

**О.Г. Наконечний**

**М.П. Коцур**

**Л.М. Вихор**

**М.А. Руснак**

**ОПТИМІЗАЦІЯ ФУНКЦІОНАЛІВ  
ВІД РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ  
ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ В ТЕРМОЕЛЕКТРИЦІ**

Розглядаються актуальні проблеми теорії оптимізації функціоналів від розв'язків одновимірних крайових задач в звичайних диференційних рівняннях, зокрема задач в умовах невизначеності параметрів. Формулюються і доводяться теореми, що обґрунтовують розв'язки таких задач. Розглядаються методи оптимізації функціоналів для об'єктів з розподіленими параметрами, які описуються крайовими задачами в параболічних рівняннях. Підходи до оптимізації функціоналів застосовуються для розв'язування оптимізаційних задач нестационарного процесу термоелектричного охолодження. Приводяться алгоритми для знаходження розв'язків таких задач шляхом комп'ютерного моделювання. Аналізуються результати розв'язування задач оптимізації процесу нестационарного термоелектричного охолодження.

Книга може бути корисною для математиків, фізиків, інженерів, а також для наукових співробітників, викладачів, аспірантів і студентів, які спеціалізуються в галузях оптимального керування і термоелектрики.

# ЗМІСТ

<b>Вступ</b> .....	1
<b>Розділ 1. Загальна характеристика задач оптимізації систем і процесів</b> .....	5
1.1. Огляд основних положень теорії оптимізації функціоналів від розв'язків крайових задач .....	5
1.2. Приклади підходів до розв'язування задач оптимізації функціоналів .....	13
<b>Розділ 2. Теоретичні аспекти оптимізації функціоналів від розв'язків одновимірних крайових задач</b> .....	17
2.1. Задачі керування для систем із змінною структурою, що описуються звичайними диференційними рівняннями з крайовими умовами.....	17
2.2. Теорія оптимізації функціоналів від розв'язків одновимірних крайових задач в умовах невизначеності ....	30
<b>Розділ 3. Підходи до оптимізації функціоналів від розв'язків крайових задач для параболічних рівнянь</b> .....	42
3.1. Загальний вигляд задачі оптимізації функціоналів для об'єктів у рівняннях параболічного типу .....	42
3.2. Варіаційний підхід до оптимізації функціоналів від розв'язків задачі для параболічних рівнянь .....	43
3.2.1. Формулювання задачі оптимального керування .....	43
3.2.2. Умови оптимальності .....	44
3.2.3. Ітераційний алгоритм для розв'язування задачі .....	48
3.3. Метод дискретизації крайової задачі для параболічних рівнянь і принцип максимуму Понтрягіна .....	49
3.4. Оптимальне керування в лінійних параболічних рівняннях в умовах невизначеності .....	51
<b>Розділ 4. Застосування методів оптимізації функціоналів від розв'язків крайових задач для нестационарного процесу термоелектричного охолодження</b> .....	53
4.1. Математична модель процесу термоелектричного охолодження .....	53
4.1.1. Фізична модель термоелектричного охолоджувача та режими його роботи .....	53
4.1.2. Математична модель процесу нестационарного термоелектричного охолодження .....	60
4.1.3. Математична модель процесу стаціонарного охолодження ...	65
4.2. Аналіз задач оптимізації процесу термоелектричного охолодження .....	67
4.3. Варіаційний метод для оптимізації нестационарного режиму однокаскадного термоелектричного охолоджувача .....	74

4.3.1. Постановка задачі оптимального керування .....	74
4.3.2. Застосування варіаційного методу. Умови оптимальності .....	77
4.3.3. Реалізація ітераційного алгоритму .....	81
<b>4.4. Метод дискретизації для оптимізації нестационарного процесу каскадного термоелектричного охолодження .....</b>	<b>84</b>
4.4.1. Постановка задачі оптимального керування .....	84
4.4.2. Принцип максимуму Понтрягіна та умови оптимальності .....	87
4.4.3. Алгоритм розв'язування задачі .....	91
<b>4.5. Задача оптимального керування нестационарним процесом термоелектричного охолодження в умовах невизначеності .....</b>	<b>97</b>
<b>Розділ 5. Результати математичного моделювання та оптимізації нестационарного режиму термоелектричних охолоджувачів .....</b>	<b>103</b>
5.1. Вихідні дані для обчислювального експерименту .....	103
5.2. Результати оптимізації нестационарного режиму однокаскадного охолоджувача .....	107
5.3. Порівняльний аналіз результатів, отриманих різними методами для оптимального керування однокаскадним охолоджувачем .....	111
5.4. Аналіз впливу окремих факторів на процес нестационарного термоелектричного охолодження .....	113
5.5. Оптимальні функції керування для двокаскадного охолоджувача .....	118
<b>Список посилань .....</b>	<b>123</b>

## ВСТУП

На сучасному етапі розвитку технічного прогресу проблеми оптимального керування системами та процесами займають важливе місце серед задач прикладної математики. Теорія оптимального керування, фундаментальні результати якої були отримані Понтрягіним Л.С., Болтянським В.Г., Гамкредізе Р.В. і Міщенко Є.Ф., а також Bellmann K., Warga J., Тихомировим В.М., Пшеничним Б.М. та іншими математиками, широко застосовується для оптимізації об'єктів (систем і процесів) із зосередженими параметрами, стан яких описується крайовими задачами для звичайних диференційних рівнянь. Це, наприклад, механічні об'єкти, які описуються рівняннями руху, або стаціонарні процеси, що протікають в одновимірному середовищі. Теорія дає необхідні умови оптимальності для таких об'єктів, наприклад, принцип максимуму Понтрягіна, на основі яких створюються алгоритми і комп'ютерні методи пошуку оптимальних функцій керування, що оптимізують об'єкт.

Водночас в технічних та інших галузях більшість явищ і процесів моделюються як об'єкти з розподіленими параметрами, стан яких описується за допомогою класичних або некласичних крайових задач для рівнянь з частинними похідними. Рациональне функціонування таких об'єктів можливе за умов розв'язання задач оптимального керування, які полягають в оптимізації функціоналів від розв'язків крайових задач і результатом яких є побудова оптимальних функцій керування. Окремі аспекти теорії оптимального керування для різних класів рівнянь, якими описуються розподілені об'єкти, були розвинуті і викладені в роботах науковців Бублика Б.Н., Бутковського А.Г., Васильєва Ф.П., Сіразетдінова Т.К., Єгорова А.І., J.-L. Lions, Ляшка С.І., Наконечного О.Г., Фурсикова А.В., Ahmed N.U. та інших.

Розвиток теорії і методів оптимізації для об'єктів з розподіленими параметрами є значно складнішими задачами, ніж аналогічні проблеми для об'єктів із зосередженими параметрами. Розв'язок таких задач суттєво залежить від типу рівнянь в частинних похідних, від крайових умов для цих рівнянь, від вигляду функціоналу, який оптимізується, від обмежень, що накладаються на коефіцієнти рівнянь, на керування, тощо. Крайові умови для рівнянь, якими описуються реальні розподілені об'єкти, часто мають не класичний вигляд. Вони можуть містити частинні похідні, функції керування, тощо. Коефіцієнти рівнянь можуть залежати від невизначених параметрів. Складність задач оптимізації систем з розподіленими параметрами не дозволяє розробити єдиних підходів до їх розв'язування. Необхідні умови оптимальності отримані лише для окремих типів рівнянь з класичними крайовими умовами.

Тому актуальною і важливою задачею є розвиток теорії і методів оптимізації функціоналів для розподілених об'єктів, стан яких описується рівняннями в частинних похідних з некласичними крайовими умовами та в умовах невизначеності.

Дана книга присвячена дослідженню актуальних проблем, які стосуються теорії і методів оптимізації функціоналів від розв'язків одновимірних крайових задач як для звичайних диференційних рівнянь, так і для рівнянь в частинних похідних.

Для об'єктів із зосередженими параметрами розглянуті нові аспекти теорії оптимізації функціоналів від розв'язків одновимірних крайових задач в звичайних диференційних рівняннях. Сформульовано задачу оптимального керування для системи із змінною структурою. Доведено ряд тверджень про існування і вигляд розв'язку крайової задачі, про існування і вигляд єдиних умов, за яких мінімізується функціонал в сформульованій задачі.

Розглянуто задачу оптимізації функціоналу від розв'язків одновимірної крайової задачі для звичайних диференційних рівнянь в умовах невизначеності. Доведені твердження щодо вигляду усередненого функціоналу для зняття невизначеності та про існування вектора

керування, який забезпечує мінімальне значення усередненого функціоналу.

У книзі запропоновані методи оптимізації функціоналів для об'єктів з розподіленими параметрами, які описуються крайовими задачами в параболічних рівняннях, зокрема і задачами в умовах невизначеності. Представлена в загальному вигляді задача оптимального керування такими об'єктами, та розроблені підходи до її розв'язування.

Один з підходів полягає у застосуванні заміни змінних, яка дозволяє записати одновимірні параболічні рівняння у вигляді системи рівнянь першого порядку за координатою і часом. Така заміна уможливує застосування варіаційного методу до оптимізації функціоналів від розв'язків крайової задачі, за допомогою якого отримують необхідні умови екстремуму функціоналу. На основі цих умов визначають оптимальні функції керування об'єктами з розподіленими параметрами, які описуються відповідною крайовою задачею.

Інший ефективний шлях для розв'язування задач оптимізації розподіленого об'єкта, який описується крайовою задачею в параболічних рівняннях, полягає в дискретизації задачі за координатою. Таким чином отримують задачу для системи звичайних диференціальних рівнянь. Оптимізація функціоналів від розв'язків такої дискретизованої задачі відноситься до задач оптимального керування з вільним правим кінцем і фіксованим часом. Розв'язок такої оптимізаційної задачі задовольняється принципом максимуму Понтрягіна.

Часто об'єкт з розподіленими параметрами замість нелінійних можна описати лінійними параболічними рівняннями з невизначеними коефіцієнтами. Тоді задача зводиться до пошуку оптимального керування в лінійних параболічних рівняннях в умовах невизначеності. У книзі розглянута теорія оптимізації функціоналів від розв'язків одновимірних параболічних задач в умовах невизначеності, описано метод для знаходження оптимального керування.

Задачі оптимізації об'єктів з розподіленими параметрами знаходять широке практичне застосування в різних технічних галузях. Прикладом такого об'єкта є процес нестационарного термоелектричного охолодження. Задачі оптимізації цього процесу раніше були розв'язані тільки для найпростіших фізичних моделей термоелектричного перетворювача. Тому пошук оптимальних функцій керування цим процесом є актуальним практичним завданням.

Описані в книзі математичні підходи до оптимізації функціоналів від розв'язків крайових задач в параболічних рівняннях використані для розв'язування прикладних задач оптимізації процесу нестационарного термоелектричного охолодження.

У книзі розглянуті аспекти теорії, ітераційні алгоритми і різницеві схеми, на основі яких комп'ютерними засобами розв'язуються задачі оптимізації нестационарного термоелектричного охолодження.

Як приклади приводяться результати комп'ютерного моделювання нестационарних процесів в одно- і двокаскадних охолоджувачах, для яких визначені оптимальні функції керування струмом живлення термоелементів для досягнення мінімальної температури охолодження за заданий проміжок часу. Описані результати дослідження впливу окремих фізичних факторів на характеристики нестационарного термоелектричного охолодження, які демонструють переваги нестационарного режиму в порівнянні із стаціонарним.

Запропоновані в книзі методи комп'ютерного моделювання дозволяють визначити оптимальні часові залежності струму живлення термоелектричних охолоджувачів, що має важливе практичне значення. Ці залежності використовуються для конструювання та автокалібровки регуляторів, які забезпечують роботу систем автоматичного регулювання процесу нестационарного охолодження в термоелектричних пристроях різноманітного призначення.