторовий спектр функції $\rho(x, y, 0)$.

Згідно з (5), змінні u_1, u_2 мають інший зміст, а саме визначає поширення плоских хвиль: $k_x = u_1 = k \sin \alpha, k_y = u_2 k \cos \alpha \sin \varphi$.

Кути, під якими поширюються хвилі, визначаються з наведених умов, зміст яких в тому, що величини проєкцій хвильового вектору на координатні осі x та y повинні дорівнювати u_1 та u_2 . Таким чином, змінні u_1 та u_2 мають подвійний зміст – це з одного боку просторові частоти, а з іншого – величини, на які розкладається хвильове поле. Саме тому функція $g(u_1, u_2)$ носить назву **кутового спектру**.

“*Кутовий спектр*” – розклад хвильового поля в спектр плоских хвиль різних напрямків поширення. У вирази з u_1 та u_2 , як просторових частот, довжина хвилі не входить. Тому значення просторових частот лишаються незмінними при збереженні геометрії розподілу джерел поза залежністю від частоти випромінювання та швидкості поширення хвиль у просторі (довжина хвилі). Спектр напрямку плоских хвиль, що відповідає цьому просторовому спектру, залежить від довжини хвилі випромінювання. Зі збільшенням довжини хвилі кутовий спектр, представлений у значеннях кутів, деформується.

2.4. Розв’язок дифракційних задач. Наближення Кіргофа

У цілому є можливість визначити поля на певній відстані за значеннями поля, що задано на іншій відстані. Але найбільш часто зустрічаються так звані дифракційні задачі, які формулюються так:

У полі хвилі (плоскої або сферичної) розташована перешкода, геометричні параметри якої (форма, розміри і т.п.), електричні властивості матеріалу (поглинаючий, прозорий, певного показника заломлення) відомі. Треба визначити поле, яке отримується на значній відстані від перешкоди.

На рис.19 зображено непрозорий екран з отвором, на який падає плоска хвиля, або плоска хвиля падає на деяке прозоре тіло, що відрізняється показником заломлення. Треба визначити поле, яке буде в просторі, якщо тіло внесено у поле початкової хвилі.

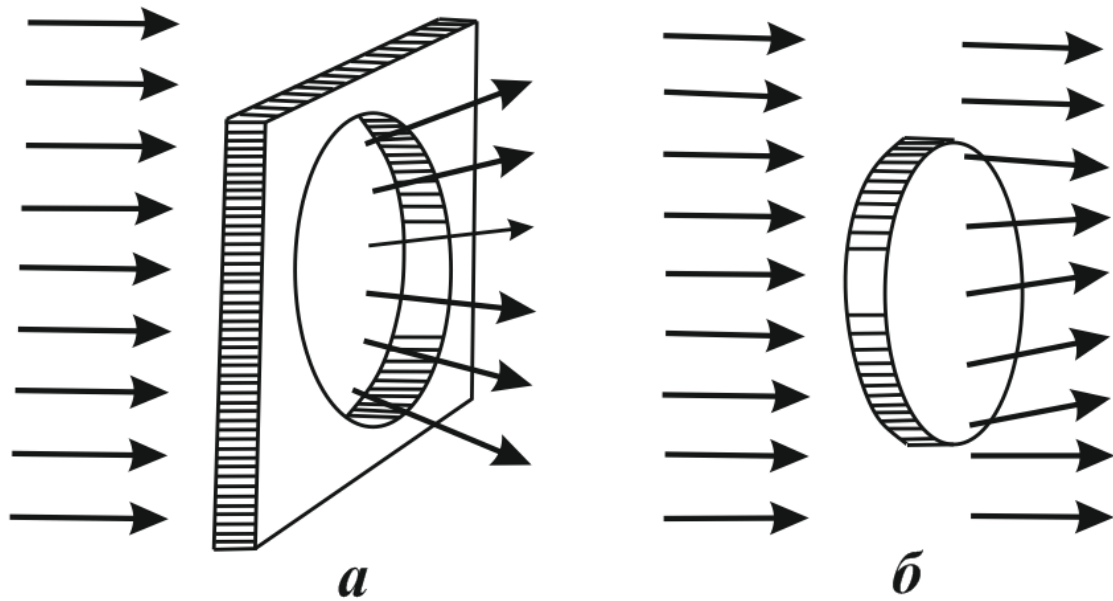


Рис. 19. Пояснення дифракційної задачі

При розв'язуванні дифракційних задач використовують наближення Кіргофа, згідно з яким вважається, що поле на перешкоді існує та дорівнює нулю, поза перешкодою є таким, як у разі відсутності перешкоди. Таке наближення використовують для щілин, ґраток, інших перешкод.

В іншому випадку, що не пов'язаний зі зміною амплітуди, а зі зміною фази хвилі, зміна фази всередині структури описується інтегруванням фазового набігу всередині фазового екрана вздовж траєкторії процесів, що розраховується за законами геометричної оптики. Вищенаведені міркування використовують для розв'язку дифракційних задач так:

На найбільшій відстані від перешкоди проводять площину з боку хвилі, що пройшла. На цій площині, використовуючи наближення Кіргофа, задають поле хвилі, спотворено перешкодою. Ця площина потім приймається за площину $z = 0$. Далі, використовуючи вираз для $\rho(x, y, z)$ при $z = 0$ (2), розв'язують дифракційну задачу, тобто знаходять поле при довільному z . Цей розв'язок наближений, хоча формула точна. Наближення полягає в тому, що йдеться про заміну реального поля в площині $z = 0$ його наближеним виразом.

У цілому наближення Кіргофа грубе. Воно має описувати хвильове поле, яке обов'язково задовольняє хвильовому рівнянню. Однак отримане поле, згідно з правилом Кіргофа, хвильове рівняння не задовольняє, і тому не може відповідати реальному хвильовому полю.

Були спроби ввести більш складні правила знаходження полів, які би усували протиріччя з хвильовим рівнянням. Однак для полів на достатньому віддаленні отримані результати узгоджуються з експериментом.

Строгий розв'язок дифракційних задач також узгоджуються з наближенням Кіргофа на достатньо значних відстанях.

Виникає питання: У чому проблема задачі і що дає співвідношення (2)?

Це співвідношення дозволяє знайти поле при довільному z , якщо відомі поля при якомусь значенні z . Розв'язок рівняння (2) робить всі перетини поля рівноправними. Тому поле після перешкоди мало бути такими ж самими, як на відстані, тому розв'язок рівняння (2) рівноправний. Але яке ж поле у перетині, рівняння (2) відповіді не дає. Тому проблема полягає не в знаходженні поля в залежності від відстані, а у знаходженні правильного значення поля на довільній відстані.

У принципі рівняння (2) дає правильний розв'язок, оскільки воно виконує роль фільтра, який пропускає не всі просторові частоти, а лише ті частоти, які потрапляють у деяку вузьку смугу. Ця властивість тим істотніша, чим більшу відстань проходить поле після перешкоди (фільтр буде мати більш крутий фронт, чим більша відстань z). За допомогою наближення Кіргофа задається значення поля на вході фільтра, а за допомогою рівняння (2) розраховується значення на виході. Виявляється, що істотна відмінність наближення Кіргофа від справжніх значень поля проявляється в тій області просторових частот, яку фільтр не пропускає. Отже є два ефекти:

- 1) відсікаються частоти у початковому полі, що не відповідає дійсності;
- 2) там, де наближення відповідає дійсності, відбувається перетворення поля відповідно до значень відстані z .

Це все дійсно для скалярного поля. Однак є питання з векторними полями, які володіють поперечною поляризацією. Наведені ефекти працюють, якщо вони не стосуються поляризації хвилі. Таке наближення виконується тоді, коли хвиля дифрагує під малим кутом. При малих кутах дифракції ці підходи можуть використовуватись, а також для векторних полів, якщо не розглядати поляризації.

2.5. Наближені вирази для частотної та імпульсної характеристик вільного простору

Вільний простір описується такими властивостями:

- є лінійною системою (виконується принцип суперпозиції);
- виконується принцип транспозиції, який полягає у тому, що форма вихідного сигналу не залежить від моменту початку вхідної дії, він зсувається у часі на такий же інтервал, на який зсувається момент початку вхідного сигналу.

Можна вважати, що введена функція (5):

$$p(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{iz\sqrt{k^2 - u^2}} e^{iux} dx$$

Вищенаведений вираз являє собою комплексну амплітуду поля, яке пройшло шлях z у вільному просторі. Це відгук вільного простору на вхідний сигнал, діючий на початку (на вході) ділянки при $z = 0$. Функція $g(u)$ є спектром вхідного сигналу. Змінну інтегрування u назовемо просторовою частотою вхідного розподілу $p(x, 0)$. Функція $\zeta(u) = \exp(iz\sqrt{k^2 - u^2})$ – частотна характеристика лінійної системи.

Вираз (5) дозволяє встановити основні характеристики вільного простору як лінійної системи. Вхідний сигнал – комплексна амплітуда при $z = 0$. Сигнал залежить лише від просторових координат. Вихідний сигнал – розподіл комплексних амплітуд у деякій площині z .

Частотна характеристика еквівалентного фільтра $\zeta(u)$ залежить від величини z . Залежність вигляду вхідного розподілу від координати z задає залежність сигналу від змін частотної характеристики фільтра.

Знайдемо вирази для $\zeta(u)$ та $H(x)$, де $H(x)$ – імпульсна характеристика фільтра.

Проаналізуємо вирази для $\zeta(u)$ та $H(x)$.

Просторово-частотну характеристику вільного простору називають **частотною характеристикою**. Узагальнюємо цю характеристику на 2 виміри.

Вираз (4) задає відгук вільного простору в загальному вигляді. Одна з функцій, що стоїть під знаком інтеграла, залежить лише від вхідного розподілу, а друга – лише від самої системи.

Двовимірною частотною характеристикою вільного простору є наступна функція $\zeta(u_1, u_2) = \exp(iz\sqrt{k^2 - u_1^2 - u_2^2})$. При цьому імпульсна характеристика, як спектр частотних характеристик, має вигляд:

$$H(u_1, u_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{iz\sqrt{k^2 - u_1^2 - u_2^2}} e^{i(xu_1 + yu_2)} du_1 du_2$$

або для одновимірного випадку:

$$H(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz\sqrt{k^2 - u^2}} e^{ixu} du.$$

2.6. Принцип Гюйгенса-Френеля

$$1) k \gg 1/R \text{ або } R \gg \lambda,$$

$$2) z \approx R \text{ або } \partial R / \partial z = z / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \approx 1.$$

Тоді

$$H(x, y) \approx \left(k / 2\pi i \right) \left(\exp^{(ikR)} / R \right) = (1/\lambda i) \left(\exp^{(ikR)} / R \right).$$

Математичний принцип Гюйгенса-Френеля:

$$p(x, y, z) = \frac{1}{\lambda i} \iint_{-\infty}^{\infty} p(x', y', 0) \exp^{(ikR)} / R \, dx' dy' \quad (6)$$

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2},$$

згідно з яким розповсюдження хвиль можна представити як процес підсумовування хвиль, що випромінюються фіктивними джерелами, розташованими на деякій поверхні, амплітуди та фази яких збігаються з амплітудами і фазами хвиль, які проходять через цю поверхню. У такому разі цією поверхнею є площина $z=0$. Амплітуди й фази хвиль задаються функцією $p(x, y, 0)$. Співвідношення (6) можна інтерпретувати як суму сферичних хвиль з амплітудами та фазами, що визначаються функцією $p(x', y', 0)$, кожна з яких випромінюється джерелом, розташованим в т. (x', y') .

Умова 2) при звичайному формулюванні принципу Гюйгенса-Френеля враховується введенням фіктивних випромінювачів.

Можна отримати наближений вираз для частотної характеристики, що відповідає умові застосування принципу Гюйгенса-Френеля $\zeta = \frac{k}{\sqrt{k^2 - u_1^2 - u_2^2}} \exp(iz\sqrt{k^2 - u_1^2 - u_2^2})$. Умова

застосування принципу Гюйгенса-Френеля є така $u_1^2 + u_2^2 \ll k^2$.

Характер похибки при наведеній умові залежить від ширини просторового спектра вхідного розподілу.

Якщо просторовий спектр локалізований в області частот, набагато менших за k , то величину похибки можна оцінити як відношення середніх квадратів вхідних розподілів ρ_1, ρ_2 , де ρ_1 – частина вхідного розподілу, спектр якого $u < u_0$, тобто розташований в області частот, набагато менших за k , а ρ_2 – частина вхідного розподілу, спектр якого розташований вище частоти u_0 . Чим більше u відрізняється від u_0 , тим більша похибка.

2.7. Наближення геометричної оптики

Розкладемо в ряд

$$\sqrt{k^2 - u_1^2 - u_2^2} = k \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u_1^2 + u_2^2}{k^2} + \frac{1}{2^3} \frac{(u_1^2 + u_2^2)^2}{k^4} - \dots \right). \quad \text{Відкидаємо}$$

всі члени, окрім першого, вважаючи, що вони менші за π .

Тоді $\zeta(u_1, u_2) = \exp(ikz)$, якщо $\frac{z(u_1^2 + u_2^2)}{2k} \ll \pi$. Ця умова – умова застосування наближення геометричної оптики. Частотна характеристика не залежить від змінних u_1 та u_2 , тому поширення хвилі у вільному просторі описується найбільш просто.

2.8. Дифракція Френеля

Виконується умова $\frac{z(u_1^2 + u_2^2)}{8k^3} \ll \pi$. У розкладі зберігаються два перших доданки. Ця умова визначає вигляд частотної характеристики, за якою справедлива дифракція Френеля. Тоді вигляд частотної функції такий:

$$\zeta(u_1, u_2) = \exp(ikz) \exp\left[-i \frac{z}{2k} (u_1^2 + u_2^2)\right]. \quad (7)$$

Вищеподане співвідношення виконується набагато ширше, ніж наведена умова. В останньому виразі $\zeta(u_1, u_2)$ змінні можуть бути розділені, тобто вираз можна представити як добуток двох доданків, кожний з яких залежить від однієї змінної. Якщо граничні умови задані також з розділеними змінними, то двовимірна задача зводиться до

одновимірної. Тоді вираз для одновимірної частотної характеристики може бути записаний як

$$\zeta(u) = \exp(ikz) \exp\left(-i \frac{z}{2k} u^2\right).$$

Імпульсна характеристика може бути представлена як $H = \frac{k}{2\pi iz} \exp(ikz) \exp\left(i \frac{z}{2k} (x^2 + y^2)\right)$, а для одновимірного випадку:

$H = \sqrt{\frac{k}{2\pi iz}} \exp(ikz) \exp\left(i \frac{kx^2}{2z}\right)$. Можна схематично зобразити область використання наведених співвідношень.

Поза колом радіуса k наближені формули не використовуються, як не використовуються ці співвідношення й всередині кола при значеннях $u_1^2 + u_2^2 \sim k^2$.

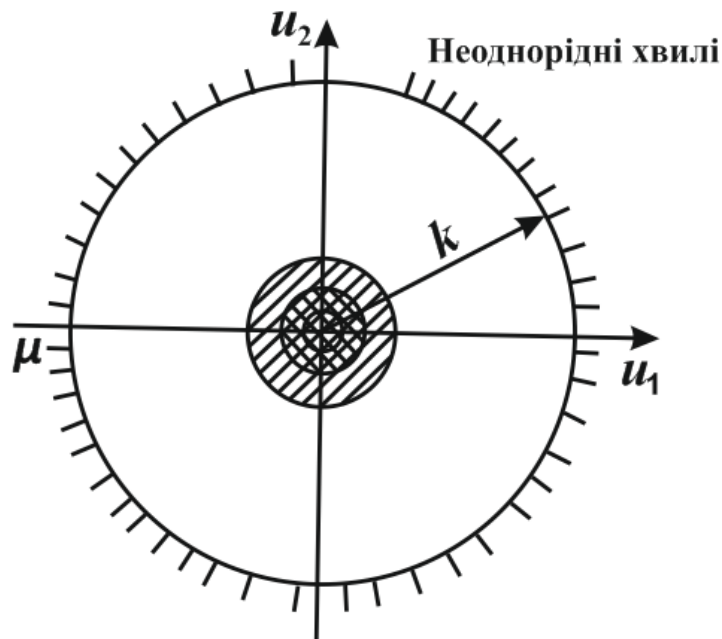


Рис. 20. Схематичне зображення областей наведених співвідношень:

▨ - область виконання принципу Гюйгенса–Френеля,

× - область дифракції Френеля, ▮ - область геометричної оптики

Область усередині кола радіуса k – область дійсних значень кутового спектра поля; коло з радіусом набагато меншим за k , – область використання принципу Гюйгенса–Френеля ($\zeta_{Г-Ф}$). Наступне коло, радіус якого менший за радіус попереднього кола у $\sqrt{\frac{z}{x}}$ разів, – область дифракції Френеля. Коло ще меншого радіуса у $\sqrt{\frac{z}{x}}$ – область застосування геометричної оптики. Вираз для $\zeta(u_1, u_2)$ (7) справедливий й за межами області дифракції Френеля. При певних наближеннях цей вираз може бути використаний всередині всієї області, де справедливий принцип Гюйгенса–Френеля. Розмір цієї області не залежить від z , що розширює коло задач, які стосуються до області зміни u_1, u_2 .

2.9. Дифракція Фраунгофера

Розв’язок дифракційних задач спрощується не лише у випадку дифракції Френеля або геометричної оптики, а й при виконанні нерівності, зворотної щодо знаку до умови використання геометричної оптики.

Тобто умова виглядає як

$$\frac{z(u_1^2 + u_2^2)}{2k} \gg \pi. \quad (8)$$

При цьому повинна виконуватися умова $u_1^2 + u_2^2 \ll k^2$ і має бути справедливим принцип Гюйгенса–Френеля. Цей випадок – *дифракція Фраунгофера*. Розглянемо відгук вільного простору на прикладі одновимірного випадку. Запишемо $\rho(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{iz\sqrt{k^2 - u^2}} e^{iux} du$. Використовуємо принцип Гюйгенса–Френеля при умові $u \ll k$, оскільки друга змінна u_2 дорівнює 0. Тоді співвідношення (8) перепишемо $\frac{zu^2}{2k} \gg \pi$. Треба оцінити останній інтеграл при виконанні наведеної умови. Використовуємо метод стаціонарної фази.

Розглянемо інтеграл $I = \int_a^b F(x)e^{if(x)} dx$. Цей інтеграл визначається як сума векторів з модулями $F(x)$ та аргументами, що задається функцією $f(x)$. При деяких вимогах до функцій $F(x)$ та $f(x)$ ця сума векторів може бути замінена спіраллю Корню. Спіраль Корню – сума векторів по модулю, аргументи яких змінюються з ростом номера вектора за квадратним законом.

Нехай $F(x) = A$
 $f(x) = ax^2$, тоді сума векторів під знаком інтеграла набуває вигляду спіралі Корню.

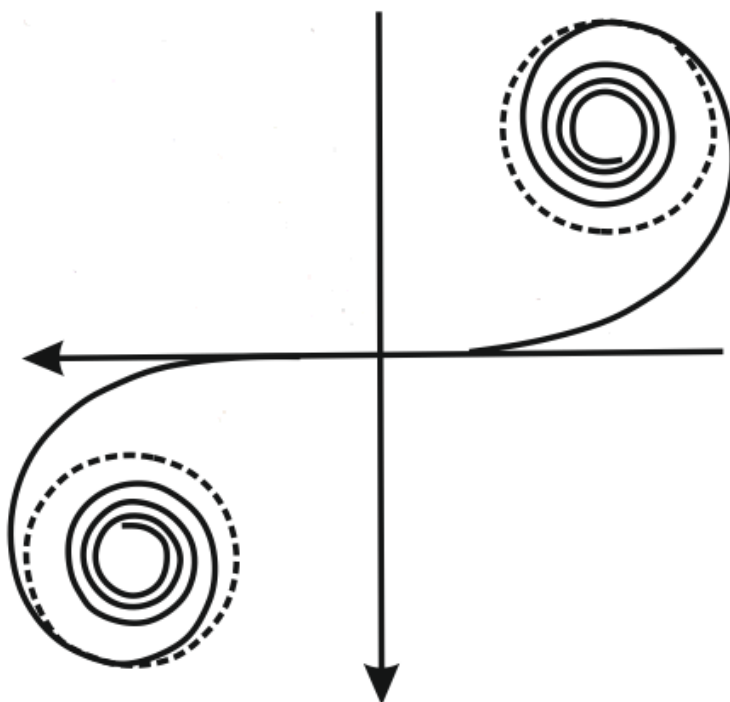


Рис. 21. Спіраль Корню

По взаємно перпендикулярних осях відкладені уявна та дійсна частини суми векторів. На рис. 21 є дві області, де спіраль скручується, прямуючи до деяких точок площини, які носять назву фокусів спіралі Корню. У спіралі два фокуси у двох протилежних квадрантах. Зміна знака a змінює квадранти фокусів. Значення інтеграла залежить від меж інтегрування (a, b) . Нехай a, b потрапляють в області різних фокусів спіралі Корню.

Значення інтеграла можна наближено представити вектором, що з'єднує фокуси спіралі. Модуль та аргумент вектора мало змінюються зі зміною меж інтегрування, якщо вони не виходять за межі областей фокуса. Область фокуса на рисунку – коло (пунктирні), починаючи з якого спіраль швидко скручується.

Інший випадок: обидві межі інтегрування потрапляють в окіл одного з фокусів спіралі. При цьому значення модуля інтеграла не перевищує радіус пунктирного кола, аргумент швидко змінюється зі зміною меж інтегрування. У цих випадках величина інтеграла мало залежить від довжини шляху інтегрування, що може бути й безмежністю. $F(x)$ може не бути постійним на всьому шляху інтегрування. Якщо $F(x)$ мало змінюється на довжині першої початкової ділянки спіралі, то $F(x) = \text{const}$. Зміна величини $F(x)$ плавна (на 1 витку) й на характер скручування істотно не впливає. Найбільшу довжину має перший віток спіралі. Ця довжина визначається зміною x , що зумовлює ріст фази $f(x)$ від 0 до π .

$$\text{Тоді } \Delta x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Нехай є функція $f(x)$. Розкладаємо її в ряд в околі т. x_0 .

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2} + \frac{3f'''(x_0)(x - x_0)^3}{2} + \dots$$

Нехай x_0 вибирається так, що $f'(x_0) = 0$, тоді x_0 - стаціонарна точка. Якщо $\frac{3f'''(x_0)(x-x_0)^3}{2} \ll \pi$, то останнім членом нехтують. Величина x змінюються в межах інтегрування Δx .

$$\text{Тоді } f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2}.$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \exp[if(x)] dx$$

$$= F(x_0) \exp[if(x_0)] \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i \frac{f''(x)}{2} (x - x_0)^2\right] dx.$$

Тобто інтеграл $I = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \exp(if(x)) dx$ оцінюється з властивостей спіралі Корню. Інтеграл у правій частині I дорівнює відстані між фокусами спіралі Корню. Враховуючи це й те, що результуючий вектор орієнтований під кутом $\pi/4$ радіан по відношенню до осей координат, отримаємо $I = F(x_0) \exp\left[if(x_0) \pm \frac{\pi}{4}\right] \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\pm f''(x_0)}}$ –

метод розрахунку інтегралів наведеного вигляду за МЕТОДОМ СТАЦІОНАРНОЇ ФАЗИ.

Виходячи з того, що $f(x) = ax^2$ та враховуючи розклад в ряд, отримаємо, що $a = \frac{f''(x_0)}{2}$, тоді довжина інтервала $\Delta x = \sqrt{\frac{2\pi}{\pm f''(x_0)}}$ \pm – вибирається знак, щоб під радикалом було додатна величина.

Застосовуємо метод стаціонарної фази для оцінки інтеграла:

$$\rho(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{iz\sqrt{k^2 - u^2}} e^{iux} du$$

Тут $F(u) = g(u)$, $f(u) = z\sqrt{k^2 - u^2} + ux$. Стаціонарна точка $u_0 = \frac{xk}{r}$, де $r = \sqrt{k^2 - x^2}$. З'ясуємо, за яких умов до функції $F(u), f(u)$ використовується метод стаціонарної фази у випадку, коли

$\Delta u = \frac{z}{r} \sqrt{\frac{2\pi k}{r}}$. Розкладаємо $f(u)$ в ряд і розглянемо останній член ряду:

$$f'''(\tilde{u}) \left(\frac{u-u_0}{2 \cdot 3}\right)^3 = -\frac{z\tilde{u}k^2}{2(k^2 - \tilde{u}^2)^{5/2}} (u - u_0)^3.$$

Виконується принцип Гюйгенса–Френеля, тобто $k^2 \gg u^2$. Нехтуємо \tilde{u}^2 порівняно з k^2 . Враховуючи всі наближення, запишемо, що $\frac{3z^5 \lambda}{r^5 r} \ll 1$. В умовах дифракції Фраунгофера завжди $z \approx r$ або $x^2 \ll z^2$, а $\lambda \ll r$.

Проаналізуємо вимоги до $g(u)$. Ця функція не повинна істотно змінюватися на інтервалі Δu . Введемо точки відліку функції $g(u)$ при записі ряду Котельникова. Відстань між цими точками Δu_k : $\Delta u_k = \frac{2\pi}{D}$; D – ширина щілини.

Тоді, $\left(\frac{z}{r}\right) \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda z}} \ll \frac{2\pi}{D}$, і враховуючи, що $z \approx r$, отримуємо, що $D \ll \sqrt{\lambda r}$ або $D^2/\lambda \ll r \approx z$. Ці умови – відомі умови дифракції Фраунгофера. До цих умов відносять і спектральні умови $\frac{zu^2}{2k} \gg \pi$.

Нехай є N точок в інтервалі Δu , відстані між ними розраховуються як $\Delta u_k = \frac{u}{N}$, тоді $\frac{zu^2}{k} \gg \frac{2\pi}{N}$. Це спектральна умова використання дифракції Фраунгофера, що задає плавність зміни функції $g(u)$.

Інша умови (з виконанням принципу Гюйгенса–Френеля):

$$\rho(x, z) = \frac{g\left(\frac{xk}{r}\right)}{\sqrt{\lambda r}} \exp(ikr + i\frac{\pi}{4}) \quad (9)$$

необхідна й використовується для опису дифракції Фраунгофера.

2.10. Вираз $\zeta(u_1, u_2)$ для значних та малих відстаней

Наближений вираз для частотної характеристики вільного простору виконується лише для дифракції Френеля, а саме $\zeta(u_1, u_2) = \exp(ikz) \exp\left[-i\frac{z}{2k}(u_1^2 + u_2^2)\right]$, при обмеженні зверху відстані z .

Для дифракції Франгофера цей вираз несправедливий.

Замінімо в інтегралі межі для всього простору, а саме $\rho(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{iz\sqrt{k^2 - u^2}} e^{iux} du$, точні значення (частотної характеристики лінійної системи), $\zeta(u)$ - наближений вираз при умові, що має місце дифракція Фраунгофера й використовуємо метод стаціонарної фази для розв'язку цього інтеграла.

Тоді

$$\rho(x, z) = \frac{\exp(ikz)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \exp\left(-i \frac{z}{2k} u^2\right) \exp(iux) du .$$

Розраховуючи інтеграл, отримаємо:

$$\rho(x, z) = \frac{\exp(ikz)}{\sqrt{xz}} g\left(\frac{xk}{z}\right) \exp\left(i \frac{x^2 k}{2z} + i \frac{\pi}{4}\right). \quad (10)$$

Розглянемо відмінності по фазі між (9) та (10). Ці вирази збігаються за фазою, якщо фаза відрізняється менше ніж на π : $\frac{x^2}{z^2} \ll \frac{\lambda z}{x^2}$ й виконується тим краще, чим більше за π (або $\lambda z \sim x^2$). При значних z , в області дифракції Фраунгофера, $\rho(x, z)$ (9) та (10) збігаються як за модулем, так і за фазою. У цих областях зміни z , для частотної характеристики вільного простору, можна використовувати наближення Гюйгенса–Френеля.

2.11. Властивості частотної характеристики вільного простору

1. *Модуль частотної характеристики.*

Нехай

$$\zeta(u_1, u_2) = \exp\left(iz \sqrt{k^2 - u_1^2 - u_2^2}\right),$$

тоді (рис. 22)

$$|\zeta(u_1, u_2)| = \begin{cases} 1, & \text{всередині кола } u_1^2 + u_2^2 = k^2 \\ \exp\left(-z\sqrt{u_1^2 + u_2^2 - k^2}\right) & \text{поза колом} \end{cases}$$

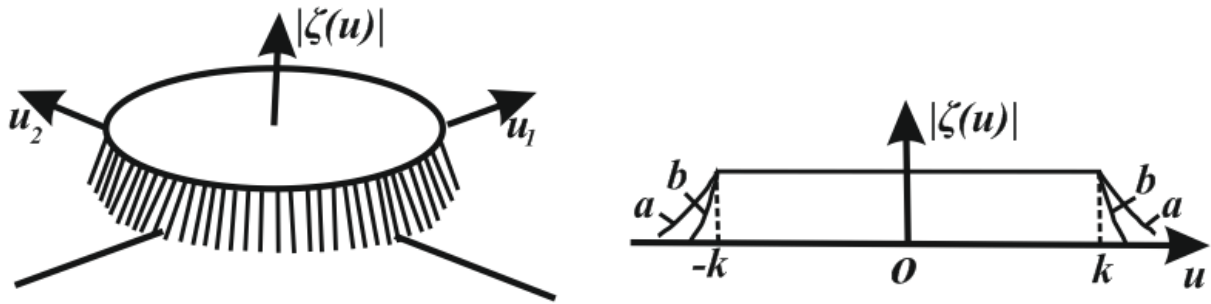


Рис. 22. Моделювання вільного простору

По вертикалі відкладають значення $|\zeta|$, по осях горизонтальної площини – аргументи u_1, u_2 функції. Нахил визначається відстанню z і різний для різних z . Збільшення z зумовлює зміну форми частотної характеристики до прямокутної.

Умова спадання функції записується у вигляді:

$$z\sqrt{u_1^2 + u_2^2 - k^2} = 1.$$

Величина Δu відраховується від $u = k$. Враховуючи осьову симетрію частотної характеристики, розраховуємо її по відношенню до u_1 .

Тоді $z^2\sqrt{2k\Delta u + \Delta u^2} = 1$. Величина Δu повинна бути набагато меншою за k , оскільки k задає ширину інтервалу при $|\zeta|=1$. Тому Δu можна знехтувати й ми отримаємо рівняння $z \gg 1/k$, еквівалентне $z \gg \lambda$.

Модуль частотної характеристики прямокутний, якщо виконуються останні умови, тобто на відстанях, набагато більших від довжини хвилі.

Вільний простір при $z \gg \lambda$ – прямокутний фільтр, який не пропускає частоти $u > k$. Така фільтрація пояснює факт, що грубе наближення Кіргофа для опису поля на перешкоді дозволяє розв'язати дифракційні задачі.

3. Фаза частотної характеристики

Для частотної характеристики можна записати $\zeta(u_1, u_2) = \exp(ikz) \exp\left[-i \frac{z}{2k} (u_1^2 + u_2^2)\right]$, прийняли, що модуль дорівнює 1, необхідно розглянути лише фазову характеристику.

Фазовий множник $\exp(ikz)$ не залежить від змінних u_1 та u_2 , будемо його опускати. Поверхні рівної фази на площині u_1, u_2 – являють собою кола.

Нехай радіус кола постійної фази $u_1^2 + u_2^2 = v^2$. Тоді $\zeta(v) = \exp\left[\frac{-izv^2}{2k}\right]$.

Радіуси кіл, де фази дорівнюють цілому числу π , визначаються як $\left(\frac{z}{2k}\right) v_n^2 = n\pi$; $v_n = \sqrt{\frac{2\pi nk}{z}} = 2\pi \sqrt{\frac{n}{\lambda z}}$. Між кільцями, радіуси яких описані як останні вирази, знак частотної характеристики не змінюється. Кільця визначають так звані зони Френеля для частотної характеристики, їх розміри задовольняють аналогічне рівняння.

Радіус першого кільця $v_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda z}}$. Радіуси решти кілець визначаються радіусом першого кільця та числом n , аналогічно як зон Френеля $v_n = v_1 \sqrt{n}$. Радіуси перших зон Френеля на частотній характеристиці пов'язані $v_1 = \frac{2\pi}{\rho_1}$, де $\rho_1 = \sqrt{\lambda z}$ – радіуси першої зони Френеля.

Через введені зони можна дати таке формулювання умови використання наближення *геометричної оптики*:

$$z \left(\frac{u_1^2 + u_2^2}{k} \right) \ll 2\pi$$

$$v^2 \ll v_1^2, \quad v \ll v_1$$

Область частотної характеристики тут набагато менша за розміри частотної зони Френеля.

Умова дифракції Фраунгофера формулюється так само, але для звичайних зон Френеля ρ_1 , а не для частотних.

Умова дифракції Френеля $\frac{z(u_1^2+u_2^2)}{8k^3} < \pi$ запишеться як

$$v_1 \gg \frac{v^2}{2k}; \quad v \ll \sqrt{v_1 2k}. \quad (11)$$

Тут входить величина $\frac{v^2}{2k}$, що відіграє у частотному представленні роль хвильового параметра D^2/λ або R^2/λ у координатній площині. Отже, область дифракції Френеля може охоплювати кілька частотних зон Френеля. Їх кількість визначається як $\frac{v}{v_1} \ll \sqrt{\frac{2k}{v_1}}$. Вважаючи, що v збігається з радіусом найближчої частотної зони Френеля, можна записати, що $n \ll 2\sqrt{\frac{z}{\lambda}}$. При $z \gg \lambda$ фазова характеристика може містити багато зон Френеля.

Розглянемо часовий фільтр для визначення запізнення сигналу.

Нехай ϵ фільтр з частотною характеристикою $k(i\omega) = \exp(i\alpha\varphi(\omega))$, тоді відгук записується як

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_x(\omega) e^{i\alpha\varphi(\omega)} e^{i\omega t} d\omega.$$

При цьому α значне (багато зон Френеля розташовано у частотній області). Розв'язок інтеграла зумовлює визначення стаціонарної точки з рівняння $\alpha \left(\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \right) + t = 0$.

Це рівняння зв'язує $\frac{d\varphi}{d\omega}$ зі змінними ω, t . Зміст є такий: можна визначити час t , коли на виході фільтра з'являється сигнал частотою ω , амплітуда і фаза якого задаються спектром вхідного сигналу $C_x(\omega)$.

Якщо $\frac{d\varphi}{d\omega}$ залежить від частоти, то останнє рівняння має розв'язок, пов'язаний з тим, що коливання з різними частотами на виході з'являються у різний момент часу. Тобто в системі є дисперсія, величина якої оцінюється як $\frac{d\varphi}{d\omega}$.

Якщо $\frac{d\varphi}{d\omega}$ не залежить від частоти, то існує постійне, незалежне від частоти запізнення сигналу. Вивчаючи залежність фази від частоти, можна з'ясувати дисперсію спектральних компонент, які проходять через фільтр.

2.12. Дисперсійна характеристика вільного простору

Розглянемо дисперсійну характеристику як функцію параметра v .

Тоді $\varphi(v) = -\frac{z}{2k}v^2$, відповідно $\frac{d\varphi(v)}{dv} = -\frac{zv}{k}$. Отримаємо залежність затримки від частоти, тобто дисперсію. Оскільки розглядаємо функції просторових координат, то така дисперсія – просторова, що еквівалентна часовій затримці. Це зсув по просторовій координаті.

Дисперсія у вільному просторі прямо пропорційна просторовій частоті, тобто це величина тим більша, чим більший шлях проходить хвиля у вільному просторі й чим більша довжина хвилі.

Використовуючи дисперсійну характеристику, можна описати дифракційні явища: при поширенні хвилі у просторі кожна компонента просторової частоти набуває зсуву у просторі, величина якого пропорційна частоті. Цей зсув тим більший, чим більший шлях проходить хвиля й чим більша довжина хвилі. При цьому характер

зображення змінюється. Зсув може бути такий великий, що окремі частотні компоненти не будуть перекриватись у просторі та не будуть розділятися. Це відповідає *дифракції Фраунгофера*. Розподіл поля у цьому випадку пропорційний спектру початкового сигналу.

При дифракції Френеля частотні компоненти взаємо переміщуються й не розділяються. При виконанні умов геометричної оптики зсувом компонент можна знехтувати через їх малість. Кожній просторовій частоті відповідає відповідний напрямок поширення хвилі. Нульова частота формує пучок, що поширюється у напрямку осі z , частота u_1 – пучок, що поширюється під кутом $\alpha = \arcsin\left(\frac{u_1}{k}\right) \approx \frac{u_1}{k}$. Пучки розділяються в просторі після проходження шляху z_0 , який дорівнює $z_0 \approx \frac{Dk}{u_1}$. Враховуючи, що ширина спектра просторових частот щілини має порядок $u \approx \frac{2\pi}{D}$, отримаємо $z_0 \approx \frac{D^2}{\lambda}$.

При $z \gg z_0$ відбувається значне розділення спектральних компонент (дифракція Фраунгофера), а при $z \ll z_0$ розділення немає (геометрична оптика).

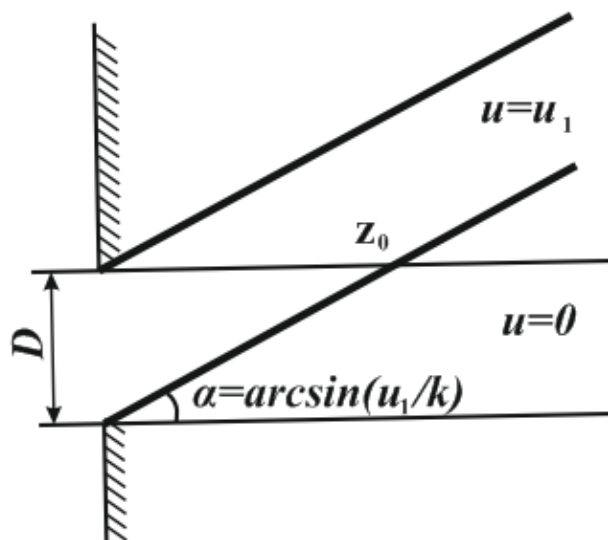


Рис. 23. Розділення просторових спектральних компонент на значних відстанях z

Контрольні питання та завдання

1. З'ясувати поведінку хвильового поля у вільному просторі.
2. Визначити, що таке просторові та кутові спектри хвильових полів.
3. Навести представлення комплексної амплітуди плоскої монохроматичної хвилі.
4. Подати хвильове рівняння для монохроматичної хвилі.
5. З'ясувати зміст просторових частот.
6. Представити наближені вирази для частотної та імпульсної характеристик вільного простору.
7. Навести приклади розв'язку дифракційних задач.
8. Пояснити підхід розв'язку дифракційних задач в наближенні метода стаціонарної фази
9. Що таке спіраль Корню? Її використання.
10. Пояснити необхідність введення наближення по теоремі Котельникова
11. З'ясувати вплив відстані на запис частотної характеристики вільного простору. Властивості вільного простору як частотного фільтра.
12. Навести амплітудні та фазові характеристики вільного простору.
13. Проаналізувати зв'язок властивостей вільного простору з дифракційними наближеннями.
14. Навести дисперсійні характеристики вільного простору.
15. Проаналізувати характеристики вільного простору для дифракцій Френеля та Фраунгофера

Розділ 3. Характеристика поля випромінювання в просторі предметів [5, 6]

3.1. Характеристики і параметри когерентного поля

Реальні джерела випромінювання генерують електромагнітні хвилі в обмеженому інтервалі $\Delta\omega = 2\pi\Delta\nu = 2\pi c \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$, що є не точковим випромінюванням, а протяжним. Коли діапазон частот $\Delta\omega$ достатньо великий, то інтерференційну картину від двох джерел спостерігати неможливо, оскільки вони нестабільні в просторі й часі. Проте реєстрація можлива, якщо час реєстрації $\tau \ll$ від часу $\Delta t = \frac{1}{\Delta\nu}$, де $\Delta\nu$ – різниця частот $\nu_1 - \nu_2 = \Delta\nu$ двох джерел.

Якщо реальний діапазон частот малий $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$, то сумарну напруженість поля від окремого джерела можна подати таким виразом:

$$E_{\Sigma} = \int_{\omega_1 = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_2 = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} E(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega = E(t) \cos[\omega_0 t + \psi(t)] = = \operatorname{Re}[E(t) \exp\{i[\omega_0 t + \psi(t)]\}]$$

, де ω_0 – середня частота, що відповідає максимальному значенню спектральної амплітуди, $E(\omega), E(t), \psi(t)$ – амплітуди та фази Σ хвильового процесу.

Швидкість зміни залежить від напівширини та форми спектра. Комплексна амплітуда $E_{\kappa}(t) = E(t) \exp(i\psi(t))$ сумарного хвильового процесу є випадковою функцією через випадковість самого процесу випромінювання від статичної сукупності елементарних випромінювачів, що складають оптичне джерело.

За час $\tau < \frac{2\pi}{\Delta\omega}$; $\Delta\omega$ – напівширина квазімонохроматичного джерела ($\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$, ω_0 – середня частота), зміни функції $E_{\kappa}(t)$ – незначні. Проте за час $\tau \gg \frac{2\pi}{\Delta\omega}$, спостерігається значна кількість змін.

Коли ширина спектра мала, стає можливим спостереження інтерференційної картини для часових затримок (різниця ходу/швидкість світла) менших величини $\frac{2\pi}{\Delta\omega}$, оскільки за цей час амплітуда $E(t)$ та фаза $\psi(t)$ змінюються неістотно $\Delta E \ll E, \psi(t) \ll \psi$. У цьому випадку випромінювання поводить себе подібно до монохроматичного із середньою частотою ω_0 .

Якщо в деяку область проходять два однаково орієнтованих поляризованих хвильових процеси $E_{\Sigma_1}(t)$ та $E_{\Sigma_2}(t)$ з однаковою частотою ω_0 (ця умова принципова, тому її треба виконувати завжди через поділ пучка від одного джерела на два за допомогою отворів або n - прозорих джерел), то в цій області може спостерігатися інтерференційна картина.

Нехай є протяжне джерело A , яке опромінює два однакових отвори на екрані B_1 та B_2 , що є незалежними джерелами через дифракцію.

Розмістимо на певній відстані від отворів другий екран і будемо спостерігати на ньому інтерференційну картину. Міра її наявності – це скорельованість пучків у точках B_1 та B_2 .

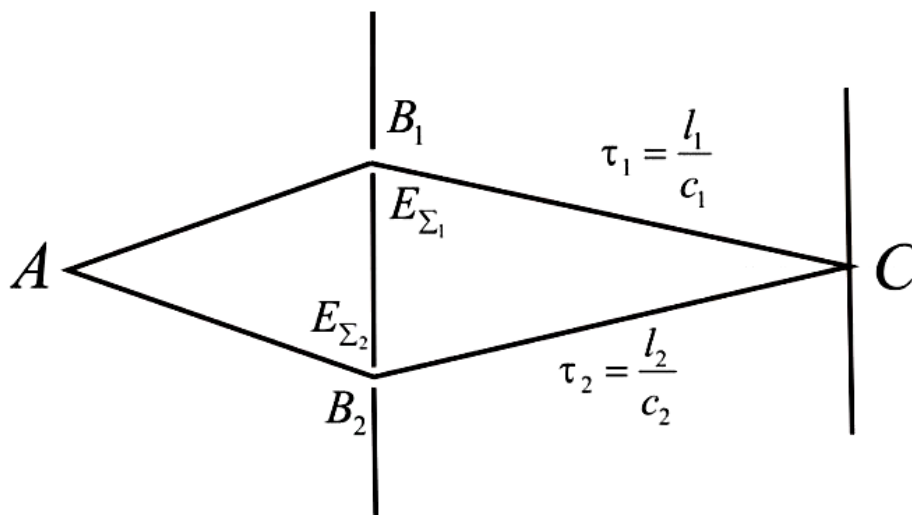


Рис. 24. Утворення інтерференційної картини

Позначимо сумарні комплексні напруженості в т. B_1 та B_2 через $E_{\Sigma_1}(t)$ та $E_{\Sigma_2}(t)$ відповідно.

Тоді в точці С $E_{\Sigma}(t) = K_1 E_{\Sigma_1}(t - \tau_1) + K_2 E_{\Sigma_2}(t - \tau_2)$, де K_1, K_2 – комплексні величини, що визначають дифракцію випромінювання в отворах. Середня інтенсивність в точці С визначається як

$$I = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |E_{\Sigma}(t)|^2 dt = \langle E_{\Sigma}(t) E_{\Sigma}^*(t) \rangle = \langle [K_1 E_{\Sigma_1}(t - \tau_1) + K_2 E_{\Sigma_2}(t - \tau_2)] \cdot [K_1^* E_{\Sigma_1}^*(t - \tau_1) + K_2^* E_{\Sigma_2}^*(t - \tau_2)] \rangle = |K_1|^2 \langle E_{\Sigma_1}(t - \tau_1) E_{\Sigma_1}^*(t - \tau_1) \rangle + |K_2|^2 \langle E_{\Sigma_2}(t - \tau_2) E_{\Sigma_2}^*(t - \tau_2) \rangle + 2|K_1 K_2| \text{Re} \langle E_{\Sigma_1}(t - \tau_1) E_{\Sigma_2}^*(t - \tau_2) \rangle.$$

Позначимо

$$\langle E_{\Sigma_1}(t - \tau_1) E_{\Sigma_1}^*(t - \tau_1) \rangle = \langle E_{\Sigma_1} E_{\Sigma_1}^* \rangle = I_{B_1},$$

$$\langle E_{\Sigma_2}(t - \tau_2) E_{\Sigma_2}^*(t - \tau_2) \rangle = \langle E_{\Sigma_2} E_{\Sigma_2}^* \rangle = I_{B_2},$$

$$I_{C_1} = |K_1|^2 I_{B_1}, \quad I_{C_2} = |K_2|^2 I_{B_2},$$

тут I_{B_1}, I_{B_2} – інтенсивності в точках B_1 і B_2 на отворах, I_{C_1}, I_{C_2} – інтенсивності в точці С при освітленні окремо отворами B_1 і B_2 . Припускаючи, що процес стаціонарний, змістимо час в усередненні $\langle E_{\Sigma_1}(t - \tau_1) E_{\Sigma_2}^*(t - \tau_2) \rangle$ на величину τ_2 і введемо позначення $\tau = \tau_2 - \tau_1$.

Тоді маємо:

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle E_{\Sigma_1}(t - \tau_1) E_{\Sigma_2}^*(t - \tau_2) \rangle = \langle E_{\Sigma_1}(t - \tau) E_{\Sigma_2}^*(\tau) \rangle.$$

Функція $\Gamma_{12}(\tau)$ носить назву функції взаємної когерентності та встановлює кореляцію полів у точках B_1 та B_2 . Експериментально така кореляція визначається на основі аналізу картини інтенсивності в точці С. Здійснимо нормування комплексної функції $\Gamma_{12}(\tau)$:

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{I_{B_1} I_{B_2}}}.$$

Функція $\gamma_{12}(\tau)$ – нормована функція взаємної когерентності (зі ступенем когерентності) полів, що існують в точках B_1 та B_2 .

Враховуючи, що $\Gamma_{12}(\tau) = \gamma_{12}(\tau) \sqrt{I_{B_1} I_{B_2}} = \frac{\gamma_{12}(\tau) \sqrt{I_{1c} I_{2c}}}{|K_1^* K_2^*|}$, можна записати

$$I_c = I_{1c} + I_{2c} + 2\sqrt{I_{1c} I_{2c}} \operatorname{Re}[\gamma_{12}(\tau)].$$

У теорії когерентності $\operatorname{Re}[\gamma_{12}(\tau)] \approx |\gamma_{12}(\tau)| \cos[\omega_0 \tau + \psi(\tau)]$, в залежності від параметрів випромінювання, задає модуль нормованого ступеня когерентності $0 \leq |\gamma_{12}(\tau)| \leq 1$ (рис. 25).

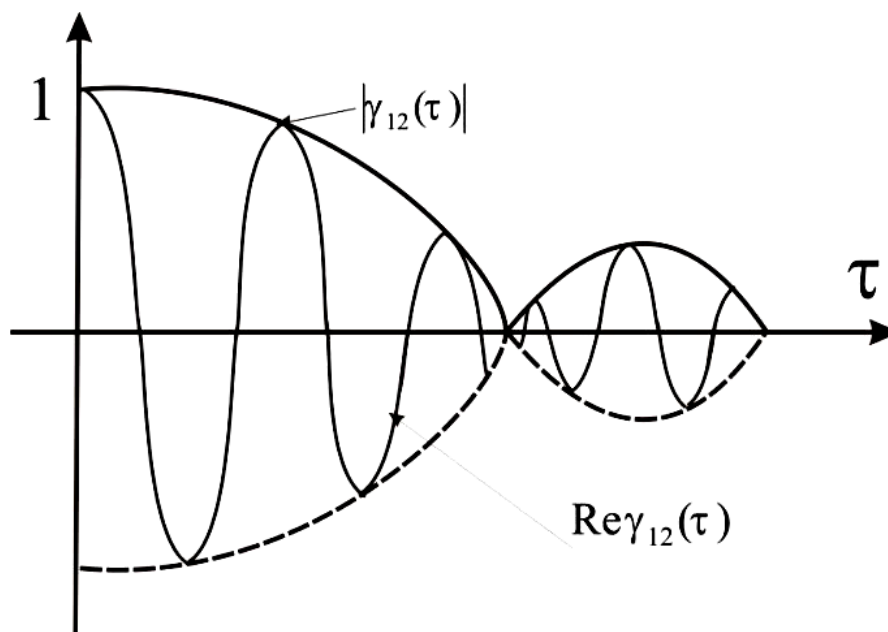


Рис. 25. Зміна величин $|\gamma_{12}(\tau)|$ та $\operatorname{Re}\{\gamma_{12}(\tau)\}$ від часової затримки τ

Якщо $|\gamma_{12}(\tau)|=0$, то повна некогерентність, при $|\gamma_{12}(\tau)|=1$ – повна когерентність, зміною різниці ходу можна добитися повного гасіння інтенсивності I_c , якщо $I_{1c} = I_{2c}$.

Випромінювання когерентне, якщо виконується нерівність $0,88 \leq |\gamma_{12}(\tau)| \leq 1$.

Окрім взаємної, є часова та просторова когерентності. Функція $\gamma_{12}(\tau)$ характеризує об'єм когерентності.

Часова когерентність

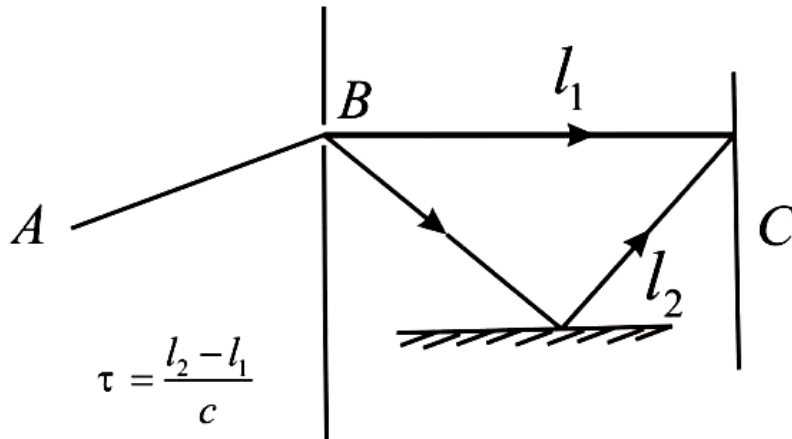


Рис. 26. Введення часової когерентності з часовою затримкою τ

Точка С отримується від 1 джерела, з врахуванням відбивання від дзеркала.

Така схема еквівалентна схемі інтерферометра Майкельсона з напівпрозорим світлоподільником.

У даному випадку інтенсивність у точці С описується виразом

$$I_C = I_{1C} + I_{2C} + 2\sqrt{I_{1C}I_{2C}}\text{Re}[\gamma_{12}(\tau)], \text{ де } \gamma_{11}(\tau) = \frac{E_{\Sigma_1}(t-\tau)E_{\Sigma_1}^*(t)}{\langle E_{\Sigma_2}(t) \rangle}.$$

Функція $\gamma_{11}(\tau)$ задає кореляцію одного хвильового випадкового процесу в т.В у момент часу, рознесеного на інтервал τ . Тому функція $\gamma_{11}(\tau)$ ($\gamma(\tau)$) характеризує часову когерентність. При цьому функція $\gamma_{11}(\tau)$ однозначно визначається спектром потужності хвильового процесу.

$\text{Re}[\gamma_{11}(\tau)] = \int_0^\infty f(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega$, де $f(\omega) = \frac{I(\omega)}{\int_0^\infty I(\omega) d\omega}$, $I(\omega)$ – спектральна густина випромінювання.

Косинусне Фур'є-перетворення від величини $\text{Re}[\gamma_{11}(\tau)]$ дозволяє визначити сам спектр $I(\omega)$. Це лежить в основі Фур'є-спектроскопії. Часова когерентність враховує скорельованість

випромінювання з собою в різні моменти часу та залежить від ширини спектра випромінювання. Останній вираз задає інтервал Δt , коли випромінювання можна вважати скорельованим.

Розглянемо просторову модель випромінювання у вигляді випадкових цугів однакової протяжності. Цуг – аналітичне представлення хвильового процесу, коли фаза в наступний момент визначається фазою у попередній момент часу. Нехай деяке джерело випромінює хвильові цуги однакової протяжності (в часі) Δt на частоті $\omega_0 = 2\pi\nu_0$.

Випромінювання такого цугу в аналітичній формі записується як

$$E(t) = \begin{cases} E_0 \exp(i2\pi\nu_0 t) & \text{при } |t| < \Delta t/2 \\ 0 & \text{при } |t| > \Delta t/2 \end{cases}$$

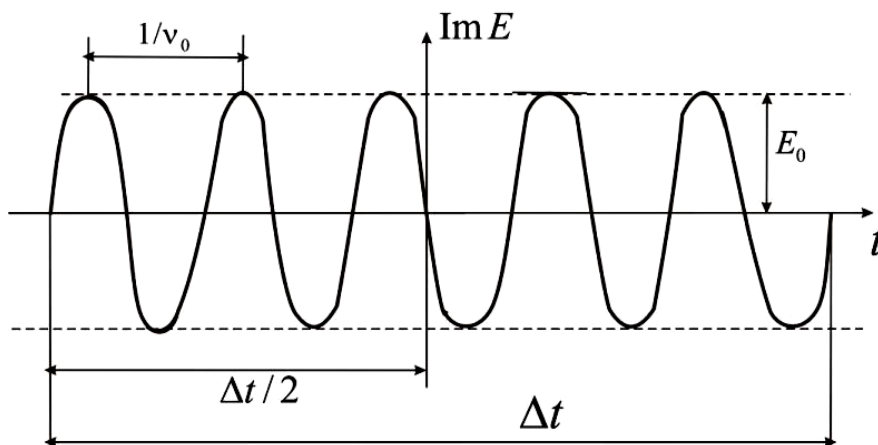


Рис. 27. Зображення монохроматичного цугу протяжністю Δt

Застосовуючи перетворення Фур'є до функції $E(t)$, отримуємо:

$$\begin{aligned} E(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) \exp(-2\pi i \nu t) dt = E_0 \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \exp(-2\pi i (\nu - \nu_0) t) dt \\ &= E_0 \Delta t \frac{\sin^2[\pi(\nu - \nu_0)\Delta t]}{[\pi(\nu - \nu_0)\Delta t]^2}. \end{aligned}$$

Інтенсивність такого гармонічного сигналу:

$$I(\nu) = (E_0 \Delta t)^2 \frac{\sin^2[\pi(\nu - \nu_0)\Delta t]}{[\pi(\nu - \nu_0)\Delta t]^2}.$$

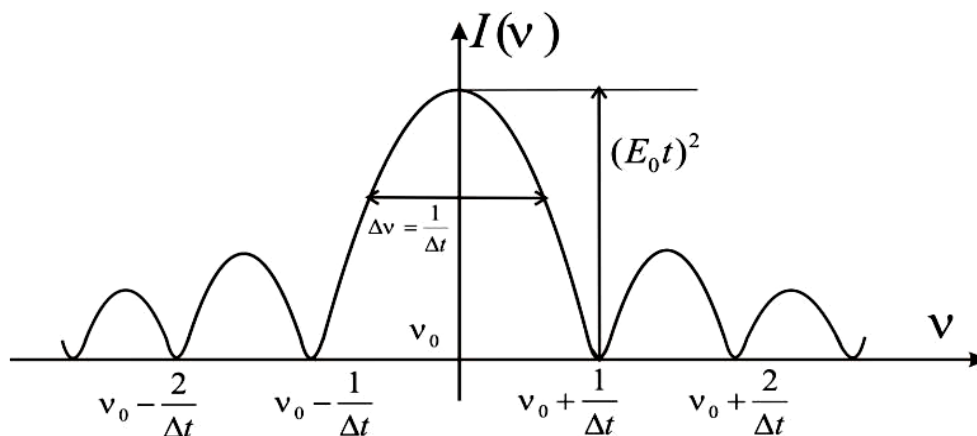


Рис. 28. Спектральна густина інтенсивності монохроматичного цугу протяжністю Δt

Частотний інтервал $\Delta\nu$ відповідає напівширині контуру спектральної лінії, де інтенсивність ще достатньо значна (не менше $0,4I_{max}$) та визначається співвідношенням $\Delta\nu = \frac{1}{\Delta t}$.

$$\left(\frac{\sin^2\left[\pi\frac{\Delta\nu}{2}\Delta t\right]}{\left[\pi\frac{\Delta\nu}{2}\Delta t\right]^2} = 0,4, \text{ коли } \pi\frac{\Delta\nu}{2}\Delta t = \pi/2 \right).$$

Звідси випливає таке правило: ефективна смуга частот хвильового цугу обернено пропорційна його протяжності. Довжина $\Delta L = c\Delta t = c\frac{1}{\Delta\nu}$ відповідає максимальній різниці ходу, коли зберігаються фазові співвідношення в інтерференційному досліді. При різниці ходу суттєво більшій ніж $c\frac{1}{\Delta\nu}$, спостереження інтерференційної картини стає неможливим.

Це представлення дуже ідеалізоване. Насправді має місце затухання випромінювання, статистичний розподіл довжин і амплітуд цугів, зміна фази цуга через співударяння атомів, зміна частоти у зв'язку з тепловим рухом.

Розглянемо процес випромінювання із затуханням, що пов'язано із суттєвою втратою енергії в часі, в результаті чого амплітуда хвильового цугу зменшується в часі:

$$E(t) = \begin{cases} E_0 \exp(i2\pi\nu - \frac{t}{\tau}) & \text{при } t > 0 \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}.$$

Частотний спектр Фур'є такого процесу визначається виразом

$$E(\nu) = E_0 \int_0^{\infty} \exp(i2\pi(\nu - \nu_0)t - t/\tau) dt = \frac{E_0}{2\pi i(\nu - \nu_0) - 1/\tau}$$

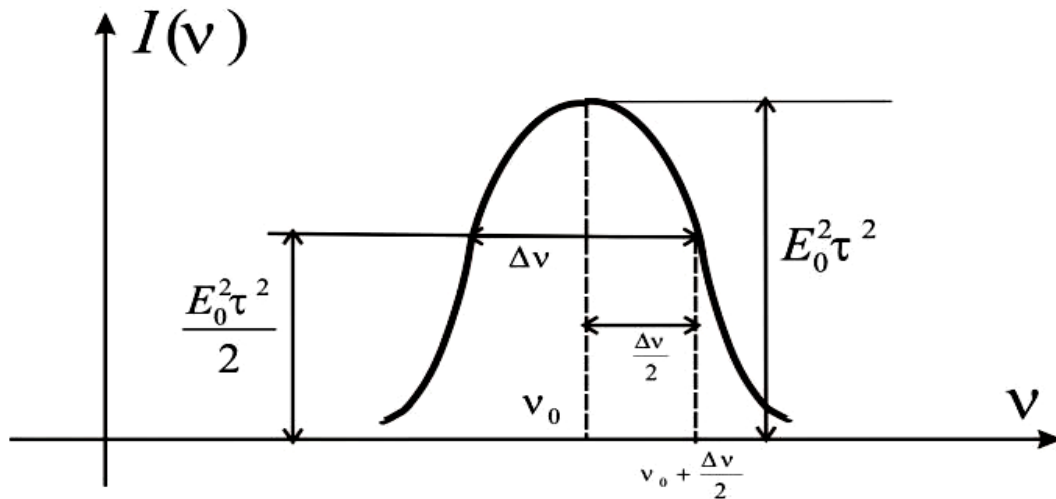


Рис. 29. Спектральна інтенсивність згасання цугу (Лоренцовий контур)

Напівширину контуру лінії можна визначити з умови $\frac{1}{4\pi^2(\frac{\Delta \nu}{2})^2 + \frac{1}{\tau^2}} = \frac{\tau^2}{2}$, звідси $\Delta \nu = \frac{1}{\pi \tau}$. Якщо реальний хвильовий процес охарактеризувати середньостатичним часом Δt , що відповідає напівширині контуру $\Delta \nu$, то вводиться поняття довжини когерентності, в межах якої зберігається фаза цугів хвиль:

$$\Delta l_k = \Delta t c = \frac{c}{\Delta \nu} = \frac{(\lambda_0)^2}{\Delta \lambda}.$$

Довжина когерентності чисельно дорівнює максимальній кількості смуг стаціонарної інтерференційної картини, помноженій на середню довжину хвилі в спектрі. Поняття часу когерентності та довжини когерентності еквівалентні.

3.2. Поняття просторової когерентності

Розглянемо інтерференційний дослід, в якому використовуються два отвори, точка С вибрана так, що часова затримка $\tau = \tau_2 - \tau_1 = 0$.

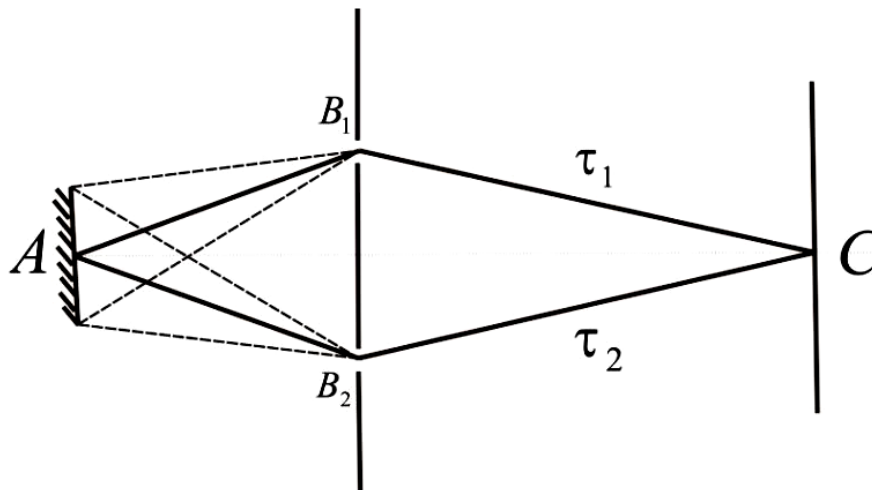


Рис. 30. Введення просторової когерентності

Відносна функція взаємної когерентності $\gamma_{12}(0)$, дійсна частина якої визначає Σ інтенсивність, визначається усередненням

$$\gamma_{12}(0) = \frac{\langle E_{\Sigma 1} E_{\Sigma 2}^*(\tau) \rangle}{\sqrt{I_{B_1} I_{B_2}}}$$

У теорії когерентності доводиться, що числове значення $\gamma_{12}(0)$ пов'язане з кутовою розбіжністю випромінювання або кутовими розмірами протяжного джерела.

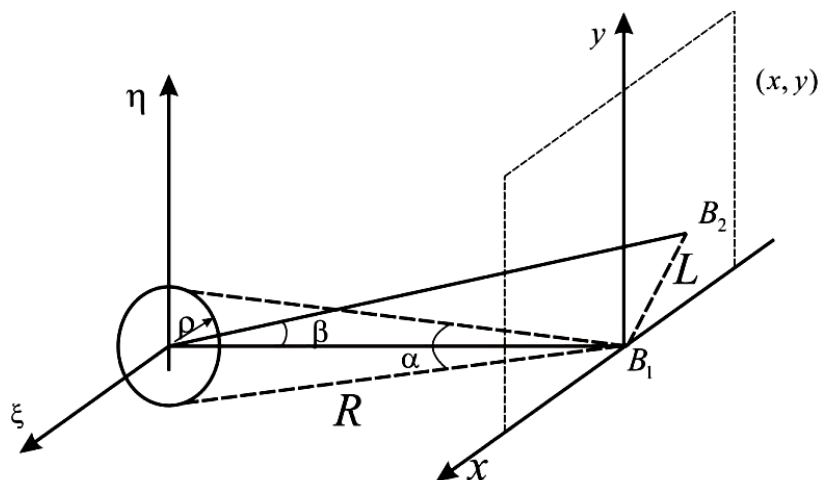


Рис. 31. Геометричні параметри, що визначають просторову когерентність від круглого джерела радіусом ρ

Для протяжного випромінювача, утвореного ансамблем статично незначних елементарних випромінювачів, просторова когерентність розраховується на основі теореми Ван-Циттера-Церніке.

Для круглого теплового джерела, розміщеного в площині постійної яскравості, ступінь когерентності у двох точках B_2 та B_1 , що знаходяться на відстані $R \gg \rho$, отримується як $|\gamma_{12}(0)| = 2 \left| \frac{J_1(z)}{z} \right|$, де $J_1(z)$ – функція Беселя першого порядку з аргументом $z = \frac{2\pi\rho}{\lambda R} \sqrt{x^2 + y^2} = 2\pi\rho \frac{\text{tg}\beta}{\lambda}$.

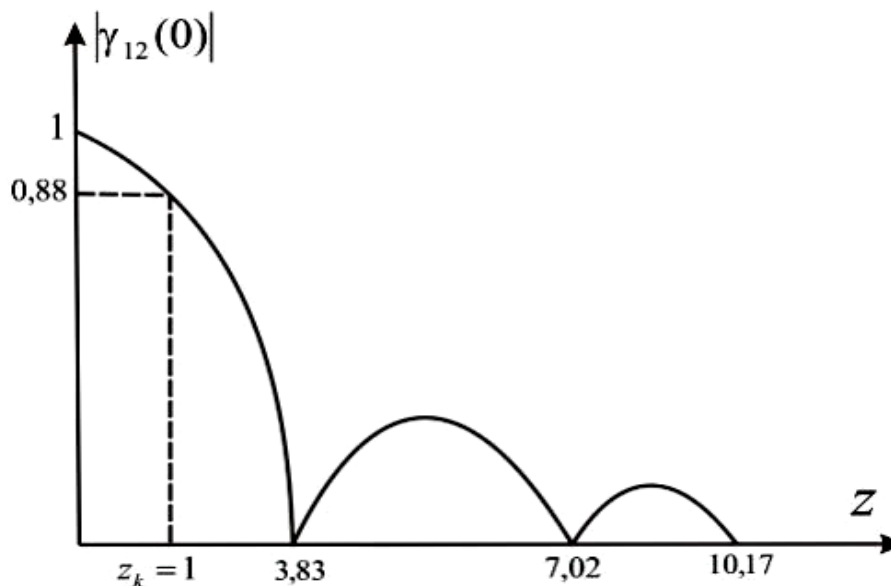


Рис. 32. Функція $|\gamma_{12}(0)|$ в залежності від параметра z

Високий ступінь когерентності можливий тільки для малих кутів β . Лінійна відстань L , що відповідає значенню $0,88 \leq |\gamma_{12}(0)| \leq 1$, не повинна перевищувати величину $L = \frac{0,16\lambda}{\alpha}$, де α – кутовий радіус джерела ($\alpha = \frac{\rho}{R}$). Якщо $\beta = \frac{L}{R}$ – кутова розбіжність променів джерела, то кут розбіжності практично когерентного пучка не повинен перебільшувати величину $\beta \leq \frac{0,16\lambda}{\rho}$, де ρ – радіус джерела.

З когерентністю випромінювання, яка характеризується комплексними функціями $\gamma_{12}(\tau)$, $\gamma_{11}(\tau)$, $\gamma_{12}(0)$, пов'язані такі характеристики випромінювання, як монохроматичність і розбіжність випромінювання. При цьому враховують, що всі компоненти когерентного випромінювання мають однакові стани поляризації (лінійні або еліптичні). Плоска монохроматична хвиля завжди поляризована. На практиці ступінь когерентності пов'язують з контрастом інтерференційної картини, що вимірюється в площині її спостереження.

Величина контрасту визначається співвідношенням $K = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$. Подавши реальну частину функції $\gamma_{12}(\tau)$ у вигляді $Re[\gamma_{12}(\tau)] = |\gamma_{12}(\tau)| \cos \varphi(\tau)$, де $\varphi(\tau) = \arctg \left[\frac{Im \gamma_{12}(\tau)}{Re \gamma_{12}(\tau)} \right]$ – її аргумент, вираз для інтенсивності результуючої картини можна записати $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}(\tau)| \cos \varphi(\tau)$.

При введенні середньої частоти $\bar{\nu}$ фазовий множник результуючої інтерференційної картини подається як $\varphi(\tau) = \varphi'(\tau) + 2\pi\bar{\nu}\tau$ або $\varphi(\Delta) = \varphi'(\Delta) + 2\pi\frac{\Delta}{\lambda}$, де $\varphi'(\tau)$, $\varphi'(\Delta)$ – функції, що характеризують зміну усередненої фази для сукупності квазімонохроматичного інтервалу в залежності від часу чи різниці ходу. Зміна величин $\varphi'(\tau)$ та $\varphi'(\Delta)$ несуттєва у порівнянні з величинами $2\pi\bar{\nu}\tau$ чи $2\pi\frac{\Delta}{\lambda}$.

Для двох найближчих екстремальних значень інтенсивності, що отримуються коли $\cos \varphi(\tau) = \pm 1$, будемо мати:
 $I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \gamma_{12}(\tau)$,
 $I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \gamma_{12}(\tau)$, тоді $K = \frac{2\sqrt{I_1 I_2} \gamma_{12}(\tau)}{I_1 + I_2}$. Якщо $I_1 = I_2$, то $K = |\gamma_{12}(\tau)|$.

Основною відмінністю когерентного випромінювання від монохроматичного є введення усереднених амплітуд $E(t)$ і фаз $\psi(t)$ для сукупного спектрального інтервалу $\Delta\omega$ на деякій усередненій частоті ω_0 , що є функціями, які повільно змінюються при аргументах $t < \frac{1}{\Delta\nu_0}$. При цьому, при складанні двох полів, інтерференційна картина стає менш контрастною за рахунок усереднення миттєвої інтенсивності за часом.

3.3. Фазові та групові швидкості в середовищі

Якщо в деякій початковій точці однорідного, ізотропного діелектричного середовища сумарна напруженість плоскої хвилі (без врахування поляризації) задана виразом $E_{\Sigma}(t) = E(t) \exp(i(\omega_0 t + \psi(t)))$, то в точці, що визначається радіусом \vec{r} , ця напруженість запишеться так:

$$E_{\Sigma}(\vec{r}, t) = E(t) \exp[i\psi(t)] \exp\left[i\omega_0 \left(t + \frac{\vec{r}\vec{n}}{\bar{v}_{\Delta\omega}}\right)\right] = E(t) \exp[i\psi(t)] \exp[i(\omega_0 t + \vec{k}'\vec{r})],$$

де $\vec{k}'_0 = \vec{k}_0 + \delta\vec{k}$; $k'_0 = \frac{\omega_0}{\bar{v}_{\Delta\omega}}$; $k_0 = \frac{\omega_0}{v(k_0)} = \frac{2\pi n(k_0)}{\lambda_0}$, $\bar{v}_{\Delta\omega}$ – середня швидкість для груп хвиль із напівшириною спектра ω_0 , $v(k_0)$ – фазова швидкість хвильового вектора в середовищі з довжиною хвилі λ_0 , $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$. $\delta k \ll \Delta k$, Δk – напівширина спектрального інтервалу, задана у хвильових числах.

$$\text{Отже, } E_{\Sigma}(\vec{r}, t) = E(t) \exp\{i[\psi(t) - \delta\vec{k}\vec{r}] \cdot \exp[i(\omega_0 t - \vec{k}_0\vec{r})]\}.$$

Останній вираз дозволяє знайти фазову чи групову швидкість сумарних коливань уздовж хвильової нормалі. Взяти похідну за часом від умови постійної фази на несучій частоті ω_0 , отримаємо *фазову швидкість*:

$$\frac{d}{dt} [(\omega_0 t - k_0 r = \text{const})]; v_{\phi} = \frac{\omega_0}{k_0} \approx \frac{\omega}{k}.$$

Групова швидкість визначається за умови постійності амплітуди в просторі, тобто $\psi(t) - \delta kr = const$.

$$v_{гр} = \frac{dr}{dt} = \left[\frac{d\psi(t)}{dt} \right] / \delta k = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{d\omega}{dk}$$

Коли в середовищі дисперсія, тобто $n = n(t)$, $n = n(k)$, $v_{ф} \neq v_{гр}$

Враховуючи співвідношення $k = \frac{\omega}{\theta}$, $dk = \frac{d\omega}{\theta} - \frac{\omega d\theta}{\theta^2}$, $d\omega = dk\theta + \frac{\omega}{\theta} d\theta$, групова швидкість визначається такими дисперсійними співвідношеннями, як

$$v_{гр} = v_{ф} - \lambda \frac{dv_{ф}}{d\lambda}; \quad \frac{d\omega}{dk} = \theta + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d\theta}{dk}; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \frac{dk}{d\lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda^2};$$

$$\frac{dv}{dk} = \frac{d\theta}{d\lambda} : \frac{dk}{d\lambda} = -\lambda^2 \frac{d\theta}{d\lambda}.$$

Для діелектриків поза смугою поглинання $v_{гр} > v_{ф}$, а у смузі поглинання $v_{гр} < v_{ф}$.

3.4. Функція кореляції та кутовий спектр потужності хвильових полів

3.4.1. Визначення функції кореляції

Необхідно розв'язати статистичні задачі, пов'язані з поширенням хвиль.

У лінійних системах статистичні питання вирішуються в рамках кореляційної теорії. Введемо кореляційні функції для хвильових полів. Можна побудувати чимало кореляційних функцій: окремо для амплітуд, фаз хвиль, а також комбіновані кореляційні функції фаз та амплітуд. Необхідно ввести одну кореляційну функцію для опису випадкових полів. Розподіл комплексних амплітуд хвильових полів у просторі – це аналог вхідного сигналу. Тому будуємо кореляційну функцію комплексних амплітуд.

Для комплексних амплітуд можна побудувати 2 кореляційні функції:

$$B(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2) = \langle \rho(x_1, y_1, z_1) * \rho^*(x_2, y_2, z_2) \rangle,$$

$$\tilde{B}(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2) = \langle \rho(x_1, y_1, z_1) \rho(x_2, y_2, z_2) \rangle.$$

Для статистичного опису поля в рамках кореляційної теорії важливе друге зображення кореляційної функції.

З точки зору розв'язку задач коливальних процесів важлива перша функція, яка має назву **кореляційної функції комплексних амплітуд**.

Ми розглядали вільний простір як фільтр із частотною характеристикою, що залежить від довжини відрізка вільного простору вздовж осі z . Тут три просторові координати були несиметричні. Якщо дві з них (x та y) трансформувати у частотні осі з просторовими частотами u_1 та u_2 , то z – параметр, що задає властивість фільтра. Такий підхід використовуємо для введення кореляційної функції. Кореляційна функція – поперечна, якщо 2 координати z рівні, тобто $z_1 = z_2$. Поперечну кореляційну функцію можна вважати *кореляційною функцією поля*, що проходить через той самий фільтр.

Функція кореляції, в якій попарно збігаються координати x та y , а відрізняється лише координата z – повздовжня. Повздовжня функція кореляції – кореляційна функція однакових сигналів, що проходить через різні фільтри.

Стаціонарні процеси – процеси, для яких кореляційні функції залежать лише від різниці змінних. Аналогічно таке твердження дійсне для полів, для яких замість “стаціонарні процеси” використовують “однорідні процеси”.

Для однорідного процесу по всіх трьох координатах поперечну функцію кореляції записуємо у вигляді $B(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2) = B(x_1 - x_2, y_1 - y_2, 0)$. Якщо процес однорідний по 2-х координатах, то поперечна функція кореляції має

вигляд $B(x_1, y_1, z; x_2, y_2, z) = B(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z)$, або $B(x_1, y_1, z; x_2, y_2, z) = B_z(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$. Введемо позначення для різниці координат $x_1 - x_2 = \xi, y_1 - y_2 = \eta, z_1 - z_2 = \zeta$.

Використовуючи останнє співвідношення, введемо визначення *однорідного процесу*. Якщо процес однорідний по трьох координатах $B = B(\xi, \eta, \zeta)$, то поперечна кореляційна функція буде функція $B = B(\xi, \eta, 0)$, а повздожня $B = B(0, 0, \zeta)$. Якщо процес однорідний, лише по поперечних координатах, то $B = B_z(\xi, \eta)$.

Однорідність хвильового фронту по трьох координатах задає незалежність вигляду поперечної кореляційної функції від координати z , тобто повна однорідність тоді, коли поперечна кореляційна функція незмінна.

3.4.2. Кутовий спектр потужності хвильового поля

Для стаціонарних випадкових процесів використовують співвідношення Вінара – Хинчина, згідно з яким

$$R(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (1)$$

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (2)$$

Ці перетворення відрізняються від перетворення Фур'є лише нормуванням. Коефіцієнт $\frac{1}{\pi}$ лише у (2), а не в (1). Це пов'язано з фізичним змістом, що вкладається у функцію $S(\omega)$. Функція $S(\omega)$ – спектр потужності процесу й задає розподіл потужності по частотах. Тоді інтеграл від $S(\omega)$ по всіх додатних частотах повинен бути рівний повній потужності процесу $R(0)$.

Тому (1) при $\tau = 0$ демонструє, що середня потужність процесу дорівнює сумі спектрального розподілу потужностей. Саме через це був введений коефіцієнт перед інтегралом в (1). Окрім функції кореляції самого процесу $R(\tau)$ можна розглядати функцію кореляції його спектральних амплітуд.

Для стаціонарного процесу спектральні амплітуди не корельовані, тому

$$\langle C(\omega)C^*(\omega') \rangle = (S(\omega)/4\pi)\delta(\omega - \omega') \quad (3)$$

Умова (3) є необхідною та достатньою умовою стаціонарності процесу. Тобто, якщо у виразі для функції кореляції $R(t_1, t_2) = \langle f(t_1) \cdot f^*(t_2) \rangle$ замінюємо $f(t_1)$ та $f^*(t_2)$ їх спектральними розкладами, то отримаємо:

$$\langle f(t_1) \cdot f^*(t_2) \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \langle C(\omega)C^*(\omega') \rangle e^{i\omega t_1 - i\omega' t_2} d\omega d\omega' \quad (4)$$

Умова стаціонарності у (4), вимога щоб $R(t_1, t_2) = R(t_1 - t_2)$ зумовлює виконання (3). Якщо умова виконується, то (4) перейде в (1), тобто доводиться достатність (3).

Для однорідних поперечних функцій кореляції можна записати співвідношення аналогічні до відношень Вінера – Хінчена, як:

$$\begin{aligned} B_z(\xi, \eta) &= \iint_{-\infty}^{\infty} G(u_1, u_2) e^{i(u_1\xi + \eta u_2)} du_1 du_2; \\ G(u_1, u_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} B_z(\xi, \eta) e^{-i(u_1\xi + \eta u_2)} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (5)$$

Коефіцієнт вибирається з врахуванням того, що для хвильових полів мають фізичний зміст як додатні, так і від'ємні просторові частоти. Тому повна потужність = сумі потужностей по додатних та від'ємних частотах. Хвильовий аналог умов стаціонарності (3) є співвідношенням:

$$\langle g(u_1, u_2)g^*(u_1', u_2') \rangle = \frac{G(u_1, u_2)}{16\pi^4} \delta(u_1 - u_1')\delta(u_2 - u_2').$$

Ця умова, як і (3), є необхідною та достатньою умовою однорідності відповідної поперечної функції.

Саме комплексна форма типу (3) є достатньою та необхідною формою запису потужності процесу та спектральної густини потужності.

3.5. Інтегральні перетворення когерентних полів

Введення середньої частоти ω_0 , навколо якої відбувається коливання квазімонохроматичного хвильового процесу з напівшириною спектра $\Delta\omega$ ($\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$), дозволяє описати такий процес середньою комплексною амплітудою:

$$\langle E_{\Sigma}(\vec{r}) \rangle = E_k(\vec{r}) = E_0(x, y, z) \exp(i\psi(x, y, z)),$$

$$E_{\Sigma}(\vec{r}, t) = E_k(\vec{r}) \exp(i\omega_0 t).$$

Середнє значення комплексної амплітуди плоскої квазімонохроматичної хвилі у прямокутній системі координат можна визначити:

$$\langle E_{\Sigma}(\vec{r}) \rangle = \frac{E_{\Sigma}(\vec{r}, t) \langle E_{\Sigma}(\vec{r} = 0, t)^2 \rangle^{1/2}}{E_{\Sigma}(\vec{r} = 0, t)},$$

де $\langle E_{\Sigma}(\vec{r} = 0, t)^2 \rangle^{1/2}$ – амплітуда плоскої хвилі, а відношення $\frac{E_{\Sigma}(\vec{r}, t)}{E_{\Sigma}(\vec{r} = 0, t)}$ задає зміну фази для відстані \vec{r} від початку координат.

Введення усередненої комплексної амплітуди дозволяє скористатися для опису квазімонохроматичних хвиль та інтегральних перетворень когерентних полів представлення монохроматичних хвиль для частоти ω_0 .

Нехай у площині $x_0, y_0, z_0 = 0$, набір плоских хвиль із сукупністю хвильових векторів \vec{k} створює деяке поле з комплексною амплітудою $\langle E_{\Sigma}(x_0, y_0, z_0 = 0) \rangle$.

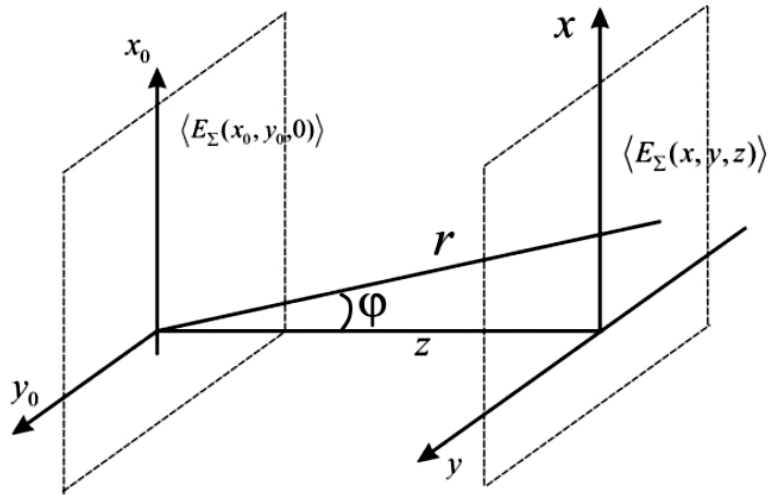


Рис. 33. Інтегральне перетворення когерентних полів

Для поля у площині $z = 0$ будуть справедливі інтегральні перетворення:

$$\langle E_{\Sigma}(x_0, y_0, 0) \rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} E_0(f_x, f_y) \cdot \exp(i2\pi(f_x x + f_y y)) df_x df_y$$

$$E_0(f_x, f_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} \langle E_{\Sigma}(x_0, y_0, 0) \rangle \cdot \exp(-i2\pi(f_x x + f_y y)) dx dy,$$

$$\text{де } f_x = \frac{k_x}{2\pi} = \frac{\cos \alpha}{\lambda_0}; f_y = \frac{k_y}{2\pi} = \frac{\cos \beta}{\lambda_0}.$$

Функція $E_0(f_x, f_y)$ є кутовим спектром поля $\langle E_{\Sigma}(x_0, y_0, 0) \rangle$.

Поле у площині x, y, z може бути визначене через інтегральні перетворення функції $E_0(f_x, f_y)$ з урахуванням амплітудно-частотної фазової характеристики передавальної функції вільного простору (відстань між площинами $(x_0, y_0, 0)$ і (x, y, z)).

$$W(if_x, if_y) = \exp\left(iz \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}\right)$$

$$\begin{aligned} \langle E_{\Sigma}(x, y, z) \rangle &= \iint_{-\infty}^{\infty} E_0(f_x, f_y) \cdot \exp(i2\pi(f_x x + f_y y)) W(i f_x, i f_y) df_x df_y \end{aligned}$$

Згідно з теорією сигналів, будемо вважати, що на вході лінійної системи заданий вхідний сигнал $E_{\Sigma}(x_0, y_0, 0)$, який передається через вільний простір (відстань O_z), формуючи на виході системи, у площині x, y, z сигнал $\langle E_{\Sigma}(x, y, z) \rangle$. Тоді, ввівши функцію поля вільного простору $W(x - x_0, y - y_0)$, вихідний сигнал можна визначити через двовимірну згортку:

$$\langle E_{\Sigma}(x, y, z) \rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} E_{\Sigma}(x_0, y_0, 0) \cdot W(x - x_0, y - y_0) dx_0 dy_0.$$

Тут функція ваги характеризує відгук системи на монохроматичне точкове збурення поля в околі елемента площею $dx_0 dy_0$. Таке збурення, що передається через вільний простір, може бути визначене на основі явища дифракції. Тому, згідно із хвильовою оптикою, функція $W(x - x_0, y - y_0)$ повинна визначитися множником, який використовується при розрахунках комплексної амплітуди дифрагованої хвилі на заданому отворі:

$$\begin{aligned} W(x - x_0, y - y_0) &= (i\lambda r)^{-1} \exp(ikr) \cos\varphi, \\ r &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2}, \quad \cos\varphi = \frac{z}{r}. \end{aligned}$$

Функція $W(x - x_0, y - y_0)$ має назву функції Френеля-Кіргофа-Зоммерфельда.

Аналітичний вигляд можна отримати не з теорії дифракції, а на основі теорії сигналів, знаючи, що функція ваги визначається як Фур'є-перетворення від амплітудно частотної фазової передавальної функції:

$$W(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\left(iz \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}\right) \exp(-i2\pi(f_x x + f_y y)) df_x df_y.$$

Неплоска квазімонохроматична хвиля в початковій площині $z = 0$ може бути задана або функцією $\langle E_{\Sigma}(x_0, y_0, 0) \rangle$, що визначає середнє значення комплексних амплітуд у будь-якій точці цього простору, або кутовим спектром середніх амплітуд плоских квазімонохроматичних хвиль, що описуються функціями $E_{\Sigma}(k_x, k_y)$, або функціями $E_{\Sigma}(f_x, f_y)$, що утворюють неплоску хвилю на середній частоті $\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$.

3.6. Кореляційна функція поля, отриманого через розсіювання однорідним випадковим екраном

Нехай у площині $z = 0$ є випадкове поле, що має однорідну функцію кореляції. Таке поле отримується у випадку, якщо плоска хвиля проходить (або відбивається) від екрана з неоднорідностями показника заломлення або через поглинання поля, рівномірно та однорідно розподіленого по всій площині екрану, так що функція кореляції неоднорідностей однорідна по координатах x, y . Тому екран повинен бути безмежно великих розмірів.

Треба визначити вигляд поперечної та повздовжньої кореляційних функцій на деякій відстані z від площини екрана.

Вільний простір є фільтром з частотною характеристикою $\zeta(u)$. На вході фільтра задана функція кореляції, треба знайти цю функцію на виході фільтра.

Тобто $S_y(\omega) = |k(i\omega)|^2 S_x(\omega)$, тут $S_y(\omega)$ – спектральна густина потужності на виході системи з частотною характеристикою $k(i\omega)$. $S_x(\omega)$ – спектральна густина потужності на вході лінійної системи.

Можна отримати співвідношення для перетворення кореляційних функцій.

Єдиною характеристикою лінійної системи – квадрат модуля частотної характеристики $|k(i\omega)|^2$.

Основна формула має вигляд

$$G_z(u_1, u_2) = |\zeta(u_1, u_2)|^2 G_0(u_1, u_2), \quad (6)$$

тут $G_{0,z}$ - кутові спектри потужності у площинах $z = 0; z = z$ відповідно.

Останнє рівняння – розв’язок поставленої задачі (для поперечної функції кореляції), якщо заданими та шуканими функціями є кутові спектри потужності. Використовуючи розв’язок функції кореляції та спектра потужності, запишемо розв’язок для випадку, коли задані та шукані є поперечні кореляційні функції.

Використовуючи (5) та (6) можна записати

$$B_z(\xi, \eta) = \iint_{-\infty}^{\infty} |\zeta(u_1, u_2)|^2 G_0(u_1, u_2) e^{i(u_1 \xi + u_2 \eta)} du_1 du_2.$$

Тоді функція кореляції набуде вигляду

$$B_z(\xi, \eta) = \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi - \xi', \eta - \eta') B_0(\xi', \eta') d\xi' d\eta',$$

де $\Phi(\xi, \eta) = \iint_{-\infty}^{\infty} |\zeta(u_1, u_2)|^2 e^{i(u_1 \xi + u_2 \eta)} du_1 du_2$ спектр функції $|\zeta(u_1, u_2)|^2$.

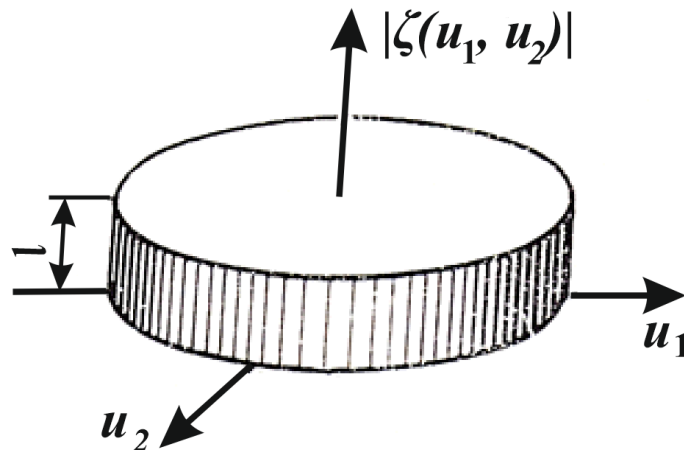


Рис. 34. Модуль частотної характеристики вільного простору на відстані $z \gg \lambda$.

3.7. Кореляційна функція на значних відстанях

На відстані $z \gg \lambda$ (значні відстані), модуль частотної характеристики має вигляд “прямокутний” (рис. 35):

$$\Phi(\xi, \eta) = \frac{k}{2\pi\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} J_1\left(k\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right),$$

де $J_1(x)$ – функція Бесселя першого порядку.

Підставляючи в (1) для кореляційної функції отримаємо:

$$B_z(\xi, \eta) = \frac{k}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{J_1(k\sqrt{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2})}{\sqrt{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2}} B_0(\xi', \eta') d\xi' d\eta'$$

Вигляд поперечної кореляційної функції не змінюється зі зміною z (при $z \gg \lambda$).

Важливо, що екран має безмежний розмір (однорідне поле!). Поле не лишається незмінним при виконанні $z \gg \lambda$ та безмежному екрані. Вигляд поля зберігається при виконанні умови геометричної оптики, що накладає обернені обмеження (z менше від деякої величини). Незалежність поперечної кореляційної функції від координати z спрощує розв’язок багатьох статистичних задач. В основі розв’язку такі підходи: спочатку розв’язується динамічна задача (визначається поле), а потім робляться необхідні усереднення.

Тому для отримання кореляційної функції поля, розсіяного випадковим екраном, треба спочатку знайти поле, потім здійснити множення та усереднення.

Кутова спектральна густина потужності записується як

$$G_z(u_1, u_2) = \begin{cases} G_0(u_1, u_2), & u_1^2 + u_2^2 < k^2 \\ 0, & u_1^2 + u_2^2 > k^2 \end{cases}$$

Зміст такий: у площині просторових частот u_1, u_2 є круглий отвір з радіусом k та центром в т.О.

Кутовий спектр на виході являє собою ту частину вхідного спектра, що знаходиться всередині отвору. Область частот поза колом – непрозора.

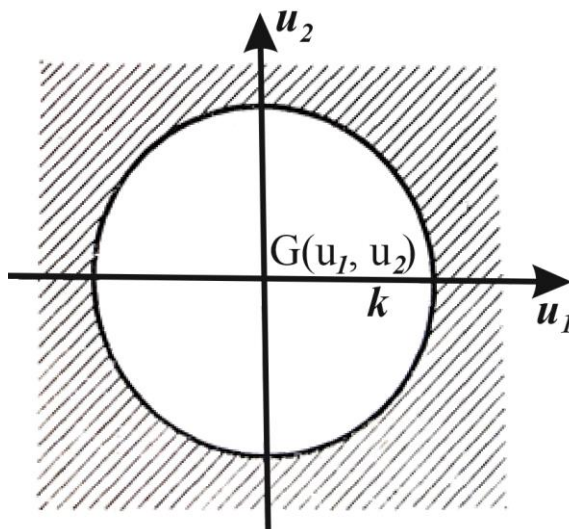


Рис. 35. Перетворення кутового спектра потужності вільним простором

Перетворення коротких хвиль

Нехай довжина хвилі зменшується. Тоді $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ росте. Радіус кола, через який проходить спектр вхідної функції (рис. 35), теж росте. Нарешті настане такий момент, коли у цьому колі поміститься вся функція $G_0(u_1, u_2)$, так можна знехтувати частиною за колом.

Якщо ефективну ширину кутового спектра позначити через u_0 , то виконується умова $u_0 \ll k$. При виконанні останньої умови величина $G_0(u_1, u_2) = 0$, при $u_1^2 + u_2^2 > k^2$, тому отримуємо $G_z(u_1, u_2) = G_0(u_1, u_2)$.

При поширенні хвилі зберігають вигляд кутового спектра потужності.

Форма кореляційної функції також зберігається, так що вона однозначно зв'язана з кутовим спектром. Функція кореляції – простий сигнал, тобто добуток ширини спектра на величину інтервала кореляції ξ_0 та дорівнює приблизно 2π :

$$u_0 \xi_0 \approx 2\pi; \xi_0 \approx \frac{2\pi}{u_0}.$$

Тоді $\xi_0 \gg \lambda$, отже інтервал кореляції \gg довжини хвилі:
 $B_z(\xi, \eta) = B_0(\xi, \eta)$.

Цей результат лишається в силі, якщо спостерігати розсіяння не на плоскому екрані, а в однорідному об'ємі, коли нехтуємо вторинним розсіюванням.

Розіб'єм об'єм на шари, відстань між якими дорівнює інтервалу кореляції.

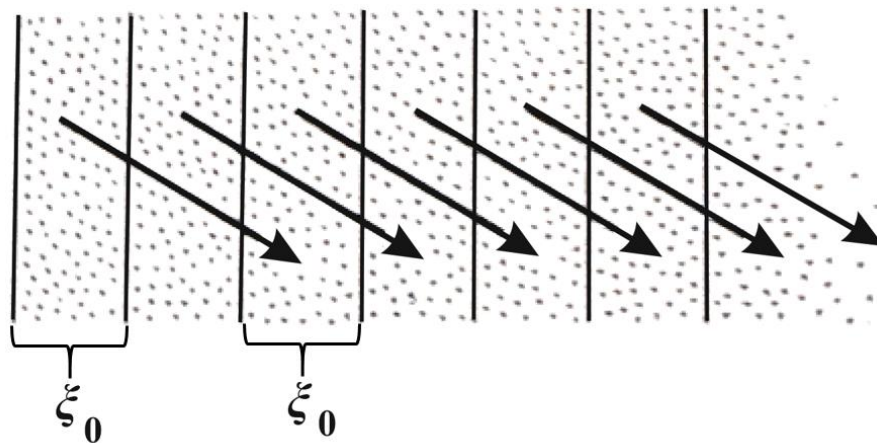


Рис. 36. Введення моделі середовища

Унаслідок однорідності об'єму, кожний з шарів буде розсіювати хвилю, що володіє функцією кореляції, не залежну від відстані та однаково порівняно з отриманою відстанню від інших об'єктів. У будь-якій точці середовища функції кореляції підсумовується (оскільки об'єми розсіювання незалежні). Сума багатьох функцій кореляції однакового вигляду дає функцію кореляції того ж виду.

Перетворення довгих хвиль

Нехай λ збільшується. При цьому коло, через яке формується спектр стягується в точку. Коло можна вважати точкою тоді, коли радіус k буде \ll відстані між відліковими точками у кутовому спектрі потужності. Ця відстань обернена величині інтервалу кореляції:

$$k \ll \frac{2\pi}{\xi_0} \text{ або } \lambda \gg \xi_0.$$

У цьому випадку $G(u_1, u_2) = 0$ всюди, за винятком т. $u_1 = 0, u_2 = 0$,

Тоді $G_z(u_1, u_2) = G_0(0,0)$.

Кутовий спектр не залежить від змінних u_1 , та u_2 і рівномірний. Функція кореляції у цьому випадку має вигляд:

$$B_z(\xi, \eta) = \frac{k^2 B_0(0,0) \cdot \pi \xi_0^2}{2\pi} \frac{J_1(k\sqrt{\xi^2 + \eta^2})}{k\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}. \quad (7)$$

Тоді інтервал кореляції близький до довжини хвилі незалежно від вигляду кореляційної функції на екрані.

Останній вираз дає набір фізичних наслідків, зокрема при поясненні синього кольору неба. Синій колір пояснюється тим, що розсіювання дрібними неоднорідностями показника заломлення пропорційне четвертому степеню частоти. Цей закон – закон розсіювання, пропорційність четвертому степеню частоти – отримують з розгляду законів випромінювання елементарного розсіювача, розмір якого $\ll \lambda$, тобто це усереднення динамічної задачі.

Отримаємо цей закон, за допомогою останнього виразу.

Нехай є тонкий (набагато менший за λ) випадковий екран.

Зміна комплексної амплітуди, як наслідок впливу екрана, дорівнює:

$\Delta p = \exp(ik_0 h) - \exp(ikh)$, де h – товщина екрана, k_0 – середнє значення модуля хвильового вектора, k – хвильовий вектор у певному місці екрана.

Оскільки екран тонкий, то виконується умова $k_0 h \ll 2\pi, kh \ll 2\pi$.

Обидві експоненти розкладаємо у степеневі ряди й обмежуємося 2-ма першими членами.

$$\text{Тоді } \Delta p = i(k_0 - k)h = ik_0h \left(1 - \frac{k}{k_0}\right).$$

У цьому випадку функція кореляції комплексних амплітуд поля на виході екрана:

$B_0(0,0) = \langle \Delta p \Delta p^* \rangle = k_0^2 h^2 p(x)$, де $p(x)$ – функція кореляції відносних змін k на екрані. З останнього виразу видно, що функція кореляції комплексних амплітуд поля на виході екрана $\sim k_0^2$, тобто дорівнює квадрату частоти.

Розсіювання відбувається не на екрані, а в об'ємі. Тому розіб'ємо весь об'єм на шари, товщиною більшою за інтервал кореляції неоднорідностей показника заломлення. Кожний такий шар – тонкий, порівняно з λ , екран.

Розсіювання на кожному з таких екранів відбувається не корельовано, тому результуюча функція кореляції буде дорівнювати сумі окремих кореляційних функцій. Для отримання інтенсивності розсіювання вважаємо $\xi = 0, \eta = 0$. Враховуючи $B_0(0,0)$, отримаємо $B_z(\xi, \eta) \sim$ четвертому степеню частоти.

3.8. Співвідношення між повздовжньою та поперечною кореляціями

Знайдемо повздовжню кореляцію за відомою поперечною кореляцією. Підставимо у вираз:

$$B(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2) = \langle \rho(x_1, y_1, z_1) \cdot \rho^*(x_2, y_2, z_2) \rangle, \quad (8)$$

комплексну амплітуду поля, яку можна записати як

$$\rho(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} g(u_1, u_2) e^{iz\sqrt{k^2 - u_1^2 - u_2^2}} e^{i(u_1x - u_2y)} du_1 du_2. \quad (9)$$

Тоді

$$B(r_1, r_2) = \frac{1}{16\pi^4} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \int \langle g(u_3, u_4) g^*(u_1, u_2) \rangle \exp \left(iz_1 \sqrt{k^2 - u_1^2 - u_2^2} - iz_2 \sqrt{k^2 - u_3^2 - u_4^2} \right) \exp [i(u_1 x_1 - u_3 x_2) + i(u_2 y_1 - u_4 y_2)] du_1 du_2 du_3 du_4$$

використовуючи

$$\langle g(u_1, u_2) g^*(u_1', u_2') \rangle = \frac{G(u_1, u_2)}{16\pi^4} \delta(u_1 - u_1') \delta(u_2 - u_2'), \quad (10)$$

отримаємо, що

$$B(\xi, \eta, \zeta) = \iint_{-\infty}^{\infty} G(u_1, u_2) \exp \left(i\zeta \sqrt{k^2 - u_1^2 - u_2^2} \right) \exp(i\xi u_1 + i\eta u_2) du_1 du_2 \quad (11)$$

Цей вираз аналогічний до (9):

$$p(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} g(u_1, u_2) e^{iz \sqrt{k^2 - u_1^2 - u_2^2}} e^{i(u_1 x + u_2 y)} dx dy.$$

Вирази (9) та (11) подібні. Кореляційна функція змінюється так само, як і поля. Для повздовжньої кореляції $\xi = \eta = 0$:

$$B(0, 0, \zeta) = \iint_{-\infty}^{\infty} G(u_1, u_2) \exp(i\zeta \sqrt{k^2 - u_1^2 - u_2^2}) du_1 du_2.$$

Отже повздовжня кореляційна функція повністю визначається поперечною. Так, функція $G(u_1, u_2)$ однозначно визначається поперечною функцією кореляції.

Питання: якої величини може досягти інтервал повздовжньої кореляції, якщо відомий інтервал поперечної кореляції?

Використовуємо наближення, де ще використовується принцип Гюйгенса – Френеля, тобто $k^2 \gg u_1^2 + u_2^2$.

Тоді

$$B(0, 0, \zeta) = \exp(ik\zeta) \iint_{-\infty}^{\infty} G(u_1, u_2) \exp\left(-\left(\frac{i\zeta}{2k}\right)(u_1^2 + u_2^2)\right) du_1 du_2.$$

При малих ζ інтервал може бути розрахований у наближенні геометричної оптики. При цьому інтеграл не буде залежати від ζ , а повздовжня кореляційна функція буде мати вигляд: $B(0,0,\zeta) = B_0 \exp(ik\zeta)$.

Тоді поля будуть повністю скорельовані по повздовжній координаті.

Умова геометричної оптики:

$$\zeta \ll \frac{2\pi k}{u_1^2 + u_2^2},$$

де $(u_1^2 + u_2^2)$ – ширина кутового спектра потужності $G(u_1, u_2)$.

Замість ширини кутового спектра потужності введемо величину інтервалу кореляції.

$$u_1^2 + u_2^2 = \frac{4\pi^2}{\rho_0^2}, \text{ умову застосування отримаємо у вигляді } \zeta \ll \frac{\rho_0^2 k}{2\pi}, \text{ або вводячи } \lambda = \frac{2\pi}{R}, \text{ отримаємо } \zeta \ll \frac{\rho_0^2}{\lambda}.$$

Міра інтервалу повздовжньої кореляції буде $L = \frac{\rho_0^2}{\lambda}$. Цей вираз для інтервалу повздовжньої кореляції отримуємо, якщо функція кореляції має гауссовий вигляд.

Якщо кутовий спектр потужності має кінцеву ширину, що задовольняє принципу Гюйгенса – Френеля, то інтервал кореляції задовольняє умову: $\rho_0 \gg \lambda$

Інші кореляційні функції.

Окрім кореляційної функції

$$B(x_1 y_1 z_1; x_2 y_2 z_2) = \langle \rho(x_1 y_1 z_1) \rho^*(x_2 y_2 z_2) \rangle$$

можна розглянути наступну кореляційну функцію $B(x_1 y_1 z_1; x_2 y_2 z_2) = \langle \rho(x_1 y_1 z_1) \rho(x_2 y_2 z_2) \rangle$, (12)

а також кореляційні функції амплітуд, фаз та їх взаємну кореляцію.

Кореляційні функції фази й амплітуди можуть бути отримані за допомогою наступний двох функцій:

$$L_1 = \langle (\ln \rho_1) \ln(\rho_2) \rangle, \quad (13)$$

$$L_2 = \langle (\ln \rho_1) \ln(\rho_2^*) \rangle. \quad (14)$$

Тут ρ_1 – комплексна амплітуда в точці з координатами x_{12}, y_{12}, z_{12} – відповідно. Згідно з $\rho_1 = A_1 \exp(i\varphi_1)$, A – амплітуда в точці з координатами $x_1 y_1 z_1$; φ_1 – фаза у тій самій точці.

$$\text{Логарифмуючи } p_1, \text{ отримуємо } \ln p_{12} = \ln A_{12} + i\varphi_{12}. \quad (15)$$

Підставляючи (15) у (14) та (13), для функції кореляції фази та логарифмів амплітуди отримаємо такі вирази:

$$\langle \ln(A_1) \ln(A_2) \rangle = \text{Re}\{L_1 + L_2\}, \quad (16)$$

$$\langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle = \text{Re}\{L_2 - L_1\},$$

$$\langle (\ln A_1) \varphi_2 \rangle = \text{Im}\{L_1 - L_2\}.$$

Якщо розсіювання відбувається на незначних неоднорідностях, то функції кореляції фази та амплітуди можуть бути визначені на основі двох функцій (8) та (12).

Для незначних неоднорідностях $p_{12} = p_0(1 + \frac{\Delta p_{1,2}}{p_0})$. При $|\Delta p_{1,2}| \ll |p_0|$ логарифми можна розкласти в ряд, обмежуючись першим доданком.

$$\text{Вважаємо, що } \langle \Delta p_{1,2} \rangle = 0, \text{ тоді } L_1 = (\ln(p_0))^2 + \langle \Delta p_1 \Delta p_2^* \rangle,$$

$L_2 = (\ln(p_0))^2 + \langle \Delta p_1 \Delta p_2 \rangle$. Тут постійні доданки впливають лише на кореляцію амплітуд. При визначенні кореляцій флуктуацій амплітуд постійні доданки можна опустити. У (9) роль функції $L_1 L_2$ відіграють (8), (12).

Таким чином, поведінка функції (12), при поширенні хвилі, може описати статистичні властивості хвильового поля. Для цієї функції також можна ввести поняття повздовжньої та поперечної кореляцій, поняття однорідності, зіставити їй відповідний кутовий спектр. Зміну поперечної функції кореляції з відстанню найпростіше описати зміною кутового спектра.

Тобто аналогічно $G_z(u_1 u_2) = \zeta(u_1 u_2) \zeta(u_1 u_2) G_0(u_1 u_2)$. Для відстані $\gg \lambda$, можна записати

$$G_z(u_1 u_2) = \begin{cases} G_0(u_1 u_2), & u_1^2 + u_2^2 \leq k^2 \\ 0, & u_1^2 + u_2^2 > k^2 \end{cases}.$$

Тоді

$$G_z(u_1 u_2) = \begin{cases} \exp(2iz\sqrt{k^2 - u_1^2 - u_2^2}), & u_1^2 + u_2^2 \leq k^2 \\ 0, & u_1^2 + u_2^2 > k^2 \end{cases}.$$

Визначивши кутовий спектр, можна знайти відповідну кореляційну функцію. Також можна розглянути наближення довгих та коротких хвиль, ефекти об'ємного розсіювання. При цьому фазова характеристика вільного простору не виключається.

3.9. Кореляційна функція поля, розсіяного неоднорідним випадковим екраном

Розглянемо хвильові випадкові процеси і як вони можуть бути використані для розв'язку хвильових задач. Тобто проходження сигналу через оптичну вимірювальну систему описується, в більшості, випадковими функціями та є випадковим процесом.

Якщо випадковий процес залежить лише від одного аргументу (координати) x , то найбільш повне його зображення дає нескінченно великий набір випадкових функцій $\varphi(x)$ за допомогою ідеального вимірювального пристрою, що не вносить власних спотворень у результати вимірювань.

На практиці розрахунок систем, які знаходяться під дією випадкових факторів (випадкових сигналів), здійснюється з

використанням усереднених характеристик і параметрів, отриманих у результаті статистичної обробки часткових реалізацій випадкових процесів.

3.9.1. Статистичний опис випадкових сигналів

Нехай здійснюється багатократне вимірювання деякої випадкової величини φ , яка залежність від аргументу x , причому вимірювана величина може набувати довільні значення: $-\infty \leq \varphi(x) \leq \infty$ при кожному заданому значенні x_i .

Оскільки φ – випадкова величина, то як результати багаторазового вимірювання в усіх точках аргументу x можна отримати ряд випадкових функцій $\varphi_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots$), що називають частковими реалізаціями.

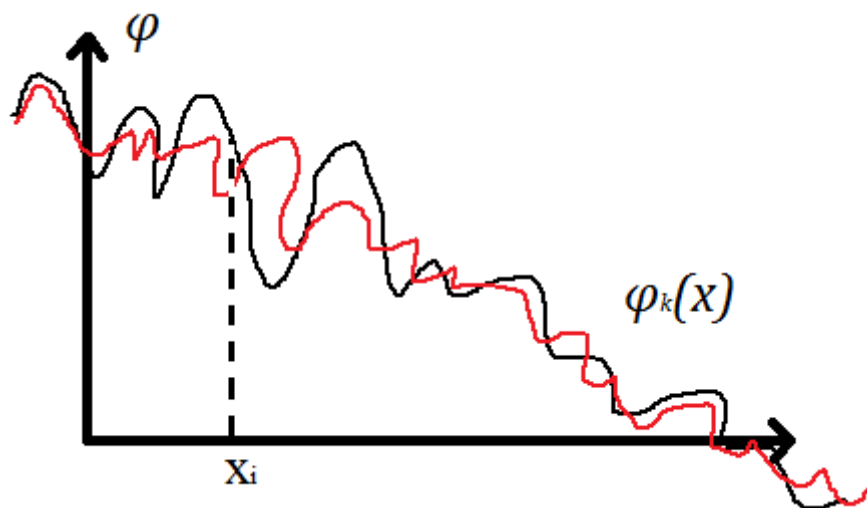


Рис. 37. Часткова реалізація випадкового процесу

Здійснюючи статистичну обробку отриманих значень $\varphi_k(x)$ для кожного аргументу x_i , можна знайти функцію густини ймовірності $\psi[\varphi(x_i)]$, що, згідно з правилом нормування, задовольняє рівність $\int_{-\infty}^{\infty} \psi[\varphi(x_i)] d\varphi = 1$.

При заданому аргументі x_i значення функції знаходяться в інтервалі $-\infty \leq \varphi(x) \leq \infty$ з ймовірністю, що $= 1$, а в інтервалі від $\varphi(x_i)$ до $\varphi(x_i) + d(\varphi_i)$ – з ймовірністю $\int_{-\infty}^{\infty} \psi[\varphi(x_i)] d\varphi_i$.

Для випадкової функції $\varphi(x)$ характерне середнє значення, математичне очікування $\langle \varphi(x_i) \rangle$ та дисперсія $D[\varphi(x_i)]$. Відповідно,

$$\langle \varphi(x_i) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_i) \psi[\varphi(x_i)] d\varphi_i,$$

$$D[\varphi(x_i)] = \sigma_{\varphi}^2(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x_i) - \langle \varphi(x_i) \rangle]^2 \psi[\varphi(x_i)] d\varphi_i.$$

Знайдені в такий спосіб математичне очікування та дисперсія в усіх точках аргументу x дадуть значення функції $\langle \varphi(x) \rangle$ та $D[\varphi(x_i)] = \sigma_{\varphi}^2(x_i)$, що є характеристиками їх вимірів уздовж осі x .

Введені величини є **моментами першого та другого порядків**.

Для характеристики випадкової величини недостатні знання вказаних моментів і доводиться вводити моменти більш високих порядків.

При дослідженні динаміки системи необхідно знати не тільки самі значення $\langle \varphi(x_i) \rangle$ та $\sigma_{\varphi}^2(x_i)$ у кожній точці на осі x , а й те як швидко змінюється випадкова функція $\varphi(x)$ уздовж усієї осі.

Швидкість зміни функції $\varphi(x)$ можна оцінити, якщо буде знайдений середньостатистичний зв'язок між значеннями цієї функції у двох точках аргументу.

Кількісну міру, що характеризує середньостатистичний зв'язок між значеннями $\varphi(x_i)$ та $\varphi(x_k)$ випадкової функції $\varphi(x)$ у точках x_i та x_k , що рознесені на інтервалах $\Delta = \xi = x_i - x_k$, прийнято визначати **автокореляційною функцією**:

$$K_{\varphi}(x_i, x_k) = \langle \varphi(x_i) \varphi(x_k) \rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_i) \varphi(x_k) \psi[\varphi(x_i), \varphi(x_k), x_i, x_k] d\varphi_i d\varphi_k$$

, де $\psi[\varphi(x_i), \varphi(x_k), x_i, x_k]$ – двовимірна густина ймовірності, яка показує, що, якщо в т. x_i випадкова величина $\varphi(x)$ має значення в інтервалі від $\varphi(x_i)$ до $\varphi(x_i) + d\varphi_i$, то в т. x_k її значення буде

в інтервалі від $\varphi(x_k)$ до $\varphi(x_k) + d\varphi_k$ з ймовірністю $\psi[\varphi(x_i), \varphi(x_k), x_i, x_k] d\varphi_i d\varphi_k$.

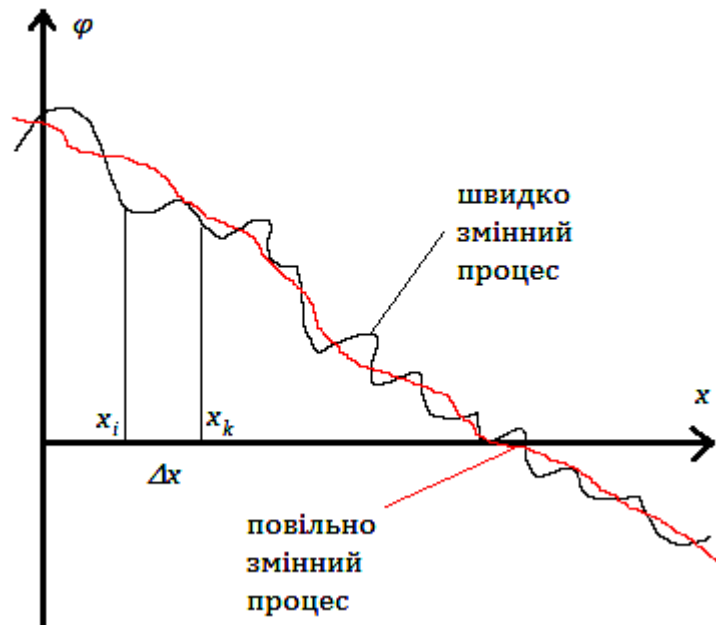


Рис. 38. Зміна досліджуваної функції

При швидко змінних процесах ймовірність правильного визначення випадкової величини в т. x_k , яка знаходиться на інтервалі Δx від т. x_i , коли відомі значення функції $\varphi(x_i)$, практично дорівнює нулю.

Залежно від характеру зміни вздовж x уведених седыноквадратичних характеристик $\langle \varphi(x_i) \rangle$, $\sigma_\varphi^2(x_i)$, $K_\varphi(x_i x_k)$ випадкові процеси поділяють на стаціонарні та нестаціонарні.

Стаціонарний випадковий процес – коли вигляд густини ймовірності та моментів будь-якого порядку не залежить від початку відліку на осі аргументу.

З визначення маємо:

а) одновимірна густина ймовірності одна й та ж для будь-якого значення u_i та не залежить від самого аргументу, тобто залежить тільки від самого значення сигналу:

$$\psi[\varphi(x_i)] = \psi[\varphi(x_k)] - \psi(\varphi)$$

б) двовимірна густина ймовірності повинна залежити тільки від значення функції $\varphi(x)$ та інтервалу $\xi = x_k - x_i$ вздовж значення осі аргументу x :

$$\psi[\varphi(x_i), \varphi(x_k), x_i, x_k] = \psi[\varphi(x), \varphi(x + \xi), \xi].$$

На основі двох останніх виразів отримаємо:

$$\langle \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \psi(x) d\varphi - \langle \varphi \rangle \text{ для всіх } x$$

$$\begin{aligned} D_{\varphi}(x) = \sigma_{\varphi}^2(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x) - \langle \varphi \rangle]^2 \psi(\varphi) d\varphi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi^2(x) - 2\varphi(x) \langle \varphi \rangle + \langle 2\varphi \rangle^2] \psi(\varphi) d\varphi = \langle \varphi^2 \rangle - \langle \varphi \rangle^2 = \sigma_{\varphi}^2; \end{aligned}$$

$$K_{\varphi}(x_i, x_k) = \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \varphi(x + \xi) \psi[\varphi(x), \varphi(x + \xi), \xi].$$

$$d\varphi(x) d\varphi(x + \xi) = K_{\varphi}(\xi)$$

Для стаціонарних процесів АКФ залежить лише від інтервалу ξ .

Для стаціонарних випадкових процесів характерна ергодичність:

Для стаціонарних процесів середні значення, які отримані по набору випадкових реалізацій, дорівнюють середнім значенням, одержаним у результаті однієї реалізації $\varphi(x)$ достатньо великої протяжності (тобто усереднення функції $\varphi(x)$).

Для математичного очікування $\langle \varphi(x) \rangle$ та АКФ $K_{\varphi}(\xi)$ стаціонарного випадкового процесу, відповідно до властивостей ергодичності, отримаємо:

$$\langle \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \psi(\varphi) d\varphi = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} \int_{-x}^x \varphi(x) dx = \langle \varphi \rangle$$

$$K_{\varphi}(\xi) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} \int_{-x}^x \varphi(x) \varphi(x + \xi) dx.$$

Враховуючи останній вираз, можна записати

$$K_{\varphi}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} \int_0^x \varphi(x) (x + \xi) dx.$$

АКФ розраховується, розбивши інтервал $0 - x$ на n частин із кроком $\Delta x = \frac{x}{n}$, вважаючи, що $\xi = x_0 \Delta m$, m – кількість відрізків Δx , що вкладається на інтервал кореляції, та змінивши інтеграл сумою значень, що відповідають величинам на відрізках розбиття:

$$K_{\varphi}(x) = \frac{1}{x-\xi} \sum_{i=1}^{i_{max}=\frac{x-\xi}{n}} \varphi(x_i) \varphi(x_i + \xi) \Delta x = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^{n-m} \varphi(x_i) \varphi(x_i + \xi).$$

ξ вибирають цілим числом, вважають таким, що дорівнює Δx , тобто $m = 1$.

3.9.2. Властивості кореляційної функції

АКФ (у теорії пристроїв) називають **кореляційної функцією**.

Кореляційна функція $K_{\varphi}(\xi)$ одновимірного випадкового стаціонарного процесу володіє набором властивостей.

1. Автокореляційна функція парна $K_{\varphi}(\xi) = K_{\varphi}(-\xi)$.

Властивість парності впливає зі спектрального зображення кореляційної функції, де усереднення проводиться по нескінченному інтервалу шкали x , а тому не повинна простежуватися залежність від ξ в той чи іншій бік від довільного початку координат.

2. Значення АКФ при $\xi = 0$ дорівнює середній квадратичний величині випадкової функції:

$$K_{\varphi}(\xi) = K_{\varphi}(0) = \langle \varphi^2(x) \rangle.$$

3. При $\xi \rightarrow \infty$, АКФ набирає значення квадрата середньої величини випадкової функції:

$$K_{\varphi}(\xi)_{\xi \rightarrow \infty} = K_{\varphi}(\infty) = (\langle \varphi(x) \rangle)^2.$$

$$\text{Позначимо } \varphi(x) = \langle \varphi \rangle + \alpha(x), \varphi(x + \xi) = \langle \varphi \rangle + \alpha(x + \xi).$$

Тоді

$$\begin{aligned} K_{\varphi}(\xi) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} \int_{-x}^x [\langle \varphi \rangle + \alpha(x)][\langle \varphi \rangle + \alpha(x + \xi)] dx \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} \int_{-x}^x [\langle \varphi \rangle^2 + \langle \varphi \rangle \alpha(x + \xi) + \langle \varphi \rangle \\ &> \alpha(x) + \alpha(x) \alpha(x + \xi)] dx \\ &= \langle \varphi \rangle^2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} \int_{-x}^x [\alpha(x) \alpha(x + \xi)] dx \end{aligned}$$

$\alpha(x) = \varphi(x) - \langle \varphi \rangle$ – випадкова величина, що характеризує відхилення $\varphi(x)$ від середнього значення.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} \int_{-x}^x \alpha(x) dx = 0; \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} \int_{-x}^x \alpha(x + \xi) dx = 0;$$

$$\frac{1}{2x} \int_{-x}^x \alpha(x) \alpha(x + \xi) dx \rightarrow 0, \text{ при } \xi \rightarrow \infty.$$

Оскільки при нескінченості величини $\alpha(x)$, $\alpha(x + \infty)$ не скорельовані, за аналогією

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} \int_{-x}^x \alpha(x) \alpha(x + \xi) dx = K_{\alpha}(\xi),$$

$$K_{\alpha}(\infty) = (\langle \alpha \rangle^2) = 0.$$

4. З ростом ξ кореляційна функція зменшується, допускається осциляція.

Зменшення пов'язане з послабленням статистичного зв'язку функцій $\varphi(x)$, $\varphi(x + \xi)$. Тому $K_\varphi(0) > K_\varphi(\xi)_{\xi \neq 0}$

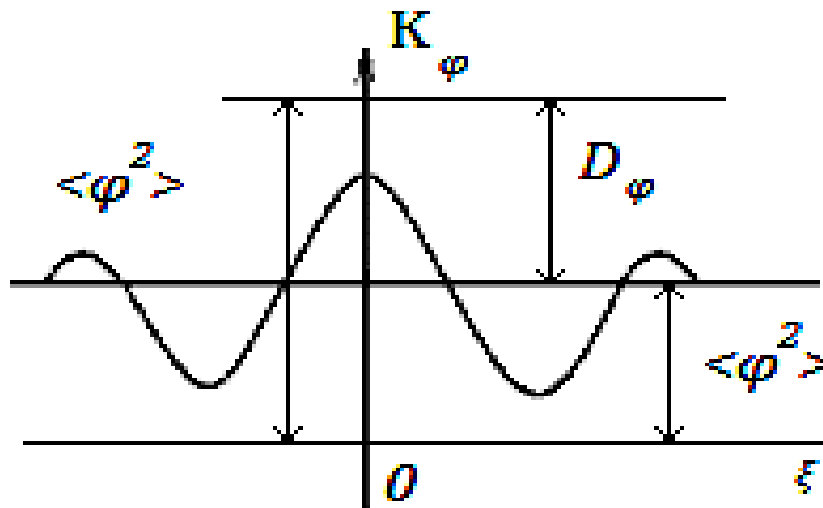


Рис. 39. Хід кореляційної функції

Отримані результати свідчать про те, що кореляційна функція є універсальною характеристикою стаціонарного випадкового процесу та дозволяє визначити всі його числові параметри:

- математичне очікування

$$\langle \varphi(x) \rangle = [K_\varphi(\infty)]^{1/2};$$

- середньоквадратичне відхилення

$$\langle \varphi^2(x) \rangle = K_\varphi(0);$$

- дисперсію

$$D[\varphi(x)] = \sigma_\varphi^2 = K_\varphi(0) - K_\varphi(\infty).$$

3.9.3. Спектральне представлення АКФ. Спектр потужності

До випадкової функції $\varphi(x)$ також можна застосувати перетворення Фур'є. Враховуючи, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \varphi(x + \xi) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(i\omega_x)|^2 \exp(i\omega_x \xi) d\omega_x,$$

автокореляційна функція $K_\varphi(\xi)$ може бути записана так:

$$K_\varphi(\xi) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} \int_{-x}^x \varphi(x) \varphi(x + \xi) dx = \frac{1}{2x} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega_x) \exp(i\omega_x \xi) d\omega_x,$$

де

$$S(\omega_x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|F(i\omega_x)|^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} \left| \int_{-x}^x \varphi(x) \exp(-i\omega_x x) dx \right|^2.$$

Функція $S(\omega_x)$ – спектральна густина потужності стаціонарного випадкового процесу. Із властивостей автокореляційної функції випливає, що $S(\omega_x)$ – парна, дійсна та додатна функція. Тому для стаціонарного випадкового процесу дійсна пара спряжених Фур'є-перетворень:

$$S_\varphi(\omega_x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_\varphi(\xi) \exp(-i\omega_x \xi) d\xi,$$

$$K_\varphi(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_\varphi(\omega_x) \exp(i\omega_x \xi) d\omega_x.$$

3.10. Проходження випадкових сигналів через лінійні системи

Припустимо, що на вхід лінійної системи із функцією ваги $\omega(x)$ подається часткова реалізація випадкового сигналу із функцією $g(x)$. Тоді вихідний сигнал також буде випадковим і визначатиметься інтегралом згортки:

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x - u) \omega(u) du.$$

Обчислимо автокореляційну функцію вихідного сигналу, що пов'язує статистичні значення вихідного сигналів $y(x_i)$ та $y(x_k)$ у двох точках x_i та x_k .

Тоді

$$\begin{aligned}
K_y(x_i x_k) &= \langle y(x_i) y(x_k) \rangle = \\
&= \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} g(x_i - u) \omega(u) du \int_{-\infty}^{\infty} g(x_k - \theta) \omega(\theta) d\theta \right\rangle \\
&= \iint_{-\infty}^{\infty} \langle g(x_i - u) g(x_k - \theta) \rangle \omega(u) \omega(\theta) du d\theta \\
&= \iint_{-\infty}^{\infty} K_g(x_i - u, x_k - \theta) \omega(u) \omega(\theta) du d\theta,
\end{aligned}$$

де $K_g(x_i - u, x_k - \theta)$ – автокореляційна функція вхідного випадкового процесу $g(x)$. За умови, що процес стаціонарний, автокореляційна функція повинна залежати тільки від різниці аргументів $\xi = (x_k - \theta) - (x_i - u) = \xi + u - \theta$, $\xi = x_k - x_i$:

$$K_y(\xi) = \iint_{-\infty}^{\infty} K_g(\xi + u - \theta) \omega(u) \omega(\theta) du d\theta. \quad (17)$$

Спектр потужності стаціонарного випадкового процесу отримаємо інтегруванням (17) відповідно до перетворення Фур'є:

$$S_y(\omega_x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_y(\xi) \exp(-i\omega_x \xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\iint_{-\infty}^{\infty} K_g(\xi + u - \theta) \omega(u) \omega(\theta) du d\theta \right] \exp(-i\omega_x \xi) d\xi$$

Змінюючи порядок інтегрування, отримаємо:

$$S_y(\omega_x) = \iint_{-\infty}^{\infty} \omega(u) \omega(\theta) du d\theta \cdot \int_{-\infty}^{\infty} K_y(\xi + u - \theta) \exp(-i\omega_x \xi) d\xi.$$

З урахуванням введених вище позначень, $\xi = \xi + u - \theta$, перепишемо:

$$\begin{aligned}
S_y(\omega_x) &= \iint_{-\infty}^{\infty} \omega(u) \exp(i\omega_x u) du \cdot \int_{-\infty}^{\infty} K_g(\xi) \exp(-i\omega_x \xi) d\xi \cdot \\
&\int_{-\infty}^{\infty} \omega(\theta) \exp(-i\omega_x \theta) d\theta
\end{aligned}$$

За визначенням,

$W(i\omega_x) = \int \omega(u) \exp(i\omega_x \theta) d\theta$ – ампліудно-фазова частотна передавальна функція лінійної системи;

$W^*(i\omega_x) = \int \omega(u) \exp(i\omega_x u) du$ – комплексно спряжена величина.

Відповідно

$$S_y(\omega_x) = |W(i\omega_x)|^2 S_g(\omega_x).$$

Спектр потужності вихідного сигналу дорівнює спектру потужності вхідного, помноженого на $|W(i\omega_x)|^2$.

3.11. Багатовимірні випадкові процеси

Поряд з одновимірними випадковими процесами можна ввести багатовимірний випадковий процес функції, що описує залежність від кількох аргументів:

$$\varphi = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi(\vec{x}).$$

Усереднені характеристики багатовимірних випадкових процесів:

- $\psi[\varphi(x)]$ – одновимірна функція густини ймовірності випадкового багатовимірного процесу $\varphi(\vec{x})$, що характеризує густину ймовірності в деякій точці простору з координатою \vec{x} ;

- $\psi[\varphi(\vec{x}_i), \varphi(\vec{x}_k), \vec{x}_i, \vec{x}_k]$ – двовимірна густина ймовірності, що характеризує середньо статистичний зв'язок між імовірнісними значеннями функції одночасно у двох точках n -вимірного простору, координати якого задаються радіус-векторами \vec{x}_i та \vec{x}_k ;

- $S(\vec{\omega}_x)$ – спектр потужності випадкового багатовимірного стаціонарного процесу.

Якщо в n -вимірному просторі статистичні характеристики залишаються постійними і не залежать від початку відліку в системі, що визначається сукупністю координат \vec{x} , то такий процес буде стаціонарним.

Кореляційна функція в цьому випадку виявляється залежною не від самих координат \vec{x}_i , та \vec{x}_k , а від розміру та напрямку вектора $\vec{\xi} = \vec{x}_k - \vec{x}_i$.

Враховуючи властивість ергодичності стаціонарного випадкового процесу автокореляційна функція може бути обчислена так:

$$K_{\varphi}(\vec{\xi}) = \lim_{\substack{X_1 \rightarrow \infty \\ \dots \\ X_n \rightarrow \infty}} \frac{1}{(2)^n X_1 \dots X_n} \int_{-X_1}^{X_1} \dots \int_{-X_1}^{X_1} \varphi(x_1 \dots x_n) \varphi(x_1 + \xi_1, \dots, x_n + \xi_n) dx_1 \dots dx_n$$

Наприклад, стаціонарна випадкова функція $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$ задана на площині прямокутних координат. Тоді автокореляційна функція може бути визначена як

$$K_{\varphi}(\vec{\xi}) = K_{\varphi}(\xi_1, \xi_2) = \lim_{\substack{X_1 \rightarrow \infty \\ X_2 \rightarrow \infty}} \frac{1}{4X_1 X_2} \int_{-X_1}^{X_1} \int_{-X_1}^{X_1} \varphi(x_1 x_2) \varphi(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2) dx_1 dx_2$$

Спектральна густина потужності n -вимірному процесу $S_{\varphi}(\vec{\omega}_x) = S_{\varphi}(\omega_{x_1}, \omega_{x_2}, \dots, \omega_{x_n})$ пов'язана з n -вимірною автокореляційною функцією $K_{\varphi}(\vec{\xi})$ парою спряжених перетворень Фур'є:

$$S_{\varphi}(\vec{\omega}_x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\varphi}(\vec{\xi}) \exp(-i\vec{\omega}_x \vec{\xi}) d\vec{\xi};$$

$$K_{\varphi}(\vec{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\varphi}(\vec{\omega}_x) \exp(i\vec{\omega}_x \vec{\xi}) d\vec{\omega}_x.$$

Стаціонарні n -вимірні процеси можуть володіти властивостями ізотропності.

Аналізуємо поверхню із шорсткістю. Автокореляційна функція залежить тільки від відстані між точками \vec{x}_i та \vec{x}_k і не залежить від напрямку самого вектора (тобто залежить від $|\vec{\xi}|$):

$$\langle \varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{x} + \vec{\xi}) \rangle = K_\varphi(|\vec{\xi}|).$$

У цьому випадку, якщо простір аргументів є площиною з прямокутними x_1, x_2 чи полярними координатами ρ, α , то автокореляційна функція з ізотропними властивостями випадкового процесу $\varphi(x_1, x_2)$ буде володіти осьовою симетрією:

$$K_\varphi(\xi_1, \xi_2) = K_\varphi[(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2}] = K_\varphi(\rho).$$

Тоді спектр потужності можна знайти з перетворень Ганкеля:

$S_\varphi(\omega_r) = 2\pi \int_0^{+\infty} \rho K_\varphi(\rho) I_0(\omega_r \rho) d\rho$, де $\omega_r = (\omega_{x_1}^2 + \omega_{x_2}^2)^{1/2}$ – відстань у площині зворотних кутових частот, а сама функція $S_\varphi(\omega_r)$ також буде мати осьову симетрію.

Автокореляційна функція вихідного n -вимірного сигналу та його спектр потужності

Нехай на вхід лінійної n -вимірної системи, що має функцію ваги $\omega(\vec{x})$ і амплітудно частотно передавальну функцію $W(i\vec{\omega}_x)$ - (n -вимірні), подається випадковий сигнал $g(\vec{x})$ зі статичними характеристиками $K_g(\vec{\xi})$ і $S_g(\vec{\omega})$. Тоді автокореляційна функція і спектр потужності вихідного сигналу визначаються такими рівностями:

$$K_y(\vec{\xi}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} K_g(\vec{\xi} + \vec{u} - \vec{v}) \omega(\vec{u}) \omega(\vec{v}) d\vec{u} d\vec{v},$$

$$S_y(\vec{\omega}) = |W(i\vec{\omega}_x)|^2 S_g(\vec{\omega}).$$

3.12. Модель неоднорідного випадкового екрана

Нехай ϵ випадковий екран. Якщо він безмежний та однорідний, то являє собою (при певному опроміненні) рівну світлу поверхню випромінювання, на якій наявна інформація про кутовий розподіл потужності випромінювання. Нехай на екрані проведена лінія, перетин якої відрізняється від оточуючих точок. Форма лінії надає інформацію (формулу) про перетин. Тоді вже екран не можна вважати однорідним.

Постають питання: як змінюється кореляційна функція при віддаленні від такого неоднорідного екрана; чи зберігається та інформація, яка міститься в формі неоднорідності; чи можна виділити цю інформацію на значному віддаленні від екрану.

Нас цікавить та інформація, яка міститься в неоднорідностях екрана. Задачу спрощують через вибір кутового розподілу енергії.

Найбільш прості є 2 розподіли:

- рівномірний розподіл по кутах;
- зворотний розподіл, коли вся енергія сконцентрована практично в одному напрямку.

Задача найбільш проста, якщо прийняти два розподіли: один – для одного напрямку, другий – йому перпендикулярний. Якщо кутовий розподіл має вигляд δ -функції, то поле не буде залежити від жодної координати. Таку ідеалізацію не можна приймати для 2-х кутових змінних одночасно.

Тому вважаємо рівномірним розподіл енергії по кутах по другій координаті. Це виконується при умові $\xi_0 \ll \lambda$, для того щоб не було залежності від λ , вважаємо, що має місце δ -кореляція.

Нестаціонарність вводиться шляхом зміни інтенсивності світіння екрана вздовж тої координати, де світіння некорельовано (або δ -корельовано).

Таким чином, підходимо до наступної найпростішої моделі статистично неоднорідного екрана $B(x_1, x_2) = A^2(x_2)\delta(x_2 - x_1)$. Нас будуть цікавити перетворення інформації, що міститься у функції $A^2(x_2)$, при поширенні хвилі у просторі.

Ця модель – найпростіша модель, яка відображає таке явище. Вона має такі особливості:

- функція дійсна;
- описує функцію кореляції: спектральних амплітуд стаціонарних процесу, який є неоднорідним;
- співвідношення задає не спектр, а кореляційну функцію.

Враховуючи симетрію перетворення Фур'є, можна вважати, що отриманий спектр задовольняє спектру однорідного процесу, але це не так. Частотна характеристика вільного простору вносить асиметрію, вигляд якої не залежить від перетворенням Фур'є. Тому використання моделі задає нові результати – інтервал кореляції хвильового процесу може бути $\gg \lambda$, що обов'язково зумовлює нерівномірний кутовий спектр. Під різними кутами екран по-різному відсвічує. Можна знайти кут, для якого взагалі не побачимо зображення. Але модель має зміст, якщо використовувати порівняно незначні кути.

Кутовий спектр потужності, що розсіюється реальним екраном, вказаний на наступному рисунку.

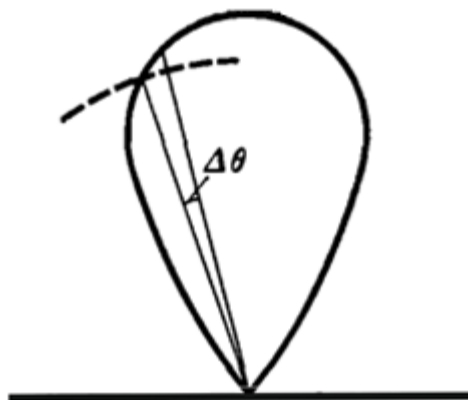


Рис. 40. Реальна діаграма направленості випромінювання (суцільна крива)

Вигляд кутового спектра залежить від кута спостереження. Умова $\xi_0 \ll \lambda$ не виконана, інтервал кореляції $\gg \lambda$.

Нас цікавить випромінювання в межах тих кутів, що бачимо ($\Delta\theta$). При малих кутах відмінності між суцільною та пунктирною лініями малі. Тому далі розглядаємо малі кути, що зберігає ідеалізовану модель за всіх умов, коли нас цікавить розподіл інтенсивності вздовж площини $z = 0$, а не кутовий спектр випромінювання у широкому діапазоні кутів.

3.13. Математичний опис перетворення кореляційної функції у вільному просторі

Нехай на вході вільного простору, довжини z , задана кореляційна функція вигляду

$$B(x_1, x_2) = A^2(x_2)\delta(x_1 - x_2).$$

Необхідно знайти вигляд кореляційної функції на виході вільного простору.

Кореляційна функція вигляду $K(t, \tau)$, де t – час, τ – різниця по часу t_1 та t_2 на виході лінійної системи, що володіє імпульсною характеристикою вигляду $h(t)$ визначається як:

де $K_x(t', \tau')$ - кореляційна функція на вході лінійної системи.

Останній вираз легко отримати, перемножуючи та усереднюючи відгуки лінійної системи типу:

$$y(A) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t')h(t - t')dt'.$$

Для розв'язку хвильової задачі достатньо у вираз (18) підставити характеристики системи. Будемо вважати, що застосовується принцип Гюйгенса – Френеля, тобто $u_1^2 + u_2^2 \ll k^2$, який дозволяє використовувати для відгука вільного простору вираз

$$H_{r-\phi} = \sqrt{\frac{k}{2\pi iz}} \exp(ikz) \exp\left(i \frac{kx^2}{2z}\right).$$

Підставляючи цей вираз у (18), отримаємо

$$B_z(x, \xi) = \frac{k}{2\pi z} \iint_{-\infty}^{\infty} B_0(x', \xi') \times \exp\left\{\frac{ik}{2z} [(x - x')^2 - (x - \xi - x' - \xi')^2]\right\} dx' d\xi' \quad (19)$$

Необхідно, щоб на інтервалі кореляції за зміною ξ , фаза підінтегрального виразу у (19) змінювалась не істотно. Позначаючи інтеграл кореляції по ξ через ρ_ξ , отримаємо, що $\frac{kD\rho_\xi}{z} < \pi$, де D – найбільший інтервал зміни змінних x, ξ, x' , (вважаючи $D \gg \rho_\xi$). Так, можна розширити модель, вводячи в неї кореляційні функції довільного вигляду з інтервалом кореляції ρ , що задовольняє останню умову. Фізично остання умова визначає рівномірність випромінювання в межах кута $\Delta\theta$.

Інтегрування за змінними ξ' з введенням замість змінної ξ нової змінної u через співвідношення $\xi = \frac{zu}{k}$ дозволяє записати вираз (19) як

$$B_z\left(x, \frac{zu}{k}\right) = \frac{k}{2\pi z} \exp\left(iux - \frac{izu^2}{2k}\right) \int_{-\infty}^{\infty} A^2(x') \exp(iux') dx'. \quad (20)$$

Співвідношення (20) зв'язує розподіл інтенсивності випромінювання на поверхні екрана з кореляційною функцією поля, що спостерігається на довільній відстані z від площини екрана. Це співвідношення – математична основа розв'язку всіх задач у дальній зоні.

3.13.1. Дальня зона

Для значних відстаней останній вираз набуває більш простий вигляд, якщо при цьому аргументи x та ξ кореляційної функції $B_z(x, \xi)$ змінюються у деякому обмеженому інтервалі. Практично завжди можна виділити деяку область D , тому що всі значення $B_z(x, \xi)$ будуть лежати всередині цієї області. Останній вираз спрощується, якщо виконуються нерівності

$$kD^2/2z \ll \pi \text{ або } D^2 \ll \lambda z. \quad (21)$$

При цьому експоненціальний множник перед останнім інтегралом можна вважати таким, що дорівнює 1, тоді

$$B_z\left(\frac{zu}{k}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} A^2(x) e^{iux} dx. \quad (22)$$

Ця умова – умова дифракції Фраунгофера для щілини розміру D .

Роль щілини – область, всередині якої поле визначається значенням кореляційної функції, розсіюваного екраном. Тут щілина знаходиться не на вході, а на виході вільного простору, де цікавить кореляційна функція.

Умова (21) – умова дальньої зони, хоча насправді виконання умови може бути й не зв'язаним з віддаленням площини спостереження на значні відстані. Ці умови можуть бути виконані при спостереженні функції кореляції $B_z(x, \xi)$ у невеликій області D . У цьому істотна відмінність розглядаємого випадку від дифракції Фраунгофера, виконання умов якої може бути досягнуто зменшенням зони виміру поля. Досліджуване поле може бути віддаленим на значні відстані. Остання умова може виконуватися на довільній відстані від площини $z = 0$.

Згідно з останнім виразом, поперечна кореляційна функція однорідна і пов'язана з розподілом $A^2(x)$ перетворенням Фур'є.

Перетворення Фур'є зворотне, наслідком такого математичного зв'язку є те, що інформацію, яка міститься в $A^2(x)$, несе кореляційна функція $B_z(zu/k)$.

3.14. Апертурний синтез та інші аналогічні задачі

Розсіювання хвилі на випадкових неоднорідностях

Є середовище з випадковими неоднорідностями, функція кореляції якого однорідна по всіх трьох координатах.

Розглянемо частину цього середовища, що утворює хмарку кінцевих розмірів, і помістимо її у вільний простір. Якщо обмежити розміри хмарки, то отримаємо середовище, яке володіє неоднорідною функцією кореляції.

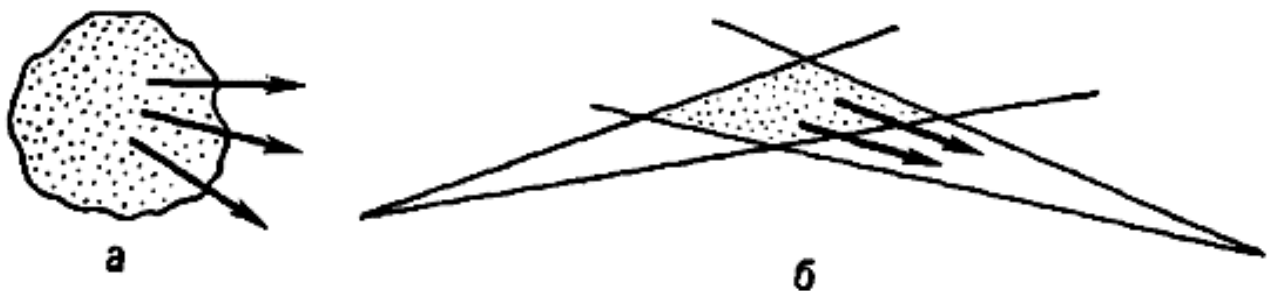


Рис. 41. Розсіювання хвилі на випадкових неоднорідностях

Розсіяння хвиль на випадкових неоднорідностях:

а – форма розсіючого об'єму обмежена тою ділянкою, де є неоднорідності;

б – форма розсіючого об'єму, що обмежена областю перетину діаграм напрямленості випромінюючої та приймаючої антен.

Необхідно знайти поле, що розсіюється такою хмарою неоднорідностей на більшій відстані від поля. Можливий також механізм утворення на неоднорідностях кореляційної функції.

Однорідне середовище опромінюється хвилею лише в деякій частині (рис. 41), що приводить до утворення хмарки розсіяння кінцевих розмірів. Тоді поперечна функція кореляції поля, що пройшло через шар неоднорідностей, буде мати вигляд (одновимірна модель):

$B(x, \xi) = A^2(x)B_0(\xi)$, $B_0(\xi)$ – функція кореляції однорідного поля, що отримується при опроміненні безмежного поля неоднорідностей плоскою хвилею; $A^2(x)$ – розподіл інтенсивності у падаючій хвилі або розподіл середнього квадрата неоднорідностей.

Нехай функція $A^2(x)$ обмежена розмірами хмари D_A , а розсіяння спостерігається на більшій відстані z , що задовольняє умову

$$\frac{kD_A^2}{2z} < \pi.$$

Інтервал кореляції неоднорідностей ρ_ξ істотно менший за розмір D_A .

З останньої умови отримуємо, що при розрахунку кореляційної функції можна реальну функцію замінити δ -функцією.

Як наслідок, кореляційна функція розсіяного поля на відстані z задовольняє останню умову, якщо області зміни x та ξ не перевищують розмірів області спостереження розсіювання. Якщо кореляційна функція однорідна, то можна розрахувати кутовий спектр потужності розсіяного поля. Тоді

$$G(u_1, u_2) = \delta(u_2) \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{2\pi z} A^2(x') \exp \left\{ i \left[\left(\frac{k}{z} \right) x' - u_1 \right] \xi \right\} \times d\xi dx' =$$

$$\delta(u_2) \frac{k}{2\pi z} A^2 \left(\frac{u_2 z}{k} \right)$$

Апертурний синтез у дальній зоні

Нехай необхідно визначити вигляд функції $A^2(x)$, тобто розподіл інтенсивності випромінювання по деякій площині, що віддалена на відстань z .

Є можливість приймати випромінювання від цієї площини через вільний простір, довжиною z , та вимірювати кореляційну функцію випромінювання, що аналізується на деякій ділянці змінних, довжиною D . В окремому випадку, функція $A^2(x)$ може описувати форму джерела випромінювання, розподіл джерел випромінювання в просторі і т.п.

Нехай область D є такою, що ми знаходимось у дальній зоні. Тут виконується рівність $B_z\left(\frac{zu}{k}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} A^2(x) e^{iux} dx$.

$$\text{Тоді } A^2(x) = \frac{z}{R} \int_{-\infty}^{\infty} B_z\left(\frac{zu}{k}\right) e^{-iux} dx. \quad (23)$$

Обчислення інтеграла (23) неможливе, оскільки значення функції кореляції $B_z(\xi)$ відоме лише на кінцевій відстані D .

Більше того, значення $B_z(\xi)$ на інтервалі D можуть бути спотворені як по амплітуді, так і по фазі.

Тоді замість функції $B_z(\xi)$ будемо мати функцію $B_z(\xi)g(\xi)$, де $g(\xi) = 0$ поза інтервалом D , а всередині інтервалу D характеризує амплітудні та фазові спотворення справжньої $B_z(\xi)$ по відношенню до вимірювальної.

Введемо спектр функції $g(\xi)$, тобто $\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-iu\xi} d\xi = \Gamma_c(u)$. Функцію $\Gamma_c(u)$, як і $g(\xi)$, характеризують спотворення $B_z(\xi)$ та обмеженість інтервалу, де визначені значення функції. Функція $\Gamma_c(u)$ – діаграма напрямленості синтезованої апертури.

Оскільки $B_z(\xi)$ невідоме, то у (23) підставимо функцію, яка може бути фактично відомою, тобто $B_z(\xi)g(\xi)$. Тоді замість функції $A^2(x)$ отримаємо деяку іншу функцію, яку позначимо як

$$I(x) = \frac{z}{k} \int_{-\infty}^{\infty} B_z\left(\frac{zu}{k}\right) q\left(\frac{zu}{k}\right) e^{-iux} du. \quad (24)$$

$I(x)$ – зображення від $A^2(x)$ оригіналу. Знайдемо зв'язок $I(x)$ та $A^2(x)$. Підставимо у (24) $B_z\left(\frac{zu}{k}\right)$, тоді

$$I(x) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} A^2(x') q\left(\frac{zu}{k}\right) e^{-iu(x'-x)} du dx'.$$

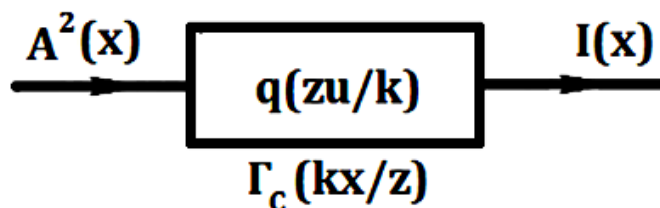


Рис. 42. Підхід апертурного аналізу в дальній зоні

У (24) виконуємо інтегрування за u , тоді отримуємо:

$$I(x) = \frac{k}{2\pi z} \int_{-\infty}^{\infty} A^2(x') \Gamma_c\left[\frac{k}{z}(x - x')\right] dx'.$$

Задамо послідовність операцій, що спотворюють формулу $A^2(x)$ та переводять функцію в $I(x)$. Така послідовність операцій – спостереження.

Функція $A^2(x)$ згортається з функцією $\Gamma_c\left[\frac{k}{z}x\right]$, яку ще називають діаграмою напрямленості антени з синтезованою апертурою.

Ця операція записується аналогічно до $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t')h(t - t')dt'$, оскільки дане співвідношення також описує спотворення вхідної функції при проходженні через лінійну систему з імпульсною характеристикою $h(t)$.

Характер спотворення функції $A^2(x)$ аналогічний. Функція $1/2\pi \Gamma_c\left[\frac{k}{z}x\right]$ виконує роль імпульсної характеристики деякого фільтра. Частотна характеристика фільтра збігається з функцією $q\left[\left(\frac{z}{k}\right)u\right]$, де u – просторова частота. Таким чином, частотна характеристика фільтра, що формує зображення, за формулою збігається з функцією $q(\xi)$, що відрізняються лише масштабом. Зі збільшенням z або зменшенням k (збільшенням довжини хвилі),

масштаб стискається – відбувається звуження частотної характеристики фільтра при збереженні форми. Всередині прямокутника, що задається апертурою системи, зосереджена та частина просторового спектра оригіналу, що формує вихідний сигнал.

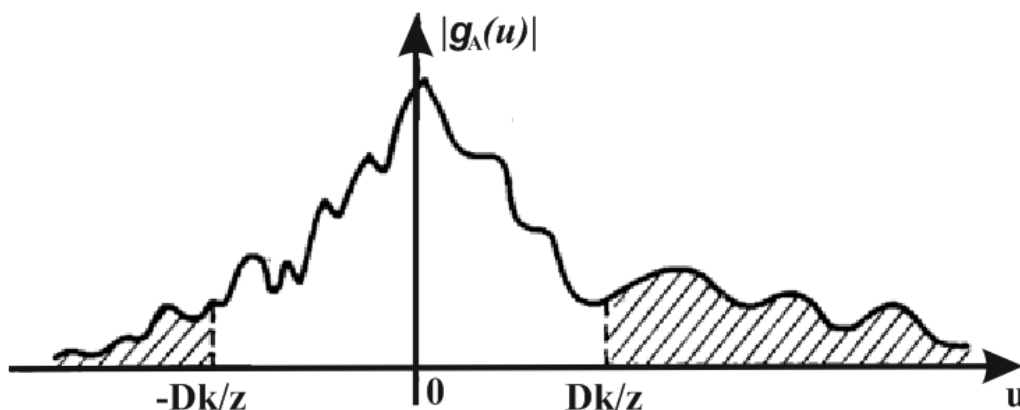


Рис. 43. Частотна характеристика фільтра

У цьому випадку лінійна система – прямокутний фільтр, ширина якого дорівнює просторовій частоті u інтервалу D_k/z . Стає зрозумілим характер спотворення – зрізування високих просторових частот $A^2(x)$. Ці спотворення зумовлюють втрату частини інформації.

Втрати тим більші, чим ширше спектр досліджуваної функції, а оскільки зі збільшенням z або λ частотна характеристика звужується, то з ростом z та λ зростають втрати інформації. Знайдемо умову, за якої втрати інформації не відбувається.

Для цього необхідно щоби:

1) просторовий спектр функції $A^2(x)$ був би обмежений деякою верхньою просторовою частотою u_M ;

2) щоби розширення фільтра, яке викликане зміною масштабу функції $q\left[\frac{z}{k}u\right]$ за u , не зумовлювало звуження фільтра, тобто щоби спектр $A^2(x)$ виходив за межі області пропускання фільтра.

Схема зображена на рис. 43.

Отже, умова відсутності спотворення при спостереженні записується у вигляді:

$$u_M < D \left(\frac{2\pi}{\lambda z} \right) \text{ або} \quad (25)$$

$$u_M < \frac{kD}{z}, \quad (26)$$

де u_M – верхня границя спектра $A^2(x)$; $D \left(\frac{2\pi}{\lambda z} \right)$ – ширина області прозорості фільтра. З останньої умови видно, що спотворення збільшується з ростом z . Це відбувається в наслідок звуження області частоти прозорості фільтра. Остання умова демонструє можливість визначення тої частини спектра функції $A^2(x)$, яка збережена в зображенні, тобто це спостережувана частина спектра оригінала.

Спектр зображення $I(x)$ завжди обмежений і максимальна верхня частота визначається з останньої умови. Обмеження спектра зображення дозволяє розкласти спектр у ряд Котельникова з відстанню між точками відліку $\Delta\xi = \frac{2\pi}{u_M}$. Підставляючи цей вираз у верхнє значення частоти ($u_M \rightarrow (26)$), отримаємо

$$\Delta\xi = \frac{2\pi z}{kD} = \frac{z\lambda}{D}. \quad (27)$$

Інтервал між точками відліку, що визначається (27), відповідає роздільній здатності по критерію Релея. По цьому інтервалу усереднюється $A^2(x)$ при переводі функції в $I(x)$, тобто при спостереженні. Відношення $\frac{\Delta\xi}{z}$ відповідає куту, для якого спостерігається інтервал між точками відліку функції $A^2(x)$ при спостереженні від відстані z . Це відношення характеризує кутову роздільну здатність $\frac{\Delta\xi}{z} = \Delta\varphi = \frac{\lambda}{D}$. (28)

Чим менше $\Delta\varphi$, тим менше усереднення $A^2(x)$ при спостереженні.

Алгоритми обробки вимірювальних значень кореляційної функції поля

Зображення не містить інформації про просторові частоти оригінала вище деякої частоти (26). Це тому, що такої інформації немає у полі, що приймається, тому не можна цю інформацію отримати за допомогою будь-якого алгоритма. Умова (25) оптимальна, інший алгоритм не може бути кращим.

Якщо $q(\xi) = 1$ в межах D , то отримується оптимальна обробка. Вона задає мінімальні спотворення спектра оригіналу у доступному діапазоні просторових частот. Але така оптимізація не завжди може бути використана. Іноколи необхідно спектр перетворити, щоб виявити особливості оригіналу. Це потрібно для виявлення подвійних об'єктів в оригіналі та деяких інших особливостей.

Отримати тільки роздільну здатність можна, якщо в $I(x)$ у виразі (24) певним чином вибрати ядро $\Gamma_c(u)$. Однак на форму ядра накладаються обмеження. Діаграма напрямленості $\Gamma_c(u)$ є функцією з обмеженим спектром. Обмеженість пов'язана з кінцевістю спектра та зумовлюють те, що розв'язок інтегрального рівняння – некоректний. Некоректність полягає в тому, що малі зміни $I(x)$ задають суттєві зміни $A^2(x)$. Тому для усунення некоректності, а отже, значення $I(x)$, визначають поліпшення роздільної здатності. Виміри повинні бути зроблені з дуже високою точністю. Чим вища точність виміру значень $I(x)$, тим вища надійність значень $A^2(x)$. Виміру значень $I(x)$ з високою точністю заважають шуми та флуктуації. З урахуванням шумів можна записати:

$$I(x) + n(x) = \frac{k}{2\pi z} \int_{-\infty}^{\infty} A^2(x') \Gamma_c\left(\frac{k}{z}(x - x')\right) dx'.$$

Тут $n(x)$ – випадкова функція що враховує точність виміру $I(x)$. Тоді знаходження $A^2(x)$ є не розв'язок (24), а розв'язком статистичної задачі. Роздільна здатність системи визначається в залежності від рівня шумів $\langle n^2(x) \rangle$ і є статистичним параметром.

При постійному рівні $\langle n^2(x) \rangle$ роздільна здатність системи буде тим вища, чим менша $\Delta\varphi$ за (28). Значення $\Delta\varphi$ за (28) дозволяє обчислити межеву роздільну здатність системи. Роздільна здатність за (28) реалізується на рівні похибки (або шумів), що на 5-10 дБ менші за $I(x)$.

3.15. Апертурний синтез при значних апертурах

Інтервал D , на якому вимірюється значення кореляційної функції, має назву **апертури**. Найбільша ширина смуги частот, а отже, мінімальне спотворення при спостереженні за допомогою апертурного синтезу отримується при значних апертурах. Однак попередній огляд відбувався у наближенні, що апертура обмежена умовою $D^2 \ll \lambda z$. Це дає обмеження на розмір величини апертури. Зараз відмовляємося від останньої умови та вибираємо більші значення D . Тоді кореляційна функція вже не буде однорідною.

Запис функції:

$$B_z\left(x, \frac{zu}{k}\right) e^{i\left(\frac{zu^2}{k} - iux\right)} = \frac{k}{2\pi z} \int_{-\infty}^{\infty} A^2(x') e^{iux'} dx'. \quad (29)$$

Права частина не залежить від координати x . Це означає, що й і ліва частина не залежить від x . Це важлива та істотна властивість даного перетворення. Вимір функції кореляції $B_\xi(x, \xi)$, як функції двох змінних x та ξ , від кожної з якої вона залежить, являє собою важку задачу.

Якщо значення функції $B_\xi(\xi)$ вимірюється в N точках, то значення функції $B_\xi(x, \xi)$ треба вимірювати в N^2 точках, тобто проаналізувати всі значення x, ξ во всіх комбінаціях. Відмінна властивість (29) позбавить від цієї умови і дозволить подати розв'язок задачі як синтез значних апертур та звести до попередньої задачі про синтез малих апертур.

Введемо нову функцію $\left(\xi = \frac{zu}{k}\right)$, тоді

$$\Phi\left(\frac{zu}{k}\right) = B_z\left(x, \frac{zu}{k}\right) \exp\left(i \frac{zu^2}{k} - iux\right). \quad (30)$$

Функцію $\Phi(\xi)$ (вона не залежить від x за (30)), можна як і $B_z(x, \xi)$, вважати відомою з експерименту. Дійсно, якщо відомі значення $B_z(x, \xi)$, то відомі значення x та ξ , за якими вони отримані, тобто можна враховувати $\Phi(\xi)$. Для довільних x отримаємо однакові результати. Тому для розрахунку $\Phi(\xi)$ можна взяти результати виміру $B_z(x, \xi)$ для одного (довільного) значення x та всіх ξ . Тоді отримаємо $\Phi\left(\frac{zu}{k}\right) = \frac{k}{2\pi z} \int_{-\infty}^{\infty} A^2(x) e^{iux} dx$. Відмінності є в алгоритмі обробки експериментальних даних, що виглядає так:

$$I(x) = \frac{k}{z} \int_{-\infty}^{\infty} B_z\left(x, \frac{zu}{k}\right) q\left(\frac{zu}{k}\right) e^{\left(i \frac{zu^2}{2k} - iu(x_0+x)\right)} du. \quad (31)$$

Тут x_0 – будь-які значення x з інтервалу, де відбувається вимір залежності $B_z(x, \xi)$ від ξ . Величина інтервалу спостереження не обмежена умовою $D^2 \ll \lambda z$, може буде більшою і навіть набагато більшою $\sqrt{\lambda z}$. Змінюються лише формула, за допомогою якої обробляється зображення. Для отримання результату $D^2 \gg \lambda z$ необхідно використовувати (31). Сюди входить z , тобто необхідно знати величину z . Оцінимо наближення, з якого треба знайти z .

Цю умову можна позначити, виходячи з малих фазових змін експоненти (31) на інтервалі інтегрування D (або на величині апертури):

$$\left(\frac{kD^2}{2}\right) \left(\frac{\Delta z}{z^2}\right) < \pi \text{ або } \frac{\Delta z}{z} \ll \frac{\lambda z}{D^2}. \quad (32)$$

Тобто при $D^2 \gg \lambda z$ координату z треба знати з високою відносною точністю.

Розглянемо характеристики спотворень сигналу, що спостерігається, якщо є інформація про величину z і забезпечити обробку функції $B_z(x, \xi)$ не за (31), а (24). Тоді $y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_x(D)k(i\omega)e^{i\omega t} d\omega$. У виразі (24) у відіграє роль ω , x – роль t , а частотна характеристика:

$$\tilde{\zeta}(u) = q \left(\frac{zu}{k} \right) \exp \left(\frac{izu^2}{2k} \right). \quad (33)$$

Фільтр із характеристикою типу (33) враховує інформацію про величину z та не дає пов'язаних із цим спотворень.

Обробка за (24) відрізняється виглядом еквівалентної частотної характеристики, тобто не містить множник $\exp \left(\frac{izu^2}{2k} \right)$. Сигнал після проходження першого фільтра з характеристикою вигляду (33) далі йде через фільтр, який має частотну характеристику вигляду

$$\zeta(u) = \exp \left(-\frac{izu^2}{2k} \right). \quad (34)$$

Послідовність включення двох фільтрів з частотними характеристиками $\tilde{\zeta}(u)$ та $\zeta(u)$ (рис. 44) зумовлює обробку сигналу за (24). Спотворення, що зумовлені зміною z з точно відомим значенням z за формулою (31), обробкою за формулою (24), зумовлені дією фільтра з частотною характеристикою $\zeta(u)$ за (34).

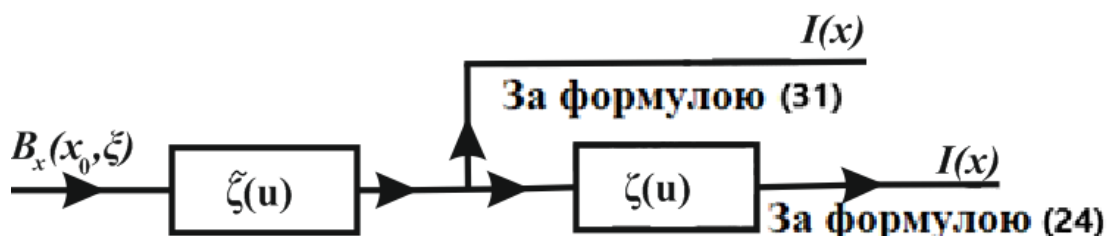


Рис. 44. Схема різних алгоритмів операції апертурного синтезу для значної апертури $D^2 \gg \lambda z$.

Наведена частотна характеристика збігається з частотною характеристикою вільного простору як

$$\zeta(u) = \exp(ikz) \exp\left[-i\frac{z}{2k}u^2\right]. \quad (35)$$

Тоді стає зрозумілим характер спотворення: спотворення, що вносяться фільтрами з частотною характеристикою вигляду (34) або (35) зводяться до дисперсії просторових компонент. Такий фільтр не обмежує ширини просторового спектра, а зумовляє перерозподіл в просторі інтенсивностей у спостережуваній картині.

Нехай початкова картина розподілу $A^2(x)$ містить дуже вузьке в напрямку координат x джерело, оточене темним полем. Дисперсія зумовлює перерозподіл інтенсивності, зі збільшенням тривалості спостережуваного сигналу відбувається зменшення інтенсивності. Можна підібрати таке z (рис.45), при якому ширина функції $I(x)$ буде найменшою, а інтенсивність – найбільшою.

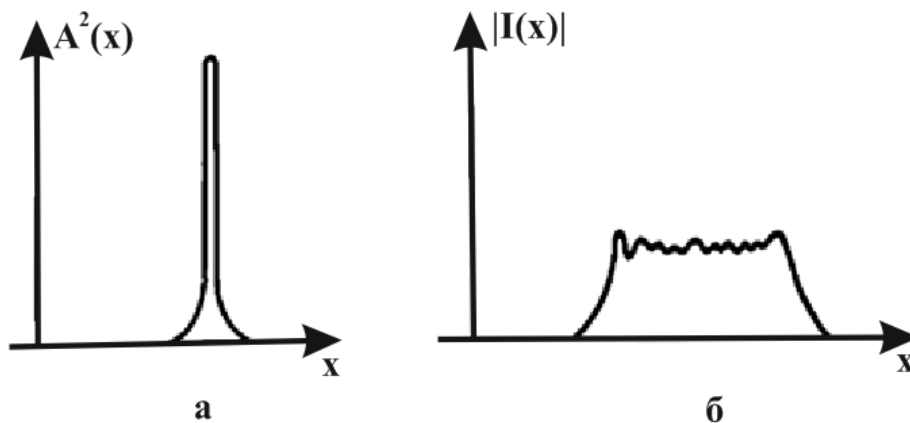


Рис. 45. Спотворення, викликане дією фільтрів

Така операція – “фокусування”. Величина z тут буде відповідати справжньому значення z , якщо вихідний розподіл $A^2(x)$ має вигляд короткого усередненого імпульсу (рис. 45, а). Сукупність значень функції $B_z(x_0, \xi)$ зі змінною ξ несе інформацію не лише про функцію $A^2(x)$, але й про відстань z , якщо $A^2(x)$ має вигляд $D^2 \gg \lambda z$.

3.16. Зірковий інтерферометр

Майкельсоном було запропоновано спосіб виміру кутових діаметрів далеких зірок, що оснований на використанні зіркового інтерферометра Майкельсона.

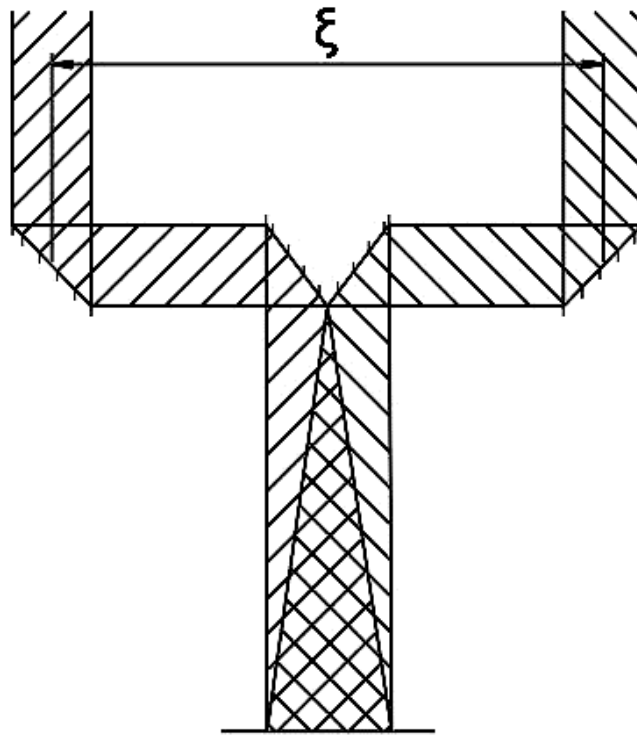


Рис. 46. Зірковий інтерферометр Майкельсона

Світло від зірки потрапляє на два дзеркала інтерферометра, що розташовані на відстані ξ в площині, перпендикулярній напрямку на зірку.

Дзеркала розташовані так, щоби світло, відбите від зірки, потрапило на 1 спільний екран, де світлові поля, відбиті дзеркалами, інтерферують. Інтерференційна картина спостерігається у монохроматичному світлі та являє собою чергування темних і світлих смуг. Вимірюється контрастність картини при різних відстанях між дзеркалами інтерферометра ξ . Фіксується та відстань ξ_0 , для якої інтерференційна картина стає малоконтрастною, тобто фактично пропадає.

За величиною цієї відстані визначається шуканий кутовий розмір зірки за формулою

$$\Delta\varphi = \frac{\lambda}{\xi_0}.$$

Замінімо зірку деякою смугою, що світиться, ширина якої дорівнює діаметру зірки D . Розподіл світла перпендикулярно цієї смуги буде таким:

$$A^2(x) = \begin{cases} A_0^2, & -D/2 \leq x \leq D/2 \\ 0, & x \text{ поза інтервалом} \end{cases}. \quad (36)$$

Світло від кожної точки зірки – некорельоване, тому функція кореляції поля на поверхні зірки смуги описується співвідношенням $B(x_1, x_2) = A^2(x_2)\delta(x_2 - x_1)$. Для розміру D зірки також виконується умова дальньої зони:

$$kD^2/2z \ll \pi \text{ або } D^2 \ll \lambda z.$$

Отже, визначення кутового розміру зірки можливе з використанням підходів геометричної оптики.

Тому функція кореляції комплексних амплітуд описується як

$$B_z\left(\frac{zu}{k}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} A^2(x)e^{iux} dx. \quad (37)$$

Здійснивши інтегрування, отримаємо $B_z(\xi) = \frac{kA_0^2 D \sin\left[\frac{(k\xi)}{2z}D\right]}{2\pi z \frac{k\xi}{2z}D}$.

Інтерференційна картина спостерігається на екрані, що віддалений на відстані a від площини розташування дзеркал інтерферометра.

Знайдемо розподіл інтенсивності світла на площині, де сходяться та інтерферують промені, відбиті від дзеркал інтерферометра. Шуканий розподіл інтенсивності являє собою значення кореляційної функції поля $B(x, \xi)$ при $\xi = 0$. Тому при розв'язку задачі можна використовувати формули перетворення кореляційної функції. Для пояснення перетворення, що робить інтерферометр Майкельсона, змінимо принципову схему.

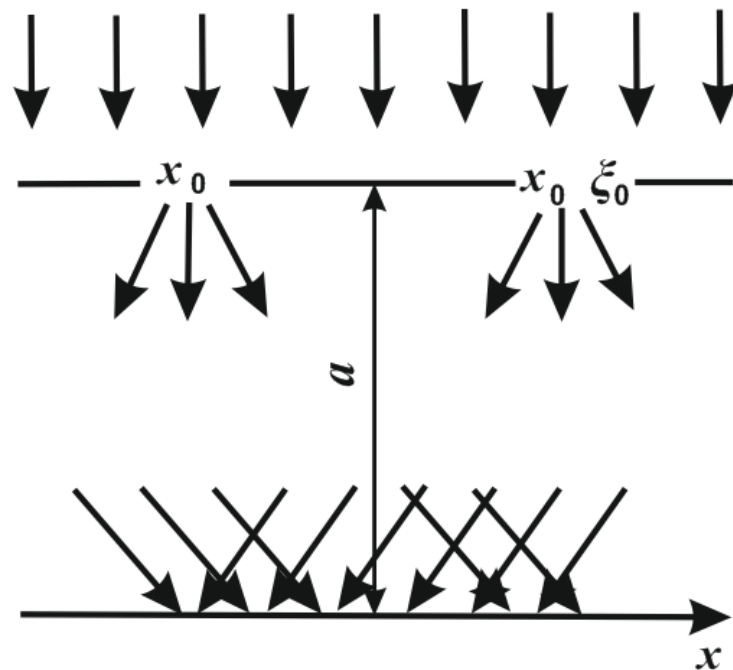


Рис. 47. Підходи інтеферометра Майкельсона

Тут дзеркала замінені щілинами у непрозорому екрані, які достатньо вузькі, світло поширюється у різних напрямках. Після шляху a у вільному просторі світло від обидвох щілин потрапляє на екран, де спостерігається інтерференційна картина. Обидві схеми дозволяють спостерігати інтерференцію світла, що опромінює два дзеркала, які знаходяться у різних точках простору.

Схеми відрізняються лише інтенсивністю. Через вузькі щілини (ширина більш за λ) проходить мало світла, дзеркала можуть бути досить значних розмірів, від них відбивається більший світловий потік. Для аналізу використовуємо тільки просту схему. В останній схемі є два елементи, які змінюють вигляд кореляційної функції, що описує поле, яке опромінює інтерферометр. Перший елемент – непрозорий екран зі щілинами. Другий елемент – вільний простір довжиною a . Розглянемо перетворення кореляційної функції непрозорим екраном із двома вузькими щілинами.

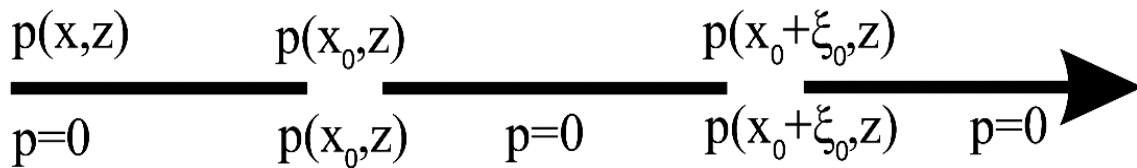


Рис. 48. Перетворення комплексних амплітуд поля

Схема базується на використанні принципу Кіргофа, згідно з яким поле за непрозорими екраном відсутнє, а поле всередині щілини дорівнює 0, що отримується в даному місці без екрана.

Твердження істинне, якщо нас цікавить поле не одразу за екраном, а після проходження деякої ділянки вільного простору. Це дозволяє використовувати перетворення Кірхгофа. Будемо вважати, що щілина на екрані доволі вузька та містить одну точку. Через такий реальний екран світло не пройде. Однак ідеалізація не розрахована на достовірне врахування інтенсивності світла, реальна схема працює із дзеркалами, а не зі щілинами.

Тому розподіл поля, що пройшло через екран, описується δ -функцією. При цьому щілини можна вважати зовсім точковими і тим самим спростити розрахунки.

Якщо координати однієї щілини x_0 , а другої $(x_0 + \xi)$, де ξ – відстань між щілинами, то поле за щілиною може бути записане як

$$p(x) = p(x, z)[\delta(x - x_0) + \delta(x - x_0 - \xi)]. \quad (38)$$

Тут $p(x)$ – комплексна амплітуда за площиною екрану; $p(x, z)$ – комплексна амплітуда поля, що падає на екран. Кореляційна функція поля, яка пройшло крізь екран, оцінюється за формулою

$$B(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2) = \langle p(x_1, y_1, z_1) \cdot p^*(x_2, y_2, z_2) \rangle, \quad (39)$$

тобто

$$B_{z_0}(x, \xi_1) = \langle p(x_1, y_1, z_1) \cdot p^*(x - \xi_1) \rangle. \quad (40)$$

Підставляючи (12) у (14), враховуючи, що $\langle p(x, z) \cdot p^*(x - \xi, z) \rangle = B_z(\xi)$, кореляційна функція поля перед екраном, отримаємо:

$$B_{z0}(x, \xi_1) = B_z(\xi) \{ \delta(x - x_0) \delta(x - \xi - x_0 - \xi_1) + \delta(x - x_0 - \xi_1) \delta(x - \xi - x_0) + \delta(x - x_0) \delta(x - \xi - x_0) + \delta(x - x_0 - \xi_1) \delta(x - \xi - x_0 - \xi_1) \}. \quad (41)$$

Кореляційна функція поля, що перетворюється екраном зі щілинами, стає неоднорідною, тобто залежить від обидвох змінних x та ξ_1 . Це співвідношення розв'язує першу частину задачі. У другій частині необхідно врахувати вплив вільного простору довжиною a . Для розв'язку використовується вираз

$$B_z(x\xi) = \frac{k}{2\pi z} \iint_{-\infty}^{\infty} B_z(x', \xi') \cdot \exp \left\{ i \frac{k}{2z} [(x - x')^2 - (x - \xi - x' - \xi')^2] \right\} dx' d\xi'$$

Необхідно визначити розподіл лише на екрані. Тоді:

$$B_{za}(x, 0) = \frac{k}{2\pi a} \iint_{-\infty}^{\infty} B_{z0}(x', \xi') \cdot \exp \left[-i \frac{k}{a} (x - x') \xi' - i \frac{k}{2a} \xi'^2 \right] dx' d\xi'. \quad (42)$$

Підставляючи (41) у (42) та провівши інтегрування, вважаючи, що до $B_z(\xi)$ – дійсна, отримаємо $I(x) = B_{za}(x, 0) = \frac{k}{2\pi a} \left[B_z(0) + B_z(\xi_1) \cos \left\{ \frac{k}{a} \xi_1 (x - x_0) + \frac{k}{2a} \xi_1^2 \right\} \right]$. При $x = x_0 - \xi_1/2$, залежність інтенсивності від ξ_1 , зображено на нижченаведеному рисунку.

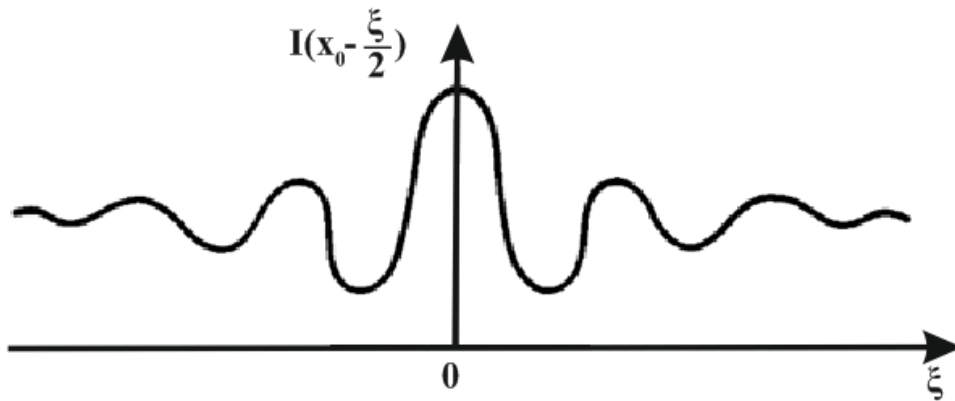


Рис. 49. Розподіл інтенсивності

Ця залежність має деякий постійний рівень, на якому спостерігаються постійно затухаючі осциляції. Затухання осциляції зумовлено залежністю $B_z(\xi)$, що несе інформацію про розмір джерела. Відношення максимуму спостережуваної інтерференційної картини до середини рівня опроміненості складає величину

$$\frac{I_{max}}{I_{серед}} = 1 + \frac{B_z(\xi_0)}{B_z(0)}. \quad (43)$$

Підставляючи (43) у (42), отримаємо, що

$$\frac{I_{max}}{I_{серед}} = 1 + \frac{\sin\left(\frac{k\xi D}{2z}\right)}{\left(\frac{k}{2z}\right)\xi D}. \quad (44)$$

З останнього виразу випливає, що контраст інтерференційної картини зникне при $\xi = \xi_0$, що задовольняє рівнянню $\left(\frac{k\xi_0}{2z}\right) D = \pi$. Якщо при даному ξ_0 остання умова виконується, то кутовий розмір зірки визначається за формулою

$\Delta\varphi = \frac{D}{z} = \frac{2\pi}{k\xi_0} = \frac{\lambda}{\xi_0}$. Саме це співвідношення дозволяє довести *спосіб виміру за Майкельсоном*.

3.17. Особливості апертурного синтезу

-Вимір комплексної кореляційної функції

Вимір комплексної кореляційної функції дозволяє отримати інформацію про вигляд функції $A^2(x)$ і навіть інформацію про величину z . Як можна виміряти кореляційну функцію комплексних амплітуд у випадку дійсних полів?

Розглянемо зв'язок функції кореляції дійсних полів та комплексних амплітуд. Нехай $P(x, t)$ – дійсне поле:

$$p(\vec{r}, t) = p(r) \exp(i\omega t) + p^*(r) \exp(-i\omega t), \quad (45)$$

де $p(r)$ – комплексна амплітуда.

Функція кореляції дійсних полів записуємо у вигляді

$$K(r_1, r_2, t) = \langle P(r_1, t)P(r_2, t) \rangle. \quad (46)$$

Підставляючи (45) у (46), отримаємо зв'язок

$$K(r_1, r_2, t) = \langle p(r_1)p(r_2) \rangle \exp(2i\omega t) + \langle p^*(r_1)p^*(r_2) \rangle \exp(-2i\omega t) + \langle p(r_1)p^*(r_2) \rangle + \langle p^*(r_1)p(r_2) \rangle. \quad (47)$$

Від часу залежать лише перших 2 члени цього виразу. Усереднюємо його за часом t . При усередненні перші 2 члени цього виразу стають малими, порівняно з двома останніми, й ними можна знехтувати.

Отже, отримуємо,
 $\overline{K(r_1, r_2, t)}^t = \langle p(r_1)p^*(r_2) \rangle + \langle p^*(r_1)p(r_2) \rangle$. Цей вираз дає зв'язок кореляційної функції, тоді

$$\overline{K(r_1, r_2, t)}^t = 2\text{Re}B(r_1, r_2), \quad (48)$$

де $B(r_1, r_2)$ – функція кореляції комплексних амплітуд. Вимірюючи кореляційну функцію полів, можна визначити дійсну частину комплексної кореляційної функції.

Далі необхідно знайти уявну частину комплексної кореляційної функції. Записуємо (48) для кореляційної функції реальних полів, в одного з яких фаза повернута на $\pi/2$:

$$P(r_1, t) = p(r_1) \exp(i\omega t + i\pi/2) + p^*(r_1) \exp(-i\omega t + i\pi/2). \quad (49)$$

Замінюючи в (46), (47) одне з полів виразом (49), отримаємо:

$$\overline{K(r_1, r_2, t)}^t = 2\text{Im}B(r_1, r_2).$$

Отже: 1. Визначається середня за час кореляційна функція реальних полів (46) і

2. Функція \hat{k} , що отримується, якщо у (46) замінити фаза одного з полів на $\pi/2$, тобто одне поле, замінюється на (49).

Тоді шукана кореляційна функція

$$2B(r_1, r_2) = \overline{K(r_1, r_2, t)}^t + \frac{1}{iK(r_1, r_2, t)}^t.$$

Але такий спосіб не завжди можливий та зручний, особливо в отриманому діапазоні, оскільки не можна отримати сигнал початкового поля у вигляді електричних коливань. Постають питання: чи не можна обмежитись одним доданком; які при цьому можливі помилки?

3.18. Деякі властивості спектрів дійсної частини комплексної функції та умова визначення спектра комплексної функції по дійсній частині

Згідно з властивістю спектрів:

$$C_1(u) = 1/2 [C(u) + C^*(-u)], \text{ де}$$

$$C(u) = C_1(u) + iC_2(u),$$

$$C_1(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(x) e^{-iux} dx,$$

$[\Phi(x) = \Phi_1(x) + i\Phi_2(x)]$ – комплексна функція

$\Phi_1(x)$ та $\Phi_2(x)$ – дійсні функції

$$C_2(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2(x) e^{-iux} dx.$$

Водночас час функція $C_{1,2}(u)$ не дійсна та $Re C(u) \neq C_1(u)$.

Отже, за відомим спектром дійсної частини $C_1(u)$ можна визначити спектр комплексної функції $C(u)$, якщо відома загальна інформація про комплексну функцію або її спектр. Нехай нам відомо, що спектри функції $\Phi(x)$ розташовані в області $u > 0$. У цьому випадку спектр та дзеркальне відбивання відносно точки $u = 0$ не будуть перекриватися і співвідношення

$C_1(u) = 1/2 [C(u) + C^*(-u)]$ можна записати так

$$C_1(u) = C(u)/2; u > 0, \quad (50)$$

$$C_1(u) = C^*(-u)/2; u < 0,$$

за умови:

$$C(u) = C^*(u) = 0; \text{ при } u < 0. \quad (51)$$

При виконанні загальної умови (51) спектр дійсної частини при $u > 0$ збігається з половиною спектра комплексної функції, і внаслідок (51) значення спектра при $u > 0$ достатні, оскільки при $u < 0$ спектр вже визначений цією ж умовою. Нехай у спектрі функції $\Phi(x)$ відомо, що вона відмінна від нуля при деяких кінцевих межах. Позначимо повну ширину спектра $\Phi(x)$ через Δu .

Якщо спектр відмінний від нуля, як при $u > 0$, так і $u < 0$, то співвідношення (50) не можна використовувати, а із загальної формули $C_1(u) = 1/2 [C(u) + C^*(-u)]$ видно, що спектри дійсної частини $C_1(u)$ будуть являти собою результат інтерференції двох членів, що змінює вигляд функції $\Phi(x)$.

Тоді можна перетворити функцію $\Phi(x)$ так, щоб не було спотворень.

Помноживши функцію $\Phi(x)$ на комплексний множник $\exp(iqx)$, отримаємо нову функцію вигляду

$$\overline{\Phi(x)} = \exp(iqx) \Phi(x). \quad (52)$$

Спектр функції (52) пов'язаний зі спектром початкової функції співвідношенням $\overline{C(u)} = C(u + q)$.

Оскільки спектр $C(u)$ відмінний від нуля на обмеженому інтервалі Δu , то можна вибрати q , щоб виконувалась умова (26) для функції $\overline{C(u)}$. Для цього достатньо виконання нерівності $q \geq \Delta u$. Тоді отримаємо, що $\overline{C_1(u)} = \frac{\overline{C(u)}}{2}$.

3.19. Апертурний синтез по кореляційній функції реальних полів

Зараз необхідно дати відповідь на питання:

що буде, якщо використовувати лише один доданок в $2B(r_1, r_2) = \overline{K(r_1, r_2, t)^t} + \widehat{K(r_1, r_2, t)^t}$ для апертурного синтезу.

Нехай ми можемо отримати тільки функцію кореляції дійсних полів. Маємо пристрій, який перетворює поле у коливання, перемножує та усереднює поле у часі. Тоді можна виміряти функцію кореляції дійсних полів, що визначається так $K(r_1, r_2, t) = \langle P(r_1, t)P(r_2, t) \rangle$.

Для кореляційної функції комплексного поля справедливий вираз:

$$B_z \left(x, \frac{zu}{k} \right) = \frac{k}{2\pi z} \exp \left(iux - \frac{izu^2}{2k} \right) \int_{-\infty}^{\infty} A^2(x') \exp(iux') dx. \quad (53)$$

Перепишемо його у вигляді

$$\frac{z}{k} B_z(x, \xi) q(x, \xi) \exp\left(i \frac{k}{2z} \xi^2\right) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(i \frac{k}{2z} x \xi\right) \int_{-\infty}^{\infty} A^2(x') \exp\left(i \frac{k}{z} \xi x'\right) dx'$$

Причому $\frac{k\xi}{z} \equiv u$, ξ – апертура. Нехай розмір D , в межах якого зміна ξ (апертури) не дуже значна, так що справедлива нерівність

$$\frac{kD^2}{2z} \ll \pi; D^2 \ll \lambda z. \quad (54)$$

Будемо вважати, що $q(x, \xi)$ є дійсною величиною. Тоді $\overline{K(r_1, r_2, t)^t} = 2\text{Re}B(r_1, r_2)$. При вимірюванні $K(r_1, r_2, t) = \langle P(r_1, t)P(r_2, t) \rangle$ ми знаємо лише дійсну частину функції $B_z(x_0, \xi)$.

Уведемо позначення:

$$\Phi(\xi) = \frac{z}{k} B_z(x, \xi) q(x, \xi) \exp\left(i \frac{k}{2z} \xi^2\right).$$

Тоді можна записати у вигляді:

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(i \frac{k}{z} x \xi\right) \int_{-\infty}^{\infty} A^2(x') \exp\left(i \frac{k}{z} \xi x'\right) dx'. \quad (55)$$

Задачею апертурного синтезу є визначення функції $A^2(x)$, а для цього з (52) необхідно знайти спектр функції $\Phi(\xi) \exp\left(-i \frac{k}{z} x \xi\right)$. Причому відомий спектр дійсної частини функцій $\Phi(\xi)$. Необхідно знайти спектр функції вигляду (52) за спектром дійсної частини функцій $\Phi(\xi)$. Розв'язок можливий за умови $q \geq \Delta u$, що в цьому випадку має вигляд $\left(\frac{k}{z}\right) x \geq \Delta u$, де Δu – ширина спектра шуканої комплексної функції згідно з:

$$G(u_1, u_2) = \delta(u_2) \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{2\pi z} A^2(x') \exp \left\{ \left[i \left(\frac{k}{z} \right) x' - u_1 \right] \xi \right\} \cdot \delta \xi dx'$$

$$= \delta(u_2) \frac{k}{2\pi z} A^2 \left(\frac{u_2 z}{k} \right)$$

визначається як

$$\varphi(u_1) = \left(\frac{k}{2\pi z} \right) A^2 \left(\frac{u_1 z}{k} \right). \quad (56)$$

Якщо ширина функція $A^2(x)$ складає Δx , то ширина спектра

$$\Delta u = \Delta x \left(\frac{k}{z} \right). \quad (57)$$

Підставляючи (57) у (55),

$$\text{отримаємо } x \geq \Delta x. \quad (58)$$

При збереженні умови (58) для розв'язку задачі апертурного синтезу достатньо знати функцію кореляції дійсних полів, тобто

$$K(r_1, r_2, t) = \langle P(r_1, t) P(r_2, t) \rangle.$$

Ця умова задає, що випромінювання, яке досліджується, йти від кінцевої ділянки простору, розміром Δx , і ця ділянка має знаходитись весь час по один бік від границі тої області, де відбувається вибір функції кореляції.

3.20. Просторова фільтрація регулярних хвильових полів в оптичних системах

Нехай є оптична система, що складається з ряду об'єктів.

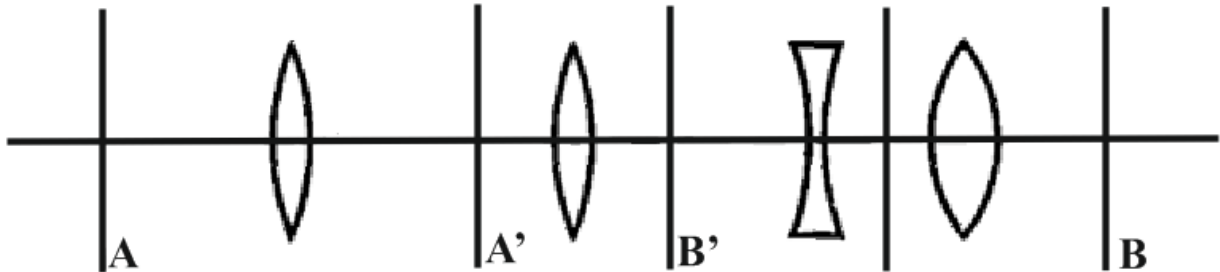


Рис. 50. Механізм просторової фільтрації

Проведемо допоміжні площини A' , B' довільно у просторі, що розділяє об'єктиви так, щоби між двома площинами був лише один об'єктив. Тоді задачу про зображення A у B можна поділити на набір досліджуваних послідовних задач з A у A' , далі з A' у B' і до площини B . Відмінність кожної із підзадач: змінюються параметри об'єктива та відстані, що проходять хвилі до об'єктива та після нього. Якщо можна буде розв'язати хоча б одну із цих задач у загальному вигляді, тоді буде розв'язана і загальна задача.

Спростуємо задачу до:

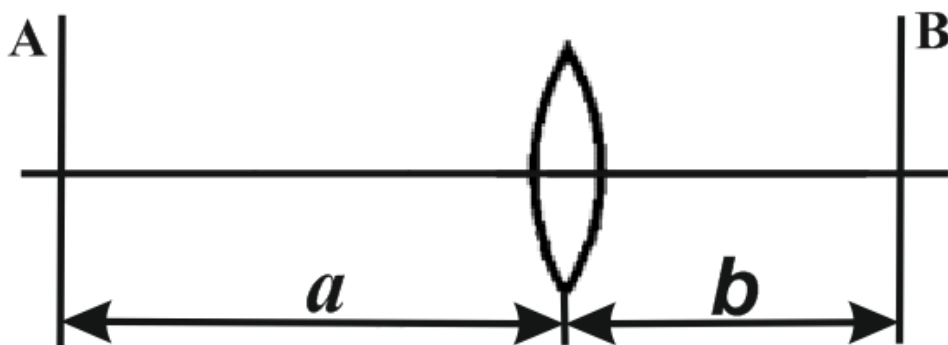


Рис. 51. Механізм просторової фільтрації. Набір підходів

Будемо вважати відомим розподіл комплексних амплітуд поля на вхідній площині цієї оптичної системи, тобто на відстані a від лінзи. Необхідно визначити розподіл комплексних амплітуд на відстані b . Враховуємо дію вільного простору. Перетворення комплексних амплітуд хвилі вільним простором може бути описано як перетворення сигналу лінійної системи з наступною характеристикою $\zeta(u)$, так що

$$\zeta(u_1, u_2) = \exp \left[iz\sqrt{k^2 - u_1^2 - u_2^2} \right] \text{ або } \zeta(u) = \exp \left[iz\sqrt{k^2 - u^2} \right].$$

Для спрощення розглядаємо одновимірний випадок. Комплексна амплітуда в площині, що розташована у близькості до об'єктива, буде описуватись виразом

$$p_a(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{ia\sqrt{k^2 - u^2}} e^{iux} du, \text{ або}$$

$$p_a(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x') H_a(x - x') dx', \quad (59)$$

де $H_a(x)$ – відгук вільного простору, так що

$$H(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz\sqrt{k^2 - u^2}} e^{ixu} du. \quad (60)$$

Далі хвиля перетворюється об'єктивом. Об'єктив змінює фазу та амплітуду хвилі у кожній точці своєї площини за законом, що визначається конструкцією об'єктива. Задати конструкцію об'єктива – це задати закон зміни амплітуди і фази при проходженні хвилі через нього. Математично перетворення комплексних амплітуд хвилі об'єктивом можна записати як $P_\alpha = p_\alpha L(x)$, де $L(x)$ – комплексне число. Об'єктив – пристрій, який забезпечує для функції $L(x)$ вигляд $L(x) = \exp \left[-i \left(\frac{k}{2z} \right) x^2 \right] M(x)$, (61)

$M(x)$ – комплексний множник, який перетворюється в нуль за межами об'єктива.

Оптична система, що містить об'єктів необмежених розмірів ($M(x) = 1$), ідеальна. Таких систем не існує, однак теоретичний розгляд полів у таких систем корисний. Інтервал значень x , де $M(x) \neq 0$, має назву **апертури об'єктива**.

Об'єктив, для якого $M(x) = 1$ по всій апертурі, називають **неспотворюючим**. Надалі можна накладати обмеження на ширину спектра функції $M(x)$. Подібним способом знаходять розподіл комплексних амплітуд у площині, що прилягає до об'єктива.

Знайдемо подальший розподіл, якщо хвиля перетворюється простором довжиною b за формою, аналогічною до (58), тобто

$$P_b = \int_{-\infty}^{\infty} P_a(x') H_b(x - x') dx'.$$

Об'єднавши співвідношення (58), (59) та (61), отримаємо:

$$P_b = \iint_{-\infty}^{\infty} L(x') p(x'') H_a(x' - x'') H_b(x - x') dx' dx''.$$

(62)

Маємо подвійний інтервал. Один розраховується незалежно від вигляду вхідного розподілу. Цей інтеграл має вигляд

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} L(x') H_a(x' - x'') H_b(x - x') dx'.$$

Тут використовується принцип Гюйгенса–Френеля, що можна записати для $H(x)$:

$$H_{\Gamma-\Phi} = \frac{k}{2\pi iz} \exp(ikz) \exp \left[i \frac{k}{2z} (x^2 + y^2) \right].$$

Тоді, отримаємо:

$$I = \frac{ik}{2\pi\sqrt{ab}} \exp \left[ik \frac{x''^2}{2a} + \frac{x^2}{2b} \right] \int_{-\infty}^{\infty} M(x') \exp \left[ik \left(\frac{x'^2 \Delta}{2} - \frac{x''x'}{a} + \frac{x''x'}{b} \right) \right] dx', \quad (63)$$

де вводимо

$$\Delta = -F^{-1} + a^{-1} + b^{-1}. \quad (64)$$

Для використання методу стаціонарної фази необхідна плавність функції $M(x)$ на інтервалі $\Delta x = \sqrt{\frac{2\pi}{\pm f''(x)}} \pm$, - щоб під $\sqrt{\quad}$ було додатньою $f''(x)$. Розкладаємо в ряд

$$f(x) = f(x_0) + f''(x_0)(x - x_0)^2/2 \text{ деякої функції. Тоді } \Delta x = \sqrt{\frac{2\pi}{k\Delta}}.$$

Відстань між відліковими точками значно більша за розмір інтервалу. Тоді

$$D/N \gg \sqrt{\frac{2\pi}{k\Delta}} \text{ або } \Delta \gg \frac{\lambda N^2}{D^2}. \quad (65)$$

Згідно з теоремою Котельникова, відстань між відліковими точками функції $M(x)$ може бути представлено через ширину спектра, як $\frac{D}{N} = \frac{2\pi}{u_m}$. Тоді можна записати $\Delta \gg \frac{\lambda u_m^2}{4\pi^2}$. При виконанні умови (40) інтегрування методом стаціонарної фази дає

$$I = \sqrt{\frac{k}{2\pi ab\Delta}} M \left[\frac{x''a^{-1} + xb^{-1}}{\Delta} \right] \exp \left\{ ik \left[\frac{x^2(1-b^{-1}\Delta^{-1})}{2b} + \frac{x'^2(1-a^{-1}\Delta^{-1})}{2a} - \frac{x''x}{ab\Delta} \right] \right\}. \quad (66)$$

3.21. Поля в ідеальних оптичних системах

Розглянемо поля в ідеальних оптичних системах при різних значеннях параметра Δ , що назвемо налаштуванням оптичної системи.

Нехай налаштування системи

$$\Delta = -F^{-1} + a^{-1} + b^{-1} = 0. \quad (67)$$

Тоді в (63) квадратний член в експоненті під знаком інтеграла зануляється. Маємо модель безмежного ідеального об'єктива $M(x) = 1$. У цьому випадку інтеграл в (63) можна вирахувати, не використовуючи метод стаціонарної фази:

$$I = \left(\frac{ik}{2\pi} \sqrt{ab} \right) \delta[k(x''a^{-1} + xb^{-1})] \exp \left[\frac{ik}{2} x'^2 a^{-1} + x^2 b^{-1} \right]$$

Підставляючи значення I у (36), отримаємо:

$$\widetilde{P}_b(x) = i \sqrt{\frac{a}{b}} P\left(-\frac{ax}{b}\right) \exp\left[\frac{ikx^2(a+b)}{2b^2}\right].$$

Знак “ \sim ” означає, що результат отриманий для ідеальної оптичної системи.

Розподіл комплексних амплітуд, який отримали, пов’язаний з вхідним розподілом: кожна точка вхідного розподілу визначається точкою вихідного розподілу. Якщо у вхідному розподілі змінити амплітуду або фазу окремої точки, то у вихідному розподілі також змінюється амплітуда або фаза окремої точки. Самі розподіли (вхідні та вихідні) відрізняються при цьому фазою, амплітудою та просторовим масштабом. Площини, що знаходяться на відстані від об’єктива, задовольняють умову (67), є оптичного схрещеними площинами.

Якщо об’єктив ідеальний та безмежний, тобто $M(x) = 1$, але $\Delta \neq 0$. Нехай $b = F$, площини – фокальні. Нас цікавить розподіл комплексних амплітуд поля у заданій фокальній площині об’єктива. Налаштування системи таке $\Delta = a^{-1}$.

У випадку ідеального безмежного об’єктива та $\Delta \neq 0$ виконується умова $\Delta \gg \frac{\lambda N^2}{D^2}$. Використовуємо (66) і підставляємо у

$$(64) \quad I = \sqrt{\frac{k}{2\pi F}} \exp\left\{\left(\frac{ik}{2F}\right)[x^2(1 - aF^{-1}) - 2x''x]\right\}. \quad \text{Цей вираз}$$

підставляємо у (62), тоді

$$\widetilde{P}_F(x) = \sqrt{\frac{k}{2\pi F}} \exp\left(\frac{ikx^2(1 - aF^{-1})}{2F}\right) \int_{-\infty}^{\infty} p(x'') \exp\left(-\frac{ikx''x}{F}\right) dx''. \quad (68)$$

Інтеграл в (68) – це спектр заданого розподілу комплексної амплітуди, що визначається як

$$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, 0) e^{-iux} dx. \quad (69)$$

З врахуванням (69) можна записати:

$$\widetilde{P}_F(x) = \sqrt{\frac{k}{2\pi F}} \exp\left(\frac{ikx^2(1-aF^{-1})}{2F}\right) g\left(\frac{kx}{F}\right). \quad (70)$$

Комплексна амплітуда у заданій фокальній площині ідеального обмеженого об'єктива знаходиться відповідно до спектра сигналу.

Зображення сигналу є зображенням спектра.

Наведена відповідність не залежить від відстані a до об'єктива. Від цієї відстані залежний лише фазовий множник. Цей множник перетворюється в 1, коли $a = F$, тобто об'єктив знаходиться у передній фокальній площині об'єктива. Нехай об'єкт знаходиться у передній фокальній площині об'єктива, а спостереження відбуваються на довільній відстані від нього.

Налаштування системи $\Delta = b^{-1}$. Отримаємо

$$I = \sqrt{\frac{k}{2\pi F}} \exp\left\{\left(\frac{ik}{2F}\right) [x''(1 - bF^{-1}) - 2x''x]\right\}. \quad (71)$$

Підставляємо (71) у (62), отримаємо:

$$\widetilde{P}_b(x) = \sqrt{\frac{k}{2\pi F}} \int_{-\infty}^{\infty} p(x'') \exp\left(\frac{ik}{2F} [x''^2(1 - bF^{-1}) - 2x''x]\right) dx''. \quad (72)$$

Тут уже немає однозначності між спостережуваними та початковими точками об'єкта або його спектра. Визначимо, з якою функцією від початкового об'єкту однозначно збігається спостережуваний розподіл у цьому випадку.

Для цього у (43) підставляємо вираз спектра об'єкта $[g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, 0) e^{-iux} dx]$:

$$P_b(x) = \sqrt{\frac{k/2\pi F}{2\pi}} \iint_{-\infty}^{\infty} g(u) \exp\left\{iux + \frac{ik}{2F} [x''(x''^2(1 - bF^{-1}) - 2x''x)]\right\} dx'' du \quad (73)$$

Інтегрування за x'' дасть:

$$P_b(x) = (2\pi^{-2}) \sqrt{\frac{F}{(F-b)}} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \exp \left[\frac{i(2Fxu - kx^2 - F^2u^2(k))}{2(F-b)} \right] du. \quad (74)$$

Порівняємо отриманий вираз із формулою:

$$p(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{iz\sqrt{k^2 - u^2}} e^{iux} dx, \quad (75)$$

яке представлено за допомогою $[\zeta(u) = \exp(iuz) \exp(-i\frac{z}{2k}u^2)]$:

$$p(x, z) = \frac{\exp(ikz)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \exp(-i\frac{z}{2k}u^2) \exp(iux) du. \quad (76)$$

Інтегрування у (70) та (76) аналогічні та збігаються за умовою, що

$$z = \frac{F^2}{F-b} \quad (77).$$

Тоді $P_b = \sqrt{\frac{F}{F-b}} \exp\left[-i\frac{kx^2}{2(F-b)}\right] P\left[\frac{F}{F-b}x, \frac{F^2}{F-b}\right]$. Тут також є

однозначна відповідність між полем, що спостерігається, з перетвореним початковим полем.

Перетворення полягає в тому, що змінюється масштаб початкового поля за x в $\frac{F}{F-b}$ разів і воно проходить шлях у вільному просторі, що визначається як (77).

3.22. Отримання зображення реальним об'єктивом в оптично-спряжених площинах

Визначимо вплив апертури та спотворень в оптично спряжених площинах за умовою

$$\Delta = -F^{-1} + a^{-1} + b^{-1} = 0. \quad (78)$$

Підставляючи цю умову в

$$I = \frac{ik}{2\pi\sqrt{ab}} \exp\left[ik\left(\frac{(x'')^2}{2a} + \frac{x^2}{2b}\right)\right] \int_{-\infty}^{\infty} M(x') \exp\left[ik\left(\frac{x'^2\Delta}{2} - \frac{x''x}{a} + \frac{x''x'}{b}\right)\right] dx', \quad (79)$$

отримуємо, що

$$I = \frac{ik}{2\pi\sqrt{ab}} \exp \left[ik \frac{1}{2} \left(\frac{x''^2}{a} + \frac{x^2}{b} \right) \right] \int_{-\infty}^{\infty} M(x') \exp \left[-ik \left(\frac{x''}{a} + \frac{x}{b} \right) x' \right] dx'. \quad (80)$$

Уведемо спектр функції $M(x)$ у вигляді

$$C_m(u) = \int_{-\infty}^{\infty} M(x) e^{-iux} dx, \quad M(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_m(u) e^{iux} du.$$

$$\text{Тоді } I = \frac{ik}{2\pi\sqrt{ab}} \exp \left[ik \frac{1}{2} \left(\frac{x''^2}{a} + \frac{x^2}{b} \right) \right] C_m \left[k \left(\frac{x''}{a} + \frac{x}{b} \right) \right].$$

Підставивши у (62), отримаємо:

$$P_b(x) = \frac{ik}{2\pi\sqrt{ab}} \int_{-\infty}^{\infty} p(x'') \exp \left[\frac{ik}{2} \left(\frac{x''}{a} + \frac{x}{b} \right) \right] C_m \left[k \left(\frac{x''}{a} + \frac{x}{b} \right) \right] dx''. \quad (81)$$

У випадку безмежно ідеального об'єктива в (81) замість C_m було би δ -функція і інтеграл перейшов у $\bar{P}_b(x) = i \sqrt{\frac{a}{b}} p \left(-\frac{ax}{b} \right) \exp \left[ikx^2 \left(\frac{a+b}{2b^2} \right) \right]$. Нехай об'єктив не ідеальний, але наближується до цього. Тоді будемо вважати, що функція C_m достатньо вузька, порівняно з іншими функціями підінтегрального виразу.

Нехай функція $M(x)$ має N відмінних точок і апертура об'єктива дорівнює D . Тоді ширина функції $C_m(u)$, згідно з $D/N = 2\pi/u_m$, буде $u_m = \frac{N \cdot 2\pi}{D}$, тоді ефективний розмір області інтегрування у (81) визначається як

$$\Delta x'' \approx \frac{Na\lambda}{D} - \frac{xa}{b}. \quad (82)$$

Нехай C_m настільки гостра, що за її допомогою можна інтегрувати експоненціальний множник під знаком інтегралу, аналогічно як з δ -функцією.

Для цього достатньо, щоби різниця показників експоненти при підстановці x'' при умові, що $C_m - \delta$ – функція, мала би ширину $\Delta x''$ та не перевищувала π на краях інтервалу інтегрування. Тоді отримаємо $\frac{\pi N^2 a \lambda}{D^2} = \frac{2\pi x N a}{D b} < \pi$. Умова виконується, якщо кожний елемент $< \pi$. Для неспотворюючого об'єктива $x < \frac{D b}{a}$, тобто $x <$ апертури у $\frac{b}{a}$ разів. Для D вводимо умову, так що $D^2 > N^2 a \lambda$; об'єкт повинен бути розташований на відстані, що задовольняє умову використання геометричної оптики для об'єктів, розмірів. рівних апертурі об'єктива.

Якщо x та a незначні, то $P_b = \frac{ik}{2\pi\sqrt{ab}} \exp\left(ik \frac{a+b}{2b^2} x^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} p(x'') \cdot C_M \left[k \left(\frac{x''}{a} + \frac{x}{b}\right)\right] dx''$. Отримане значення комплексних амплітуд є зображенням відповідних величин, заданих у площині, віддаленій на відстань a від об'єктива. Функція C_M – імпульсна характеристика відповідного еквівалентного фільтра, а її спектр, тобто функція $M(x)$ відіграє роль частотної характеристики цього фільтра. Величина апертури задає область частот, що пропускає фільтр. Умовою отримання ідеального зображення буде $M(x)$, що дорівнює 1 на апертурі, тобто об'єктив повинен бути не спотворюючим. Просторовий спектр об'єкта має бути обмежений.

Тоді ширина просторового спектра оригіналу $N \frac{2\pi a}{\Delta x k} \leq D$, N – кількість відлікових точок в оригіналі; $\frac{2\pi}{\Delta x}$ – відстань між відліковими точками спектра оригіналу; Δx – розмір оригіналу. Перепишучи $N \leq D \frac{\Delta x a}{2\pi a}$ через параметри зображення, враховуючи, що розміри Δx_b і Δx_a , відрізняються у $\frac{a}{b}$ разів, отримуємо $N \leq D \Delta x_b$, тобто $\Delta x_b < D \frac{b}{a}$. Тоді N , що отримується в зображенні або передається при спотворенні неспотворюваним об'єктивом, визначається числом зон Френеля, що розміщується на апертурі об'єктива.

3.23. Зображення у фокальній площині

Розглянемо вплив кінцевої апертури та спотворень у випадку, коли зображення спостерігається у заданій фокальній площині об'єктива.

Тоді $b = F$, $\Delta = 1/a$, a інтервал функції I має вигляд

$$I = i \sqrt{\frac{k}{2\pi F}} M \left[x'' + x \frac{a}{F} \right] \exp \left[i \frac{kx^2}{2F} \left(1 - \frac{a}{F} \right) - i \frac{k}{F} x'' x \right]. \quad \text{Тоді}$$

$$P_b = i \sqrt{\frac{k}{2\pi F}} \int_{-\infty}^{\infty} M \left[x'' + x \frac{a}{F} \right] p(x'') \exp \left[i \frac{kx^2}{2F} \left(1 - \frac{a}{F} \right) - i \frac{k}{F} x'' x \right] dx'' \quad (83)$$

Уведемо спектр початкового розподілу $g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x'') e^{-iux''}$ та підставимо $P(x'') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{iux''} du$ у (83), тоді

$$P_b = i \sqrt{\frac{k}{2\pi F}} \exp \left[i \frac{kx^2}{2F} \left(1 - \frac{a}{F} \right) \right] \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M \left[x'' + x \frac{a}{F} \right] g(u) \exp \left[ix'' \left(u - \frac{k}{F} x \right) \right] du dx'' \quad (84)$$

У цьому виразі виконуємо інтегрування за змінною x'' , через введення $C_M(u)$ – спектра апертурного множника:

$$C_M \left(\frac{k}{F} x - u \right) = \int_{-\infty}^{\infty} M \left(x'' + x \frac{a}{F} \right) \exp \left[ix'' \left(u - \frac{k}{F} x \right) - iux \frac{a}{F} \right] dx'', \quad \text{тоді}$$

(84) вираз набуде вигляду:

$$P_b = i \sqrt{\frac{k}{2\pi F}} \exp \left[i \frac{k}{2F} x^2 \left(1 - \frac{a}{F} \right) \right] \int_{-\infty}^{\infty} g(u') C_M \left(\frac{k}{F} x - u' \right) \exp \left(iu' x \frac{a}{F} \right) du'$$

Максимальна ширина функції $C_M(u)$ не перевищує $\frac{N2\pi}{D}$, де N – число відлікових точок; D – апертура, показник експоненти під знаком інтеграла не перевищує $N \left(\frac{2\pi}{D} \right) \frac{xa}{F}$. Нехай $a < \frac{DF}{Nx}$, щоб уникнути формування зображення в оптично спряжених площинах. Тоді

$$P_b(x) = i \sqrt{\frac{k}{2\pi F}} \exp \left[i \frac{k}{2F} x^2 \left(1 - \frac{a}{F} \right) \right] \int_{-\infty}^{\infty} g(u') C_m \left(\frac{x}{F} x - u' \right) du'.$$

Функція, що спотворює розподіл, отриманий ідеальним безмежним об'єктивом, та сама – $C_M(u)$, хоча вигляд ідеального розподілу різний. В одному випадку – $p(x, 0)$, в іншому – її спектр. Спотворення в обох випадках мають характер “фільтрових” з фільтром, імпульсна характеристика якого $C_M(u)$, а частота – $M(x)$.

3.24. Структура зображення, що створена реальним об'єктивом

Врахування того, що об'єктив реальний, зводиться до заміни однозначної відповідності між точками зображення та деякого об'єкта перетворення згортки.

Форма функції, з якої відбувається згортка, незмінна навіть при значних змінах умов роботи об'єктива.

Відгук ідеального об'єктива \widetilde{P}_b та реального P_b можна записати так:

$$\widetilde{P}_b = i \sqrt{\frac{k}{2\pi b a \Delta}} \int_{-\infty}^{\infty} P(x'') e^{\psi(x'', x)} dx'', \quad (85)$$

$$P_b = i \sqrt{\frac{k}{2\pi b a \Delta}} \int_{-\infty}^{\infty} P(x'') M \left(\frac{1}{\Delta} \left(\frac{x''}{a} + \frac{x}{b} \right) \right) e^{\psi(x'', x)} dx'', \text{ де} \quad (86)$$

$$\psi(x'', x) = i \frac{kx''^2}{2b} \left(1 - \frac{1}{a\Delta} \right) + i \frac{kx^2}{2b} \left(1 - \frac{1}{b\Delta} \right) - i \frac{kx''}{ab\Delta} x.$$

Необхідно визначити $P(x'')$ з (85) і підставити у (86). Для розв'язку: візьмемо як початковий розподіл комплексних амплітуд значення \widetilde{P}_b і підбираємо до нього елементарну оптичну систему, так щоби на виході отримати розподіл $P(x'')$, який ніби є початковим з (85).

Для цього розв'язуємо допоміжну задачу – розв'язок інтегрального рівняння розподілу хвилі у вільному просторі. За спектром інтегрального рівняння Фур'є, зворотне функції, можна відновити саму функцію.

Інтегральне рівняння поширення хвиль

$$p(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{iz\sqrt{k^2 - u^2}} e^{iux} du \quad (87)$$

володіє такою ж властивістю, тобто, знаючи $p(x, z)$, може знайти спектр початкового розподілу поля $g(u)$, а отже, й сам початковий розподіл $p(x, 0)$.

Нехай $p(x, z)$ (64) є початковим розподілом і введемо деякий гіпотетичний вільний простір з частотною характеристикою вигляду:

$$\zeta(u) = \exp(iz\sqrt{k^2 - u^2}). \quad (88)$$

Нехай розподіл $p(x, z)$ перетворюється фільтром, з частотною характеристикою, типу (88).

Результат фільтрації можна записати у вигляді:

$$\tilde{p}(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_z(u) \tilde{\zeta}(u) e^{iux} du. \quad (89)$$

Тут $g_z(u)$ – спектр розподілу $p(x, z)$, що має вигляд

$$g_z(u) = g(u) \exp(iz\sqrt{k^2 - u^2}). \quad (90)$$

Підставляючи (90) та (88) у (89), отримаємо:

$$\tilde{p}(x, z) = p(x, 0).$$

Таким чином, дія фільтра, що має частотну характеристику вигляду (88), перетворює вихід у вхід, тобто дозволяє розв'язати інтегральне рівняння поширення хвилі виду (87).

На основі (88) можна написати імпульсну характеристику такого фільтра.

Імпульсна характеристика гіпотетичного фільтра (88):

$$\widetilde{H}_z(x, y) = H_{-z}(x, y).$$

Тут $H_{-z}(x, y)$ – характеристика, яка дає розв’язок (87):

$$p(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x', z) \widetilde{H}_z(x - x') dx'.$$

Тоді в наближенні використання принципа Гюйгенса – Френеля таке:

$$p(x, 0) = \sqrt{\frac{k}{2\pi z}} \exp \left[-ikz + i\frac{\pi}{4} \right] \int_{-\infty}^{\infty} p(x', z) \exp \left[-i\frac{k}{2z} (x - x')^2 \right] dx' \quad (91)$$

Зворотність цього виразу означає, що при поширенні хвилі у вільному просторі втрати інформації не відбуваються. Наступним кроком є продовження розв’язку задачі про зображення у реальному об’єктиві. Тобто, використовуючи початковий розподіл комплексних амплітуд $\widetilde{P}_b(x)$, можна отримати $p(x)$.

Спочатку, використовуючи $\widetilde{P}_b(x)$, одержимо $\widetilde{P}_a(x)$.

Використовуємо (91), оскільки розподіли $\widetilde{P}_b(x)$ та $\widetilde{P}_a(x)$ розділені лише вільним простором довжиною b . Далі розташований ідеальний безмежний об’єктив:

$$p_a = \widetilde{P}_a \exp \left[-i\frac{k}{2(-F)} x^2 \right];$$

перехід від \widetilde{P}_a до p_a здійснюється ідеальним безмежним об’єктивом, який має зворотний знак фокусу F . Знаки перед a, b, F змінюємо на протилежні, тоді змінюються вхідні та вихідні відрізки вільного простору:

$$P(x) = -i \sqrt{\frac{k}{2\pi ab\Delta}} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{P}_b(x') \exp \left[i\frac{kx'x}{ab\Delta} - i\frac{kx'^2}{2b} \left(1 - \frac{1}{b\Delta} \right) - i\frac{kx^2}{2a} \left(1 - \frac{1}{a\Delta} \right) \right] dx'$$

Підставляємо значення $p(x)$ у (62) й отримаємо

$$P_b(x) = \frac{k}{2\pi b} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{P}_b(x') C_M \left[\frac{k}{b} (x - x') \exp \left[i \frac{k}{2b} (x'^2 - x^2) \right] \right] dx'. \quad (92)$$

Визначаємо умову, коли у (92) експоненціальний множник під інтегралом можна не враховувати. Це тоді, коли на всьому інтервалі інтегрування вираз в експоненті не перевищує π . Тобто вираз під знаком експоненти у (92) на всьому інтервалі інтегрування не може бути більшим за $\frac{\pi(x'+x)N}{D}$. Різниця $x' - x$ – обмежена, замінимо x' на x , приплюсуємо максимально можливу різницю між x' та x на інтервалі інтегрування.

Отже, якщо виконується нерівність $\frac{2Nx}{D} + \frac{b+N^2}{D^2} < 1$, то експоненціальний множник у (91) можна не враховувати. Ця умова зводиться до обмеження поля зору оптичної системи та обмеження максимального розміру b нерівністю $b < \frac{D^2}{N^2 \lambda}$. Тоді,

$$P_b(x) = \frac{k}{2\pi b} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{P}_b(x') C_M \left(\frac{kx}{b} - \frac{kx'}{b} \right) dx'.$$

Цей вираз інтерпретується як деяка схема фільтрації, де роль імпульсної та частотної характеристик фільтра виконують характеристики об'єктива $C_M \left(\frac{kx}{b} \right)$ та $M \left(\frac{bu}{k} \right)$. Вхід цієї системи є виходом ідеальної оптичної системи, а вихід – те, що отримується на виході реальної системи. Повне перетворення входу до виходу можна зобразити такою схемою (рис. 52).

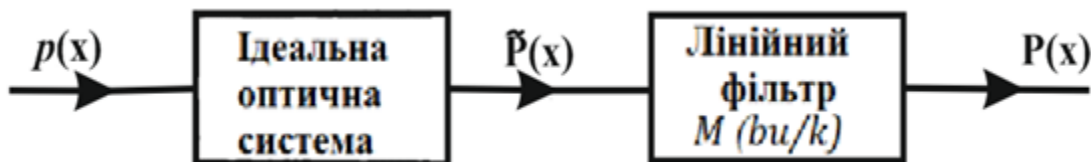


Рис. 52. Перетворення оптичного сигналу реальною оптичною системою з виділенням нелінійної частини

В оптичній системі, окрім лінійних операцій, ще відбуваються й нелінійні – модуляція поля об'єктивом. Тому оптична система, в цілому, є нелінійним пристроєм. Схема (рис. 52) дає можливість виділення нелінійної частини перетворення, що здійснюється оптичною системою у вигляді окремого блоку. Тут перший блок є ідеальною гіпотетичною системою з безмежною апертурою. Цей блок враховує налаштування оптичної системи і є нелінійним пристроєм. Його робота задається однозначністю входу та виходу. Далі розміщений блок, що враховує лише характеристики об'єктива. Цей блок – лінійний. Другий блок порушує однозначність входу та виходу. Такий підхід, що відокремлює лінійні та нелінійні операції, дозволяє розглянути відповідні задачі в оптиці.

3.25. Характеристики та параметри некогерентного поля випромінювання. Обробка інформації методами некогерентної оптики

3.25.1. Теорія некогерентної просторової фільтрації

Теорія некогерентної фільтрації створена Дюфрфьє у 50-х роках минулого століття. Є лінза, в площині P якої формується зображення точкового джерела. Розподіл інтенсивності в зображенні точкового джерела дорівнює квадрату модуля розподілу амплітуди в картині дифракції на апертурі лінзи $h(x, y)$. Це картина дифракції за інтенсивністю і дорівнює:

$$k(x, y) = |h(x, y)|^2 \quad (93)$$

Розглянемо просторово-некогерентний об'єкт, розподіл інтенсивності в якому $O(x, y)$ (у випадку некогерентного об'єкта комплексна амплітуда не має змісту, його випромінювання характеризується лише інтенсивністю).

Нехай є точкове джерело $M(x, y_1)$. Картина дифракції за інтенсивністю має вигляд $k(x - x_1, y - y_1)$.

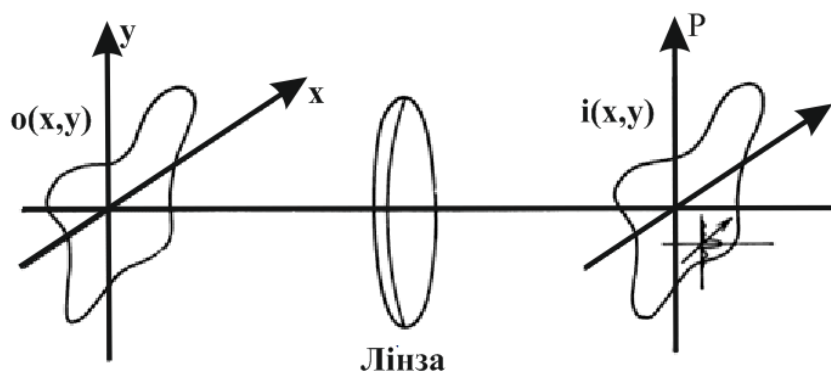


Рис. 53. Підходи некогерентної оптичної фільтрації

Цю величину необхідно помножити на інтенсивність об'єкта в т. (x_1, y_1) - $O(x_1, y_1)k(x - x_1, y - y_1)$. Оскільки випромінювання від усіх точок об'єкта некогерентне, інтенсивність усіх картин дифракції додається повна інтенсивність в площині P дорівнює інтегралу $i(x, y) = \iint O(x_1, y_1)k(x - x_1, y - y_1) dx_1 dy_1$, що являє собою згортку розподілу інтенсивності на об'єкті з імпульсним відгуком оптичної системи за інтенсивністю, та записується як $i = O \otimes k$.

На цьому співвідношенні базується обробка інформації методами некогерентної оптики. Підхід такий самий, як і для когерентної просторової фільтрації, але зміст інший:

а) при некогерентному опроміненні умови лінійної просторово-інваріантної фільтрації задовольняє інтенсивність опромінення, тоді як при когерентному опроміненні ці умови виконуються для комплексних амплітуд;

б) імпульсний відгук некогерентної системи просторової фільтрації дорівнює квадрату модуля імпульсного відгуку когерентної системи просторової фільтрації (93).

Виконавши перетворення Фур'є лівої та правої частин (93), можна записати:

$$K(u, v) = H(u, v) \otimes H^*(-u, -v), \quad (94)$$

$$K(u, v) = H(u, v) \otimes H(u, v).$$

Висновок: передавальна функція некогерентної системи просторової фільтрації дорівнює функції автокореляції передавальної функції некогерентної системи просторової фільтрації.

	Когерентна просторова фільтрація	Некогерентна просторова фільтрація
Вхідна величина	f – комплексна амплітуда на об'єкті	$O = f ^2$ – інтенсивність на об'єкті
Вихідна величина	g – комплексна амплітуда в зображенні	$i = g ^2$ – інтенсивність у зображенні
Передавальна функція	H – функція комплексного пропускання зіниці	$K = H \otimes H$ – функція автокореляції зіниці
Імпульсний відгук	h – картина дифракції на зіниці по амплітуді.	$k = h ^2$ – картина дифракції на зіниці за інтенсивністю

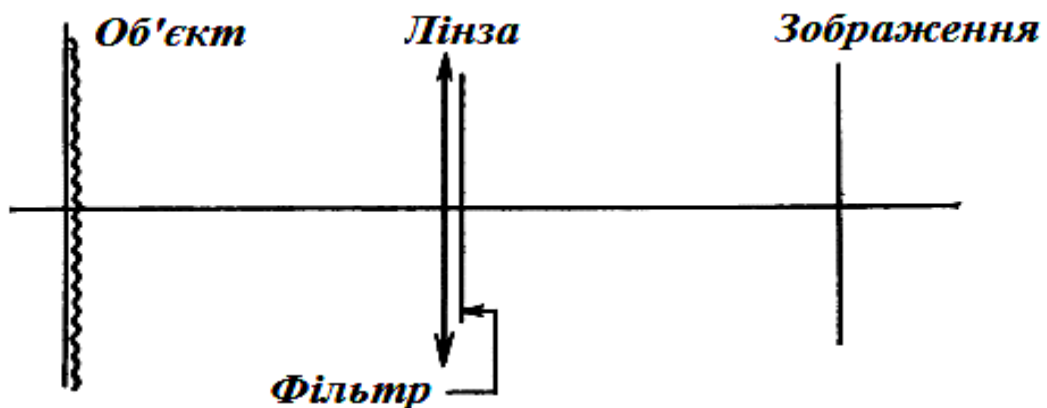


Рис. 54. Схема системи просторової фільтрації у некогерентному світлі, в якій є реальний фільтр у вигляді транспоранту, що поміщується у площині зіниці лінзи

Комплексне пропускання зіниці системи просторової фільтрації:
 $H(u, v)$ – функція зіниці або сама зіниця.

Якщо немає фільтра, то це сама зіниця оптичної системи.

Наслідки

При переході від когерентної оптики до некогерентної можливості оптичних методів обробки інформації такі

- звужується коло можливостей сигналів для обробки, оскільки сигнали повинні бути дійсними та додатними;
- звужується коло фільтрів, оскільки вони повинні задовольняти умови (70) та (71).

Суттєве обмеження друге.

Перше обмеження послаблюється у наслідок того, що:

- 1) всі зображення, які обробляються (за винятком тих, що є в мікроскопі), як правило, містять всю інформацію у вигляді зміни прозорості за інтенсивністю;
- 2) фазова модуляція, яка має місце, паразитна, вводиться як наслідок поганої якості параметрів оптичних елементів: стану поверхні емульсії, однорідності скла, підкладки і т.п.;
- 3) при когерентній фільтрації немає інформації про фазу, що є у вихідній величині.

Інформація зникає, коли зображення на виході спостерігається оком або є детектором (усереднення).

Основний недолік некогерентної фільтрації:

- додатність імпульсного відгуку системи просторової фільтрації;

- зникає перевага когерентної фільтрації, є доступ до частотної площини, де розташовуються просторові фільтри, та використання цієї площини як площини зображення.

Задня фокальна площина є частотною площиною.

Виникає питання: що зміниться при використанні абсолютного некогерентного джерела (що утворюється точковими джерелами, фази яких не зкорельовані, тобто мають мікроскопічно малий радіус кореляції). Якщо знехтувати дифракцією на ділянці об'єкт-лінза, то кожна точка джерела S_1 створює у фокальній площині лінзи однорідний розподіл інтенсивності. Тоді і сума інтенсивності – однорідна.

Просторова фільтрація при некогерентному опроміненні відбувається по-іншому, ніж для когерентного: при когерентному опроміненні байдуже, як характеризується просторовий фільтр – імпульсним відгуком чи передавальною функцією, далі можна фізично реалізувати необхідну передавальну характеристику фільтра на матеріалі; і тут немає вибору.

Спочатку задається імпульсний відгук некогерентної системи фільтрації, що задовольняє (93), а далі розраховують відповідну передавальну функцію, але це не є тою передавальною функцією, яка буде реалізована у вигляді транспоранту. Це зіниця оптичної системи, яка, згідно з (94), відповідає необхідній передавальній функції.

У випадку некогерентного опромінення імпульсний відгук системи фільтрації синтезується опосередковано.

Основний висновок: всі операції по обробці інформації, що виконуються у когерентному світлі, можуть бути виконані й для некогерентного опромінення.

Перехід від когерентного оптичних методів обробки інформації до некогерентних супроводжуються ускладненням апертури, як-от

- збільшення кількості каналів обробки;
- збільшення числа просторових фільтрів;
- використання оптоелектроніки для реалізації повної передавальної функції.

Тому такий перехід доцільний, якщо він зумовлює поліпшення якості обробки або розширення області використання.

3.25.2. Области використання некогерентної просторової фільтрації

А. Природні (чисті) зіниці

Розглянемо зіниці, що описуються дійсними однорідними функціями. До таких відносять діафрагми і різні маски, що дозволяють виконувати всі операції просторової фільтрації у випадку когерентного опромінення.

Передавальна функцію даних зіниць при некогерентному опроміненні описується виразом $K(u, v) = H \otimes H^*(-) = H \otimes H$.

Оскільки функція зіниці H – однополярна, то виконується нерівність

$$K(u, v) \leq K(0, 0) \text{ при всіх } u \text{ та } v.$$

Некогерентна система просторової фільтрації – фільтр низьких частот. Тут немає можливості здійснити операцію, що підвищує контраст зображення або його диференціювання, тобто здійснити смугову фільтрацію просторових частот, оскільки фільтр низьких частот – згладжувальний фільтр.

Як знайти функцію зіниці, що дозволила би виконати операцію просторової фільтрації?

Якщо відома дійсна та однополярна функція K , що задовольняє (94), то це не означає, що існує функція k , яка задовольняє (93). Необхідно, щоби Фур'є-образ k функції K був дійсним та додатним. Якщо навіть k задовільняє (70), то не існує загального методу переходу від K до H .

Тобто

а) рівняння (71) не має явного розв'язку відносно H ;

б) рівняння (70) дозволяє визначити h , але без фазового множника. Не відомо, як вибрати фазу, щоби функція H була додатною.

Властивість некогерентної просторової фільтрації така: якщо замінити функцію зіниці $H(u, v)$, тобто здійснити перетворення $H(u, v) \rightarrow H(u - u', v - v')$, то функція автокореляції K лишиться незмінною. Отже, положення фільтра в площині зіниці не має значення.

У цьому переваги некогерентної фільтрації, оскільки для когерентної оптичної системи просторової фільтрації фільтр необхідно встановлювати з дуже високою точністю.

Ця властивість використовується для синтезу мультиплексних (багатоканальних) просторових фільтрів.

Б. Двозінична некогерентна просторова фільтрація

Нехай необхідний просторовий фільтр – дійсний, симетричний, але двополярний імпульсний відгук k . Такий фільтр не можна організувати, використовуючи одну зіницю. Представимо k у вигляді суми додатної та від’ємної частин $k(x, y) = k^+ - k^-$.

Тут обидві функції k^+ та k^- додатні й симетричні. Їм відповідають фізично реалізовані функції зіниці H^+ та H^- , тобто для кожної з них можна “обратити” співвідношення (93) або (94). Нехай це здійснюється ітераційними методами. Тоді загальний розв’язок являє собою різницю двох часткових розв’язків:

$$i = O \otimes k = O \otimes (k^+ - k^-) = O \otimes k^+ - O \otimes k^- = i^+ - i^-.$$

Тобто маємо дві ідентичні оптичні системи, одна з яких виконує функцію зіниці H^+ , а друга H^- , з наступним відніманням $i^+ - i^-$.

Складним моментом є те, що цей метод некогерентної просторової фільтрації, що реалізується за допомогою двох зіниць, є операцією віднімання проміжних зображень. Некогерентні методи не використовують для віднімання.

Використовуються такі:

1) реєстрація зображення фотоприймачем з наступним електронним відніманням;

2) модуляція зображення за допомогою ґраток, зсунутих по фазі на 90° , з наступною високочастотною фільтрацією;

3) модуляція зображення за допомогою мікроскопічних розсіювачів;

4) голографічне віднімання зображення у когерентному світлі;

5) використання двопроренезаломлюючих матеріалів і поляризованого світла

б) використання просторово-частотних модуляторів світла з оптичним записом.

Описаний підхід двозіничної некогерентної фільтрації може бути використаний для синтезу більш складних зіничних функцій, що охоплюють усі типи просторової фільтрації.

В. Голографічні зіниці

Просторової фільтрації, що здійснюється за допомогою одно- або дво- полярних дійсних передавальних функцій, не достатньо для виконання всіх операцій, навіть для когерентної оптики.

Було визначено передавальну функцію, узгоджену з образом $S(x, y)$ фільтра у вигляді $S^*(-u, -v)$.

З цього випливає, що якщо об'єкт $S(x, y)$ не володіє осьовою симетрією, то необхідно реалізувати комплексну передавальну функцію.

Тобто необхідно, щоби функція К була рівною передавальній функції узгодженого фільтра, потім необхідно знайти функцію зіниці Н, що відповідає (94). Сам фільтр виконує цю функцію.

Приклади когерентного та некогерентного підходів наведено у таблиці.

	Когерентна просторова фільтрація	Некогерентна просторова фільтрація
Вхідний сигнал	Комплексна амплітуда f	Інтенсивність $O = f ^2$
Необхідна форма	S – компоненти	$p = S ^e$ – дійсне, додатне
Узгоджений фільтр	$T = S^*(-u, -v)$ - комплексний	$Q = P^*(-u, v)$ - комплексний
Голографічний фільтр Вандер Люгта	$A + T e^{i\varphi} + T^* e^{-i\varphi}$	$B + Q e^{i\varphi} + Q^* e^{-i\varphi}$
Імпульсний відгук	$A' + t \otimes \delta(x - x_0) + t^*(-x) \otimes \delta(x + x_0)$	$B' + p \otimes \delta(x - x_0) + p^*(-x) \otimes \delta(x + x_0)$
Вихідний сигнал	$A_1' + f \otimes S^*(-x, -y) \otimes \delta(x - x_0) + f^*(x, y) \otimes \delta(x + x_0)$	$B_1' + O \otimes p^*(-x, -y) \otimes \delta(x - x_0) + O^*(x, y) \otimes \delta(x + x_0)$

Порівнюючи стовпці, зазначимо, що в обидвох випадках буде використовуватись лише 1 фільтр, пропускання якого описується виразом $A + T f^{i\varphi} + T^* e^{-i\varphi}$.

Беремо 4-й рядок (голографічний фільтр). При некогерентній фільтрації функції $H(u, v)$ виконує ту ж функцію, що й голографічний просторовий фільтр $A + Te^{i\varphi} + T^*e^{-i\varphi}$ в когерентній фільтрації. Тоді можна написати

$$H = A + Te^{i\varphi} + T^*e^{-i\varphi}. \quad (95)$$

Використовуючи співвідношення (95), знайдемо передавальну функцію K для некогерентного випадку

$$K = H \otimes H^* = (A + Te^{i\varphi} + T^*e^{-i\varphi})(A + T^*e^{-i\varphi} + Te^{i\varphi}).$$

Це дорівнює другому члену у четвертому рядку $K = B + Qe^{i\varphi} + Qe^{-i\varphi}$.

Розрахувавши Фур'є-образ обидвох частин рівності (95), отримаємо імпульсний відгук когерентного просторового фільтра $h = A + t * \delta(x - x_0) + t(-x, -y) * \delta(x + x_0)$. Зсув x_0 (тобто модуляцію фази φ) необхідно вибрати так, щоб ці три доданки не перекривали один одний.

Імпульсний відгук некоректного просторового фільтра $k = |h|^2 = [A + t * \delta(x - x_0) + t(-x, -y) * \delta(x + x_0)] * [A^* + t^* * \delta(x - x_0) + t^*(-x, -y) * \delta(x + x_0)] = |A|^2 + |t|^2 * \delta(x - x_0) + |t(-x, -y)|^2 * \delta(x + x_0)$

Видаливши чотири добутки просторово розділених функцій та виконавши перетворення Фур'є, знаходимо другий член четвертого рядка. Отримаємо співвідношення $Q = T \otimes T$. Тим самим розширюються можливості використання некогерентної фільтрації. Для того, щоб здійснити узгоджену фільтрацію у некогерентному світлі, достатньо в зіницю некогерентної оптичної системи помістити голографічний просторовий фільтр, який використовується для виконання тої самої операції у когерентному світлі.

При цьому і результат фільтрації відображається аналогічно у першому порядку дифракції, що відповідає $x = x_0$.

3.25.3. Функції, синтезовані методами цифрової голографії

Для аналогових голограм – необхідна наявність об'єкта. Для цифрових це неможливо (об'єкта не існує: математична функція), немає легкого доступу (віддалені об'єкти). Тому використовують такі етапи:

- 1) розрахунок голограм (обчислення пропускання фотоплівки або іншого носія, що дозволяє її реалізувати);
- 2) винесення результатів на пристрої, що формує зображення голограми;
- 3) перенесення голограми на фотоемульсію або реєструючий матеріал.

Можна синтезувати функцію зіниці для некогерентної узгодженої фільтрації методами цифрової голографії, тобто комп'ютерно можна синтезувати функцію зіниці, що описується деяким математичним виразом без реального зразка.

Тут передавальна функція синтезуються опосередковано.

Нехай необхідно синтезувати зіницю з невідомим пропусканням $H(u, v)$, якщо є відомою передавальна функція $K(u, v)$.

Оскільки (71) не розв'язується відносно H , перейдемо до Фур'є-образів величин, які входять. Тоді можна записати $k = |h|^2$, де k – відоме, а h необхідно визначити. Нехай $h_1 = \sqrt{k}$. Це розв'язок задачі, оскільки Фур'є-образ $H_1 = F(h_1)$ задовільняє (71). Але це не достатній розв'язок.

Усі розв'язки вигляду $h_i = h \exp[i\varphi_i(x, y)]$ також дадуть функції зіниці H_i , що задовільняє (71). Зокрема, можна так вибрати розподіл форми φ_i , щоби отримати:

- а) найпростішу функцію H_i ;
- б) найкращу ефективність фільтрації;
- в) найменший динамічний діапазон зміни H_i .

Вибір пов'язаний з експериментальними умовами.

3.25.4. Експериментальні умови

Наведені методи фільтрації базуються на теорії дифракції та рівнянні фільтрації. Джерело некогерентне (просторове), але монохроматичне.

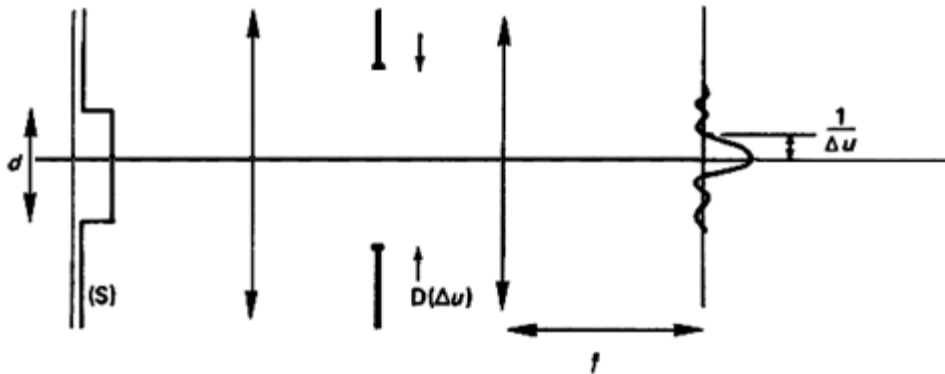


Рис. 55. Дифракційні умови формування підходів просторової фільтрації

Зразок діаметром D задає дифракційну пляму шириною $1/\Delta u = \lambda t/D$. Насправді, дійсне зображення джерела у вихідній площині задає згортку геометричного зображення з дифракційною картиною зіниці.

Нехай розмір джерела – d , максимальна просторова частота, що обробляється оптичною системою – Δu . Тоді виконується нерівність $d \ll \frac{1}{\Delta u} = \frac{\lambda f}{D}$, де D – розмір просторового фільтра.

Інакше в площині зображення буде спостерігатися на лише результат фільтрації, але й згортка з джерелом. Реальні джерела не строго монохроматичними. Тоді існує просте співвідношення між роздільною здатністю оптичної системи, що необхідно отримати, та спектральної шириною джерела $\Delta \lambda$. Кожна синусоїдальна складова фільтра буде задавати в площині зображення пару світлових точок, відстань між якими пропорційна λ . У першому наближенні вихідне зображення буде згорнуто з функцією, що характеризує розміри джерела та його спектральних ширину $\frac{f}{\delta} \Delta \lambda$. (96)

Нехай розмір зображення дорівнює L , а необхідна роздільна здатність l . Тоді кількість точок, що розрізняються системою (кількість степенів вільності) знаходиться за формулою $N = \frac{L}{l} = \frac{LD}{\lambda f} = \frac{D}{\delta}$. З врахуванням (96) $\frac{f}{\delta} \Delta\lambda \ll 1$.

Допустима спектральна ширина джерела в залежності від розміру фільтрованого зображення та необхідної роздільної здатності розраховується як $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \ll \frac{l}{L} = \frac{1}{N}$, N – кількість незалежних точок на ширині зображення.

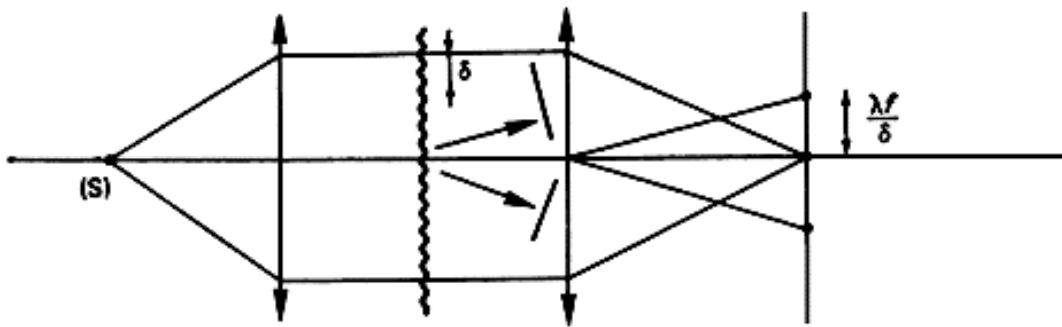


Рис. 56. Схема просторової фільтрації, де використовується точкове, але поліхроматичні джерело S

При заданій довжині хвилі λ та просторовому періоді δ відповідного фільтра два дифракційні порядки будуть віддалені один від одного на величину $2\lambda f / \delta$. Якщо джерело має ширину спектра випромінювання $\Delta\lambda$, то той самий просторовий період δ дасть два дифракційні порядки, віддалені один від одного на $\Delta\lambda / f$.

Для звичайних зображень цією умовою обмежується вибір джерел світла, тому часто для опромінення об'єкта використовують лазер, просторова когерентність якого порушується за допомогою рухомих розсіювачів, розташованих перед об'єктивом. Використовуються також спектральні лампи (ртутні або натрієві) зі світлофільтром.

Якщо об'єкт непрозорий, а процес відбиваючий, то об'єкт можна розташувати для опромінення лазером. Дифракція лазерного випромінювання на шорсткій поверхні об'єкта достатня для забезпечення умови просторової некогерентності.

Некогерентні методи обробки інформації порівняно з когерентними, передбачають менш жорсткі вимоги до умови експерименту (стабільність, точність, розташування оптичних елементів).

Труднощами є операція віднімання зображення, що важливо:

1) при здійсненні двозіничної фільтрації для отримання різниці двох зображень;

2) при однозіничній фільтрації, коли для синтезу двополярного імпульсу додають рівномірний фон, що набуває значення від'ємного.

Але віднімання за своїм принципом є джерелом шуму.

Причому різниця набагато менша за кожен з величин. Це справедливо, незалежно від способу віднімання (оптичне, електричне, цифрове), для аналогових систем зображення умова ще погіршується.

3.25.5. Методи просторової фільтрації, що не використовують властивості дифракції

У попередній підходах, коли враховували вплив зіниці оптичної системи просторової фільтрації на вихідне зображення, враховувалася дифракція світла. З врахуванням дифракції отримуються рівняння фільтрації, накладають вимоги щодо монохроматичності.

А. Тіньове маскування (точкове джерело білого світла)

Нехай є точкове джерело в безмежності, зображення $\delta(x, y)$, що створюється лінзою з фокусною відстанню f .

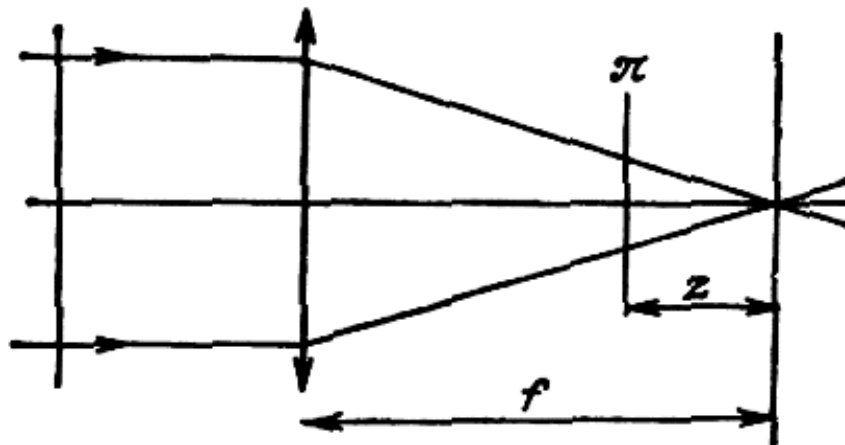


Рис. 57. Підходи тіньового маскування

Нехай зіниця розташовується за лінзою. Пропускання за інтенсивністю $t(x, y)$, проаналізуємо зображення точкового джерела в площині π , на відстані z від фокальної площини.

В межах використання геометричної оптики розподіл інтенсивності в зображенні точки в π описується згорткою $\delta(x, y) \otimes t'(x, y)$, де $t'(x, y) = t\left(\frac{z}{f}x, \frac{z}{f}y\right)$. Отже, зображення об'єкта O в площині η є такі $i(x, y) = O(x, y) \otimes t'(x, y)$. Цей вираз описує відфільтроване зображення, що може бути отримане за допомогою даної оптичної системи. Але треба задати границю використання такого способу просторової фільтрації:

1. Масштабний коефіцієнт z/f не можна вибрати дуже малим, оскільки площина π не може знаходитися дуже близько до фокальної площини. Правильна нижня межа для z – відстань дальньої зони.

2. Імпульсний відгук $t(x, y)$ обмежений за роздільною здатністю. Нехай δ – найменша деталь зіниці. Вплив дифракції на проміжку між лінзою та площиною π буде дуже малим, якщо відстань між ними менша за відстань дальньої зони для пучка, що виходить із цього елемента роздільної здатності, тобто виконується умова $f - z \ll \delta^2/\lambda$.

Будучи простим, цей метод обмежений за (імпульсний відгук синтезується просто) своїми можливостями, в основному, за роздільною здатністю або за кількістю точок фільтра. Описаний метод використовується тоді, коли імпульсний відгук має просту форму.

Б. Інші методи просторової фільтрації, основані на геометричній оптиці

Таких методів багато, в них використовується особливі властивості оптичних систем або компонентів (дифракційна ґратка, призма, екрани...). Можливості обмежені.

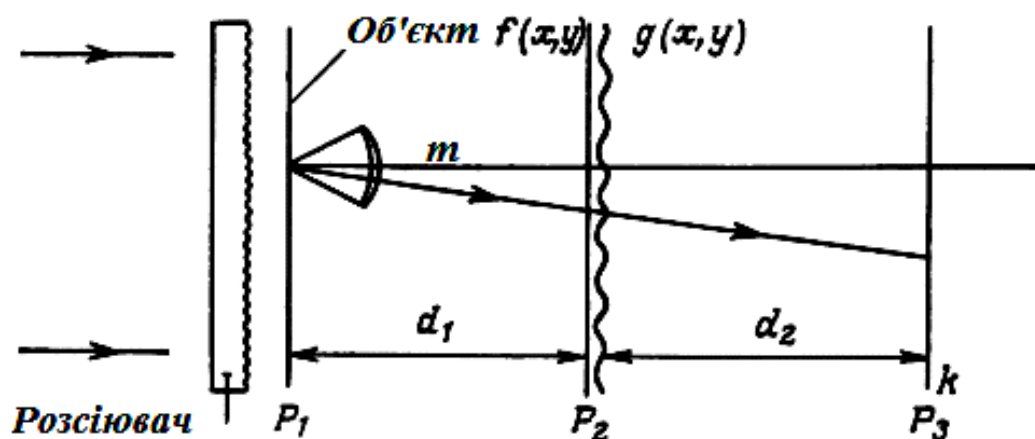


Рис. 58. Методи просторової фільтрації, основані на геометричній оптиці

Кореляція у білому світлі з використанням розсіювача. Дві величини, взаємну кореляцію яких необхідно визначити, задаються в площинах P_1 та P_2 . Кожна точка поверхні розсіювача є джерелом сферичної хвилі.

Використовують для специфічних видів просторової фільтрації або для обробки особливих зображень. Нехай об'єкт f опромінюється розсіювачем. Тоді кожному точку об'єкта у першому наближенні можна розглядати як саме джерело сферичних хвиль. Помістимо у площину P_2 просторовий фільтр g у вигляді деякого транспаранта. Тоді

інтенсивність в т.х площини P_3 дорівнює $k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x - x_1) f\left(x - \frac{d_1+d_2}{d_2}x_1\right) dx_1$. Цей інтеграл зводиться до кореляційного шляхом заміни змінних та зміни масштабу.

Можна зробити висновки:

1. Ці методи змінюють область застосування когерентної оптики, дозволяючи як носії зображень, що обробляються, використовувати звичайні носії інформації (журнали, книги, фото на папері), а також задіювати і швидкодіючі джерела інформації (телесистеми, осцилографи і т.п.).

2. Їх використання зумовлює підвищення якості зображень, оскільки усуваються два джерела шуму когерентної оптики: зернистість та чутливість до різного роду фазових дефектів оптичних елементів.

3. Недоліки можна усунути лише ціною усунення обробки.

Контрольні питання та завдання

1. Представити опис оптичного поля у когерентному випадку з введенням всіх наближень та способів задання когерентності.
2. Навести математичне обґрунтування теорії просторової когерентності.
3. Проаналізувати теорему Ван-Циттерта-Церніке.
4. Ввести фазову та групову швидкості.
5. Отримати функцію кореляції в наближенні підходу вільного простору.
6. Проаналізувати спектр потужності для стаціонарних процесів.
7. З'ясувати зміст функції Френеля-Кіргофа-Зомерфельда для когерентного поля
8. Проаналізувати кореляційну функцію випадкового екрану.
9. З'ясувати зміну функції кореляції зі зміною відстані.
10. Проаналізувати підходи перетворення кореляційної функції при переході від екрану до вільного простору.
11. Проаналізувати зміну кореляційної функції з довжиною хвилі.
12. Задати зв'язок повздовжньої та поперечної функцій кореляцій. Провести аналіз різних умов.
13. Проаналізувати відмінності введення кореляційної функції однорідного та неоднорідного екрану.
14. Навести статистичний опис АКФ, з'ясувати властивості.
15. Проаналізувати проходження випадкового сигналу через лінійну систему.
16. З'ясувати підходи введення багатовимірних випадкових процесів.
17. Здійснити апертурний синтез для практичних застосувань.
18. Проаналізувати підходи просторової фільтрації для регулярних хвильових полів в оптичних системах.
19. Проаналізувати структуру зображення, що створена реальним об'єктивом.
20. Проаналізувати теорія некогерентної просторової фільтрації.

Список літератури

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы : учебник для вузов. Москва: Высшая школа, 1988.
2. Оппенгейм А.В., Шафер Р.В. Цифровая обработка сигналов. Москва: Связь, 1979. 416 с.
3. Сиберт У.М. Цепи, сигналы, системы. Москва: Мир, 1988. 336 с.
4. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. Санкт-Петербург: Питер, 2003. 608 с.
5. Лукин. А. Введение в цифровую обработку сигналов. Москва: Издательство Московского университета, 2002.
6. Смирнов С.А. Преобразования оптических сигналов : учебное пособие. Санкт-Петербург: СПбГУ ИТМО, 2008. 113 с.

Навчальне видання

Клавдія Юріївна Зенкова

Олег Вячеславович Ангельський

**ОПТИЧНІ СИГНАЛИ ТА ЇХ ПЕРЕТВОРЕННЯ
В ІНФОРМАЦІЙНИХ І ВИМІРЮВАЛЬНИХ ПРИЛАДАХ ТА
СИСТЕМАХ МЕТРОЛОГІЇ І КОМУНІКАЦІЇ**

Навчально-методичний посібник

Відповідальний за випуск *Ушенко О.Г.*

Літературний редактор *Колодій О.В.*

Комп'ютерний набір *Ткачук В.М.*

Технічний редактор *Чорасва Г.К.*

Підписано до друку 16.06.2022. Формат 60x84/16.

Папір офсетний. Друк різнографічний. Умов.-друк. арк. 9,4.

Обл.-вид. арк. 10,1. Тираж 50. Зам. Н-066.

Видавництво та друкарня Чернівецького національного університету.

58012, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2.

e-mail: ruta@chnu.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 891 від 08.04.2002.