УДК: 519.21

Г.М. Перун, В.К. Ясинський

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ СТОХАСТИЧНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ВІДХИЛЕННЯМ АРГУМЕНТА

Г.М. Перун – Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

perungm@ukr.net

В.К.Ясинський – Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

vkyasynkyy@ukr.net

Анотація. Розглядаємо задачу Коші для стохастичного нелінійного рівняння параболічного типу з запізненням. За допомогою функції Гріна отримана формула для знаходження розв'язку задачі методом кроків. Існування розв'язку встановлюється з імовірністю 1 і оцінюється за спеціально введеною нормою.

Ключові слова: задача Коші, стохастичне параболічне рівняння, метод кроків, перетворення Фур'є, функція Гріна.

Постановка задачі. У вступі до монографії [1] наголошується на тому, що диференціальні рівняння з відхиленням аргумента можна застосувати в теоріях автоматичного керування та автоколивних систем, під час вивчення процесів, пов'язаних з горінням у ракетних двигунах, біофізичних проблем, проблем довготермінового прогнозування в економіці та інших галузях науки і техніки.

Наявність відхилення-запізнення в системі, яка вивчається, є зазвичай причиною явищ, які суттєво впливають на процес. Зокрема, в системах з автоматичним регулюванням запізнення є проміжок часу, дуже потрібний системі для реагування на вхідний імпульс.

Наявність запізнення може вплинути на виникнення самовільних коливань, збільшення її нерегульованості.

У книзі [1] вивчаються як звичайні детерміновані так і стохастичні диференціальні рівняння з відхиленням аргумента. Відомо також, що класичними результатами у галузі диференціальних рівнянь є праці математиків А.Д. Мишкіса, М.В. Азбелева, Ю.О. Митропольського, А.М. Самойленка, М.М. Перестюка, В.П. Рубаника, В.І. Фодчука, Д.І. Мартинюка, Дж. Хейла, Е.М. Райта, Р. Беллмана та багатьох інших.

Так, у статті [2] встановлюється методом кроків коректна розв'язність задачі Коші для квазілінійного B-параболічного рівняння із запізненням [1].

У монографії [3, с. 102-110] доводиться теорема про розв'язність задачі Коші для лінійного параболічного стохастичного рівняння з неперервними збуреннями, розв'язання якого в фіксовані моменти часу зазнає імпульсного впливу [4].

Формулювання основного результату. Нехай на ймовірносному базисі $(\Omega, F, \{F_t, t \geq 0\}, P)$ з неспадним потоком σ-алгебр $\{F_t, t \geq 0\}$, $F_{t_1} \subset F_{t_2}$ для $t_1 \leq t_2$ випадкова функція $U(t, x, \omega)$, $(t, x) \in \Pi$, $\Pi = R^1 \times R^n$, $\omega \in \Omega$ вимірна стосовно σ-алгебри F_t і з імовірністю 1 є розв'язком рівняння з відхиленням аргументу

$$d_t U(t, x, \omega) = \left[\sum_{|k| \leq 2b} A_k(t) D_x^k U(t, x, \omega) + f_1(x, U(t-h, x)) \right] dt +$$

$$+ \left[\sum_{|k| \leq b} B_k(t) D_x^k U(t, x, \omega) + f_2(x, U(t-h, x)) \right] dw(t, \omega), \qquad (1)$$

де h – запізнення, $h > 0$, $w(t, \omega)$ – стандартний скалярний Вінеровий процес.

Задача Коші полягає у знаходженні з імовірністю 1 неперервного розв'язку рівняння (1) за детермінованою початковою умовою

$$U(t,x,\omega)=\varphi(t,x),\, 0\le t\le h,\, x\in R^n. \qquad (2)$$

Тут f_1, f_2, φ – відомі функції своїх аргументів. Задачу розв'язуватимемо методом кроків [1, с. 17].

Коректність задачі встановлює така теорема.

Теорема 1. Нехай коефіцієнти рівняння (1) визначені та неперервні на інтервалі $[0,T]$, для яких задовольняється посилена умова параболічності

$$\operatorname{Re}\sum_{|k|=2b} A_k(t)(i\sigma)^k + \operatorname{Im}\left(\sum_{|k|=b} B_k(t)(i\sigma)^k\right)^2 \le -\delta_0\,|\,\sigma\,|^{2b}, \qquad (3)$$

$$\delta_0>0,\, \sigma=(\sigma_1,...,\sigma_n),\, \sigma\in R^n.$$

Функції $\varphi(t,x)$, $f_1(x,\varphi(t,x))$, $\sum\limits_{|k|=b} B_k(t)D_x^k f_2(x,\varphi(t,x))$ є неперервними за аргументом t, диференційовані за просторовими аргументами і мають перетворення Фур'є $\tilde{f}_1$ та $\tilde{f}_2$. Тоді з імовірністю 1 існує функція Гріна $G(t,\tau,x,\omega)$ задачі (1), (2), за допомогою якої розв'язок на інтервалі $t\in(lh,(l+1)h)$, $l\in N$, визначається формулою

$$U(t,x,\omega)=\int\limits_{R^n} G(t,lh,x-\xi,\omega)\varphi(lh,\xi)d\xi +$$

$$+\int\limits_{lh}^{t}\int\limits_{R^n} G(t,s,x-\xi,\omega)\left[f_1(\xi,\varphi(s-h,\xi)) - \sum_{|k|\le b} B_k(s)D_\xi^k f_2(\xi,\varphi(s-h,\xi))\right] d\xi ds + \qquad (4)$$

$$+\int\limits_{lh}^{t}\int\limits_{R^n} G(t,s,x-\xi,\omega)\, f_2(\xi,\varphi(s-h,\xi))d\xi dw(s,\omega),$$

$$\varphi(lh,x)=\lim_{t\to lh+0} U(t,x)\,.$$

Для нього справджується нерівність

$$|\,E\{D_x^k U(t,x,\omega)\}| \le C\left(t^{-\frac{|k|}{2b}}\,|\,\varphi\,|_{C(\Pi)} + |\,f_1\,|_{C^1(\Pi)} + \sum_{|k|\le b} |B_k D^k f_2\,|_{C^{(1)}(\Pi)} \right), \qquad (5)$$

де $|k| \le 2b$, $|f|_{C^m(\Pi)} = \sup_{\Pi} |D_x^m f(t,x)|$. Тут E – операція математичного сподівання.

Будемо знаходити розв'язок задачі (1), (2) методом інтегрального перетворення Фур'є від деякої функції $v(t,\sigma,\omega)$

$$U(t,x,\omega) = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} e^{i\sigma x} v(t,\sigma,\omega) d\sigma = F^{-1}_{x \to \sigma} v(t,\sigma,\omega), \ \ \sigma \in R^n. \tag{6}$$

Нехай $h \le t \le 2h$, тоді на цьому інтервалі маємо $U(t-h,x) = \varphi(t-h,x)$. Тому в образах Фур'є отримаємо задачу Коші без запізнення [1, с. 18].

$$d_t v(t,\sigma,\omega) = \left[\sum_{|k| \le 2b} A_k(t)(i\sigma)^k v(t,\sigma,\omega) + \tilde{f}_1(\sigma, \tilde{\varphi}(t-h,\sigma)) \right] dt +$$

$$+ \left[\sum_{|k| \le b} B_k(t)(i\sigma)^k v(t,\sigma,\omega) + \tilde{f}_2(\sigma, \tilde{\varphi}(t-h,\sigma)) \right] dw(t,\omega), \tag{7}$$

$$v(h,\sigma,\omega) = \tilde{\varphi}(h,\sigma). \tag{8}$$

Рівняння (7) є звичайним стохастичним неоднорідним рівнянням. Його незбурена Вінеровим процесом частина – група старших членів рівняння є аналогом рівняння (4) [5, с.45] за змінними t та σ. Воно одержане внаслідок перетворення Фур’є параболічного рівняння вищого порядку із залежними від t коефіцієнтами [5, с. 44]. Скористаємось відомим результатом, який дасть змогу проводити подальші оцінки.

Лема 1. Для нормальної фундаментальної матриці $Q(t,\tau,\sigma)$ [5, с. 45] системи

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{|k| \le 2b} A_k(t) \sigma^k v,$$

тобто матриці, кожен стовпець якої є розв’язком системи і $Q(\tau,\tau,\sigma) = I$, правильна оцінка має вигляд

$$|Q(t,\tau,\sigma)| \le C \exp\{-\delta_1 |\sigma|^{2b} (t-\tau)\}, \ \delta_1 > 0,$$

I – одинична матриця.

У формулах (7), (8) функції $\tilde{f}_1$, $\tilde{f}_2$, $\tilde{\varphi}$ – результат дії перетворення Фур'є на функції f_1, f_2, φ відповідно.

Для розв'язання задачі Коші (7), (8) використаємо формулу з роботи [6, с. 38]. У результаті маємо

$$v(t,\sigma,\omega)=\exp\left\{\int_h^t\left[A_k(s)(i\sigma)^k-\frac{1}{2}\left(\sum_{k\le b}B_k(s)(i\sigma)^k\right)^2\right]ds+\int_h^t\sum_{|k|\le 2b}B_k(s)(i\sigma)^k dw(s,\omega)\right\}\times$$

$$\times\Big[\tilde{\varphi}(h,\sigma)+\int_h^t\exp\left\{-\int_h^s\left[\sum_{k\le 2b}A_k(z)-\frac{1}{2}\left(\sum B_k(z)(i\sigma)^k\right)^2\right]dz-\int_h^s\sum_{|k|\le b}B_k(z)(i\sigma)^k dw(z,\omega)\right\}\times$$

$$\times\left[\tilde{f}_1(\sigma,\varphi(s-h,\sigma))+\tilde{f}_2(\sigma,\varphi(s-h,\sigma))\sum_{|k|\le b}B_k(s)\right]ds+$$

$$+\int_h^t\exp\left\{-\int_h^s\left[\sum_{|k|\le 2b}A_k(z)(i\sigma)^k-\frac{1}{2}\left(\sum_{|k|\le b}B_k(z)(i\sigma)^k\right)^2\right]dz-\int_h^s\sum B_k(z)(i\sigma)^k dw(z,\omega)\right\}\times$$

$$\times\tilde{f}_2(\sigma,\varphi(s-h)dw(s,\omega))\Big],\ \ \sigma\in R^n,\ h\le t\le 2h. \qquad (9)$$

Формула (9) визначає розв’язок задачі (7), (8) в околі точки $(h,\tilde{\varphi}(h,\sigma))$. Для спрощення запису введемо позначення у формулі (9)

$$Q(t,h,\sigma,\omega)\equiv\exp\left\{\int_h^t\left[A_k(s)(i\sigma)^k-\frac{1}{2}\left(\sum_{k\le b}B_k(s)(i\sigma)^k\right)^2\right]ds+\int_h^t\sum_{|k|\le 2b}B_k(s)(i\sigma)^k dw(s,\omega)\right\}. \qquad (10)$$

Якщо для розкриття дужок у формулі (9) другого доданку скористаємось очевидною властивістю

$$Q(t,h,\sigma,\omega)\cdot Q^{-1}(s,h,\sigma,\omega)=Q(t,h,\sigma,\omega)\cdot Q(h,s,\sigma,\omega)=Q(t,s,\sigma,\omega),$$

то розв’язок задачі (7), (8) набуватиме вигляду

$$v(t,\sigma,\omega)=Q(t,h,\sigma,\omega)\tilde{\varphi}(h,\sigma)+\int_h^t Q(t,s,\sigma,\omega)\left[\tilde{f}_1(\sigma,\tilde{\varphi}(s,\sigma))-\sum_{|k|\le b}B_k(s)(i\sigma)^k\,\tilde{f}_2(\sigma,\tilde{\varphi}(s-h,\sigma))\right]ds+$$

$$+\int_h^t Q(t,h,\sigma,\omega)\,\tilde{f}_2(\sigma,\tilde{\varphi}(s-h,\sigma))dw(s,\omega). \qquad (11)$$

Позначимо функцію Гріна $G(t,\tau,x,\omega)=F_\sigma^{-1}Q(t,\tau,\sigma,\omega)$ і запишемо її

$$G(t,\tau,x,\omega)=(2\pi)^{-n}\int_{R_n}e^{i\sigma x}Q(t,\tau,\sigma)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_\tau^t\left(\sum_{|k|\le b}B_k(s)(i\sigma)^k\right)^2 ds+\int_\tau^t\sum_{|k|\le b}B_k(s)(i\sigma)^k dw(s)\right\}d\sigma.$$

Якщо в формулу (6) підставити $v(t,\sigma,\omega)$ із (11) і скористатись теоремою про перетворення Фур'є згортки двох функцій, то отримаємо формулу для розв'язку

$$U(t,x,\omega)=\int_{R_n}G(t,h,x-\xi,\omega)\varphi(h,\xi)d\xi+$$

$$+\int_h^t\int_{R_n}G(t,s,x-\xi,\omega)\left[f_1(\xi,\varphi(s-h,\xi))-\sum_{|k|\le b}B_k(s)D_\xi^k f_1(\xi,\varphi(s-h,\xi))\right]d\xi ds+$$

$$+\int_h^t\int_{R_n}G(t,s,x-\xi,\omega)\,f_2(\xi,\varphi(s-h,\xi))d\xi dw(s,\omega). \qquad (12)$$

Узагальнюючи отриманий результат для $lh\le t\le(l+1)h$, $l>1$, дістанемо формулу (4).

Обґрунтування процесу знаходження розв'язку. Проведемо оцінку функції Гріна та її похідних. Розпишемо коефіцієнти рівняння

$$\sum_{|k|\le b}B_k(t)(i\sigma)^k=\mathrm{Re}\left(\sum_{|k|\le b}B_k(s)(i\sigma)^k\right)+\mathrm{Im}\left(\sum_{|k|\le b}B_k(s)(i\sigma)^k\right)\equiv B^*(s,\sigma)+B^{**}(s,\sigma).$$

У цих позначеннях формула (10) набуває вигляду

$$Q(t,\tau,\sigma,\omega)=\exp\left\{\int_\tau^t\left[\sum_{|k|\le 2b}A_k(s)(i\sigma)^k-\frac{1}{2}\left(B^*(s,\sigma)\right)^2+\frac{1}{2}\left(B^{**}(s,\sigma)\right)^2\right]ds-\right.$$

$$-i\int_{\tau}^{t} B^{*}(s,\sigma)\cdot B^{**}(s,\sigma)ds + i\int_{\tau}^{t} B^{**}(s,\sigma)dw(s,\omega) + \int_{\tau}^{t} B^{*}(s,\sigma)dw\Bigg\}.$$

З врахуванням того, що $|\exp\{i\sigma\}|=1$, $i^2=-1$, знайдемо

$$|Q(t,\tau,\sigma,\omega)| = \exp\left\{\int_{\tau}^{t} \operatorname{Re}\sum_{|k|\le 2b} A_k(s)(i\sigma)^k - \frac{1}{2}\int_{\tau}^{t}\left[(B^{*}(s,\sigma))^2 - (B^{**}(s,\sigma))^2\right]ds + \right.$$

$$\left. + \int_{\tau}^{t} B^{*}(s,\sigma)dw(s,\omega)\right\}. \qquad (13)$$

До рівності (13) застосуємо операцію математичного сподівання і, скориставшись лемою 1 з роботи [6, с. 81], отримаємо співвідношення

$$E\{|Q(t,\tau,\sigma,\omega)|\} = \exp\left\{\int_{\tau}^{t}\left[\operatorname{Re}\left(\sum_{|k|\le 2b} A_k(s)(i\sigma)^k\right) + \frac{1}{2}(B^{**}(s,\sigma))^2\right]ds\right\}.$$

За посиленої умови параболічності (3) теореми виконується нерівність

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{|k|\le 2b} A_k(s)(i\sigma)^k\right) + \frac{1}{2}(B^{**}(\sigma))^2 \le -\delta_1|\sigma|^{2b} + C_1,$$

де $0<\delta_1<\delta_0$, $C_1>C_0$.

Згідно з цією умовою матимемо оцінку

$$E\{|Q(t,\tau,\sigma,\omega)|\} \le C\cdot\exp\left\{-\delta_1|\sigma|^{2b}(t-\tau)\right\}, C>0. \qquad (14)$$

Лема 2. Сформулюємо результат щодо перетворення Фур’є цілих функцій – лема 1.1 з праці [5, с. 36]. Нехай $f(s)$ – ціла функція n комплексних змінних $s_1, s_2, ..., s_n$, $s_k = \sigma_k + i\gamma_k$, яка задовольняє нерівність

$$|f(s)| \le C\exp\left\{-\sum_{k=1}^{n} a_k|\sigma_k|^{p_k} + \sum_{k=1}^{n} b_k|\gamma_k|^{q_k}\right\},$$

$p_k > 1,\ a_k > 0,$ тоді її перетворення Фур'є $\Psi(z)$ є цілою функцією змінних $z_1, z_2, ..., z_n,$ $z_k = x_k + iy_k$ і для неї справедлива оцінка

$$|\Psi(z)| = |F(f(\tau))| \le B \exp\left\{-\sum_{k=1}^{n} \alpha_k |x_k|^{q'_k} + \sum_{k=1}^{n} \beta_k |y_k|^{p'_k}\right\},$$

$$\alpha_k > 0,\ \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p'_k} = 1;\ \frac{1}{q_k} + \frac{1}{q'_k} = 1.$$

Функція $Q(t,\tau,\sigma,\omega)$ є цілою функцією аргумента $\sigma \in R^n$ і під час виходу в комплексний простір $\sigma \to \sigma + i\gamma$ задовольняє за аргументом γ нерівність (14) зі зростаючою експонентою: $\exp\left\{c_2 |\gamma|^{2b} (t-\tau)\right\}$.

Отже, функція Гріна $G(t,\tau,x,\omega)$ є цілою функцією і для неї правильна оцінка має вигляд

$$\left|D_x^k EG(t,\tau,x,\omega)\right| \le C_k (t-\tau)^{\frac{-n+|k|}{2b}} \exp\left\{-c\left(|x|(t-\tau)^{-\frac{1}{2b}}\right)^q\right\}, \tag{15}$$

де $C_k, c > 0$, $q = \dfrac{2b}{2b-1}$. А для похідних до порядку $2b$ розв'язку $U(t,x,\omega)$ виконується нерівність (21) з праці [7, с. 1425].

Зауваження 1. Методом кроків можна побудувати розв'язок задачі Коші і у випадку векторно значного Вінерового процесу.

Отже, за допомогою функції Гріна виконано побудову розв'язку задачі Коші для стохастичного параболічного рівняння зі сталим запізненням та оцінено його похідні до порядку $2b$ включно.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Эльсгольц Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Москва: Наука, 1971. 296 с.

2. Дрінь Я.М., Дрінь М.М. Дослідження задачі Коші для квазілінійних В-параболічних рівнянь з відхиленням аргумента. Науковий вісник Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Сер. математика. Т. 2, № 1. 2012. С. 32–34.

3. Матійчук М.І. Параболічні та еліптичні задачі в просторах Діні. Чернівці: Чернів. нац. ун-т, 2010. 248 с.

4. Самойленко А.М., Перестюк М.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Київ: Вища шк., 1987. 258 с.

5. Эйдельман С.Д. Параболические системы. Москва: Наука, 1964. 445 с.

6. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. Київ: Наук. думка, 1968. 354 с.

7. Перун Г.М. Задача з імпульсною дією для лінійного стохастичного параболічного рівняння вищого порядку. Український математичний журнал. 2008. Т. 60, № 10. С. 1422-1426.

Halyna Perun, Volodymyr Yasynskyy

THE CAUCHY PROBLEM FOR A STOCHASTIC PARABOLIC EQUATION WITH A DEVIATION OF THE ARGUMENT

Abstracts. The Cauchy problem for a stochastic nonlinear equation of parabolic type with delay is considered. Using Green's function, a formula is derived for finding the solution of the problem by the method of steps. The existence of a solution is established with probability 1 and the solution is estimated according to a specially introduced norm.

Key words: Cauchy problem, stochastic parabolic equation, method of steps, Fourier transform, Green's function.

Надійшла до редакції 21.06.2022