Мельничук Л.М.

Фундаментальний розв'язок задачі Коші для параболічного рівняння другого порядку зі зростаючими коефіцієнтами та з операторами Бесселя різних порядків

Знайдено в явному вигляді фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного класу параболічних рівнянь другого порядку з коефіцієнтами при молодших похідних, які зростають на нескінченості за однією групою змінних, та з операторами Бесселя різних порядків за іншою групою змінних. Вивчено деякі властивості фундаментального розв'язку.

Ключові слова і фрази: параболічні рівняння, задача Коші, фундаментальний розв'язок, оператор Бесселя.

Україна, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
e-mail: *l.melnuchuk@chnu.edu.ua*

Теорія задачі Коші для рівномірно параболічних рівнянь другого порядку з обмеженими коефіцієнтами достатньо повно досліджена [1, 2], на відміну від таких рівнянь з необмеженими коефіцієнтами. Одним з напрямків досліджень професора С.Д. Івасишена та учнів його наукової школи є знаходження фундаментальних розв'язків та дослідження коректності задачі Коші для класів вироджених рівнянь, які є узагальненнями класичного рівняння дифузії з інерцією А.М. Колмогорова і містять за основними змінними диференціальні вирази, параболічні за І.Г. Петровським та за С.Д. Ейдельманом (С.Д. Івасишен, Л.М. Андросова, І.П. Мединський, О.Г. Возняк, В.С. Дронь, В.В. Лаюк, Г.С. Пасічник та інші). Також досліджувалися параболічні за І.Г. Петровським рівняння і системи з оператором Бесселя (С.Д. Івасишен, В.П. Лавренчук, Т.М. Балабушенко, Л.М. Мельничук). Деякі результати цих досліджень наведені в [3–6, 8].

Зокрема, у статті [5] знайдено явний вигляд та встановлено властивості фундаментального розв'язку задачі Коші для параболічного рівняння другого порядку відносно функції $u = u(t, x, y)$

$$\partial_t u = \sum_{j,l=1}^{n} \partial_{x_j}\partial_{x_l}(a_{jl}u) + \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}(x_j u) + B_y u, t > 0, x \in \mathbb{R}^n, y > 0,$$

УДК 517.5, 519.21, 511.72
2010 *Mathematics Subject Classification:* 26A46, 26A21, 26A30.

© Мельничук Л.М., 2022

де всі a_{jl} сталі, а матриця $(a_{jl})_{j,l=1}^{n}$ симетрична і додатно визначена; $B_y \equiv \partial_y^2 + \dfrac{2\nu+1}{y}\partial y$ – оператор Бесселя порядку $\nu \geq 0$. У статті [6] рівняння містить суму операторів Бесселя по змінних y_j однакового порядку ν.

У даній статті деякі вказані результати поширюються на клас рівнянь із зростаючими коефіцієнтами у молодших доданках, які містять оператори Бесселя по кальках змінних y_j різних порядків ν_j.

Нехай n, k, m – задані натуральні числа, $k \leq m$; $x' \equiv (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, $x'' \equiv (x_{k+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$, $x \equiv (x', x'')$, $y \equiv (y_1, \ldots, y_m) \subset \mathbb{R}_+^m$, де $\mathbb{R}_+^m := \{y \in \mathbb{R}^m \,|\, y_j > 0, j \in \{1, \ldots, m\}\}$; $\mathbb{R}_+^{n+m} := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$.

Розглянемо задачу Коші

$$\partial_t u(t,x,y) = a^2 \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2 u + b \sum_{j=1}^{k} \partial_{x_j}(x_j u) + p \sum_{j=1}^{m} B_{y_j} u,$$

$$t > 0, (x,y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}, \tag{1}$$

$$u(t,x,y)\Big|_{t=0} = \varphi(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}, \tag{2}$$

$$\partial_{y_j} u(t,x,y)\Big|_{y_j=0} = 0, t > 0, x \in \mathbb{R}^n, y_l > 0 (l \neq j), j \in \{1, \ldots, m\}, \tag{3}$$

де a, b, p $(p > 0)$ – задані дійсні числа, $B_{y_j} \equiv \partial_{y_j}^2 + \dfrac{2\nu_j+1}{y_j}\partial_{y_j}$ – оператори Бесселя за змінними y_j порядків $\nu_j \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Нехай рівняння (1) є параболічним. Воно має необмежені при $|x| \to \infty$ коефіцієнти біля перших похідних $\partial_{x_j} u$ та необмежені в околі точки $y = 0$ коефіцієнти при похідних $\partial_{y_j} u$.

Позначимо $|\nu| := \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_m$. Визначимо обернене перетворення Фур'є-Бесселя функції w: $\mathbb{R}_+^{n+m} \to \mathbb{R}$ рівністю

$$F_{\sigma\to x}^{-1} F_{B,\eta\to y}^{-1}[w(\sigma,\eta)] \equiv F_{\sigma\to x}^{-1}[F_{B,\eta\to y}^{-1}[w(\sigma,\eta)]],$$

де

$$F_{\sigma\to x}^{-1}[f(\sigma)] = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\sigma)} f(\sigma) d\sigma, x \in \mathbb{R}^n,$$

$$F_{B,\eta\to y}^{-1}[f(\eta)] = \frac{1}{2^{2|\nu|} \prod\limits_{l=1}^{m} \Gamma^2(\nu_l+1)} \int\limits_{\mathbb{R}_+^m} f(\eta) J_\eta^y d\eta, y \in \mathbb{R}_+^m,$$

де i – уявна одиниця; $(x,\sigma) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \sigma_j$; $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ – гама-функція Ейлера; $J_\eta^y := \prod\limits_{l=1}^{m} j_{\nu_l}(\eta_l y_l) \eta_l^{2\nu_l+1}$; $j_{\nu_l}(z) \equiv 2^{\nu_l}\Gamma(\nu_l+1) z^{-\nu_l} J_{\nu_l}(z)$ – нормована функція Бесселя, а $J_{\nu_l}(z)$ – функція Бесселя першого роду порядку ν_l [7].

Пряме перетворення Фур'є-Бесселя функції w таке:

$$F_{x\to\sigma}F_{B,y\to\eta}[w(x,y)] \equiv \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+m}} e^{-i(x,\sigma)}w(x,y)J_y^\eta dxdy.$$

Розв'язок задачі Коші (1) – (3) шукаємо у вигляді оберненого перетворення Фур'є-Бесселя деякої функції v

$$u(t,x,y) = F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}[v(t,\sigma,\eta)] = A(n,\nu)\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+m}} e^{i(x,\sigma)}v(t,\sigma,\eta)J_\eta^y d\sigma d\eta,$$

$$t>0, (x,y)\in\mathbb{R}_+^{n+n}, \tag{4}$$

де $A(n,\nu) := \dfrac{1}{(2\pi)^n 2^{2|\nu|}}\prod\limits_{l=1}^m \Gamma^2(\nu_l+1)$.

Вважаючи, що всі операції законні, знайдемо похідні:

$$\partial_t u = A(n,\nu)\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+m}} e^{i(x,\sigma)}\partial_t v(t,\sigma,\eta)J_\eta^y d\sigma d\eta; \tag{5}$$

$$\partial^2_{x_j} u = A(n,\nu)\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+m}} (-\sigma_j^2)e^{i(x,\sigma)}v(t,\sigma,\eta)J_\eta^y d\sigma d\eta; \tag{6}$$

$$\partial_{x_j}(x_j u) = u + x_j\partial_{x_j}u = u + A(n,\nu)\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+m}} ix_j\sigma_j e^{i(x,\sigma)}v(t,\sigma,\eta)J_\eta^y d\sigma d\eta =$$

$$= u + A(n,\nu)\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+m}} \sigma_j\partial_{\sigma_j}(e^{i(x,\sigma)})v(t,\sigma,\eta)J_\eta^y d\sigma d\eta.$$

Інтегруючи частинами інтеграл по σ_j і вважаючи v такою, що $\lim\limits_{\sigma_j\to\infty} e^{i(x,\sigma)}\sigma_j v = 0$ (наприклад, фінітною), одержимо

$$\partial_{x_j}(x_j u) = A(n,\nu)\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+m}} e^{i(x,\sigma)}(-\sigma_j)\partial_{\sigma_j}v J_\eta^y d\sigma d\eta. \tag{7}$$

$$B_{y_j}u = A(n,\nu)\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+m}} e^{i(x,\sigma)}v(t,\sigma,\eta)B_{y_j}[J_\eta^y]d\sigma d\eta = A(n,\nu)\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+m}} e^{i(x,\sigma)}v(t,\sigma,\eta)\times$$

$$\times\Big(\prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^m j_{\nu_l}(\eta_l y_l)\eta_l^{2\nu_l+1}\Big)B_{y_j}[j_{\nu_j}(\eta_j y_j)]\eta_j^{2\nu_j+1}d\sigma d\eta.$$

Оскільки за [7] $B_y[j_\nu(\eta y)] = -\eta^2 j_\nu(\eta y)$, то

$$B_{y_j}u = A(n,\nu)\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+m}} e^{i(x,\sigma)}v(t,\sigma,\eta)J_\eta^y(-\eta_j^2)d\sigma d\eta. \tag{8}$$

Підставивши (5)–(8) в (1) і прирівнявши підінтегральні функції, одержимо рівняння для v

$$\partial_t v(t,\sigma,\eta) + b\sum_{j=1}^{k}\sigma_j\partial_{\sigma_j}v(t,\sigma,\eta) = (-a^2|\sigma|^2 - p|\eta|^2)v(t,\sigma,\eta), t>0, (\sigma,\eta)\in\mathbb{R}_+^{n+m}, \qquad (9)$$

де $|\sigma|^2 = \sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2$, $|\eta|^2 = \sum_{j=1}^{m}\eta_j^2$.

Підставимо (4) в початкову умову (2):

$$u(t,x,y)|_{t=0} = F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}[v(0,\sigma,\eta)] = \varphi(x,y), (x,y)\in\mathbb{R}_+^{n+m}.$$

Нехай початкова функція φ така, що для неї існує перетворення Фур'є-Бесселя Ψ. Тоді маємо

$$v(t,\sigma,\eta)|_{t=0} = F_{x\to\sigma}F_{B,y\to\eta}[\varphi(x,y)] \equiv \Psi(\sigma,\eta), (\sigma,\eta)\in\mathbb{R}_+^{n+m}. \qquad (10)$$

Умови (3) виконуються, бо за властивістю нормованої функції Бесселя з [7]: $\partial_{y_l}j_{\nu_l}(\eta_l y_l) = 0$, $l\in\{1,\dots,m\}$.

Задачу (9), (10) для рівняння з частинними похідними першого порядку розв'яжемо методом характеристик. Відповідна система характеристичних рівнянь така:

$$\frac{dt}{1} = \frac{d\sigma_1}{b\sigma_1} = \dots = \frac{d\sigma_k}{b\sigma_k} = \frac{d\sigma_{k+1}}{0} = \dots =$$

$$= \frac{d\sigma_n}{0} = \frac{d\eta_1}{0} = \dots = \frac{d\eta_m}{0} = \frac{dv}{(-a^2|\sigma|^2 - p|\eta|^2)v}. \qquad (11)$$

Розв'яжемо цю систему. Рівняння $bdt = \frac{d\sigma_j}{\sigma_j}$ мають розв'язки $\sigma_j = C_j e^{bt}$, $j\in\{1,\cdots k\}$; рівняння $d\sigma_j = 0$ та $d\eta_j = 0$ мають розв'язки відповідно $\sigma_j = C_j$, $j\in\{k+1,\dots,n\}$, та $\eta_j = \hat{C}_j$, $j\in\{1,\dots,m\}$, всі сталі C_j, $\hat{C}_j$ – довільні. Щоб розв'язати останнє рівняння системи (11), тобто рівняння

$$(-a^2|\sigma|^2 - p|\eta|^2)dt = \frac{dv}{v},$$

підставимо знайдені вище значення змінних σ_j та η_j:

$$(-a^2(C_1^2+\dots+C_k^2)e^{2bt} - a^2(C_{k+1}^2+\dots+C_n^2) - p(\hat{C}_1^2+\dots+\hat{C}_m^2))dt = \frac{dv}{v}.$$

Зінтегрувавши це рівняння, одержимо

$$-\frac{a^2}{2b}(C_1^2+\dots+C_k^2)e^{2bt} - a^2(C_{k+1}^2+\dots+C_n^2)t - p(\hat{C}_1^2+\dots+\hat{C}_m^2)t = \ln\left|\frac{v}{C_{n+1}}\right|.$$

Підставляючи сюди $C_j = \sigma_j e^{-bt}$, $j\in\{1,\dots,k\}$, $C_j = \sigma_j$, $j\in\{k+1,\dots,n\}$, $\hat{C}_j = \eta_j$, $j\in\{1,\dots,m\}$, одержимо

$$v = C_{n+1}\exp\Big\{-\frac{a^2}{2b}|\sigma'|^2 - a^2|\sigma''|^2 t - p|\eta|^2 t\Big\},$$

де $\sigma' = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$, $\sigma'' = (\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n)$.

Отже, перші інтеграли системи (11) такі:

$$\begin{cases} C_j = \sigma_j e^{-bt}, \;\; j \in \{1, \dots, k\}, \\ C_j = \sigma_j, \;\; j \in \{k+1, \dots, n\}, \\ \hat{C}_j = \eta_j, \;\; j \in \{1, \dots, m\}, \\ C_{n+1} = v \exp\Big\{ \dfrac{a^2}{2b}|\sigma'|^2 + a^2|\sigma''|^2 t + p|\eta|^2 t \Big\}. \end{cases} \tag{12}$$

Задовольнимо умову (10):

$$v|_{t=0} = C_{n+1} \exp\Big\{ -\frac{a^2}{2b}|\sigma'|^2 \Big\} = \Psi(\sigma, \eta).$$

Оскільки з (12) при $t = 0$ маємо, що $\sigma_j = C_j$, $j \in \{1, \dots, n\}$, $\eta_j = \hat{C}_j$, $j \in \{1, \dots, m\}$, то з останньої рівності одержимо

$$\Psi(C_1, \dots, C_n, \hat{C}_1, \dots, \hat{C}_m) = C_{n+1} \exp\Big\{ -\frac{a^2}{2b}(C_1^2 + \dots + C_k^2) \Big\}.$$

Підставивши тут замість сталих вирази з (12), одержимо

$$v(t, \sigma, \eta) = \exp\Big\{ -\frac{a^2}{2b}|\sigma'|^2(1 - e^{-2bt}) - a^2|\sigma''|^2 t - p|\eta|^2 t \Big\} \Psi(\sigma' e^{-bt}, \sigma'', \eta) \equiv$$

$$\equiv W(t, \sigma, \eta)\Psi(\sigma' e^{-bt}, \sigma'', \eta), t > 0, (\sigma, \eta) \in \mathbb{R}_+^{n+m}, \tag{13}$$

– розв'язок задачі (9), (10).

Далі будемо використовувати таку властивість оберненого перетворення Фур'є-Бесселя:

$$F^{-1}_{\sigma \to x} F^{-1}_{B, \eta \to y}[f_1 \cdot f_2] = F^{-1}_{\sigma \to x} F^{-1}_{B, \eta \to y}[f_1] \otimes F^{-1}_{\sigma \to x} F^{-1}_{B, \eta \to y}[f_2], \tag{14}$$

де згортка $\otimes$ визначається рівністю

$$(g_1 \otimes g_2)(x, y) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+m}} T_y^\eta[g_1(x - \sigma, y)] g_2(\sigma, \eta) \prod_{j=1}^m \eta_j^{2\nu_j + 1} d\sigma d\eta, \tag{15}$$

а оператор узагальненого зсуву визначимо як суперпозицію таких операторів по кожній компоненті змінної y, тобто

$$T_y^\eta[f(y)] \equiv T_{y_1}^{\eta_1}[T_{y_2}^{\eta_2}[\dots[T_{y_m}^{\eta_m}[f(y)]]\dots]], \{y, \eta\} \subset \mathbb{R}_+^m,$$

тут

$$T_{y_j}^{\eta_j}[f_j(y_j)] \equiv \frac{\Gamma(\nu_j + 1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu_j + \frac{1}{2})} \int\limits_0^\pi f_j(\sqrt{y_j^2 + \eta_j^2 - 2y_j\eta_j \cos\varphi}) \sin^{2\nu_j} \varphi d\varphi.$$

Зокрема, якщо $f(y) = \prod\limits_{j=1}^m f_j(y_j)$, то $T_y^\eta[f(y)] = \prod\limits_{j=1}^m T_{y_j}^{\eta_j}[f_j(y_j)]$.

Щоб знайти розв'язок u задачі (1)– (3), підставимо (13) у (4). На підставі (15) одержимо

$$u(t,x,y)=F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}[W(t,\sigma,\eta)]\otimes F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}[\Psi(\sigma' e^{-bt},\sigma'',\eta)]. \tag{16}$$

Позначимо

$$F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}[W(t,\sigma,\eta)]=F^{-1}_{\sigma\to x}\Big[\exp\Big\{-\frac{a^2}{2b}|\sigma'|^2(1-e^{-2bt})-a^2|\sigma''|^2t\Big\}\Big]\times$$

$$\times F^{-1}_{B,\eta\to y}[\exp\{-p|\eta|^2t\}]\equiv W_1(t,x)W_2(t,y). \tag{17}$$

Для обчислення W_1 використаємо інтеграл Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}dz=\sqrt{\pi}$. Маємо

$$W_1(t,x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\Big\{i(x,\sigma)-\frac{a^2}{2b}|\sigma'|^2(1-e^{-2bt})-a^2|\sigma''|^2t\Big\}d\sigma=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\Big(\prod_{j=1}^{k}\exp\Big\{-\frac{bx_j^2}{2a^2(1-e^{-2bt})}\Big\}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\Big\{-\Big(\frac{a\sqrt{1-e^{-2bt}}}{\sqrt{2b}}\sigma_j-i\frac{\sqrt{2b}x_j}{2a\sqrt{1-e^{-2bt}}}\Big)^2\Big\}d\sigma_j\Big)\times$$

$$\times\Big(\prod_{j=k+1}^{n}\exp\Big\{-\frac{x_j^2}{4a^2t}\Big\}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\Big\{-\Big(a\sqrt{t}\sigma_j-\frac{ix_j}{2a\sqrt{t}}\Big)^2\Big\}d\sigma_j\Big)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\exp\Big\{-\frac{b|x'|^2}{2a^2(1-e^{-2bt})}\Big\}\Big(\frac{\sqrt{2b\pi}}{a\sqrt{1-e^{-2bt}}}\Big)^k\exp\Big\{-\frac{|x''|^2}{4a^2t}\Big\}\Big(\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}\Big)^{n-k}=$$

$$=\frac{(\sqrt{b})^k}{(a\sqrt{2\pi})^k(\sqrt{1-e^{-2bt}})^k}\exp\Big\{-\frac{b|x'|^2}{2a^2(1-e^{-2bt})}\Big\}\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^{n-k}}\exp\Big\{-\frac{|x''|^2}{4a^2t}\Big\}. \tag{18}$$

Обчислимо W_2, використавши відомий інтеграл Вебера з [7], записаний для нормованої функції Бесселя:

$$\int\limits_0^{+\infty}\exp\{-\eta^2t\}j_\nu(\eta y)\eta^{2\nu+1}d\eta=\frac{\Gamma(\nu+1)}{2t^{\nu+1}}\exp\Big\{-\frac{y^2}{4t}\Big\}.$$

Тоді одержимо

$$W_2(t,y)=\frac{1}{2^{2|\nu|}\prod\limits_{l=1}^{m}\Gamma^2(\nu_l+1)}\int\limits_{\mathbb{R}^m_+}\exp\{-p|\eta|^2t\}\prod_{l=1}^{m}j_{\nu_l}(\eta_l y_l)\eta_l^{2\nu_l+1}d\eta=$$

$$=\frac{1}{2^{2|\nu|}}\prod_{l=1}^{m}\frac{1}{\Gamma^2(\nu_l+1)}\int\limits_0^{+\infty}\exp\{-p\eta_l^2t\}j_{\nu_l}(\eta_l y_l)\eta_l^{2\nu_l+1}d\eta_l=$$

$$=\frac{1}{2^{2|\nu|}}\prod_{l=1}^{m}\frac{1}{\Gamma^2(\nu_l+1)}\frac{\Gamma(\nu_l+1)}{2(pt)^{\nu_l+1}}\exp\Big\{-\frac{y_l^2}{4pt}\Big\}=$$

$$= \frac{1}{2^{2|\nu|+m}(pt)^{|\nu|+m}\prod\limits_{l=1}^{m}\Gamma(\nu_l+1)}\exp\Big\{-\frac{|y|^2}{4pt}\Big\}. \tag{19}$$

Тепер обчислимо другий елемент у згортці (16), здійснивши в інтегралі по σ заміну $\beta'=\sigma' e^{-bt}$, $\beta''=\sigma''$:

$$F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}[\Psi(\sigma' e^{-bt},\sigma'',\eta)] = A(n,\nu)\int\limits_{\mathbb{R}^m_+}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\{i(x',\beta' e^{bt})+i(x'',\beta'')\}\Psi(\beta,\eta)e^{kbt}d\beta\Big)J^\eta_y d\eta =$$

$$= e^{kbt}\varphi(x' e^{bt},x'',y), t>0, (x,y)\in\mathbb{R}^{n+m}_+. \tag{20}$$

Підставивши (17) – (20) у (16) і урахувавши означення згортки (15), одержимо

$$u(t,x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}_+} W_1(t,x-\sigma)T^\eta_y[W_2(t,y)]e^{kbt}\varphi(\sigma' e^{bt},\sigma'',\eta)\prod_{l=1}^{m}\eta_l^{2\nu_l+1}d\sigma d\eta.$$

Здійснимо в інтегралах по σ заміну $\xi'=\sigma' e^{bt}$, $\xi''=\sigma''$, тоді $d\sigma = e^{-kbt}d\xi$, тому маємо розв'язок задачі (1) – (3):

$$u(t,x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}_+} W_1(t,x'-\xi' e^{-bt},x''-\xi'')T^\eta_y[W_2(t,y)]\varphi(\xi,\eta)\prod_{l=1}^{m}\eta_l^{2\nu_l+1}d\xi d\eta \equiv$$

$$\equiv \int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}_+} G(t,x,y;0,\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)\prod_{l=1}^{m}\eta_l^{2\nu_l+1}d\xi d\eta, t>0, (x,y)\in\mathbb{R}^{n+m}_+, \tag{21}$$

де

$$G(t,x,y;0,\xi,\eta)\equiv G_1(t,x',\xi')G_2(t,x'',\xi'')G_3(t,y,\eta), \tag{22}$$

$$G_1(t,x',\xi')\equiv\frac{\sqrt{b^k}}{(a\sqrt{2\pi})^k(\sqrt{1-e^{-2bt}})^k}\exp\Big\{-\frac{b|x'-\xi' e^{-bt}|^2}{2a^2(1-e^{-2bt})}\Big\}, t>0, \{x',\xi'\}\subset\mathbb{R}^k, \tag{23}$$

$$G_2(t,x'',\xi'')\equiv\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^{n-k}}\exp\Big\{-\frac{|x''-\xi''|^2}{4a^2t}\Big\}, t>0, \{x'',\xi''\}\subset\mathbb{R}^{n-k}, \tag{24}$$

$$G_3(t,y,\eta)\equiv\frac{1}{2^{2|\nu|+m}(pt)^{|\nu|+m}\prod\limits_{l=1}^{m}\Gamma(\nu_l+1)}T^\eta_y\Big[\exp\Big\{-\frac{|y|^2}{4pt}\Big\}\Big], t>0, \{y,\eta\}\subset\mathbb{R}^m_+. \tag{25}$$

Обчисливши, як у [8], оператор узагальненого зсуву

$$T^\eta_y\Big[\exp\Big\{-\frac{|y|^2}{4pt}\Big\}\Big] = \prod_{l=1}^{m}T^{\eta_l}_{y_l}\Big[\exp\Big\{-\frac{y_l^2}{4pt}\Big\}\Big] = \prod_{l=1}^{m}\exp\Big\{-\frac{y_l^2+\eta_l^2}{4pt}\Big\}j_{\nu_l}\Big(-i\frac{\eta_l y_l}{2pt}\Big) =$$

$$= \exp\Big\{-\frac{|y|^2+|\eta|^2}{4pt}\Big\}\prod_{l=1}^{m}j_{\nu_l}\Big(-i\frac{\eta_l y_l}{2pt}\Big),$$

одержимо інше зображення для G_3:

$$G_3(t, y, \eta) = \frac{1}{2^{2|\nu|+m}(pt)^{|\nu|+m}\prod\limits_{l=1}^{m}\Gamma(\nu_l + 1)} \exp\Big\{-\frac{|y|^2 + |\eta|^2}{4pt}\Big\}\prod_{l=1}^{m} j_{\nu_l}\Big(-i\frac{\eta_l y_l}{2pt}\Big).$$

Припускаючи, що початкова функція φ – неперервна і обмежена на $\mathbb{R}_+^{n+m}$, можна переконатися, що (21) справді є розв'язком задачі Коші (1) – (3), тобто що G є фундаментальним розв'язком цієї задачі. Це також випливає з того, що G_1, G_2, G_3 є фундаментальним розв'язком задач Коші відповідно для рівнянь

$$\partial_t u(t, x') = a^2 \sum_{j=1}^{k} \partial_{x_j}^2 u(t, x') + b \sum_{j=1}^{k} \partial_{x_j}(x_j u(t, x')), t > 0, x' \in \mathbb{R}^k,$$

$$\partial_t u(t, x'') = a^2 \sum_{j=k+1}^{n} \partial_{x_j}^2 u(t, x''), t > 0, x'' \in \mathbb{R}^{n-k},$$

$$\partial_t u(t, y) = p \sum_{j=1}^{m} B_{y_j} u(t, y), t > 0, y \in \mathbb{R}_+^m.$$

Із зображень (22) – (25) випливають такі оцінки похідних фундаментального розв'язку G:

$$|\partial_x^s G(t, x, y; 0, \xi, \eta)| \le C_s(1 - e^{-2bt})^{-\frac{k+|s'|}{2}} t^{-\frac{n-k+|s''|}{2}-|\nu|-m} \times$$
$$\times \exp\Big\{-c_1\frac{|x' - \xi' e^{-bt}|^2}{1 - e^{-2bt}} - c_2\frac{|x'' - \xi''|^2}{t} - c_3\frac{|y - \eta|^2}{t}\Big\} T_y^\eta\Big[\exp\Big\{-\Big(\frac{1}{4} - c_3\Big)\frac{y^2}{pt}\Big\}\Big],$$

де $s = (s', s'')$, $s' = (s_1, \dots, s_k)$, $s'' = (s_{k+1}, \dots, s_n)$, $|s'| = s_1 + \dots + s_k$, $|s''| = s_{k+1} + \dots + s_n$, C_s, c_1, c_2, c_3 – додатні сталі, $c_3 < 1/4$.

Безпосередньо обчислюючи інтеграли за допомогою (22) – (25), одержуємо властивість

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+m}} G(t, x, y; 0, \xi, \eta) \prod_{l=1}^{m} \eta_l^{2\nu_l+1} d\xi d\eta = e^{kbt}.$$

Список літератури

[1] Eidelman S.D. *The parabolic systems.* - M.: Nauka, 1964. – 443 p. (in Ukrainian)

[2] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. *Analytic methods in the theory of differentsal and pseudo-differentsal equations of parabolic type.* – Basel: Birkhaüser, 2004. – 390 p. – (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. – Vol. 152).

[3] Ivasyshen S.D., Medynsky I.P. *Classical fundamental solution of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables of degeneration. I* // J. Math. Sci. – 2020. – 246, №2. – P. 121–151.

[4] Babych O.O., Ivasyshen S.D., Pasichnyk G.S. *The fundamental solution of the Cauchy problem for degenerate parabolic equation with increasing coefficients of the group of younger members* // Nauk. visn. Chernivetskogo natsional'nogo un-tu imeni Yuriya Fed'kovycha. Ser. matematyka: Zb. nauk. pr. – 1, No. 1-2. – Chernivtsi: Chernivetskiy nats. un, 2011 – P. 13-24. (in Ukrainian)

[5] Balabushenko T.M., Ivasyshen S.D., Lavrenvhuk V.P., Melnychuk L.M. *The fundamental solution of the Cauchy problem for some parabolic equations with Bessel operator and increasing coefficients* // Nauk. visn. Chernivetskogo natsional'nogo un-tu: Zb. nauk. pr. Vyp. 288. Matematyka. – Chernivtsi: Ruta, 2006. – P. 5–11. (in Ukrainian)

[6] Melnychuk L.M. *Structure and properties of the fundamental solution of the Cauchy problem for parabolic equation with Bessel operator*. Bukivynskyy matematychnyy zhurnal. 2016. – T. 4, No. 3–4. – Chernivtsi, 2016. – 109–112. (in Ukrainian)

[7] Korenev B.G. *Introduction to the Bessel function theory.* – M.: Nauka, 1971. – 287 c. (in Russian)

[8] Ivasyshyn L.M. *Integral representation and sets of initial values of solutions of parabolic equations with Bessel operator and increasing coefficients.* – Chernovits. un-t, Chernovtsy, 1992. – 62 p. – Dep. v UkINTEI 26.10.92, No 1731 – Uk92. (in Russian)

Надійшло 19.12.2022

Melnychuk L.M. *Fundamental solution of the Cauchy problem for parabolic equation of the second order with increasing coefficients and with Bessel operators of different orders*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 2 (2022), 176–184.

The theory of the Cauchy problem for uniformly parabolic equations of the second order with limited coefficients is sufficiently fully investigated, for example, in the works of S.D. Eidelman and S.D. Ivasyshen, in contrast to such equations with unlimited coefficients. One of the areas of research of Professor S.D. Ivasyshen and students of his scientific school are finding fundamental solutions and investigating the correctness of the Cauchy problem for classes of degenerate equations, which are generalizations of the classical Kolmogorov equation of diffusion with inertia and contain for the main variables differential expressions, parabolic according to I.G. Petrovskyi and according to S.D. Eidelman (S.D. Ivasyshen, L.M. Androsova, I.P. Medynskyi, O.G. Wozniak, V.S. Dron, V.V. Layuk, G.S. Pasichnyk and others). Parabolic Petrovskii equations with the Bessel operator were also studied (S.D. Ivasyshen, V.P. Lavrenchuk, T.M. Balabushenko, L.M. Melnychuk).

The article considers a parabolic equation of the second order with increasing coefficients and Bessel operators. In this equation, the some of coefficients for the lower derivatives of one group of spatial variables $x \in \mathbb{R}^n$ are components of these variables, therefore, grow to infinity. In addition, the equation contains Bessel operators of different orders in another group of spatial variables $y \in \mathbb{R}_+^m$, due to which the coefficients in the first derivatives of these variables are unbounded around the point $y = 0$.

The paper defines a modified Fourier-Bessel transform that takes into account different orders of Bessel operators on different variables. With the help of this transformation and the method of characteristics, the solution of the Cauchy problem of the specified equation is found in the form of the Poisson integral, and its kernel, which is the fundamental solution of the Cauchy problem, is written out in an explicit form. Some properties of the found fundamental solution, in particular, estimates of its derivatives, have been established. They will be used to establish the correctness of the Cauchy problem.