Пукальський І.Д., Яшан Б.О.

Багатоточкова за часом задача для $2b$-параболічного рівняння з виродженням

Досліджується багатоточкова за часом задача для нерівномірно $2b$-параболічного рівняння з виродженням. Коефіцієнти параболічного рівняння порядку $2b$ допускають степеневі особливості довільного порядку як за часовою змінною так і за просторовими змінними на деякій множині точок. Для розв'язання поставленої задачі вивчаються розв'язки допоміжних задач з гладкими коефіцієнтами. За допомогою апріорних оцінок встановлюються нерівності для розв'язку задач і їх похідних у спеціальних гельдерових просторах. Використовуючи теореми Арчела і Рісса, з компактної послідовності розв'язків допоміжних задач виділяється збіжна послідовність, граничне значення якої буде розв'язком поставленої задачі. Оцінки розв'язку багатоточкової за часом задачі для $2b$-параболічного рівняння встановлені в гельдерових просторах зі степеневою вагою. Порядок степеневої ваги визначається порядком виродження коефіцієнтів груп старших доданків та степеневими особливостями коефіцієнтів молодших доданків параболічного рівняння. При певних обмеженнях на праву частину рівняння одержано інтегральне зображення розв'язку поставленої задачі.

Ключові слова і фрази: задача Коші, степеневі особливості, інтерполяційні нерівності, апріорні оцінки, гельдерові простори, теорема Арчела.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: *i.pukalsky@chnu.edu.ua (Пукальський І.Д.), b.yashan@chnu.edu.ua (Яшан Б.О.)*

Вступ

Особлива увага в останні десятиліття приділяється задачам з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними. Такий інтерес до таких задач зумовлений як потребами загальної теорії крайових задач, так і багатим практичним їх застосуванням (процес дифузії, коливань, соле- та вологопереносу в грунтах, фізика плазми, математична біологія тощо). Встановлено, що нелокальні умови можна використовувати для опису розв'язних розширень диференціальних операторів. У роботах школи Б.Й. Пташника та його учнів [1–4] використано метричний підхід для дослідження умовно коректних задач з багатоточковими умовами за виділеною змінною для лінійних гіперболічних та безтипових рівнянь, а також деяких класів параболічних рівнянь

УДК 517.956
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35k25, 35k67, 35k65.

зі сталими коефіцієнтами. Було доведено метричні твердження про оцінку знизу малих знаменників, що виникають при побудові розв'язків розглядуваних задач, з яких випливає коректність задач для майже всіх (стосовно міри Лебега) параметрів задач.

У монографії [5] досліджено у нормованих просторах Діні параболічні системи з оператором Бесселя, які вироджуються на межі області та близькі за внутрішніми властивостями до рівномірно параболічних систем. Для цих систем вивчено задачу Коші, загальну B-параболічну крайову задачу в компактній області, задачу з ваговими крайовими умовами в півпросторі. Праця [6] в основному присвячена дослідженню задачі Коші та крайових задач для рівнянь і систем рівнянь параболічного типу, коефіцієнти яких мають степеневі особливості певного порядку.

Дослідженню властивостей фундаментального розв'язку і встановленню коректної розв'язності задачі Коші для параболічних рівнянь з виродженням за деякими змінними присвячено праці [7–9].

У роботах [10–13] в обмежених циліндричних областях вивчено задачі з нелокальними та імпульсними умовами за часовою змінною для параболічних рівнянь зі степеневими особливостями довільного порядку в коефіцієнтах рівняння і крайової умови за будь-якими змінними на деякій множині точок.

У цій статті розглядається багатоточкова за часом задача для $2b$-параболічного рівняння зі степеневими особливостями довільного порядку в коефіцієнтах за будь-якими змінними на деякій множині точок. За допомогою апріорних оцінок і теореми Арчела доведено існування єдиного розв'язку поставленої задачі та встановлено оцінци його похідних у гельдеревих просторах зі степеневою вагою.

1 Постановка задачі та основні обмеження

Нехай $t_0, t_1, \ldots, t_{N+1}, \eta$ – фіксовані додатні числа, $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_{N+1}$, $\eta \in (t_0, t_{N+1})$, Ω – деяка обмежена область, $\dim \Omega \le n-1$. Позначимо через $\Pi_0 = \{(t,x)| \, t \in [t_0, t_{N+1}), x \in \overline{\Omega}\} \cup \{(t,x)| t=\eta, x \in R^n\}$. В області $\Pi = [t_0, t_{N+1}) \times R^n$ розглянемо задачу знаходження функції $u(t,x)$, яка при $t \ne t_\lambda$, $\lambda \in \{0,1,\ldots,N\}$, $t \ne \eta$, $x \in R^n \setminus \overline{\Omega}$ задовольняє рівняння

$$(Lu)(t,x) = \left[\partial_t - \sum_{|k|=2b} A_k(t,x)\partial_x^k - \sum_{|p|\le 2b-1} A_p(t,x)\partial_x^p\right] u(t,x) = f(t,x) \qquad (1)$$

і умови за змінною t

$$u(t_\lambda + 0, x) = \varphi_\lambda(x), \quad x \in R^n \setminus \overline{\Omega}, \qquad (2)$$

$\partial_x^k = \partial_{x_1}^{k_1}\partial_{x_2}^{k_2}\ldots\partial_{x_n}^{k_n}$, $|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$.

Степеневі особливості коефіцієнтів диференціального виразу L у точці $P(t,x) \in \Pi\setminus\Pi_0$ характеризуватимуть функції $s_1\left(\beta_i^{(1)}, t\right)$ і $s_2\left(\beta_i^{(2)}, x\right)$: $s_1\left(\beta_i^{(1)}, t\right) = |t-\eta|^{\beta_i^{(1)}}$ при $|t-\eta| \le 1$, $s_1\left(\beta_i^{(1)}, t\right) = 1$ при $|t-\eta| \ge 1$; $s_2\left(\beta_i^{(2)}, x\right) = \rho^{\beta_i^{(2)}}(x)$ при $\rho(x) \le 1$, $s_2\left(\beta_i^{(2)}, x\right) = 1$ при $\rho(x) \ge 1$, $\rho(x) = \inf_{z \in \overline{\Omega}} |x - z|$, $\beta_i^{(\nu)} \in (-\infty, \infty)$, $\nu \in \{1,2\}$, $\beta^{(\nu)} = \left(\beta_1^{(\nu)}, \ldots, \beta_n^{(\nu)}\right)$, $\beta = \left(\beta^{(1)}, \beta^{(2)}\right)$.

Позначимо через l, $q^{(\nu)}$, $\gamma^{(\nu)}$, $\mu_{p_i}^{(\nu)}$, $\mu_0^{(\nu)}$ – дійсні невід'ємні числа, $[l]$ – ціла частина числа l, $\{l\}=l-[l]$, $\left(k,\mu_p^{(\nu)}\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\mu_{p_i}^{(\nu)}$, $\left(k,\gamma^{(\nu)}-\beta^{(\nu)}\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\left(\gamma^{(\nu)}-\beta_i^{(\nu)}\right)$, $P_1\left(t^{(1)},x^{(1)}\right)$, $P_2\left(t^{(2)},x^{(1)}\right)$, $R_r\left(t^{(2)},x^{(2)}\right)$ – довільні точки із $\Pi^{(\lambda)}=\{(t,x)|t\in[t_\lambda,t_{\lambda+1})\times R^n\}$, $x^{(1)}=\left(x_1^{(1)},\dots,x_n^{(1)}\right)$, $x^{(2)}=\left(x_1^{(1)},\dots,x_{r-1}^{(1)},x_r^{(2)},x_{r+1}^{(1)},\dots,x_n^{(1)}\right)$, $Q_\lambda=[t_\lambda,t_{\lambda+1})\times D$, D – довільна замкнена область із R^n, $\alpha\in(0,1)$.

Означимо простори, в яких вивчається задача (1), (2). $H^l(\gamma;\beta;q;\Pi)$ – множина функцій $u(t,x)$, які мають неперервні частинні похідні в $\Pi^{(\lambda)}\backslash\Pi_0$ при $t\neq t_\lambda$ вигляду $\partial_t^j\partial_x^k u$, $2bj+|k|\leq[l]$, для яких скінченна норма

$$\|u;\gamma;\beta;q;\Pi\|_l=\sup_\lambda\left\{\sum_{2bj+|k|\leq[l]}\|u;\gamma;\beta;q;\Pi_\lambda\|_{2bj+|k|}+\langle u;\gamma;\beta;q;\Pi_\lambda\rangle_l\right\},$$

де

$$\|u;\gamma;\beta;0;\Pi\|_0=\sup_\lambda\left\{\sup_{\overline{Q}_\lambda}|u|\right\}\equiv\sup_\lambda\|u;Q_\lambda\|_0,$$

$$\|u;\gamma;\beta;q;\Pi\|_{2bj+|k|}=\sup_\lambda\Bigg\{\sup_{P\in\overline{Q}_\lambda}\Big[s_1(q_1+(2bj+|k|)\gamma^{(1)},t)s_2(q_2+(2bj+|k|)\gamma^{(2)},x)\times$$
$$\times S(s_1,s_2;t,x)|\partial_t^j\partial_x^k u(P)|\Big]\Bigg\},$$

$$\langle u;\gamma;\beta;q;\Pi\rangle_l=\sup_\lambda\Bigg\{\sum_{2bj+|k|=[l]}\sum_{r=1}^{n}\sup_{(P_1,H_r)\subset\overline{Q}_\lambda}\Big[s_1\left(q^{(1)}+[l]\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)s_2\left(q^{(2)}+[l]\gamma^{(2)},\tilde{x}\right)\times$$
$$\times S(s_1,s_2;t^{(1)},\tilde{x})s_1\left(\{l\}\left(\gamma^{(1)}-\beta_r^{(1)}\right),t^{(1)}\right)s_2\left(\{l\}\left(\gamma^{(2)}-\beta_r^{(2)}\right),\tilde{x}\right)\left|x_r^{(1)}-x_r^{(2)}\right|^{-\{l\}}\times$$
$$\times\left|\partial_t^j\partial_x^k u\left(P_1\right)-\partial_t^j\partial_x^k u\left(H_r\right)\right|\Big]+\sum_{2bj+|k|=[l]}\sup_{(P_1,P_2)\in\overline{Q}_\lambda}\Big[s_1\left(q^{(1)}+l\gamma^{(1)},\tilde{t}\right)\times$$
$$\times s_2\left(q^{(2)}+l\gamma^{(2)},x^{(1)}\right)S(s_1,s_2;\tilde{t},x^{(1)})|t^{(1)}-t^{(2)}|^{-\left\{\frac{l}{2b}\right\}}\left|\partial_t^j\partial_x^k u\left(P_1\right)-\partial_t^j\partial_x^k u\left(P_2\right)\right|\Big]\Bigg\},$$

$$S(s_1,s_2;t,x)\equiv\prod_{i=1}^{n}s_1\left(-k_i\beta_i^{(1)},t\right)s_2\left(-k_i\beta_i^{(2)},x\right),$$

$$s_1(a,\tilde{t})=\min\left\{s_1\left(a,t^{(1)}\right),s_1\left(a,t^{(2)}\right)\right\},\quad s_2(a,\tilde{x})=\min\left\{s_2\left(a,x^{(1)}\right),s_2\left(a,x^{(2)}\right)\right\}.$$

Щодо задачі (1)-(2), вважаємо виконаними умови:

а) коефіцієнти рівняння (1) $A_k(t,x)\prod\limits_{i=1}^{n}s_1\left(k_i\beta_i^{(1)},t\right)s_2\left(k_i\beta_i^{(2)},x\right)\in C^\alpha(\gamma;\beta;0;\Pi)$, $A_p(t,x)\prod\limits_{i=1}^{n}s_1\left(p_i\mu_{p_i}^{(1)},t\right)s_2\left(p_i\mu_{p_i}^{(2)},x\right)\in C^\alpha(\gamma;\beta;0;\Pi)$, $1\leq|p|\leq 2b-1$, $A_0(t,x)s_1\left(\mu_0^{(1)},t\right)\times$

$\times s_2\left(\mu_0^{(2)},x\right)\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$, $A_0(t,x)\le K<\infty$ і виконується умова рівномірної параболічності для рівняння

$$\left[\partial_t-\sum_{|k|=2b}A_k(t,x)\prod_{i=1}^{n}s_1\left(k_i\beta_i^{(1)},t\right)s_2\left(k_i\beta_i^{(2)},x\right)\right]u(t,x)=\tilde f(t,x),$$

б) функції $f(t,x)\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi)$, $\varphi_k(x)\in C^{2b+\alpha}\left(\tilde\gamma;\tilde\beta;0;\Pi\cap\{t=t_k\}\right)$, $\tilde\gamma=\left(0,\gamma^{(2)}\right)$, $\tilde\beta=\left(0,\beta^{(2)}\right)$, $\gamma^{(v)}=\max\left\{\max\limits_i\beta^{(v)},\max\limits_{i,p_i}\dfrac{p_i\left(\mu_{p_i}^{(v)}-\beta_i^{(v)}\right)}{2b-|p|},\dfrac{\mu_0^{(v)}}{2b}\right\}$, $v\in\{1,2\}$.

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай для задачі* (1), (2) *виконані умови а), б). Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *із простору* $H^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$ *і справджується нерівність*

$$\|u;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2b+\alpha}\le c\sup_{\lambda}\left(\|f;\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi_\lambda\|_{\alpha}+\left\|\varphi_\lambda;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;\Pi_\lambda\cap\{t=t_\lambda\}\right\|_{2b+\alpha}\right). \tag{3}$$

Якщо $f\in H^{\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$ *і для задачі* (1), (2) *виконані умови а), б), то єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *в області* $\Pi^{(\lambda)}$ *визначається інтегралом Стілтьєса з деякою борелівською мірою* $Z_{(\lambda)}$

$$u(t,x)=\int\limits_{\Pi^{(\lambda)}}Z_{(\lambda)}(t,x;d\tau,d\xi)f(\tau,\xi)+\int\limits_{\Pi^{(\lambda)}\cap\{t=t_\lambda\}}Z_{(\lambda)}\left(t_\lambda,x;d_\xi\right)\varphi_\lambda(\xi), \tag{4}$$

де $Z_{(\lambda)}(t,x;M)$ *визначається на* σ*-алгебрі підмножин* G *області* Π_λ*, включаючи* Π_λ *і всі її відкриті підмножини.*

Для доведення теореми 1 встановимо спочатку розв'язність допоміжних задач з гладкими коефіцієнтами. З множини одержаних розв'язків виділимо збіжну підпослідовність, граничне значення якої буде розв'язком задачі (1), (2).

2 Оцінка розв'язків допоміжних задач з гладкими коефіцієнтами

Нехай $\Pi_m^{(\lambda)}=\Pi^{(\lambda)}\cap\left\{(t,x)\in\Pi^{(\lambda)}\mid s_1(1,t)\ge m_1^{-1},s_2(1,x)\ge m_2^{-1}\right\}$, $m_1\ge1$, $m_2\ge1$, $m=(m_1,m_2)$ послідовність областей, яка при $m_1\to\infty$, $m_2\to\infty$ збігається до $\Pi^{(\lambda)}$.

Розглянемо в області Π задачу знаходження розв'язків рівняння

$$\left(L_1u_m\right)(t,x)\equiv\left[\partial_t-\sum_{|k|=2b}a_k(t,x)\partial_x^k+\sum_{|p|\le2b-1}a_p(t,x)\partial_x^p\right]u_m(t,x)=F_m(t,x), \tag{5}$$

які задовольняють умови за змінною t

$$u_m(t_\lambda+0,x)=\varphi_m^{(\lambda)}(x). \tag{6}$$

Тут коефіцієнти a_k, a_p, функції F_m, $\varphi_m^{(\lambda)}$ в області $\Pi_m^{(\lambda)}$ співпадають з A_k, A_p, f, φ_λ відповідно, а в області $\Pi^{(\lambda)} \backslash \Pi_m^{(\lambda)}$ є неперервним продовженням коефіцієнтів A_k, A_p і функцій f, φ_λ із області $\Pi_m^{(\lambda)}$ в область $\Pi^{(\lambda)} \backslash \Pi_m^{(\lambda)}$ із збереженням гладкості і норм ([15], с. 82).

Позначимо через $C^l(\gamma;\beta;q;\Pi)$ сукупність функцій простору $C^l(\Pi)$ з нормою $\|u_m;\gamma;\beta;q;\Pi\|_l$, еквівалентну при кожному m_1, m_2 гельдеровій нормі, яка визначається так само, як і $\|u;\gamma;\beta;q;\Pi\|_l$, тільки замість функцій $s_1\left(a^{(1)},t\right)$, $s_2\left(a^{(2)},x\right)$ беремо відповідно $e_1\left(a^{(1)},t\right)$, $e_2\left(a^{(2)},x\right)$, де $e_1\left(a^{(1)},t\right) = \max\left(s_1\left(a^{(1)},t\right), m_1^{-a^{(1)}}\right)$ при $a^{(1)} \geq 0$ і $e_1\left(a^{(1)},t\right) = \min\left(s_1\left(a^{(1)},t\right), m_1^{-a^{(1)}}\right)$ при $a^{(1)} \leq 0$; $e_2\left(a^{(2)},x\right) = \max\left(s_2\left(a^{(2)},x\right), m_2^{-a^{(2)}}\right)$ при $a^{(2)} \geq 0$ і $e_2\left(a^{(2)},x\right) = \min\left(s_2\left(a^{(2)},x\right), m_2^{-a^{(2)}}\right)$ при $a^{(2)} \leq 0$.

Для норм $\|u_m;\gamma;\beta;q;\Pi_\lambda\|_l$ правильні інтерполяційні нерівності.

Лема 1. *Нехай* $u_m \in C^l(\gamma;\beta;q,\Pi)$. *Тоді для довільного* $0<\varepsilon<1$ *існує така стала* $c(\varepsilon)$, *що виконуються нерівності*

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda\|_{[l]} \leq \varepsilon^\alpha \langle u_m;\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda\rangle_l + c(\varepsilon)\,\|u_m;\Pi_\lambda\|_0\,, \tag{7}$$

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda\|_{|k|} \leq \varepsilon\,\|u_m;\gamma;\beta;q;\Pi_\lambda\|_{|k|+1} + \frac{c}{\varepsilon}\,\|u_m;\gamma;\beta;q;\Pi_\lambda\|_{|k|-1}\,, \tag{8}$$
$$|k| \leq [l]-1, \quad l=[l]+\{l\},\ l>[l].$$

Нерівності (7), (8) одержуються за схемою доведення леми із [16].

Встановимо оцінку норми $\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2b+\alpha}$.

Правильна така теорема.

Теорема 2. *Якщо виконані умови а), б), то для розв'язку задачі* (5), (6) *правильна оцінка*

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda\|_{2b+\alpha} \leq c\sup_\lambda\Big(\left\|\varphi_m^{(\lambda)};\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda\cap(t=t_\lambda)\right\|_{2b+\alpha} + \|u_m;\Pi_\lambda\|_0 + $$
$$+\|F_m;\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi_\lambda\|_\alpha\Big)\,. \tag{9}$$

Стала c не залежить від m.

Доведення. В області Π_λ розглянемо задачу

$$\left(L_1u_m\right)(t,x) = F_m(t,x), \quad u_m(t_\lambda+0,x) = \varphi_m^{(\lambda)}(x). \tag{10}$$

При виконанні умов а), б) існує єдиний класичний розв'язок задачі (10) в просторі $C^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda)$ [6,14]. Знайдемо його оцінку. Використовуючи інтерполяційні нерівності (7), (8), маємо

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda\|_{2b+\alpha} \leq (1+\varepsilon^\alpha)\,\langle u_m;\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda\rangle_{2b+\alpha} + c(\varepsilon)\,\|u_m;\Pi_\lambda\|_0\,.$$

Тому досить оцінити півнорму $\langle u_m;\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda\rangle_{2b+\alpha}$. Із визначення $\langle u_m;\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda\rangle_{2b+\alpha}$ випливає існування в Π_λ точок P_1, P_2, R_r, для яких правильна нерівність

$$\frac{1}{2}\,\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda\|_{2b+\alpha} \leq E_1+E_2, \tag{11}$$

де

$$E_1=\sum_{2bj+|k|=2b}\sum_{r=1}^{n}\Big[e_1\left(2b\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)e_2\left(2b\gamma^{(2)},\tilde{x}\right)S(e_1,e_2;t^{(1)},\tilde{x})\left|x_r^{(1)}-x_r^{(2)}\right|^{-\alpha}\times$$

$$\times e_1\left(\alpha\left(\gamma^{(1)}-\beta_r^{(1)}\right),t^{(1)}\right)e_2\left(\alpha\left(\gamma^{(2)}-\beta_r^{(2)}\right),\tilde{x}\right)\left|\partial_t^j\partial_x^k u_m\left(P_1\right)-\partial_t^j\partial_x^k u_m\left(H_r\right)\right|\Big],$$

$$E_2=\sum_{2bj+|k|=2b}e_1\left((2b+\alpha)\gamma^{(1)},\tilde{t}\right)e_2\left((2b+\alpha)\gamma^{(2)},x^{(2)}\right)S(e_1,e_2;\tilde{t},x^{(2)})\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|^{-\frac{\alpha}{2b}}\times$$

$$\times\left|\partial_t^j\partial_x^k u_m\left(P_2\right)-\partial_t^j\partial_x^k u_m\left(P_1\right)\right|.$$

Якщо $\left|x_r^{(1)}-x_r^{(2)}\right|\geq\frac{\varepsilon}{4}n^{-1}e_1\left(\gamma^{(1)}-\beta_r^{(1)},\tilde{t}\right)e_2\left(\gamma^{(2)}-\beta_r^{(2)},\tilde{x}\right)\equiv N_1$, ε – довільне дійсне число із $(0,1)$, то

$$E_1\leq 2\varepsilon^{-\alpha}\left\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda\right\|_{2b}. \tag{12}$$

Якщо $\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|\geq\frac{\varepsilon^{2b}}{2b}e_1\left(2b\gamma^{(1)},\tilde{t}\right)e_2\left(2b\gamma^{(2)},\tilde{x}\right)\equiv N_2$, то

$$E_2\leq 2\varepsilon^{-\alpha}\left\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda\right\|_{2b}. \tag{13}$$

Застосовуючи інтерполяційні нерівності (7) до (12), (13), знаходимо

$$E_1+E_2\leq 2\varepsilon_1^{\alpha}\left\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda\right\|_{2b+\alpha}+c(\varepsilon)\left\|u_m;\Pi_\lambda\right\|_0. \tag{14}$$

Нехай $\left|x_r^{(1)}-x_r^{(2)}\right|\leq N_1$, $\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|\leq N_2$. Будемо вважати, що $e_2\left(\gamma^{(2)},\tilde{x}\right)=$ $=\min\left(e_2\left(\gamma^{(2)},x^{(2)}\right),e_2\left(\gamma^{(2)},x^{(1)}\right)\right)\equiv e_2\left(\gamma^{(2)},x^{(1)}\right)$, $e_1\left(\gamma^{(1)},\tilde{t}\right)=\min\left(e_1\left(\gamma^{(1)},t^{(1)}\right),\right.$ $\left.e_1\left(\gamma^{(1)},t^{(2)}\right)\right)\equiv e_1\left(\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)$, $P_1\left(t^{(1)},x^{(1)}\right)\in\Pi_\lambda$. Запишемо задачу (10) у вигляді

$$\partial_t u_m-\sum_{|k|=2b}a_k\left(P_1\right)\partial_x^k u_m=F_m(t,x)-\sum_{|p|\leq 2b-1}a_p(t,x)\partial_x^p u_m+$$

$$+\sum_{|k|=2b}\left[a_k(t,x)-a_k\left(P_1\right)\right]\partial_x^k u_m\equiv F_m^{(1)}\left(t,x;u_m\right), \tag{15}$$

$$u_m(t_\lambda+0,x)=\varphi_m^{(\lambda)}(x). \tag{16}$$

В задачі (15), (16) зробимо заміну $u_m(t,x)=v_m(t,z)$, де $z_i=e_1\left(\beta_i^{(1)},t^{(1)}\right)\times$ $\times e_2\left(\beta_i^{(2)},x^{(1)}\right)x_i$, $i\in\{1,\ldots,n\}$. Тоді функція $\omega_m(t,x)=v_m(t,z)\cdot\eta(t,z)$ буде розв'язком задачі

$$\partial_t\omega_m-\sum_{|k|=2b}a_k\left(P_1\right)S_1\left(k;e_1,e_2;t^{(1)},x^{(1)}\right)\partial_z^k\omega_m=v_m(t,z)\partial_t\eta+\eta F_m^{(1)}(t,\tilde{z};v_m)+$$

$$+\sum_{|k|=2b}a_k\left(P_1\right)S_1\left(k;e_1,e_2;t^{(1)},x^{(1)}\right)\left(\sum_{0<|p|\leq|k|}C_{|k|}^{|p|}\partial_z^{k-p}v_m\partial_z^p\eta\right)\equiv\Psi_m\left(t,z;v_m\right), \tag{17}$$

$$\omega_m(t_\lambda+0,z)=\eta(t_\lambda+0,z)\varphi_m^{(\lambda)}(\tilde{z}), \tag{18}$$

де $\tilde{z}=\left(e_1^{-1}\left(\beta_1^{(1)},t^{(1)}\right)e_2^{-1}\left(\beta_1^{(2)},x^{(1)}\right)z_1,\ldots,e_1^{-1}\left(\beta_n^{(1)},t^{(1)}\right)e_2^{-1}\left(\beta_n^{(2)},x^{(1)}\right)z_n\right)$;

$$\eta(t,z)=\begin{cases}1,(t,z)\in T_{1/2},\ 0\le\eta(t,z)\le 1;\\ 0,(t,z)\notin T_{3/4},\ \left|\partial_t^j\partial_z^k\eta\right|\le c_{kj}e_1^{-1}\left((2bj+|k|)\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)e_2^{-1}\left((2bj+|k|)\gamma^{(2)},x^{(1)}\right);\end{cases}$$

$$T_8=\Big\{(t,z)\big|\left|t^{(1)}-t\right|\le 2\delta N_2,\left|z_i-z_i^{(1)}\right|\le 2\delta e_1\left(\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)e_2\left(\gamma^{(2)},x^{(1)}\right),$$

$$z_i^{(1)}=e_1\left(\beta_i^{(1)},t^{(1)}\right)e_2\left(\beta_i^{(2)},x^{(1)}\right)x_i^{(1)}\Big\},$$

$$S_1\left(k;e_1,e_2;t^{(1)},x^{(1)}\right)=\prod_{i=1}^{n}e_1\left(k_i\beta_i^{(1)},t^{(1)}\right)e_2\left(k_i\beta_i^{(2)},x^{(1)}\right).$$

Коефіцієнти рівняння (17) обмежені сталими, незалежними від точки $P_1\left(t^{(1)},x^{(1)}\right)$. Тому, використовуючи теорему 4.1 із ([5], с. 43), для довільних точок $M_1\left(\tau^{(1)},z^{(1)}\right)\in T_{1/2}$, $M_2\left(\tau^{(2)},z^{(2)}\right)\in T_{1/2}$ правильна нерівність

$$d^{-\alpha}\left(M_1,M_2\right)\left|\partial_t^j\partial_z^k\omega_m\left(M_1\right)-\partial_t^j\partial_x^k\omega_m\left(M_2\right)\right|\le c\Big(\left\|\Phi_m\right\|_{C^\alpha\left(T_{3/4}\right)}+$$

$$+\left\|\eta\varphi_m^{(\lambda)}\right\|_{C^{2b+\alpha}\left(T_{3/4}\cap(t=t_\lambda)\right)}\Big),\tag{19}$$

$d\left(M_1,M_2\right)$ – параболічна відстань між M_1, M_2, $2bj+|k|=2b$

Враховуючи властивості функції $\eta(t,z)$ і нерівності (7), (8), одержимо

$$\left\|\Phi_m\right\|_{C^\alpha\left(T_{3/4}\right)}\le cW\left(e_1,e_2\right)\left(\left\|v_m;T_{3/4}\right\|_0+\left\|F_m^{(1)};\gamma;0;2b\gamma;T_{3/4}\right\|_\alpha+\right.$$

$$\left.+\left\|v_m;\gamma;0;0;T_{3/4}\right\|_{2b}\right);\tag{20}$$

$$\left\|\eta\varphi_m^{(\lambda)}\right\|_{C^{2b+\alpha}\left(T_{3/4}\cap(t=t_\lambda)\right)}\le cW\left(e_1,e_2\right)\left\|\varphi_m^{(\lambda)};\tilde{\gamma};0;0;T_{3/4}\cap\left(t=t_\lambda\right)\right\|_{2b+\alpha},$$

де $W\left(e_1,e_2\right)=e_1\left((2b+\alpha)\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)e_2\left((2b+\alpha)\gamma^{(2)},x^{(1)}\right)$.

Із визначення простору $C^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;q;\Pi_\lambda)$ випливає справедливість нерівності

$$c_1\left\|v_m;\gamma;0;0;T_{3/4}\right\|_l\le\left\|u_m;\gamma;\beta;0;K_{3/4}\right\|_l\le c_2\left\|v_m;\gamma;0;0;T_{3/4}\right\|_l,$$

$$K_{3/4}=\left\{(t,x)\in\Pi_\lambda,\left|t-t^{(1)}\right|\le(4\delta)^{2b}N_1,\left|x_i-x_i^{(1)}\right|\le 4\delta n^{-1}N_2,\ i\in\{1,2,\ldots,n\}\right\}.$$

Підставляючи (20) у (19) і повертаючись до змінних (t,x), знаходимо

$$E_1+E_2\le c\Bigg(\left\|F_m^{(1)};\gamma;\beta;2b\gamma;K_{3/4}\right\|_\alpha+\left\|\varphi_m^{(\lambda)};\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;K_{3/4}\cap\left(t=t_\lambda\right)\right\|_{2b+\alpha}+$$

$$\left.+\left\|u_m;K_{3/4}\right\|_0+\left\|u_m;\gamma;\beta;0;K_{3/4}\right\|_{2b}\right).\tag{21}$$

Для знаходження норми $\left\|F_m^{(1)};\gamma;\beta;2b\gamma;K_{3/4}\right\|_\alpha$ досить оцінити півнорми кожного доданка виразу $F_m^{(1)}(t,x;u_m)$. Скориставшись нерівностями (7), (8) одержимо

$$\left\|F_m^{(1)};\gamma;\beta;2b\gamma;K_{3/4}\right\|_\alpha\le c_3\left(\left\|F_m;\gamma;\beta;2b\gamma;K_{3/4}\right\|_\alpha+\varepsilon_2\left\|u_m;\gamma;\beta;0;K_{3/4}\right\|_{2b+\alpha}\right)+$$

$$+c_4 \left\| u_m; K_{3/4} \right\|_0 . \tag{22}$$

Підставляючи (22) у (21), знаходимо

$$E_1 + E_2 \leq c_3 \left(\left\| F_m; \gamma; \beta; 2b\gamma; K_{3/4} \right\|_\alpha + \varepsilon_2 \left\| u_m; \gamma; \beta; 0; K_{3/4} \right\|_{2b+\alpha} \right) +$$

$$+c \left\| \varphi_m^{(\lambda)}; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; K_{3/4} \cap (t = t_\lambda) \right\|_{2b+\alpha} + c_5 \left\| u_m; K_{3/4} \right\|_0 . \tag{23}$$

Використовуючи нерівності (11), (14), (23) і вибираючи ε_1, ε_2 досить малими, одержимо нерівність (9). □

Знайдемо оцінку норми $\| u_m; \Pi_\lambda \|_0$.

В задачі (10) зробимо заміну $u_m(t,x) = \varphi_m^{(\lambda)}(x) + u_m^{(1)}(t,x)$. Одержимо задачу для розв'язку $u_m^{(1)}(t,x)$

$$\left(L_1 u_m^{(1)} \right)(t,x) = F_m(t,x) - \left(L_1 \varphi_m^{(\lambda)} \right)(x),$$

$$u_m^{(1)}(t_\lambda + 0, x) = 0. \tag{24}$$

Правильна така теорема.

Теорема 3. *Якщо* $u_m^{(1)}(t,x)$ *– єдиний класичний розв'язок задачі* (24) *і виконані умови а), б), то для* $u_m^{(1)}(t,x)$ *справджується нерівність*

$$\left\| u_m^{(1)}; \Pi_\lambda \right\|_0 \leq c \left\| L_1 u_m^{(1)}; \gamma; \beta; 2b\gamma; \Pi_\lambda \right\|_0 , \tag{25}$$

де стала c *не залежить від* m.

За умов накладених на гладкість коефіцієнтів задачі (10) *і функцій* F_m, $\varphi_m^{(\lambda)}$ *існує єдиний розв'язок задачі* (10), *який належить простору* $C^{2b+\alpha}(\gamma; \beta; 0; \Pi_\lambda)$ *і має при кожному фіксованому* m_1, m_2 *скінченну норму [6].*

Скориставшись методикою доведення зауваження 2 ([17], с. 79), встановлюємо нерівність (25).

Доведення теореми 1. Оскільки $\| F_m; \gamma; \beta; 2b\gamma; \Pi_\lambda \|_\alpha \leq c \, \| f; \gamma; \beta; 2b\gamma; \Pi_\lambda \|_\alpha$, $\left\| \varphi_m^{(\lambda)}; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; \Pi_\lambda \cap (t = t_\lambda) \right\|_{2b+\alpha} \leq c \| \varphi_\lambda; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; \Pi_\lambda \cap (t = t_\lambda)$, то, використовуючи нерівності (9), (25), одержимо

$$\| u_m; \gamma; \beta; 0; \Pi_\lambda \|_{2b+\alpha} \leq c_4 \left(\| f; \gamma; \beta; 2b\gamma; \Pi_\lambda \|_\alpha + \| \varphi_\lambda; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; \Pi_\lambda \cap (t = t_\lambda) \|_{2b+\alpha} \right). \tag{26}$$

Права частина нерівності (26) не залежить від m_1, m_2 і послідовності

$$\left\{ W_m^{(j,k)} \right\} = \left\{ e_1 \left(2bj\gamma^{(1)}, t \right) e_2 \left(2bj\gamma^{(2)}, x \right) S(e_1, e_2; t, x) \left| \partial_t^j \partial_x^k u_m(t,x) \right| \right\},$$

$$2bj + |k| \leq 2b$$

рівномірно обмежені і рівностепенно неперервні в $\overline{Q}_\lambda$. За теоремою Арчела існують послідовності $\left\{ W_{m(l)}^{(j,k)} \right\}$, рівномірно збіжні при $m(l) \to \infty$ до $W^{(j,k)}$. Переходячи до границі при $m(l) \to \infty$ в задачі (10) одержимо, що $u(t,x) = W^{(0,0)}$ – єдиний розв'язок задачі (1), (2), $u \in H^{2b+\alpha}(\gamma; \beta; 0; \Pi_\lambda)$ і правильна оцінка (3).

Оскільки $H^{\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda) \subset H^{\alpha}(\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi_\lambda)$, то для $f \in H^{\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda)$ виконується нерівність $\|f;\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi_\lambda\|_\alpha \le c\,\|f;\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda\|_\alpha$. Тому, враховуючи нерівність (3), для розв'язку задачі (1), (2) правильна оцінка

$$\|u;\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda\|_{2b+\alpha} \le c\left(\|f;\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda\|_\alpha + \|\varphi_\lambda;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;\Pi_\lambda \cap (t=t_\lambda)\|_{2b+\alpha}\right). \quad (27)$$

Будемо розглядати $u(t,x)$ при фіксованих (t,x) як лінійний неперервний функціонал $F\,(f,\varphi_\lambda)$ на нормованому просторі $C_\alpha \equiv H^{\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi_\lambda) \times H^{2b+\alpha}\left(\tilde\gamma;\tilde\beta;0;\Pi_\lambda \cap (t=t_\lambda)\right)$ з нормою, що дорівнює правій частині нерівності (27). Беручи до уваги включення $C_\alpha \subset C(\Pi_\lambda)$ і згідно з теоремою Рісса, можна вважати, що $u(t,x)$ породжує борелівську міру $Z_{(\lambda)}(t,x;M)$, яка визначається на σ-алгебрі підмножин G області Π_λ, включаючи Π_λ і всі її відкриті підмножини такі, що значення функціоналу визначається формулою (4).

Список літератури

[1] Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. Київ : Наук. думка, 2002. 416 с.

[2] Власій О. Д., Пташник Б. Й. *Задача з нелокалльними умовами для рівнянь з частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної.* Укр. мат. журн. 2003. **55**, № 8. С. 1022-1034.

[3] Клюс І. С., Пташник Б. Й. *Багатоточкова задача для рівнянь із частинними похідними, не розв'язних відносно старшої похідної за часом.* Укр. мат. журн. 1999. **51**, № 12. С. 1604-1613.

[4] Пташник Б. Й., Тимків І. Р. *Багатоточкова задача для параболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами.* Доп. НАН України. 2008. № 12. С. 42-48.

[5] Матійчук М. І. Параболічні сингулярні крайові задачі. Київ : Інститут математики НАН України, 1999. 176 с.

[6] Матійчук М. І. Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. Чернівці : Прут, 2003. 248 с.

[7] Ivasishen S. D., Eidelman S. D. *2b-parabolic equations with degeneration in some of the variables.* Dokl. Akad. Nauk, 1998. Vol. 360, № 3. P. 303-305.

[8] Івасишен С. Д., Літовченко В. А. *Задача Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова з недодатним родом.* Укр. мат. журн. 2010. **62**, № 10. С. 1330-1350.

[9] Івасишен С. Д., Мединський І. П., Пасічник Г. С. *Параболічні рівняння з виродженнями на початковій гіперплощині.* Буковинський мат. журн. 2016. **4**, № 3-4. С. 57-68.

[10] Пукальський І. Д., Яшан Б. О. *Крайова задача з імпульсною дією для параболічного рівняння з виродженням.* Укр. мат. журнал. 2019. **71**, № 5. С. 645-655.

[11] Пукальський І. Д., Яшан Б. О. *Одностороння крайова задача з імпульсними умовами для параболічних рівнянь з виродженням.* Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2018. **61**, № 4. С. 35-48.

[12] 1. Pukal'skii I.D., Yashan B.O. *The Cauchy problem for parabolic equations with degeneration.* Advances in Mathematical Physics, 2020. **2020**, Article ID 1245143, 7 pages.

[13] Пукальський І. Д., Яшан Б. О. *Нелокальна багатоточкова за часом задача для параболічних рівнянь з виродженням.* Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2017. **60**, № 2. С. 32-40.

[14] Эйдельман С. Д. Параболические системы. М. : Наука, 1964. 443 с.

[**15**] Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М. : Мир, 1968. 427 с.

[**16**] Пукальський І. Д. *Задача Коші для нерівномірно параболічних рівнянь зі степеневими особливостями.* Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2021. **64**, № 2. С. 31-41.

[**17**] Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. М. : ИЛ, 1962. 205 с.

Список літератури

[**1**] Ptashnyk B. Y., Il'kiv V. S., Kmit' I. Y., Polishchuk V. M. Nonlocal boundary value problems for equations with partial derivatives. Kyiv : Scientific thought, 2002. 416 p.

[**2**] Vlasiy O. D., Ptashnyk B. Y. *A problem with nonlocal conditions for equations with partial derivatives is not solved with respect to the higher derivative.* Ukrainian Mathematical Journal 2003. **55**, № 8. P. 1022-1034.

[**3**] Klyus I. S., Ptashnyk B. Y. *A multipoint problem for equations with partial derivatives that are not solvable with respect to the highest time derivative.* Ukrainian Mathematical Journal 1999. **51**, № 12. P. 1604-1613.

[**4**] Ptashnyk B. Y., Tymkiv I. R. *A multipoint problem for a parabolic equation with variable coefficients.* Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. 2008. № 12. P. 42-48.

[**5**] Matiychuk M. I. Parabolic singular boundary value problems. Kyiv : Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 1999. 176 p.

[**6**] Matiychuk M. I. Parabolic and elliptic boundary value problems with singularities. Chernivtsi : Prut, 2003. 248 p.

[**7**] Ivasishen S. D., Eidelman S. D. $2b$*-parabolic equations with degeneration in some of the variables.* Dokl. Akad. Nauk, 1998. Vol. 360, № 3. P. 303-305.

[**8**] Ivasyshen S. D., Litovchenko V. A. *The Cauchy problem for one class of degenerate parabolic equations of the Kolmogorov type with negative genus.* Ukrainian Mathematical Journal 2010. **62**, № 10. P. 1330-1350.

[**9**] Ivasyshen S. D., Medynskyi I. P., Pasichnyk H. S. *Parabolic equations with degeneration on the initial hyperplane.* Bukovinian Mathematical Journal 2016. **4**, № 3-4. P. 57-68.

[**10**] Pukal'skii I.D., Yashan B.O. *A boundary value problem with impulse action for a parabolic equation with degeneration.* Ukrainian Mathematical Journal 2019. **71**, № 5. P. 645-655.

[**11**] Pukal'skii I.D., Yashan B.O. *One-sided boundary value problem with impulse conditions for parabolic equations with degeneration.* Mathematical methods and physical and mechanical fields, 2018. **61**, № 4. P. 35-48.

[**12**] 1. Pukal'skii I.D., Yashan B.O. *The Cauchy problem for parabolic equations with degeneration.* Advances in Mathematical Physics, 2020. **2020**, Article ID 1245143, 7 pages. DOI: https://doi.org/10.1155/2020/1245143.

[**13**] Pukal'skii I.D., Yashan B.O. *A nonlocal multipoint time problem for parabolic equations with degeneration.* Mathematical methods and physical and mechanical fields, 2017. **60**, № 2. P. 32-40.

[**14**] Eidelman S. D. Parabolic systems. Moscow : Nauka, 1964. 443 p.

[**15**] Friedman A. Partial differential equations of parabolic type. Englewood Cliffs : Prentice Hall, 1964. 347 p.

[**16**] Pukal'skii I.D. *The Cauchy problem for non-uniformly parabolic equations with power singularities.* Mathematical methods and physical and mechanical fields, 2021. **64**, № 2. P. 31-41.

[17] Agmon S., Douglas A., Nirenberg L. Estimates near the boundary of solutions of elliptic equations in partial derivatives under common boundary conditions. M. : IL, 1962. 205 p.

Надійшло 28.11.2022

Pukalskyy I.D., Yashan B.O. *A multipoint in-time problem for the $2b$-parabolic equation with degeneration*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 2 (2022), 229–239.

In recent decades, special attention has been paid to problems with nonlocal conditions for partial differential equations. Such interest in such problems is due to both the needs of the general therapy of boundary value problems and their rich practical application (the process of diffusion, oscillations, salt and moisture transport in soils, plasma physics, mathematical biology, etc.).

A multipoint in-time problem for a nonuniformly $2b$-parabolic equation with degeneracy is studied. The coefficients of the parabolic equation of order $2b$ allow for power singularities of arbitrary order both in the time and spatial variables at some set of points. Solutions of auxiliary problems with smooth coefficients are studied to solve the given problem. Using a priori estimates, inequalities are established for solving problems and their derivatives in special Hölder spaces. Using the theorems of Archel and Riess, a convergent sequence is distinguished from a compact sequence of solutions of auxiliary problems, the limiting value of which will be the solution of the given problem. Estimates of the solution of the multipoint time problem for the $2b$-parabolic equation are established in Hölder spaces with power-law weights. The order of the power weight is determined by the order of degeneracy of the coefficients of the groups of higher terms and the power features of the coefficients of the lower terms of the parabolic equation. With certain restrictions on the right-hand side of the equation, an integral image of the solution to the given problem is obtained.