УДК 517.956

І. П. Лусте, І. Д. Пукальський

ЗАГАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕРІВНОМІРНО ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТЕПЕНЕВИМИ ОСОБЛИВОСТЯМИ

Досліджується загальна крайова задача для нерівномірно $2b$-параболічних рівнянь з виродженням. Коефіцієнти параболічних рівнянь і крайових умов допускають степеневі особливості довільного порядку за будь-якими змінними на деякій множині точок. За допомогою апріорних оцінок і теорем Арчела і Рісса встановлено існування та інтегральне зображення єдиного розв'язку поставленої крайової задач. Знайдено оцінки розв'язку загальної параболічної крайової задачі та його похідних в гельдерових просторах зі степеневою вагою. Порядок степеневої ваги визначається через величини порядків степеневих особливостей і вироджень коефіцієнтів $2b$-параболічних рівнянь і крайових умов.

Ключові слова: *загальна параболічна крайова задача, степеневі особливості, інтерполяційні нерівності, гельдерові простори, апріорні оцінки, інтеграл Стілтьєса, теорема Арчела, $2b$-параболічне рівняння.*

Вступ. Задачі для вироджених рівнянь з частинними похідними виникають при моделюванні різних складних явищ та процесів у сучасному природознавстві, техніці, математичній фізиці, квантовій механіці, теорії ядерних ланцюгових реакцій, економіці тощо. Рівняннями із сингулярним оператором Бесселя моделюються у тілах із симетрією дифузійні процеси, радіальні коливання, тепло- та масообмін при вирощуванні монокристалів [1].

У монографіях [2, 3] досліджено розв'язки задачі Коші і крайових задач для лінійних параболічних систем, коефіцієнти яких мають обмежені степеневі особливості.

Дослідження властивостей фундаментального розв'язку і встановлення коректної розв'язності задачі Коші для параболічних рівнянь з виродженням за деякими змінними присвячено праці [4, 5].

У роботах [6, 8] вивчено задачі з нелокальними та інтегральними умовами за часовою змінною для параболічних рівнянь другого порядку зі степеневими особливостями довільного порядку в коефіцієнтах рівняння і крайових умов за будь-якими змінними на деякій множині точок.

Задачі Коші для $2b$-параболічного рівняння зі степеневими особливостями довільного порядку в коефіцієнтах за будь-якими змінними на деякій множині точок присвячено працю [9].

У даній статті розглядається загальна крайова задача для параболічного рівняння порядку $2b$ ($b>1$), зі степеневими особливостями в коефіцієнтах рівняння і крайових умов довільного порядку за будь-якими змінними на деякій множині точок. За допомогою апріорних оцінок і теорем Арчела і Рісса встановлено існування, інтегральне зображення єдиного розв'язку поставленої задачі та оцінки його похідних у гельдерових просторах зі степеневою вагою.

1. Постановка задачі і основний результат. Нехай D – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею ∂D, $\dim D = n$, Ω – деяка обмежена область, $\bar{\Omega} \subset \bar{D}$, $\dim\Omega \le n-1$, t_0, T – фіксовані додатні числа $0<t_0<T$, $Q=[0,T)\times D$, $Q_0 = \{(t,x) \mid t\in[0,T), x\in\bar{\Omega}\} \cup$ $\cup \{(t,x) \mid t=t_0, x\in\bar{D}\}$.

В області Q розглянемо задачу знаходження функції $u(t,x)$, яка задовольняє при $(t,x)\in Q\setminus Q_0$ рівняння

$$(Lu)(t,x)\equiv\left[\partial_t-\sum_{|k|=2b}A_k(t,x)\partial_x^k-\sum_{|p|\le 2b-1}A_p(t,x)\partial_x^p\right]u(t,x)=f_0(t,x), \tag{1}$$

початкову умову за змінною t

$$u(0,x)=\varphi(x)\,,\quad x\in D\setminus\overline{\Omega},, \tag{2}$$

а на межі області $\Gamma[0,T]\times\partial D$ крайові умови

$$\lim_{x\to z\in\partial D}\left[\sum_{|k|=r_\lambda}B_k^{(\lambda)}(t,x)\partial_x^k u+\sum_{|p|\le r_\lambda-1}B_p^{(\lambda)}(t,x)\partial_x^p u-f_\lambda(t,x)\right]=0, \tag{3}$$

$$\partial_x^k=\partial_{x_1}^{k_1}\ldots\partial_{x_n}^{k_n}\,,\ |k|=k_1+\ldots+k_n\,,\ \lambda\in\{1,...,b\}\,,\ 0\le r_\lambda\le 2b-1.$$

Степеневі особливості коефіцієнтів рівняння (1) і крайових умов (3) у точці $P(t,x)\in Q\setminus Q_0$ характеризуватимуть функції $s_1\left(\beta_i^{(1)},t\right)$ і $s_2\left(\beta_i^{(2)},x\right)$: $s_1\left(\beta_i^{(1)},t\right)=|t-t_0|^{\beta_i^{(1)}}$ при $|t-t_0|\le 1$, $s_1\left(\beta_i^{(1)},t\right)=1$ при $|t-t_0|\ge 1$; $s_2\left(\beta_i^{(2)},x\right)=\rho^{\beta_i^{(2)}}(x)$ при $\rho(x)\le 1$, $s_2\left(\beta_i^{(2)},x\right)=1$ при $\rho(x)\ge 1$, $\rho(x)=\inf\limits_{z\in\partial D}|x-z|$, $\beta_i^{(\nu)}\in(-\infty,\infty)$, $\nu\in\{1,2\}$, $\beta^{(\nu)}=\left(\beta_1^{(\nu)},\ldots,\beta_n^{(\nu)}\right)$, $\beta=\left(\beta^{(1)},\beta^{(2)}\right)$.

Позначимо через $l,q,\gamma^{(\nu)},\mu_{p_i}^{(\nu)},\delta_{\lambda,p_i}^{(\lambda)}$, $i\in\{1,\ldots,n\}$, $\mu_0^{(\nu)},\delta_\lambda^{(\nu)}$ – дійсні додатні числа, $[l]$ – ціла частина l, $\{l\}=l-[l]$, $P(t,x)$, $P_1\left(t^{(1)},x^{(1)}\right)$, $P_2\left(t^{(2)},x^{(1)}\right)$, $H_r\left(t^{(2)},x^{(2)}\right)$ – довільні точки із Q, $x^{(1)}=\left(x_1^{(1)},\ldots,x_n^{(1)}\right)$, $x^{(2)}=\left(x_1^{(1)},\ldots,x_{r-1}^{(1)},x_r^{(2)},x_{r+1}^{(1)},\ldots,x_n^{(1)}\right)$.

Означимо простори, в яких вивчається задача (1)-(3).

$C^l(\gamma;\beta;q;Q)$ – множина функцій $u:(t,x)\in\overline{Q}$, які мають неперервні частинні похідні в області $\overline{Q}\setminus Q_0$ вигляду $\partial_t^j\partial_x^k u$, $2bj+|k|\le[l]$, для яких скінченна норма

$$\|u;\gamma;\beta;q;Q\|_l=\sum_{2bj+|k|\le[l]}\|u;\gamma;\beta;q;Q\|_{2bj+|k|}+\langle u;\gamma;\beta;q;Q\rangle_l\,,$$

де, наприклад,

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_0=\sup_{P\in\overline{Q}}\|u(P)\|\equiv\|u;Q\|_0\,,$$

$$\langle u;\gamma;\beta;q;Q\rangle_l=\sum_{2bj+|k|=[l]}\sum_{r=1}^{n}\left\{\sup_{(P_2,H_r)\subset\overline{Q}}s_1\left((q+[l])\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)s_2\left((q+[l])\gamma^{(2)},\tilde{x}\right)\times\right.$$

$$\times s_1\left(\{l\}\left(\gamma^{(1)}-\beta_r^{(1)}\right),t^{(1)}\right)s_2\left(\{l\}\left(\gamma^{(2)}-\beta_r^{(2)}\right),\tilde{x}\right)\left|x_r^{(1)}-x_r^{(2)}\right|^{-\{l\}}\left|\partial_t^j\partial_x^k u(P_2)-\partial_t^j\partial_x^k u(H_r)\right|\times$$

$$\left.\times\prod_{i=1}^{n}s_1\left(-k_i\beta_i^{(1)},t^{(1)}\right)s_2\left(-k_i\beta_i^{(2)},\tilde{x}\right)\right\}++\sum_{2bj+|k|=[l]}\left\{\sup_{(P_1,P_2)\in\overline{Q}}s_1\left((q+l)\gamma^{(1)},\tilde{t}\right)\times\right.$$

$$\times s_2\left((q+l)\gamma^{(2)},x^{(1)}\right)\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|^{-\left\{\frac{l}{2b}\right\}}\left|\partial_t^j\partial_x^k u\left(P_1\right)-\partial_t^j\partial_x^k u\left(P_2\right)\right|\times$$

$$\left.\times\prod_{i=1}^{n}s_1\left(-k_i\beta_i^{(1)},\tilde{t}\right)s_2\left(-k_i\beta_i^{(2)},x^{(1)}\right)\right\},$$

$$s_1\left(a,\tilde{t}\right)=\min\left\{s_1\left(a,t^{(1)}\right),s_1\left(a,t^{(2)}\right)\right\},$$

$$s_2\left(a,\tilde{x}\right)=\min\left\{s_2\left(a,x^{(1)}\right),s_2\left(a,x^{(2)}\right)\right\}.$$

Щодо задачі (1)-(3), вважаємо виконаними умови:

а) коефіцієнти рівняння (1) $A_k(t,x)\prod_{i=1}^{n} s_1\left(k_i\beta_i^{(1)},t\right)s_2\left(k_i\beta_i^{(2)},x\right)\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$,

$A_p(t,x)\prod_{i=1}^{n} s_1\left(p_i\mu_{p_i}^{(1)},t\right)s_2\left(p_i\mu_{p_i}^{(2)},x\right)\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$, $1\le|p|\le 2b-1$, $A_0(t,x)\le K<\infty$,

$A_0(t,x)s_1\left(\mu_0^{(1)},t\right)s_2\left(\mu_0^{(2)},x\right)\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ і задача

$$\left[\partial_t-\sum_{|k|=2b}A_k(t,x)\prod_{i=1}^{n} s_1\left(k_i\beta_i^{(1)},t\right)s_2\left(k_i\beta_i^{(2)},x\right)\partial_x^k\right]u(t,x)=\tilde f(t,x),$$

$$u|_{t=0}=\tilde\varphi(x),$$

$$\lim_{x\to z\in\partial D}\left[\sum_{|k|=r_\lambda}B_k^{(\lambda)}(t,x)\prod_{i=1}^{n} s_1\left(k_i\beta_i^{(1)},t\right)s_2\left(k_i\beta_i^{(2)},x\right)\partial_x^k u(t,x)-\tilde f_\lambda(t,x)\right]=0$$

задовольняє в області Q рівномірну умову параболічності та умову Я. Б. Лопатинського [10];

б) коефіцієнти крайових умов $B_k^{(\lambda)}(t,x)\prod_{i=1}^{n} s_1\left(k_i\beta_i^{(1)},t\right)s_2\left(k_i\beta_i^{(2)},x\right)\in$

$\in C^{2b-r_\lambda+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$, $B_p^{(\lambda)}(t,x)\prod_{i=1}^{n} s_1\left(p_i\delta_{\lambda,p_i}^{(1)},t\right)s_2\left(p_i\delta_{\lambda,p_i}^{(2)},x\right)\in C^{2b-r_\lambda+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$,

$B_0^{(\lambda)}(t,x)s_1\left(\delta_\lambda^{(1)},t\right)s_2\left(\delta_\lambda^{(2)},x\right)\in C^{2b-r_i+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$;

в) функції $f_0(t,x)\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;2b;Q)$, $f_\lambda(t,x)\in C^{2b-r_\lambda+\alpha}(\gamma;\beta;r_\lambda;Q)$, $\partial D\in C^{2b+\alpha}$,

$\varphi(x)\in C^{2b+\alpha}\left(\tilde\gamma;\tilde\beta;0;D\right)$, $\tilde\gamma=\left(0,\gamma^{(2)}\right)$, $\tilde\beta=\left(0,\beta^{(2)}\right)$,

$$\gamma^{(\nu)}=\max\left\{\max_i\beta_i^{(\nu)},\max_{i,p_i}\frac{p_i\left(\mu_{p_i}^{(\nu)}-\beta_i^{(\nu)}\right)}{2b-|p|},\max_{i,\lambda,p_i}\frac{p_i\left(\delta_{\lambda,p_i}^{(\nu)}-\beta_i^{(\nu)}\right)}{r_\lambda-|p|},\frac{\mu_0^{(\nu)}}{2b},\max_\lambda\frac{\delta_\lambda^{(\nu)}}{r_\lambda}\right\},$$

$\nu\in\{1,2\}$.

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай для задачі (1)-(3) виконані умови а)-в). Тоді існує єдиний розв'язок задачі (1)-(3) із простору* $C^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ *і справджується нерівність*

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_{2b+\alpha}\le c\left(\left\|\varphi;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;D\right\|_{2b+\alpha}+\|f;\gamma;\beta;2b;Q\|_{\alpha}+\sum_{\lambda=1}^{b}\|f_\lambda;\gamma;\beta;r_\lambda;Q\|_{2b-r_\lambda+\alpha}\right).\quad(4)$$

Якщо $f_0\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$, $f_\lambda\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ *і для задачі (1)-(3) виконані умови а)-в), то єдиний розв'язок задачі (1)-(3) в області* Q *визначається інтегралами Стілтьєса з борелівською мірою*

$$u(t,x)=\int_0^t\int_D Z(t,x;d\tau,d\xi)f_0(\tau,\xi)+\int_D Z(t,x;0,d\xi)\varphi(\xi)+$$

$$+\sum_{\lambda=1}^{b}\int_0^t\int_{\partial D}Z_\lambda\left(t,x;d\tau,d_\xi S\right)f_\lambda(\tau,\xi).\quad(5)$$

Для доведення теореми 1 встановимо спочатку розв'язність допоміжних крайових задач з гладкими коефіцієнтами. З множини одержаних розв'язків виділимо збіжну підпослідовність, граничне значення якої буде розв'язком задачі (1)-(3).

Оцінка розв'язків допоміжних крайових задач з гладкими коефіцієнтами. Нехай $Q_m = Q \cap \left\{(t,x) \in Q \middle| s_1(1,t) \ge m_1^{-1}, s_2(1,x) \ge m_2^{-1}\right\}$, $m_1 \ge 1$, $m_2 \ge 1$, $m = (m_1, m_2)$, послідовність областей, яка при $m_1 \to \infty$, $m_2 \to \infty$ збігається до Q.

Розглянемо в області Q задачу знаходження розв'язків рівняння

$$(L_1 u_m)(t,x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{|k|=2b} a_k(t,x)\partial_x^k - \sum_{|p|\le 2b-1} a_p(t,x)\partial_x^p\right] u_m(t,x) = F_m(t,x), \qquad (6)$$

які задовольняють при $t \to +0$ початкову умову

$$u_m(0,x) = \varphi_m(x), \qquad (7)$$

а на межі області Γ крайові умови

$$\lim_{x\to z\in\partial D}\left[B^{(\lambda)} u_m(t,x) - g_m^{(\lambda)}(t,x)\right] \equiv$$

$$\lim_{x\to z\in\partial D}\left[\sum_{|k|=r_\lambda} b_k^{(\lambda)}(t,x)\partial_x^k u_m + \sum_{|p|\le r_\lambda - 1} b_p^{(\lambda)}(t,x)\partial_x^p u_m - g_m^{(\lambda)}(t,x)\right] = 0. \qquad (8)$$

Тут коефіцієнти a_k, a_p, $b_k^{(\lambda)}$, $b_p^{(\lambda)}$, функції F_m, φ_m, g_m в області Q_m співпадають з A_k, A_p, $B_k^{(\lambda)}$, $B_p^{(\lambda)}$, f_0, φ, f_λ відповідно, а в області $Q \setminus Q_m$ є неперервним продовженням коефіцієнтів A_k, A_p, $B_k^{(\lambda)}$, $B_p^{(\lambda)}$ і функцій f_0, φ, f_λ із області Q_m в область $Q \setminus Q_m$ із збереженням гладкості і норм [11, с. 82].

Позначимо через $H^l(\gamma;\beta;q;Q)$ сукупність функцій простору $C^l(Q)$ з нормою $\|u_m;\gamma;\beta;q;Q\|_l$, еквівалентну при кожному m_1, m_2 гельдеровій нормі, яка визначається так само, як і $\|u;\gamma;\beta;Q\|_l$, тільки замість функцій $s_1\left(a^{(1)},t\right)$, $s_2\left(a^{(2)},x\right)$ беремо відповідно $d_1\left(a^{(1)},t\right)$, $d_2\left(a^{(2)},x\right)$, де $d_1\left(a^{(1)},t\right) = \max\left(s_1\left(a^{(1)},t\right), m_1^{-a^{(1)}}\right)$ при $a^{(1)} \ge 0$ і $d_1\left(a^{(1)},t\right) = \min\left(s_1\left(a^{(1)},t\right), m_1^{-a^{(1)}}\right)$ при $a^{(1)} \le 0$; $d_2\left(a^{(2)},x\right) = \max\left(s_2\left(a^{(2)},x\right), m_2^{-a^{(2)}}\right)$ при $a^{(2)} \ge 0$ і $d_2\left(a^{(2)},x\right) = \max\left(s_2\left(a^{(2)},x\right), m_2^{-a^{(2)}}\right)$ при $a^{(2)} \le 0$.

Для норм $\|u_m;\gamma;\beta;q;Q\|_l$ правильні інтерполяційні нерівності.

Лема. *Нехай* $u_m \in H^l(\gamma;\beta;q;Q)$. *Тоді для довільного* $0 < \varepsilon < 1$ *існує така стала* $c(\varepsilon)$, *що виконуються нерівності*

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{[l]} \le \varepsilon^\alpha \langle u_m;\gamma;\beta;0;Q\rangle_l + c(\varepsilon)\|u_m;Q\|_0,$$

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{|k|} \le \varepsilon \|u_m;\gamma;\beta;q;Q\|_{|k|+1} + \frac{c}{\varepsilon}\|u_m;\gamma;\beta;q;Q\|_{|k|-1}, \qquad (9)$$

$$|k| \le [l]-1, \quad l = [l] + \{l\}, \quad l > [l].$$

Нерівності (9) одержуються за схемою доведення леми з [9].

При виконанні умов а)-в) існує єдиний класичний розв'язок крайової задачі (6)-(8) в просторі $H^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ [2, с. 83]. Встановимо оцінку норми $\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2b+\alpha}$.

Правильна така теорема.

Теорема 2. *Якщо виконані умови а)-в), то для розв'язку задачі (6)-(8) правильна оцінка*

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2b+\alpha} \le c\Big(\|F_m;\gamma;\beta;2b;Q\|_\alpha + \|\varphi_m;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;D\|_{2b+\alpha} + \|u_m;Q\|_0 +$$

$$+\sum_{\lambda=1}^{b}\left\|g_m^{(\lambda)};\gamma;\beta;r_\lambda;Q\right\|_{2b-r_\lambda+\alpha}\Bigg). \tag{14}$$

Стала c не залежить від m.

Доведення. Використовуючи інтерполяційні нерівності (9), маємо

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2b+\alpha}\le\left(1+\varepsilon^{\alpha}\right)\langle u_m;\gamma;\beta;0;Q\rangle_{2b+\alpha}+c(\varepsilon)\|u_m;Q\|_0 .$$

Тому досить оцінити півнорму $\langle u_m;\gamma;\beta;0;Q\rangle_{2b+\alpha}$. Із визначення $\langle u_m;\gamma;\beta;0;Q\rangle_{2b+\alpha}$ випливає існування в $\bar{Q}$ точок $P_1\left(t^{(1)},x^{(1)}\right)$, $P_2\left(t^{(2)},x^{(1)}\right)$, $H_r\left(t^{(2)},x_1^{(1)},\ldots,x_{r-1}^{(1)},x_r^{(2)}x_{r+1}^{(1)},\ldots,x_n^{(1)}\right)$, для яких правильна нерівність

$$\frac{1}{2}\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2b+\alpha}\le E_1+E_2 , \tag{11}$$

де

$$E_1=\sum_{2bj+|k|=2b}\sum_{r=1}^{n}d_1\left(2b\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)d_2\left(2b\gamma^{(2)},\tilde{x}\right)d_1\left(\alpha\left(\gamma^{(1)}-\beta_r^{(1)}\right),t^{(1)}\right)d_2\left(\alpha\left(\gamma^{(2)}-\beta_r^{(2)}\right),\tilde{x}\right)\times$$

$$\times\left|x_r^{(1)}-x_r^{(2)}\right|^{-\alpha}\left|\partial_t^j\partial_x^k u_m(P_2)-\partial_t^j\partial_x^k u_m(H_r)\right|\prod_{i=1}^{n}d_1\left(-k_i\beta_i^{(1)},t^{(1)}\right)d_2\left(-k_i\beta_i^{(2)},\tilde{x}\right),$$

$$E_2=\sum_{2bj+|k|=2b}d_1\left((2b+\alpha)\gamma^{(1)},\tilde{t}\right)d_2\left((2b+\alpha)\gamma^{(2)},x^{(1)}\right)\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|^{-\frac{\alpha}{2b}}\times$$

$$\times\left|\partial_t^j\partial_x^k u_m(P_1)-\partial_t^j\partial_x^k u_m(P_2)\right|\prod_{r=1}^{n}d_1\left(-k_i\beta_i^{(1)},\tilde{t}\right)d_2\left(-k_i\beta_i^{(2)},x^{(1)}\right).$$

Якщо $\left|x_r^{(1)}-x_r^{(2)}\right|\ge\frac{\varepsilon_1}{2n}d_1\left(\gamma^{(1)}-\beta_r^{(1)},\tilde{t}\right)d_2\left(\gamma^{(2)}-\beta_r^{(2)},\tilde{x}\right)\equiv N_1$, ε_1 – довільне число із $(0,1)$, то

$$E_1\le 2\varepsilon_1^{-\alpha}\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2b} . \tag{12}$$

Якщо $\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|\ge\left(\frac{1}{2}\varepsilon_1\right)^{2b}d_1\left(2b\gamma^{(1)},\tilde{t}\right)d_2\left(2b\gamma^{(2)},\tilde{x}\right)\equiv N_2$, то

$$E_2\le 2\varepsilon_1^{-\alpha}\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2b} . \tag{13}$$

Застосовуючи інтерполяційні нерівності (9) до (12), (13), знаходимо

$$E_1+E_2\le\varepsilon^{\alpha}\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2b+\alpha}+c(\varepsilon)\|u_m;Q\|_0 . \tag{14}$$

Нехай $\left|x_r^{(1)}-x_r^{(2)}\right|\le N_1$, або $\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|\le N_2$. Будемо вважати, що $d_1\left(\gamma^{(1)},\tilde{t}\right)=$ $=d_1\left(\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)\equiv\min\left(d_1\left(\gamma^{(1)},t^{(1)}\right),d_1\left(\gamma^{(1)},t^{(2)}\right)\right)$, $d_2\left(\gamma^{(2)},\tilde{x}\right)=d_2\left(\gamma^{(2)},x^{(1)}\right)\equiv$ $\equiv\min\left(d_2\left(\gamma^{(2)},x^{(1)}\right),d_2\left(\gamma^{(2)},x^{(2)}\right)\right)$, $P_1\left(t^{(1)},x^{(1)}\right)\in Q$. Нехай $\left|x_n^{(1)}-\xi_n\right|\le 2N_1$, $\xi\in\partial D$, або $\left|x^{(1)}-\xi\right|\le 2N_1 n$. Розглянемо кулю $K(a,P)$ радіуса a, $a>\max\left(8N_1 n,4N_2\right)$, що містить точки P_1, P_2, H_r з центром в деякій точці $P\in\Gamma$. Використовуючи обмеження на гладкість межі ∂D, можна розпрямити $\partial D\cap K(a,P)$ за допомогою взаємно однозначного перетворення $x=\psi(y)$ ([11], с. 155), в результаті якого область $\Pi_0=Q\cap K(a;P)$ переходить в область Π_1, для точок якої $t\ge 0$, $y_n\ge 0$.

Покладемо $u_m(t,x)=v_m(t,y)$. Вважаємо, що P_1, P_2, H_r, E_1, E_2, $d_1\left(\gamma^{(1)},x^{(1)}\right)$, $d_2\left(\gamma^{(2)},x^{(1)}\right)$ переходять при цьому перетворенні в R_1, R_2, M_r, $E^{(1)}$, $E^{(2)}$,

$h_1\left(\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)$, $h_2\left(\gamma^{(2)},y^{(1)}\right)$. Позначимо коефіцієнти рівняння (6) і крайових умов (8) в області Π_1 через e_k, e_p, $l_k^{(\lambda)}$, $l_p^{(\lambda)}$. Тоді $v_m(t,y)$ буде розв'язком задачі

$$\partial_t v_m - \sum_{|k|=2b} e_k\left(R_1\right)\partial_y^k v_m = \sum_{|k|=2b}\left[e_k(t,y)-e_k\left(R_1\right)\right]\partial_y^k v_m + \sum_{|p|\le 2b-1} e_p(t,y)\partial_x^p v_m +$$

$$+F_m\left(t,\psi(y)\right)\equiv F_m^{(0)}\left(t,y;v_m\right), \tag{15}$$

$$v_m(0,y)=\varphi_m\left(\psi(y)\right)\equiv\varphi_m^{(0)}(y), \tag{16}$$

$$\sum_{|k|=r_\lambda} l_k^{(\lambda)}\left(R_1\right)\partial_y^k v_m\Big|_{y_n=0} = \Bigg\{\sum_{|k|=r_\lambda}\left[l_k^{(\lambda)}\left(R_1\right)-l_k^{(\lambda)}(t,y)\right]\partial_y^k v_m -$$

$$-\sum_{|p|\le r_\lambda-1} l_p^{(\lambda)}(t,y)\partial_y^p v_m + g_m^{(\lambda)}\left(t,\psi(y)\right)\Bigg\}\Bigg|_{y_n=0} \equiv \Psi_m^{(\lambda)}\left(t,y;v_m\right)\Big|_{y_n=0}, \tag{17}$$

У задачі (15)-(17) зробимо заміну $v_m(t,y)=\omega_m(t,z)$, де $z_i = h_1\left(\beta_i^{(1)},t^{(1)}\right)\times$ $\times h_2\left(\beta_i^{(2)},y^{(1)}\right)y_i$. Позначимо через Π_2 область визначення $\omega_m(t,z)$ Тоді $\omega_m(t,x)$ буде розв'язком крайової задачі

$$\partial_t\omega_m - \sum_{|k|=2b} e_k\left(R_1\right)S\left(k;h_1,h_2;t^{(1)},y^{(1)}\right)\partial_z^k\omega_m = F_m^{(0)}(t,\tilde z;\omega_m), \tag{18}$$

$$\omega_m(0,z)=\varphi_m^{(0)}(\tilde z), \tag{19}$$

$$\sum_{|k|=r_\lambda} l_k^{(\lambda)}\left(R_1\right)S\left(k;h_1,h_2;t^{(1)},y^{(1)}\right)\partial_z^k\omega_m\Big|_{z_n=0} = \Psi_m^{(\lambda)}(t,\tilde z;v_m)\Big|_{z_n=0}, \tag{20}$$

де $S\left(k;h_1,h_2;t^{(1)},y^{(1)}\right)=\prod_{i=1}^{n} h_1\left(k_i\beta_i^{(1)},t^{(1)}\right)h_2\left(k_i\beta_i^{(2)},y^{(1)}\right)$,

$\tilde z = \left(h_1^{-1}\left(\beta_1^{(1)},t^{(1)}\right),h_2^{-1}\left(\beta_1^{(2)},y^{(1)}\right)z_1,\ldots,h_1^{-1}\left(\beta_n^{(1)},t^{(1)}\right),h_2^{-1}\left(\beta_n^{(2)},y^{(1)}\right)z_n\right)$.

Позначимо через $z_i^{(1)} = h_1\left(\beta_i^{(1)},t^{(1)}\right)h_2\left(\beta_i^{(2)},y^{(1)}\right)y_i^{(1)}$, $K_\delta = \{(t,z)\in\Pi_2,$ $\left|z_i - z_i^{(1)}\right| \le \dfrac{\delta\varepsilon_1}{n} h_1\left(\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)h_2\left(\gamma^{(2)},y^{(1)}\right), i\in\{1,\ldots,n\}, \left|t^{(1)}-t\right| \le \left(\delta\varepsilon_1\right)^{2b} h_1\left(2b\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)\times$ $\times h_2\left(2b\gamma^{(2)},y^{(1)}\right)\}$. Візьмемо функцію $\eta(t,z)$, яка має другі неперервні частинні похідні за змінною t і неперервні частинні похідні порядку $2b+1$ за змінними z_i, $i\in\{1,\ldots,n\}$ і задовольняє умови

$$\eta(t,z)=\begin{cases}1,\ (t,z)\in K_{1/2}, 0\le\eta(t,y)\le 1;\\ 0,\ (t,z)\notin K_{3/4}, \left|\partial_t^j\partial_z^k\eta\right| \le c_{kj}h_1^{-1}\left((2bj+|k|)\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)h_2^{-1}\left((2bj+|k|)\gamma^{(2)},y^{(1)}\right).\end{cases}$$

Тоді функція $V_m(t,z)=\omega_m(t,z)\eta(t,z)$ буде розв'язком крайової задачі

$$\partial_t V_m - \sum_{|k|=2b} e_k\left(R_1\right)S\left(k;h_1,h_2;t^{(1)},y^{(1)}\right)\partial_z^k V_m = \omega_m\partial_t\eta + \eta F_m^{(0)}(t,\tilde z;\omega_m) +$$

$$+\sum_{|k|=2b} e_k\left(R_1\right)S\left(k;h_1,h_2;t^{(1)},y^{(1)}\right)\left(\sum_{0<|p|\le|k|} C_{|k|}^{|p|}\partial_z^{k-p}\omega_m\partial_z^p\eta\right)\equiv\Phi_m(t,z;\omega_m), \tag{21}$$

$$V_m(0,z)=\eta(0,z)\varphi_m^{(0)}(\tilde z), \tag{22}$$

$$\sum_{|k|=r_\lambda} l_k^{(\lambda)}\left(R_1\right)S\left(k;h_1,h_2;t^{(1)},y^{(1)}\right)\partial_z^k V_m\Big|_{z_n=0} = \Bigg\{\eta\Psi_m^{(\lambda)}(t,\tilde z;\omega_m) + \sum_{|k|=r_\lambda} l_k^{(\lambda)}\left(R_1\right)\times$$

$$\times S\left(k;h_1,h_2;t^{(1)},y^{(1)}\right)\left(\sum_{0<|p|\le|k|} C_{|k|}^{|p|}\partial_z^{k-p}\omega_m\partial_z^p\eta\right)\Bigg\}\Bigg|_{z_n=0} \equiv G_m^{(\lambda)}(t,z;\omega_m)\Big|_{z_n=0}. \qquad (23)$$

Зазначимо, що коефіцієнти рівняння (21) і крайових умов (23) обмежені сталими, незалежними від точки $R_1\left(t^{(1)},y^{(1)}\right)$. Тому, використовуючи теорему 7.1 [2, с. 83], для довільних точок $M_1\in K_{1/2}$, $M_2\in K_{1/2}$ правильна нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1,M_2)\left|\partial_t^j\partial_z^k\omega_m(M_1)-\partial_t^j\partial_z^k\omega_m(M_2)\right|\le$$

$$\le c\left(\|\Phi_m\|_{C^\alpha(K_{3/4})}+\left\|\eta\varphi_m^{(0)}\right\|_{C^{2b+\alpha}(K_{3/4}\cap\{t=0\})}+\sum_{\lambda=1}^{b}\left\|G_m^{(\lambda)}\right\|_{C^{2b-r_\lambda+\alpha}(K_{3/4})}\right), \qquad (24)$$

$d(M_1,M_2)$ – параболічна відстань між M_1, M_2, $2bj+|k|=2b$.

Враховуючи властивості функції $\eta(t,z)$, нерівності (9), одержимо

$$\|\Phi_m\|_{C^\alpha(K_{3/4})}\le cW(h_1,h_2)\left(\|\omega_m;K_{3/4}\|_0+\left\|F_m^{(0)};\gamma;0;2b;K_{3/4}\right\|_\alpha+\|\omega_m;\gamma;0;0;K_{3/4}\|_{2b}\right).$$

$$\left\|\eta\varphi_m^{(0)}\right\|_{C^{2b+\alpha}(K_{3/4}\cap\{t=0\})}\le cW(h_1,h_2)\left\|\varphi_m^{(0)};\tilde\gamma;0;0;K_{3/4}\cap\{t=0\}\right\|_{2b+\alpha}, \qquad (25)$$

$$\left\|G_m^{(\lambda)}\right\|_{C^{2b-r_\lambda+\alpha}(K_{3/4})}\le cW(h_1,h_2)\left(\|\omega_m;K_{3/4}\|_0+\|\omega_m;\gamma;0;0;K_{3/4}\|_{2b}+\right.$$

$$\left.+\left\|\Psi_m^{(\lambda)};\gamma;0;z_\lambda;K_{3/4}\right\|_{2b-r_\lambda+\alpha}\right),$$

де $W(h_1,h_2)=h_1\left((2b+\alpha)\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)h_2\left((2b+\alpha)\gamma^{(2)},y^{(1)}\right)$.

Із визначення простору $H^l(\gamma;\beta;q;Q)$ випливає справедливість нерівності

$$c_1\|\omega_m;\gamma;0;q;K_{3/4}\|_l\le\|v_m;\gamma;\beta;q;T_{3/4}\|_l\le c_2\|\omega_m;\gamma;0;q;K_{3/4}\|_l,$$

$$T_\delta=\left\{(t,y)\in\Pi_1,\left|y_i-y_i^{(1)}\right|\le\delta\frac{\varepsilon_1}{2n}h_1\left(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)},t^{(1)}\right)h_2\left(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)},y^{(1)}\right),i\in\{1,\dots,n\},\right.$$

$$\left.\left|t-t^{(1)}\right|\le\delta\left(\frac{1}{2}\varepsilon_1\right)^{2b}h_1\left(2b\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)h_2\left(2b\gamma^{(2)},y^{(1)}\right)\right\}.$$

Підставляючи (27) в (26), знаходимо, що

$$E_1+E_2\le C_b\left(\|F_m;\gamma;\beta;2b;\Pi_0\|_\alpha+\sum_{\lambda=1}^{b}\left\|g_m^{(\lambda)};\gamma;\beta;r_\lambda;\Pi_0\right\|_{2b-r_\lambda+\alpha}+\|u_m;\Pi_0\|_0+\right.$$

$$\left.+\left\|\varphi_m;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;\Pi_0\cap\{t=0\}\right\|_{2b+\alpha}\right)+\varepsilon_4\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi_0\|_{2b+\alpha}. \qquad (28)$$

Розглянемо випадок, коли $\left|x_n^{(1)}-\xi_n\right|\ge 2n_1$, або $\left|x^{(1)}-\xi\right|\ge 2N_1n$, $\xi\in\partial D$.

Запишемо задачу (6)-(8) у вигляді

$$\partial_t u_m-\sum_{|k|=2b}a_k(P_1)\partial_x^k u_m=f_m(t,x)+\sum_{|p|\le 2b-1}a_p(t,x)\partial_x^p u_m+$$

$$+\sum_{|k|=2b}\left[a_k(t,x)-a_k(P_1)\right]\partial_x^k u_m\equiv F_m^{(1)}(t,x;u_m), \qquad (29)$$

$$u_m(0,x)=\varphi_m(x), \qquad (30)$$

$$\lim_{x\to z\in\partial D}\left[\sum_{|k|=r_\lambda}b_k^{(\lambda)}(P_1)\partial_x^k u_m\right]=\lim_{x\to z\in\partial D}\left\{\sum_{|k|=r_\lambda}\left[l_k^{(\lambda)}(P_1)-l_k^{(\lambda)}(t,x)\right]\partial_x^k u_m-\right.$$

$$\left.-\sum_{|p|\le r_\lambda-1}l_p^{(\lambda)}(t,x)\partial_x^p u_m+g_m^{(\lambda)}(t,x)\right\}\equiv\lim_{x\to z\in\partial D}G_{m,1}^{(\lambda)}(t,x;u_m). \qquad (31)$$

В задачі (29)-(31) зробимо заміну $u_m(t,x)=v_m(t,z)$, де $z_i=d_1\left(\beta_i^{(1)},t^{(1)}\right)\times$

$\times d_2\left(\beta_i^{(2)},x^{(1)}\right)x_i$, $i\in\{1,\dots,n\}$. Тоді функція $V_m^{(1)}(t,z)=v_m(t,z)\eta_1(t,z)$ буде розв'язком задачі

$$\partial_t V_m^{(1)}-\sum_{|k|=2b}a_k(P_1)S\left(k;d_1,d_2;t^{(1)},x^{(1)}\right)\partial_z V_m^{(1)}=v_m\partial_t\eta_1+\eta_1 F_m^{(1)}(t,\tilde z;v_m)+$$

$$+\sum_{|k|=2b}a_k(P_1)S\left(k;d_1,d_2;t^{(1)},x^{(1)}\right)\left(\sum_{0<|p|\le|k|}C_{|k|}^{|p|}\partial_z^{k-p}v_m\partial_z^p\eta_1\right)\equiv\Phi_m^{(1)}(t,z;v_m), \quad (32)$$

$$V_m^{(1)}(0,z)=\eta_1(0,z)\varphi_m(\tilde z), \quad (33)$$

$$\sum_{|k|=r_\lambda}b_k^{(\lambda)}(P_1)S\left(k;d_1,d_2;t^{(1)},x^{(1)}\right)\partial_z^k V_m^{(1)}\Big|_\Gamma=\Bigg[\sum_{|k|=r_\lambda}b_k^{(\lambda)}(P_1)S\left(k;d_1,d_2;t^{(1)},x^{(1)}\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{0<|p|\le|k|}C_{|k|}^{|p|}\partial_z^{k-p}v_m\partial_z^p\eta_1\right)+\eta_1 G_{m,1}^{(\lambda)}(t,\tilde z;v_m)\Bigg]_\Gamma\equiv\tilde G_m^{(1)}(t,z;v_m)\Big|_\Gamma, \quad (34)$$

де $\tilde z=\left(d_1^{-1}\left(\beta_1^{(1)},t^{(1)}\right)d_2^{-1}\left(\beta_1^{(2)},x^{(1)}\right)z_1,\dots,d_1^{-1}\left(\beta_n^{(1)},t^{(1)}\right)d_2^{-1}\left(\beta_n^{(2)},x^{(1)}\right)z_n\right)$.

$$\eta_1(t,z)=\begin{cases}1,\ (t,z)\in T_{1/2}^{(1)},0\le\eta_1(t,z)\le1;\\ 0,\ (t,z)\notin T_{3/4}^{(1)},\left|\partial_t^j\partial_z^k\eta_1\right|\le c_{kj}d_1^{-1}\left((2bj+|k|)\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)d_2^{-1}\left((2bj+|k|)\gamma^{(2)},x^{(1)}\right).\end{cases}$$

$$T_\delta^{(1)}=\left\{(t,z)\Big|\left|t^{(1)}-t\right|\le 2\delta N_2,\left|z_i-z_i^{(1)}\right|\le 2\delta d_1\left(\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)d_2\left(\gamma^{(2)},x^{(1)}\right)\right\},$$

$$z_i^{(1)}=d_1\left(\beta_i^{(1)},t^{(1)}\right)d_2\left(\beta_i^{(2)},x^{(1)}\right)x_i^{(1)}.$$

Коефіцієнти рівняння (32) і крайових умов (34) обмежені сталими, незалежними від точки $P_1\left(t^{(1)},x^{(1)}\right)$. Тому, використовуючи теорему 4.1 із ([2], с. 41), для довільних точок $M_1\in T_{1/2}^{(1)}$, $M_2\in T_{1/2}^{(1)}$ правильна нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1,M_2)\left|\partial_t^j\partial_x^k v_m(M_1)-\partial_t^j\partial_x^k v_m(M_2)\right|\le c_z\Bigg(\left\|\Phi_m^{(1)}\right\|_{C^\alpha\left(T_{3/4}^{(1)}\right)}+$$

$$\left\|\eta_1\varphi_m\right\|_{C^{2b+\alpha}\left(T_{3/4}^{(1)}\cap\{t=0\}\right)}+\sum_{\lambda=1}^{b}\left\|\tilde G_m^{(1)}\right\|_{C^{2b-r_\lambda+\alpha}\left(T_{3/4}^{(1)}\right)}\Bigg).$$

Враховуючи властивості функції $y_1(t,z)$, означення простору $H^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;q;Q)$ і повторюючи міркування при встановленні оцінки (28), знаходимо

$$E_1+E_2\le c_b\Bigg(\left\|F_m;\gamma;\beta;2b;Q\right\|_\alpha+\sum_{\lambda=1}^{b}\left\|g_m^{(\lambda)};\gamma;\beta;r_\lambda;Q\right\|_{2b-r_\lambda+\alpha}+\left\|u_m;Q\right\|_0+$$

$$+\left\|\varphi_m;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;D\right\|_{2b+\alpha}\Bigg)+\varepsilon_5\left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\right\|_{2b+\alpha}. \quad (35)$$

Враховуючи нерівності (11), (14), (28), (35) і вибираючи ε_1, ε, ε_4, ε_5 достатньо малими, одержимо оцінку (10).

Знайдемо оцінку норми $\left\|u_m;Q\right\|_0$.

В задачі (6)-(8) зробимо заміну $u_m(t,x)=\varphi_m(x)+v_m^{(1)}(t,x)$. Одержимо крайову задачу для розв'язку $V_m^{(1)}(t,x)$

$$\left(L_1V_m^{(1)}\right)(t,x)=F_m(t,x)-\left(L_1\varphi_m\right)(x),$$

$$V_m^{(1)}(0,x)=0,$$

$$\lim_{x\to z\in\partial D}\left(B^{(\lambda)}v_m^{(1)}(t,x)+B^{(\lambda)}\varphi_m(x)-g_m^{(\lambda)}(t,x)\right)=0.$$

Правильна така теорема.

Теорема 3. *Якщо* $u_m(t,x)$ *– єдиний класичний розв'язок задачі (6)-(8) і виконані умови а)-в), то для* $u_m(t,x)$ *справджується нерівність*

$$\|u_m;Q\|_0 \le c\left(\|F_m;\gamma;\beta;2b;Q\|_\alpha + \|\varphi_m;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;D\|_{2b+\alpha} + \sum_{\lambda=1}^{b}\|g_m^{(\lambda)};\gamma;\beta;r_\lambda;Q\|_{2b-r_\lambda+\alpha}\right), \quad (36)$$

стала c не залежить від m.

За умов, накладених на гладкість коефіцієнтів задачі (6)-(8) і функцій F_m, φ_m, $g_m^{(\lambda)}$, існує єдиний розв'язок задачі (6)-(8), який належить простору $H^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ і має при кожному фіксованому m_1, m_2 скінченну норму ([2], с. 83).

Скориставшись методикою доведення зауваження 2 ([12], с. 79), встановлюємо нерівність (36).

Доведення теореми 1. Оскільки

$$\|F_m;\gamma;\beta;2b;Q\|_\alpha \le c\|f_0;\gamma;\beta;2b;Q\|_\alpha, \qquad \|\varphi_m;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;D\|_{2b+\alpha} \le c\|\varphi;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;D\|_{2b+\alpha},$$

$$\|g_m^{(\lambda)};\gamma;\beta;r_\lambda;Q\|_{2b-r_\lambda+\alpha} \le c\|f_\lambda;\gamma;\beta;r_\lambda;Q\|_{2b-r_\lambda+\alpha}$$

то, використовуючи нерівності (10), (36), одержимо

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2b+\alpha} \le$$

$$\le c\left(\|f_0;\gamma;\beta;2b;Q\|_\alpha + \|\varphi;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;D\|_{2b+\alpha} + \sum_{\lambda=1}^{b}\|f_\lambda;\gamma;\beta;r_\lambda;Q\|_{2b-r_\lambda+\alpha}\right). \quad (37)$$

Права частина нерівності (37) не залежить від m_1, m_2 і послідовності

$$\left\{W_m^{(j,k)}\right\} = \left\{d_1\left((2bj+|k|)\gamma^{(1)},t\right)d_2\left((2bj+|k|)\gamma^{(2)},x\right)\left|\partial_t^j\partial_x^k u_m(t,x)\right|\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{i=1}^{n} d_1\left(-k_i\beta_i^{(1)},t\right)d_2\left(-k_i\beta_i^{(2)},x\right)\right\}, \quad 2bj+|k|\le 2b$$

рівномірно обмежені і рівностепенно неперервні в $\overline{Q}$. За теоремою Арчела існують послідовності $\left\{W_{m(l)}^{(j,k)}\right\}$, рівномірно збіжні при $m(l)\to\infty$ до $W^{(j,k)}$. Переходячи до границі при $m(l)\to\infty$ в задачі (6)-(8) одержимо, що $u(t,x)=W^{(0,0)}$ – єдиний розв'язок задачі (6)-(8), $u\in C^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ і правильна оцінка (4).

Оскільки $C^\alpha(\gamma;\beta;0;Q)\subset C^\alpha(\gamma;\beta;2b;Q)$ і $C^{2b-r_\lambda+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)\subset$ $\subset C^{2b-r_\lambda+\alpha}(\gamma;\beta;r_\lambda;Q)$, то для $f_0\in C^\alpha(\gamma;\beta;0;Q)$ і $f_\lambda\in C^{2b-r_\lambda+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ виконуються нерівності

$$\|f_0;\gamma;\beta;2b;Q\|_\alpha \le c\|f_0;\gamma;\beta;0;Q\|_\alpha, \qquad \|f_\lambda;\gamma;\beta;r_\lambda;Q\|_{2b-r_\lambda+\alpha} \le c\|f_\lambda;\gamma;\beta;0;Q\|_{2b-r_\lambda+\alpha}.$$

Тому, враховуючи нерівність (4) для розв'язку задачі (6)-(8), правильна оцінка

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_{2b+\alpha} \le c\left(\|f_0;\gamma;\beta;0;Q\|_\alpha + \|\varphi;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;D\|_{2b+\alpha} + \sum_{\lambda=1}^{b}\|f_\lambda;\gamma;\beta;0;Q\|_{2b-r_\lambda+\alpha}\right). \quad (38)$$

Будемо розглядати $u(t,x)$ при фіксованих (t,x) як лінійний неперервний функціонал $F(f_0,\varphi,f_1,\ldots,f_b)$ на нормованому просторі $C_\alpha \equiv C^\alpha(\gamma;\beta;0;Q)\times$ $\times C^{2b+\alpha}(\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;D)\times C^{2b-r_1+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)\times\ldots\times C^{2b-r_b+\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$ з нормою, що дорівнює правій частині нерівності (38). Беручи до уваги включення $C_\alpha\subset C(Q)$ і згідно з теоремою Рісса, можна вважати, що $u(t,x)$ породжує борелівську міру $Z(t,x;H)$, яка визначається на σ-алгебрі підмножин G області $\overline{Q}$, включаючи Q і всі її відкриті підмножини такі, що значення функціоналу визначається формулою (5).

1. *Конаков П.К., Веревочкин Г.Е.* Тепло и массообмен при получении монокристаллов. – М.: Металлургия, 1971. – 387 с.
2. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Інститут математики НАН України, 1999. – 176 с.
3. *Матійчук М. І.* Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці: Прут, 2003. – 248 с.
4. *Ivasishen S.D., Eidelman S.D.* 2*b*-parabolic equations with degeneration in some of the variables. Dokl. Akad. Nauk, 1998. Vol. 360, №3. P. 303–305.
5. *Івасишен С.Д., Мединський І.П., Пасічник Г.С.* Параболічні рівняння з виродженнями на початковій гіперплощині // Буковинський мат. журн. – 2016. – **4**, №3-4. – С. 57–68.
6. *Inna M. Isaryuk and Ivan D. Pukal'skii.* The boundary-value problems for parabolic equations with a nonlocal condition and degenerations // Journal of Mathematical Sciences. – Vol. 207, №1. May, 2015. – P. 26–38.
7. *I.D. Pykal'skyi and I.M. Isaryuk.* Nonlocal parabolic boundary-value problems with singularities // Journal of Mathematical Sciences. – Vol. 208, №3. July, 2015. – P. 327–343.
8. *Пукальський І.Д.* Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями. – Чернівці: Рута, 2008. – 253 с.
9. *Пукальський І.Д.* Задача Коші для нерівномірно параболічних рівнянь зі степеневими особливостями // Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2021. – Т. 64, № 2. – С. 31–41.
10. С.Д. Ивасишен. Линейные параболические граничные задачи. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1987. – 72 с.
11. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – Москва: Мир, 1968. – 427 с.
12. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. – М.: ИЛ, 1962. – 205 с.

GENERAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR NON-UNIFORMLY PARABOLIC EQUATIONS WITH POWER SINGULARITIES

General boundary value problem for nonuniformly 2b-parabolic equations with degeneration is studied. In the coefficients parabolic equations and boundary conditions power singularities of an arbitrary order in any variables on a certain set of points are allowed. Using a priori estimates and the Archel and Riesz theorems the existence and integral representation of a unique solution of the formulated boundary value problem was established. Found estimates for the solution of the general parabolic boundary value problem and its derivatives in Hölder spaces with power-law weight. The order of the power-law weight is determined by the magnitude of the orders of the power-law singularities and the degeneracy of the coefficients of the 2b-parabolic equations and boundary conditions.

Key words: *general parabolic boundary value problem, power singularities, interpolation inequalities, Hölder spaces, a priori estimates, Stieltjes integral, Archel's theorem, 2b-parabolic equations.*

Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, Чернівці

Одержано
15.10.22