math_2022_046


**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**ЧЕРНІВЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ЮРІЯ ФЕДЬКОВИЧА**

**Факультет математики та інформатики**

**Кафедра алгебри та інформатики**


# *Елементи аналітичної геометрії на факультативних заняттях з математики в ЗЗСО*

**Дипломна робота**

**Рівень вищої освіти – другий (магістерський)**


**Виконав:**
студент 6 курсу 606 групи
***Ріжко Юрій Іванович***

**Керівник:**
кандидат фіз.-мат. наук, доцент
***Боднарук Світлана Богданівна***



До захисту допущено
на засіданні кафедри алгебри та інформатики
протокол № 6 від 7 грудня 2022 р.
Зав. кафедрою _______________ доц. Колісник Р.С.


**Чернівці – 2022**

**Зміст**

## *Анотація*

***Ключові слова:*** *аналітична геометрія, факультативний курс, ЗЗСО.*

У першому розділі представлені основні поняття факультативного курсу «Елементи аналітичної геометрії», а також орієнтовне календарно-тематичне планування, в якому наведено приклади занять про різновиди систем координат, їхні типи та застосування, поділ відрізка у запропонованому співвідношенні, площа трикутника, віддаль між двома точками. Додано урок ІКТ на заняттях математики, а саме вивчення програми GeoGebra, в якій можна розв'язувати різноманітні геометричні задачі. У другому – методичні вказівки щодо проведення факультативних занять: запропоновані плани-конспекти, які містять підбір цікавих, нестандартних задач.

За результатами роботи зроблено висновки та пропозиції щодо розробки та впровадження циклу факультативних занять з даної дисципліни: саме знання з цього предмету є важливими для багатьох професій, а це в свою чергу відкриває нові можливості проводити відкриття і розробляти нові проєкти.

Кваліфікаційна робота містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів наукових досліджень інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

## *Анотація*

**Keywords:** analytic geometry, elective course, ZZSO. The first chapter presents the basic concepts of the optional course "Elements of Analytical Geometry", as well as an approximate calendar and thematic planning, which includes examples of classes on the types of coordinate systems, their types and applications, the division of a line segment in the proposed ratio, the area of a triangle, the distance between two points. An ICT lesson has been added in mathematics classes, namely the study of the GeoGebra program, in which you can solve various geometric problems. In the second - methodical instructions for conducting optional classes: proposed plans-summaries, which contain a selection of interesting, non-standard tasks.

Based on the results of the work, conclusions and proposals were made regarding the development and implementation of a cycle of optional classes in this discipline:

the knowledge of this subject is important for many professions, and this, in turn, opens up new opportunities to make discoveries and develop new projects.

The qualification work contains the results of own research. The use of ideas, results and texts of scientific research of other authors have a link to the appropriate source.

________________ Ю.І. Ріжко

(підпис)

# Вступ

Курс аналітичної геометрії в школі починається в 6 класі з вивчення понять прямокутної декартової системи координат, поняття вектора, руху, рівняння фігури, рівняння кола, рівняння прямої, кутового коефіцієнт прямої, поняття вектора, координати вектора, додавання і віднімання векторів, множення вектора на число, скалярного добутку векторів, векторів в просторі, рух фігури, паралельне перенесення, осьової симетрії, центральної симетрії, повороту, подібності фігури.

В 9 та 10 класах продовжується вивчення цих тем. На жаль, їх важливістю через обмеження в часі, або через більшу важливість інших тем, які є складнішими і потребують більше часу, часто нехтують, виділяючи на них недостатньо часу. Для того, щоб пояснити дітям навіщо винаходити одну або іншу річ потрібно переглянути їхнє походження.

У даній роботі розглянуто всі ці теми, чітко вказуючи на поглиблення того матеріалу, в якому подається недостатня кількість інформації, щоб мати змогу ознайомити з нею здобувачів освіти в позаурочний час на факультативних заняттях; створено календарно-тематичне планування запропонованих занять за цими темами, розроблено плани-конспекти деяких факультативних занять згідно з плануванням.

У дипломній роботі розглянуто початки вивчення аналітичної геометрії в основній школі у факультативному курсі «Елементи аналітичної геометрії». Вивчення курсу потребує знань матеріалу, з яким здобувачі освіти ознайомлюються у I семестрі 10 класу, тому його рекомендується вивчати в II семестрі.

**Актуальність теми дослідження** обумовлена зменшенням зацікавленості дітей у вивченні математичних наук, що в свою чергу погіршує розвиток у них логічного мислення, пам'яті та аналогії. Для багатьох професій не менш важливою є також і просторова уява. Так, комп'ютерна інженерія, проєктування споруд неможливе без розуміння геометрії. Для того, щоб уникнути цієї проблеми, потрібно зацікавити дітей різноманітними задачами, які можуть бути використані в конкретних професіях. Оскільки часу на заняттях для розгляду додаткового матеріалу немає, необхідно залучати дітей до вивчення цікавих задач в позаурочний час, наприклад, на факультативному занятті.

**Метою** даної дипломної роботи є створення пропедевтичного факультативного курсу з математики для поглибленого вивчення аналітичної геометрії.

Поставлена мета передбачає реалізацію таких **завдань:**

- Створення умов для зацікавлення дітей до вивчення математики;
- визначення кількості матеріалу, який подається під час занять у класах;
- визначення матеріалу, який можна подавати учням в позаурочний час на факультативних заняттях для поглибленого вивчення геометрії;
- знаходження задач, які мають цікаве подання або розв’язання для роботи з дітьми в позаурочний час на факультативних заняттях;
- створення факультативного курсу;
- створення частини планів-конспектів для згаданого факультативного курсу;

**Об’єктами** дослідження дипломної роботи – теми з шкільного курсу математики, які є окремими розділами аналітичної геометрії.

**Предметом дослідження** є методика навчання учнів аналітичної геометрії на позаурочних заняттях.

**Методами дослідження** є метод синтезу та аналізу теоретичних відомостей для подальшого їх подання на позаурочних заняттях.

**Практичне значення.** Матеріали можуть бути використані у навчальній роботі, зокрема на позаурочних заняттях.

**Структура роботи.** Дипломна робота складається зі вступу, двох розділів та десяти підрозділів, висновків, списку використаних джерел, сорока одного рисунка та однієї таблиці.

**Обсяг роботи**. Загальний обсяг роботи 71 сторінка.

# Розділ 1. Факультативний курс «Елементи аналітичної геометрії»

## 1.1. Пояснювальна записка до факультативного курсу «Елементи аналітичної геометрії»

У сучасному суспільстві все частіше постає питання: «Навіщо нам це?». Зустрічаючись з такими питаннями потрібно розуміти те, що курс геометрії в школі є спрощеним курсом геометрії Евкліда. Він складається з двох основних розділів: планіметрії і стереометрії. Для успішного засвоєння курсу його вивчають за допомогою розв'язання великої кількості задач. Геометричні задачі бувають кількох типів: на обчислення, побудову і доведення. Хоч всі ці елементи містяться в кожній з задач, задачі на побудову і доведення сприймаються учнями значно важче. У даному курсі пропонується ознайомити дітей з усіма типами задач різних ступенів складності.

Мета курсу – розширити та поглибити знання учнів, відкрити нові та цікаві факти з математики.

Основне завдання цього курсу:

1) зацікавлювати учнів у вивченні математики;

2) поглибити знання учнів в математиці;

3) розширити та поглибити міжпредметні зв'язки, інтеграцію знань, умінь та навичок;

4) підвищити загальну математичну культуру;

5) зацікавити дітей до вивчення математики.

Курс «Елементи аналітичної геометрії» дає можливість заповнити прогалини в навчанні для більшого зв'язку між темами, у доступній формі зрозуміти практичну значимість математики для повсякденного життя. Під час вивчення курсу пропонується ознайомитись з вченими та історіями певних досліджень з метою зацікавлення дітей. У курсі розглядаються доведення певних теорем питання: пошуку оптимального та варіативного розв'язку задач; способи застосування формул. Окремими темами розглядаються історичні відомості та програмні засоби для розв’язування певних геометричних задач.

Даний курс передбачений для подання дітям в 10 класі, а саме в II семестрі.

Він передбачає наступні компетентності:

1. Спілкування державною і рідною (у разі відмінності) мовами. Це вміння усно і письмово висловлювати й тлумачити поняття, думки, почуття, факти та погляди (через слухання, говоріння, читання, письмо, застосування мультимедійних засобів). Здатність реагувати мовними засобами на повний спектр соціальних і культурних явищ – у навчанні, на роботі, вдома, у вільний час. Усвідомлення ролі ефективного спілкування.[12]

2. Математична грамотність. Уміння застосовувати математичні (числові та геометричні) методи для вирішення прикладних завдань у різних сферах діяльності. Здатність до розуміння і використання простих математичних моделей. Уміння будувати такі моделі для вирішення проблем.[12]

3. Компетентності в природничих науках і технологіях. Наукове розуміння природи і сучасних технологій, а також здатність застосовувати його в практичній діяльності. Уміння застосовувати науковий метод, спостерігати, аналізувати, формулювати гіпотези, збирати дані, проводити експерименти, аналізувати результати.[12]

4. Інформаційно-цифрова компетентність передбачає впевнене, а водночас критичне застосування інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) для створення, пошуку, обробки, обміну інформацією на роботі, в публічному просторі та приватному спілкуванні. Інформаційна й медіаграмотність, алгоритмічне мислення, роботи з базами даних, навички безпеки в Інтернеті та кібербезпеці. Розуміння етики роботи з інформацією (авторське право, інтелектуальна власність , академічна доброчесність тощо).[12]

5. Уміння навчатися впродовж життя**.** Здатність до пошуку та засвоєння нових знань, набуття нових вмінь і навичок, організації навчального процесу (власного і колективного), зокрема через ефективне керування ресурсами та інформаційними потоками, вміння визначати навчальні цілі та способи їх

досягнення, вибудовувати свою навчальну траєкторію, оцінювати власні результати навчання, навчатися впродовж життя.[12]

6. Соціальні і громадянські компетентності. Усі форми поведінки, які потрібні для ефективної та конструктивної участі у громадському житті, на роботі. Уміння працювати з іншими на результат, попереджати і розв'язувати конфлікти, досягати компромісів.[12]

7. Підприємливість. Уміння генерувати нові ідеї й ініціативи та втілювати їх у життя з метою підвищення як власного соціального статусу та добробуту, так і розвитку суспільства і держави. Здатність до підприємницького ризику.[12]

Даний курс може застосовуватися як для рівня стандарту, так і для профільного рівня. Для розділення даних рівнів матеріали мають умовні позначення. Всі матеріали, які в заголовках та темах позначені за допомогою «**» варто використовувати для профільного рівня.

## 1.2. Орієнтоване календарно-тематичне планування

| № з/п Заняття | Кількість годин | Тема |
|---|---|---|
| 1. | 2 | Вступ до вивчення аналітичної геометрії. |
| 2. | 4 | Різновиди систем координат. Їхні типи та застосування. Можливості використання ІТ технологій під час роботи з ними. |
| 3. | 4 | Афінна система координат на площині. Розв'язування задач. Застосування пакету динамічного геометричного середовища GeoGebra. **Афінна система координат просторі. |
| 4. | 4 | Полярна система координат. Розв'язування задач. Застосування програми Gran-2D для графічного аналізу системи геометричних об'єктів. **Сферична та циліндрична системи координат |
| 5. | 1 | Повторення і узагальнення вивченого. |
| 6. | 4 | Поділ відрізка у заданому відношенні. Розв'язування задач. |
| 7. | 4 | Площа трикутника. Розв'язування задач. |
| 8. | 3 | Віддаль між двома точками. Розв'язування задач. |
| 9. | 3 | Повторення поняття вектор. Розв'язування задач. |
| 10. | 3 | Скалярний добуток. Розв'язування задач. |
| 11. | 3 | Рівняння прямої. Розв'язування задач. |
| 12. | 2 | Узагальнення та повторення вивченого матеріалу. |

# Розділ 2. Плани-конспекти занять факультативу.

## 2.1. Вступ до вивчення аналітичної геометрії

**Тема.**. *Вступ до вивчення аналітичної геометрії.*

**Мета:**

- *Навчальна: розповісти дітям про походження аналітичної геометрії як науки. Ознайомити дітей з видатними математиками України та світу* .
- *Розвивальна: розвинути в дітей зацікавлення до вивчення геометрії.*
- *Виховна: виховувати в дітей математичну компетентність.*

**Тип заняття**: формування навичок і вмінь

**Використана література:** [11],[13][14]

**Хід заняття**

**1. Вступ**

Доброго дня, діти. Сьогодні ми поринемо з вами в ті часи, коли з'являлась геометрія як наука.

**2. Вивчення нового матеріалу**

У розвитку геометрії можна виділити чотири основні етапи. Початок першого етапу визначити досить важко через те, що до нас дійшло досить мало праць його відносять до XVII ст. до н. е., вона почала зароджуватись в стародавньому Єгипті та Вавилоні. Метою її виникнення було розв'язання практичних людських потреб. Цей період характеризується нагромадженням фактів і встановленням перших найпростіших залежностей.

У другому періоді великий крок в розвитку геометрії як науки стала праця Евкліда «Початки», які витримали сотні видань і перекладені всіма основними мовами.

У ній Евклід систематизував усі відомі знання з геометрії і виклав їх так, як ми уявляємо зараз, він сформулював основні аксіоми про точку, пряму, площину і геометричні тіла. Ця праця складається з п’ятдесяти книг і написана Евклідом близько 300 років до. н. е. Евклід збагачував свою працю новими фактами та методами, зберігаючи основні принципи. Оскільки з давніх часів до нас прийшло не багато відомостей про Евкліда, ми не будемо приділяти багато часу відомостям про його життя .

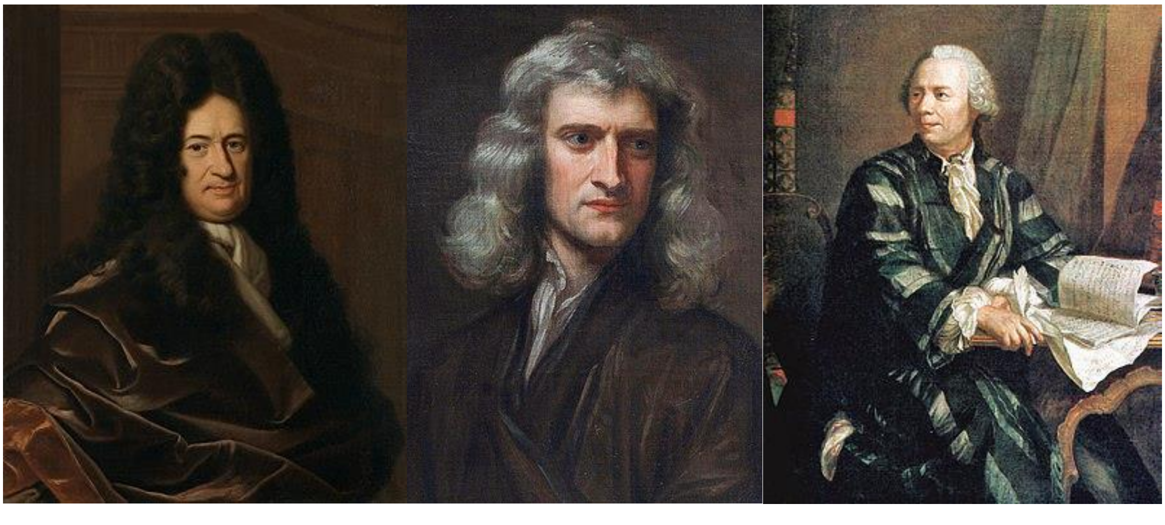
Початком третього періоду можна вважати XVII століття: часи, коли французький філософ Рене Декарт поклав початок такої науки, як аналітична геометрія, ввівши метод координат і змінної величини. Давайте конкретніше розглянемо життя цього відомого математика.

Рене Декарт народився 31 березня 1596 року в місті Лае. Почав своє навчання в єзуїтському коледжі Генріха Великого в Ла-Флеші. У дитинстві через проблеми зі здоров’ям директор коледжу звільнив його від ранкових богослужінь і дозволив лишатись у ліжку до обіду. Ця звичка залишилась в Декарта протягом всього життя, але саме цей час хлопець проводив найпродуктивніше. Пізніше він отримав диплом юриста, цим самим виконавши волю батька. Здобувши освіту Рене почав жити в Парижі безтурботним життям. Але з часом йому набридло така одноманітність, і він вирішив присвятити себе математиці.

У 21 рік Рене пішов на службу в армію. За цей час він набув хороших воєнних звичок, а також полюбив азартні ігри. На щастя, через хороші знання з математики він був досить непоганим гравцем. Саме на службі в армії Декарт почав засновувати аналітичну геометрію. За легендами, одного разу йому приснився сон, в якому з’явився дух, який докоряв його за лінощі, наступного дня він просидів на самоті, міркуючи над важливими математичними проблемами. Саме цей момент змінив його життя.

Пізніше, в 1637 році, побачила світ головна математична праця Декарта «Міркування про метод» (повна назва: «Міркування про метод, що дозволяє направляти свій розум і відшукувати істину в науках»). У цій праці він описав основні положення і методи аналітичної геометрії, а також алгебри та оптики.

Саме ця книга дала поштовх до розвитку аналітичної геометрії. Шляхом Декарта продовжили іти Лейбніц, Ісаак Ньютон і Леонард Ейлер, які надали аналітичній геометрії сучасної структури.



Зверніть увагу, що дослідники вважають Аполона Перзького першим математиком, який розв’язував задачі методами аналітичної геометрії.

Четвертий період бере свій початок у 1826 році після відкриття І. М. Лобачевським неевклідової геометрії. Що відкрило нові можливості для розвитку геометрії.

Поки п'ятого етапу немає, тому що не було жодного вагомого відкриття, яке б могло дати новий поштовх у розвитку геометрії. Можливо, хтось із вас зможе зробити це відкриття.

**3. Підсумки заняття.**

Сьогодні, діти. ми з вами познайомилися з вченими, які досліджували геометрію, внесли вагомий внесок в розвиток даної сфери.

Давайте згадаємо прізвища основоположників геометрії.

Кого вважають першим дослідником аналітичної геометрії ?

Які цікаві факти з життя ви запам'ятали?

Що корисного ви почерпнули для себе з відомостей про життя цих вчених?

**4. Домашнє завдання.**

Знайти в мережі Інтернет інформацію про відомих українських математиків-геометрів, які досліджували геометрію. Підготувати презентацію про одного із них.

## 2.2. Афінна система координат. Застосування пакету динамічного геометричного середовища GeoGebra. Афінна система координат просторі

**Тема.** А*фінна система координат. Розв'язування задач. Застосування пакету динамічного геометричного середовища GeoGebra. **Афінна система координат просторі*

**Мета:**

- *Навчальна: ознайомити дітей з поняттями: загальна декартова система координат на площині, кут між осями, масштабний відрізок.*
- *Розвивальна: розвинути в дітей математичну логіку, вміння визначати координати точок.*
- *Виховна: виховувати в дітей математичну компетентність.*

**Тип заняття**: Формування навичок і вмінь

**Використана література:** [1], [2], [13].

**Хід заняття**

**1. Вступ**

Доброго дня! Вам вже відомо, що таке декартові координати, і як вони задаються, ви знаєте яку вісь називають абсцисою, а яку ординатою і вже повинні бути ознайомлені з прямокутною декартовою системою координат, однак вона не єдина. Сьогодні ми познайомимося з афінною системою координат. І розпочнемо своє знайомство з самого поняття афінної системи координат.

**2. Вивчення нового матеріалу**

Для того, щоб починати вивчення будь-якої системи координат потрібно ознайомитися з наступними означеннями.

***Означення***. *Віссю називається пряма для якої фіксований додатний напрямок і задано масштабний відрізок.[2]*

***Означення.*** *Координатною віссю називається вісь, на якій вибрано початок відліку – фіксовану точку О.[2]*

***Означення.*** *Координатою невиродженого напрямленого відрізка* $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$*, розміщеного на осі називається* $x = \overline{\mathrm{AB}}$*, що дорівнює довжині напрямленого відрізка і напрямок осі збігається, та із знаком «мінус» у протилежному випадку.[2]*

Число $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ часто називається величиною напрямленого відрізка $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Під декартовою координатою точки М, що лежить на координатній осі, розумітимемо координату напрямленого відрізка $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ цієї осі $\overline{\mathrm{OM}} = x$ або М(x).

Якщо деяка точка Е, має декартову координату, що дорівнює одиниці, то така точка називається одиничною, а напрямлений відрізок, який вона утворює – масштабним.

За допомогою декартової системи координат точки на прямій розміщуються з певною відповідністю одна до одної.

На прямій існує безліч декартових систем координат.

***Теорема (Шаля).*** *Якщо A, B, C три довільні точки осі, то* $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AC}}$.*[2]*

***Доведення.*** *Нехай точки A, B, C попарно різні. Якщо точка B лежить між точками A і C, то* $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AC}}$, *тобто довжина відрізка AC дорівнює сумі довжини відрізків AB і BC. Але напрямлені відрізки* $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$ *і* $\overline{\mathrm{AC}}$ *мають однаковий напрям, тобто числа* $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$ *і* $\overline{\mathrm{AC}}$ *одного знаку. Тому* $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AC}}$.

*Якщо ж точка C лежить між A і B, то*

$$\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{CB}}=\overline{\mathrm{AB}},\qquad \overline{\mathrm{AB}}-\overline{\mathrm{CB}}=\overline{\mathrm{AC}},\qquad \overline{\mathrm{CB}}=-\overline{\mathrm{BC}},$$

$$\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AC}}$$

*Якщо ж точка A лежить між B та C , то*

$$\overline{\mathrm{BA}}+\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}},\qquad -\overline{\mathrm{BA}}+\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AC}},\qquad \overline{\mathrm{BA}}=-\overline{\mathrm{AB}},$$

$$\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AC}}$$

*Якщо точки A і B збігаються, то* $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AC}}$ .

*Якщо точки B і C збігаються, то* $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$.

*Якщо ж точки A і C збігаються, то* $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BA}}=0=\overline{\mathrm{AC}}$.

*Теорема доведена.*

***Теорема.*** *Координата* $\overline{\mathrm{AB}}$ *напрямного відрізка* $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, *що задається двома точками A(*$x_1$*) і B(*$x_2$*) координатної осі збігається з різницею* $x_2-x_1$, *тобто* $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=x_2-x$ *[2].*

***Доведення.*** *За теоремою Шаля* $\overline{OA}+\overline{AB}=\overline{OB}$, *тобто* $\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=x_2-x_1$, *тобто* $\overline{AB}=x_2-x_1$.

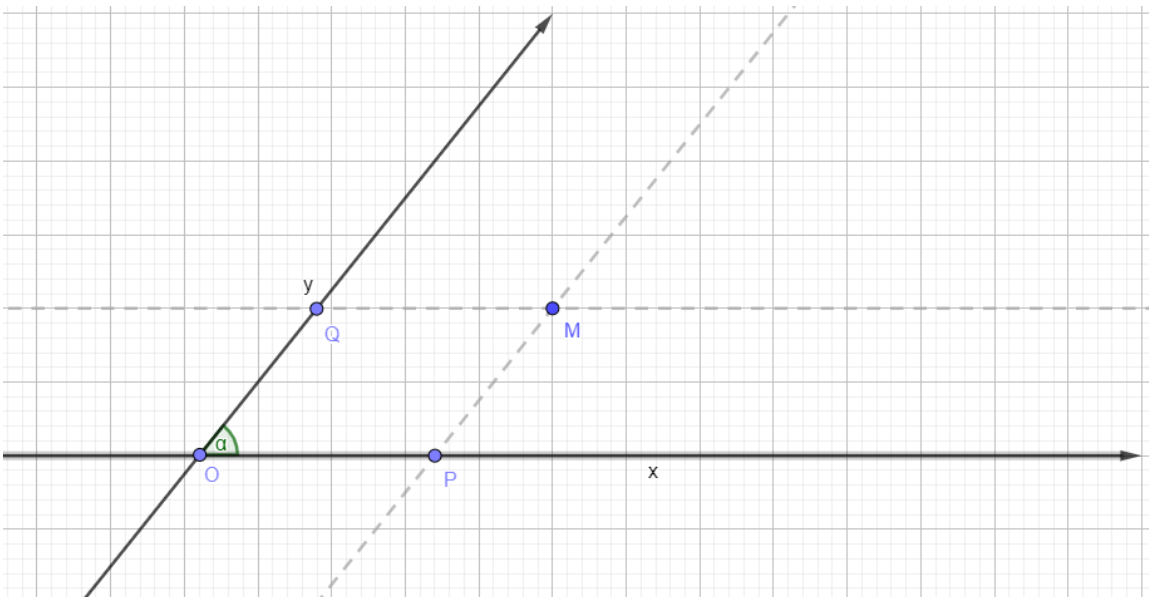
Наслідком наступної теореми є таке твердження.

***Теорема.*** *Віддаль d між точками A(*$x_1$*) і B(*$x_2$*) декартової осі координат обчислюється за формулою d=*$|x_2-x_1|$ *[2].*

***Доведення.*** *Нехай дано дві точки A(*$x_1$*) і B(*$x_2$*) відстанню між цими точками буде вважатись довжина напрямленого відрізка* $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, *а для того, щоб знайти довжину даного відрізка потрібно від координат кінця відрізка відняти координати початку, тобто* d=$x_2-x_1$, *якщо точка початку буде більшою ніж точка кінця, то дане рівняння буде набувати від'ємного значення, тобто знак* *потрібно буде змінити на додатній, для цього візьмемо праву частину нашого рівняння під знак модуля. Отже, ми тримаємо* $d=|x_2 - x_1|$

Поки що ми розглядали одновимірну систему координат, в якої є тільки одна вісь, але для того, щоб зображати складніші об'єкти потрібно додати ще координати осей. Для цього уведемо поняття загальної декартової системи координат на площині.

***Означення.*** *Загальною декартовою (афінною) системою координат на площині називається впорядкована сукупність двох координатних осей, що мають спільний початок О. Масштабні відрізки осей можуть бути різними.[2]*




Масштабним відрізком називають найменшу одиницю виміру на даній осі, яка позначається $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ .

Оскільки на площині ми маємо дві координатні осі, то і відрізки на них можуть бути різними. Якщо масштабні відрізки осей рівні, то таку систему називають *косокутною*, якщо ж кут між осями дорівнює 90º і масштаб на обох осях однаковий, то таку систему координат називають *прямокутною*. Саме з такою системою ви вже ознайомились в 8 та 9 класі.

Нехай М – довільна точка площини, Р – проекція точки М на вісь *Ox* паралельно осі *Oy*, Q – проекція точки М на вісь *Oy* паралельно осі *Ox, x* – координата точки Р на осі *Ox, y* – координата точки на осі *Oy*. Числа *x, y* називаються загальними декартовими (афінними) координатами точки М. Те, що точка М має координати $x$, у позначаємо так: М ($x, y$).

За допомогою загальної декартової системи координат на площині встановлюється взаємно однозначна відповідність між множиною всіх точок площини і множиною всіх впорядкованих пар дійсних чисел. Для побудови точки М($x, y$) (x ≠ 0, y ≠ 0) будуємо на осі $Ox$ точку Р($x$), а на осі $Oy$ – точку Q($y$). Точка М тоді є точкою перетину прямих, що проходять через точки Р та Q паралельно до осей $Oy$ та $Ox$.

Афінна система координат є узагальненням прямокутної декартової системи координат. Ця система координат на площині визначається репером, а $(O;\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, тобто вибором: точки $O$ – початку системи координат і впорядкованою парою неколінеарних векторів $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ (інакше кажучи, різної довжини) зі спільним початком у цій точці – базисом.

Напрямки зазначених векторів визначають додатній напрямок відповідних осей, $OE_1, OE_2$, які й називають координатними осями. Оскільки вектори $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ не є колінеарними (складають базис відповідного двовимірного векторного простору), то будь-який вектор $\vec{m}$ площини (двовимірного векторного простору) з початком у точці О однозначно розкладається за цими векторами: $m = m_1\overrightarrow{e_1} + m_2\overrightarrow{e_2}$.

Зауважимо, що $m_1\overrightarrow{e_1}, m_2\overrightarrow{e_2} -$ це вектори колінеарні відповідним осям і є сторонами того паралелограма, для якого вектор $\vec{m}$ співпадає з діагоналлю $\overrightarrow{OM}$, а $m_1, m_2$ – числа, рівні «проекціям» вектора $\vec{m}$ відповідно на осі $OE_1, OE_2$; тобто, проводячи через кінець вектора $\vec{m}$ (точку М) прямі паралельні осям $OE_1, OE_2$, одержимо відповідно точки $M_1, M_2$. Проекції $m_1, m_2$ на осі координат будемо називати координатами вектора $\vec{m}$ в системі $A$ = (O;$\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$), (що визначається т.$O$ і базисними векторами $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ ) та позначати:

$$\vec{m} = (m_1, m_2) = m_1\overrightarrow{e_1} + m_2\overrightarrow{e_2}.$$

Під координатами довільної точки $M$ системі $A$ (О;$\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$) будемо розуміти координати вектора $\overrightarrow{OM} = \vec{m}$ (радіус-вектор точки М) відносно цієї ж системи. Тобто $M(m_1, m_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (m_1, m_2) = m_1\overrightarrow{e_1} + m_2\overrightarrow{e_2}$.

Якщо в системі А = (О;$\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$) задано дві точки: $A(a_1, a_2)$ і $B(b_1, b_2)$, то координати вектора $\overline{AB}$ визначаються за правилом $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2)$ – «від координат кінця треба відняти координати початку».

***Зауваження.*** Якщо розглянути афінну систему координат, осі якої розміщені під кутом ω , а координати точки *A(a; b)*, то перейти до прямокутних декартових координат можна за допомогою формул:

$$x = b\cos\omega + a,$$

$$y = b\sin\omega,$$

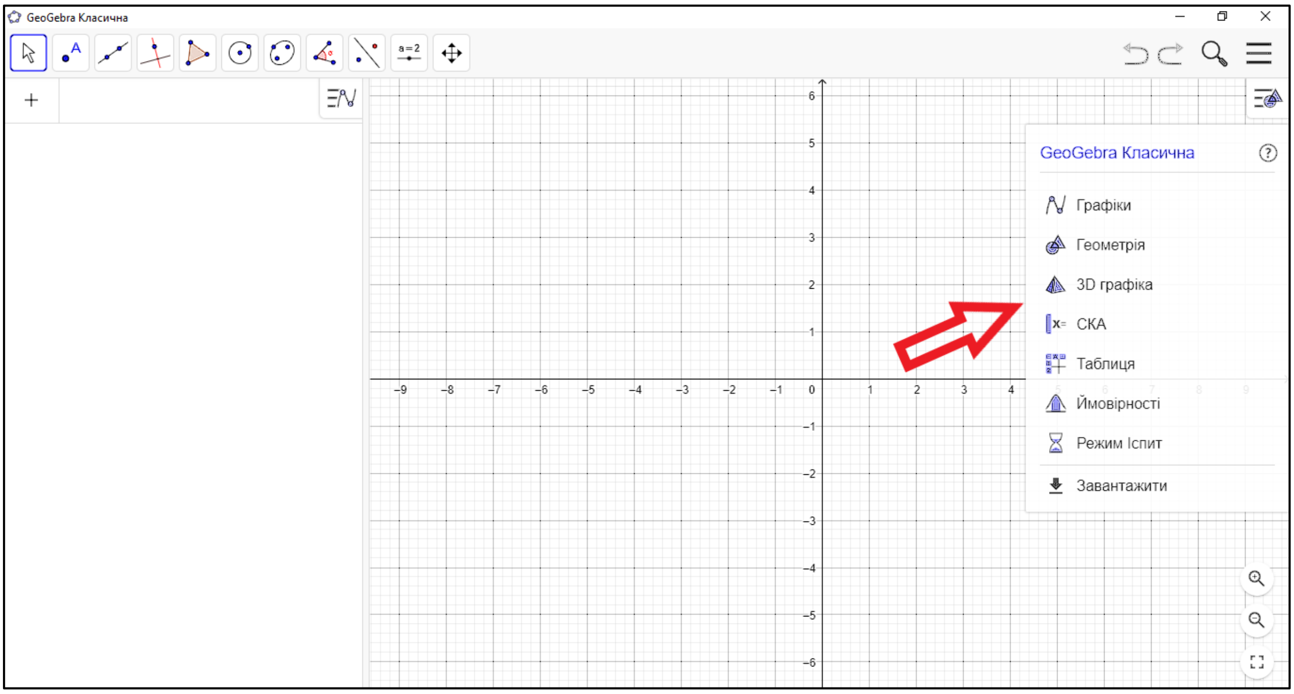
Оскільки ви вже знаєте теорію, ми можемо ознайомитися з програмою, в якій зручно малювати рисунки до задач.

**«GeoGebra** — вільно-поширюване динамічне геометричне середовище, яке дає можливість створювати «живі креслення» для використання в геометрії, алгебрі, планіметрії, зокрема, для побудов за допомогою циркуля і лінійки».[13]

Це одна із небагатьох програм, яка має український інтерфейс.

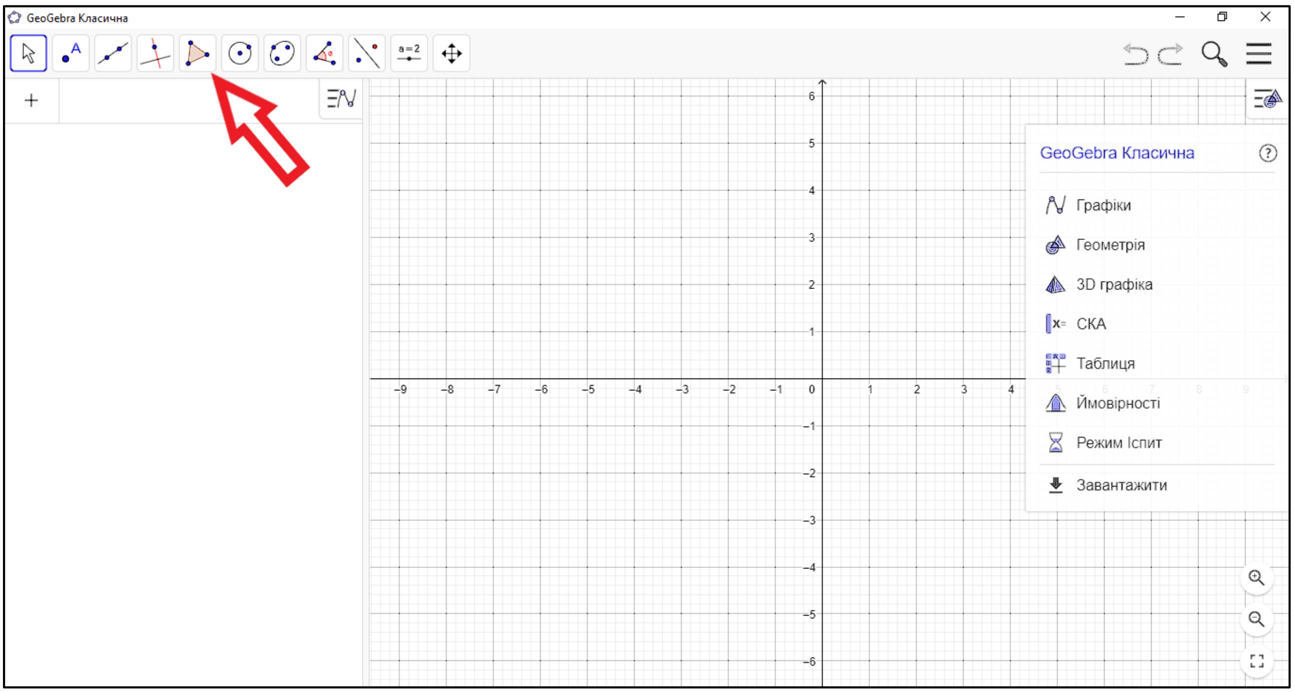
Після відкриття цієї програми ми побачимо головне меню.

Програма цікава тим, що ми можемо налаштувати її під свої потреби за допомогою налаштувань. Справа є вибір типу сітки полотна, на якому будемо працювати: загальне і полярне. Після цього вибираємо прив’язку точки до сітки. Наступний крок – це вибір системи координат, на якій можна малювати. У запропонованому меню ми вибираємо тип системи координат: 2 та 3-D модель, в якій можна працювати в просторі, а також таблиці і СКА, в яких вводяться рисунки вручну для тих моментів, якщо в нас є задано графік за допомогою рівняння (демонстрація можливостей за допомогою комп’ютерної техніки).

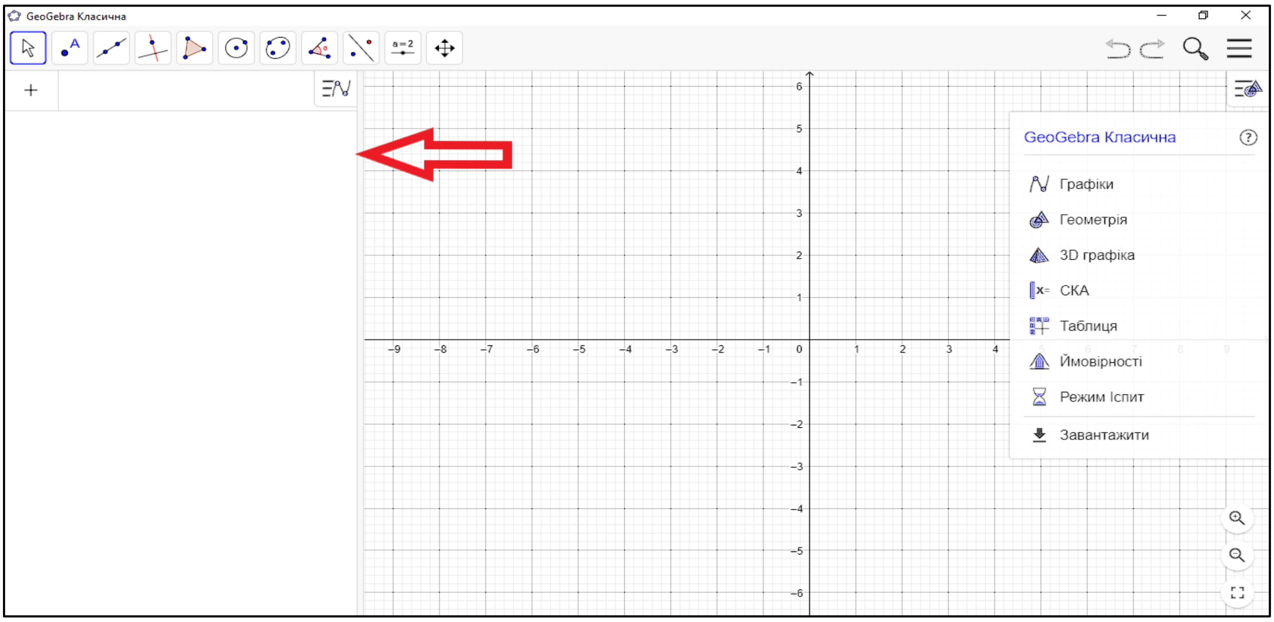



У лівому верхньому кутку ми можемо бачити панель інструментів. Це дає нам змогу додавати прямі, точки, вектори, міряти відстані, кути. Також тут можна створювати складні фігури такі, як многокутники, круги та кола, а також дуги з певним радіусом. Цією панеллю ми послуговуватимемося кожного разу під час розв'язання задач.

(Демонстрація можливостей за допомогою комп'ютерної техніки)




Справа можна побачити меню, на якому будуть відображатись всі об'єкти, які ми додали на полотно. Тут можемо працювати з ними: змінювати їх колір, розмір, тип, тобто робити пряму пунктирною або прозорою, якщо вона не є допоміжною.




Тепер ви знаєте, що це за програма і які в неї є можливості. Спробуймо розв’язати кілька задач.

**2**. Подання нового матеріалу**

Ми з вами познайомилися з афінною системою координат на площині. Афінна система координат існує в просторі так само, як і відома вам прямокутна декартова система координат.

Для цього нам необхідно ознайомитись з основними означеннями для даної системи.

***Означення.*** *Загальною декартовою (афінною) системою координат в просторі називається впорядкована сукупність трьох осей координат, які не лежать в одній площині і проходять через одну точку О. що є початком координат на кожній осі.*

Оскільки нам відомо, що вісі *Ox, Oy* називаються осями абсцис і ординат, то введемо поняття для нашої третьої осі. *Oz* буде називатися віссю аплікат. Площини *yOz, zOx, xOy* називаються координатними площинами.

***Означення.*** *Декартовою прямокутною системою координат у просторі називається впорядкована трійка попарно перпендикулярних осей координат із спільним початком координат О на кожній з них і з однаковим масштабним* *відрізком для кожної осі.*

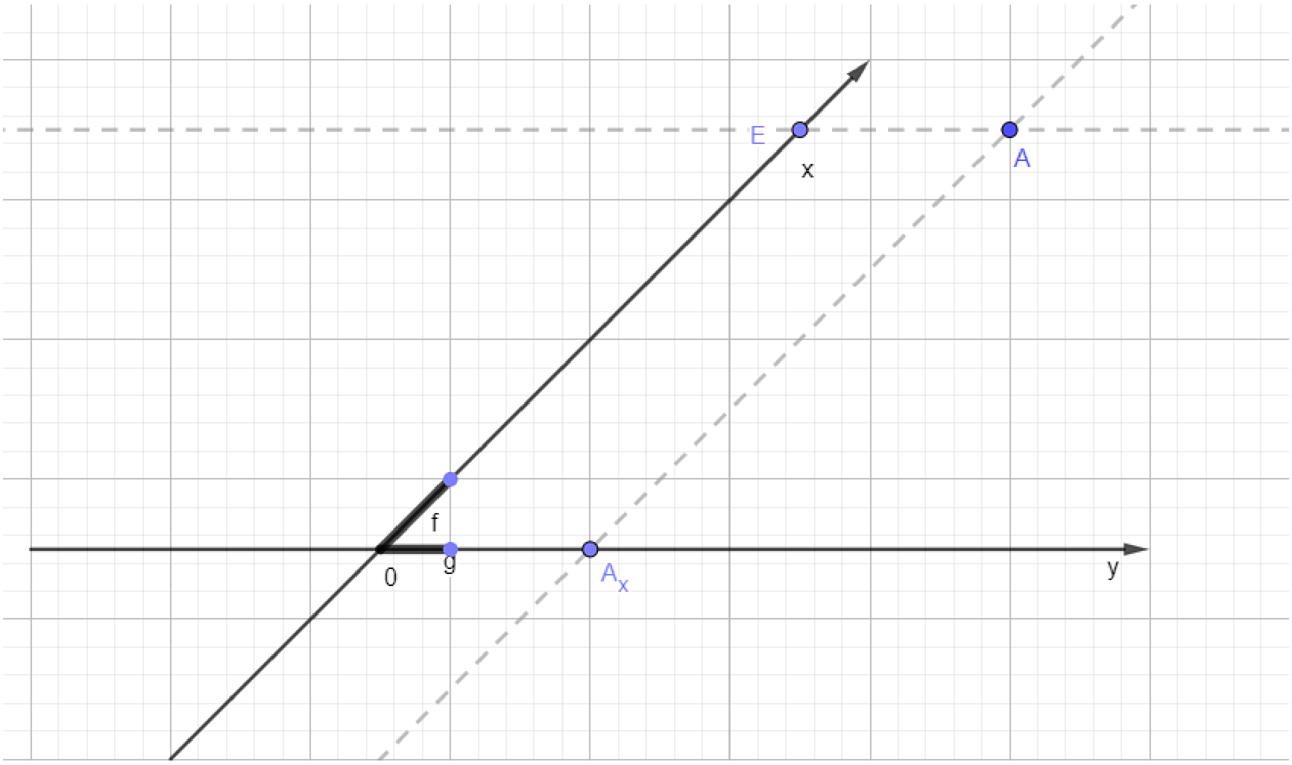
Масштабні напрямлені відрізки координатних осей прямокутної декартової системи координат простору позначають так: $\overrightarrow{\mathrm{OE}_1} = \vec{\mathrm{i}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OE}_2} = \vec{j}$, $\overrightarrow{\mathrm{OE}_3} = \vec{k}$.

Загальні (афінні) та прямокутні декартові координати *x, y, z* точки *M* простору визначаються подібно до координат точок площини, а саме: x – це координата на осі *Ox* точки перетину цієї осі з площиною, що проходить через точку *M* паралельно площині *yOz;* у – координата на осі *Oy* точки перетину цієї осі з площиною, що проходить через точку *M* паралельно площині *zOx; z* – координата на осі *Oz* точки перетину цієї осі з площиною, що проходить через точку *M* паралельно площині *xOy.*

## 3. Розв'язування задач

**Задача 1.** Зобразити проекцію точок А, В та С на вісь абсцис точок, якщо дані точки мають координати А(2;-3), В(3;-1), С(-5,1), D(-2;-2).

**Розв'язання.** Зобразимо загальну декартову систему координат на площині з довільним кутом між осями, відкладемо одиничні відрізки f і g, після чого зобразимо точки А(2; 3), В(-3; 1), С(-4, -2) та D(2; -2).



Для зображення їхніх проекцій на вісь абсцис потрібно через задану точку А провести проекцію осі ординат і на перетині цієї проекції та осі ординат відкласти точку $A_x$, яка і буде нашою шуканою точкою. Всі ці дії повторюємо для інших точок: В, С та D знаходячи їхні проекції $B_x$, $C_x$ та $D_x$.

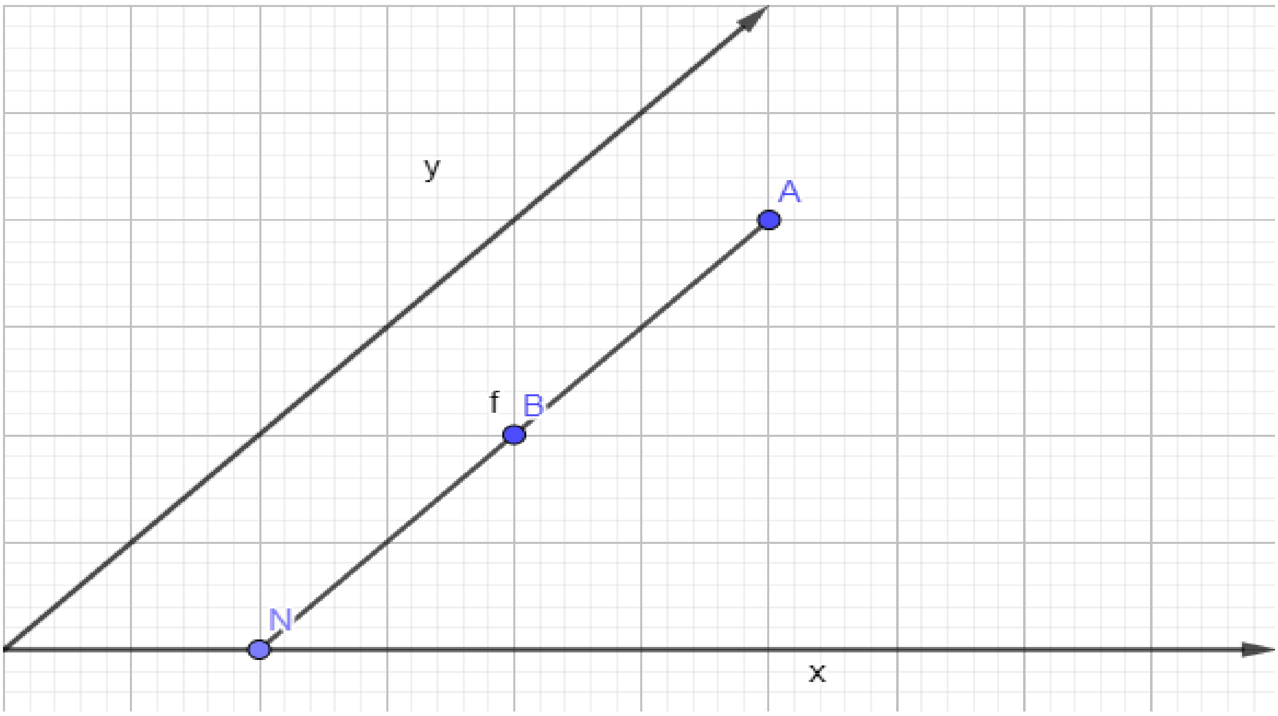
Тепер давайте спробуємо зобразити точку А на малюнку .

На малюнку зображено точку $A$ та її проекцію $A_x$. Щоб зобразити інші точки повторюємо все те саме, що і для точки $A$.

**Задача 2.** Дано дві точки *A(1; 2), B(1; 1).* Знайти координати точки *N*, що симетрична точці *A* відносно точки *B.*

**Розв'язання.** Розв'яжемо графічно.

У загальній декартовій системі координат зобразимо точки *A(1; 2)* і *B(1; 1).* Проведемо промінь *f* і від точки В відкладемо відрізок на відстань *AB* по промені *f.* Ми отримаємо точку *N (2;0),* яка є симетричною до *A* відносно *B*.

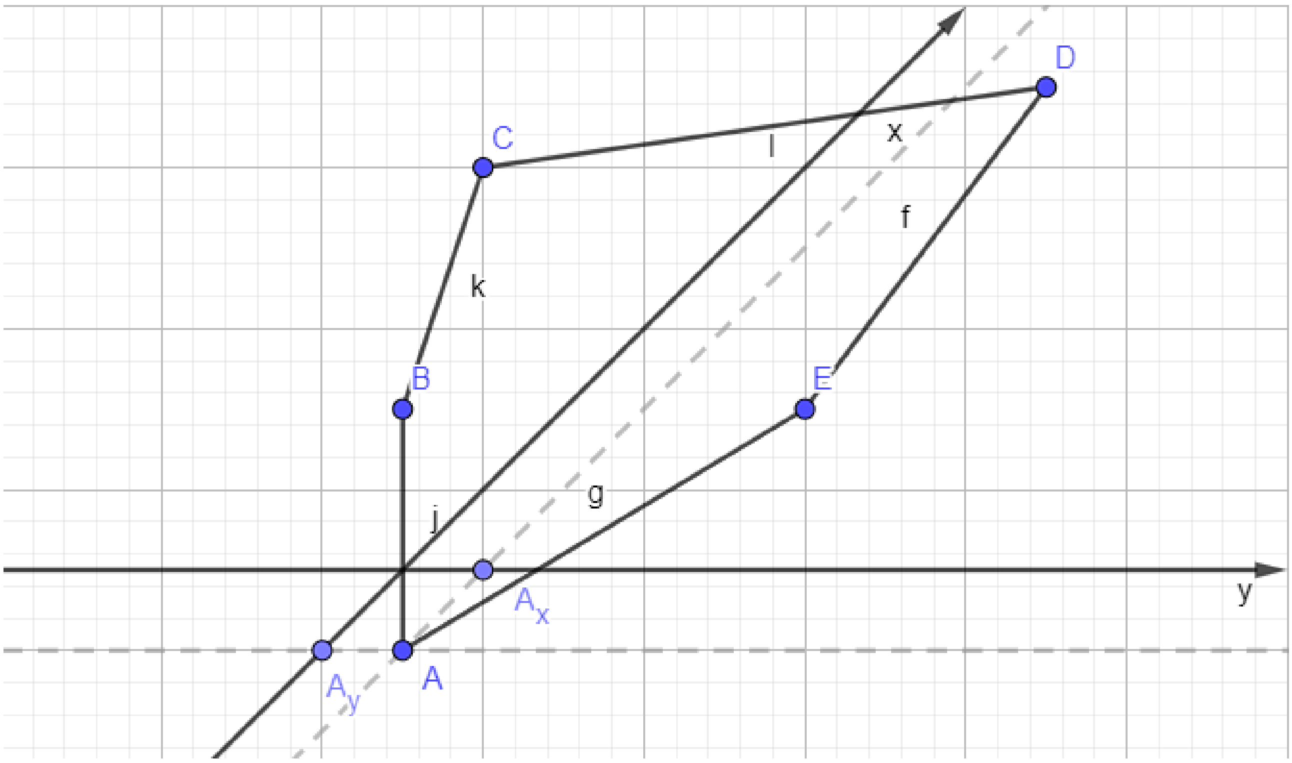



**Відповідь:** *N(2;0).*

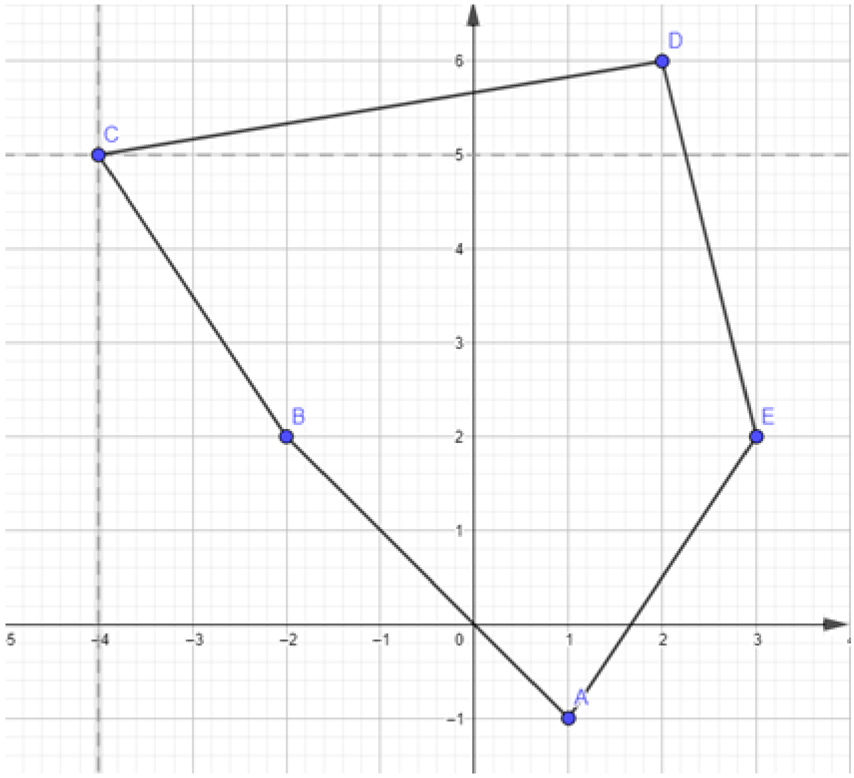
**Задача 3.** Побудувати п'ятикутник, *ABCDE* вершини якого задано точками *A(1;-1), B(-2;2), C(-4;5), D(2;6), E(3;2)* відносно косокутної системи координат із кутом ω = π/4.

**Розв’язання.** Спочатку побудуємо саму систему координат. У нас дано, що кут між осями дорівнює π/4, а для того, щоб дізнатись скільки це дорівнює в градусах потрібно перевести їх з радіан. Для цього потрібно π=180° поділити на 4, тобто ω = 180°/4 = 45°. Ставимо горизонтальну вісь *Ox* і під кутом, який ми з вами щойно знайшли 45° проводимо вісь *Oy*.

Для того, щоб зобразити даний п’ятикутник ми маємо спочатку відкласти точки. Щоб зобразити дані точки потрібно відступати задану відстань від осей, але вісь *Oy* нахилена під кутом 45°, то ми маємо від осі *Ox* відкладати не перпендикуляр, а пряму під кутом 45°. На малюнку на прикладі точки *A* показано як саме потрібно відкладати ці точки. І саме так буде виглядати даний п’ятикутник *ABCDE* в загальній декартовій системі координат, осі якої розміщені під кутом 45°.




Для порівняння зобразимо даний п’ятикутник в прямокутній декартовій системі координат.




4.	**Підсумки заняття.**

Сьогодні, діти, ми з вами познайомилися з афінною системою координат. Дізнались її основні властивості та означення. Застосували дані знання на практиці під час розв'язування задач. Зверніть увагу що всі малюнки, які сьогодні були продемонстровані створені за допомогою GeoGebra.

5.	**Домашнє завдання.**

1)	Побудувати п'ятикутник, *ABCDE* вершини якого задано точками *A(2;-3), B(-6;4), C(-2;3), D(1;6), E(3;2)* відносно косокутної системи координат із кутом ω = π/3 (розв'язувати в афінній системі координат).

2)	Зобразити проекцію точок *A, B* та *C* на вісь абсцис точок, якщо дані точки мають координати *A(-2;3), B(-3;1), C(5,-1), D(2;2).*

## 2.3. Полярна система координат. Застосування програми Gran-2D для графічного аналізу системи геометричних об'єктів. Сферична та циліндрична системи координат

**Тема.** *Полярна система координат. Розв'язування задач. Застосування програми Gran-2D для графічного аналізу системи геометричних об'єктів. **Сферична та циліндрична системи координат*

**Мета:**

- *Навчальна: ознайомити дітей з поняттями полярна вісь, полярна система координат, полюс.*
- *Розвивальна: розвинути в дітей математичну логіку, вміння визначати координати точок та використовувати отримані знання на практиці.*
- *Виховна: виховувати в дітей математичну компетентність.*

**Використана література:** [2], [3], [16]

**Тип заняття**: формування навичок і вмінь.

**Хід заняття**

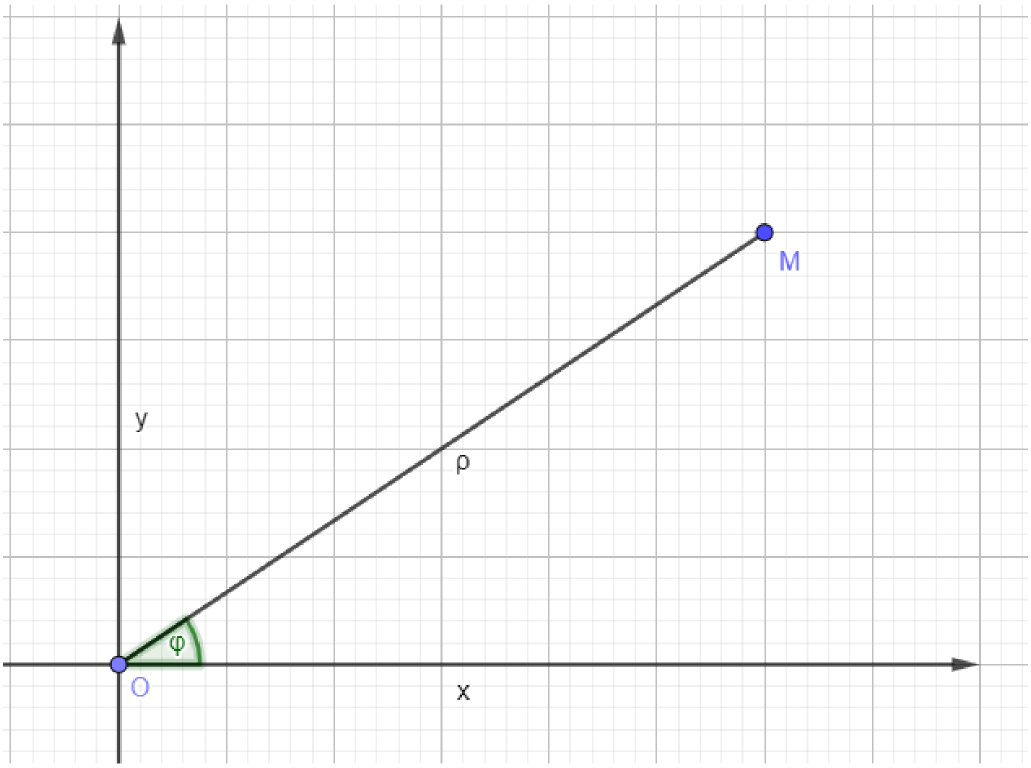
**1. Вступ.**

На цьому уроці ми познайомимося з полярною системою координат, навчимось переходити від афінної системи до полярної, а почнемо ми своє знайомство з означення.

**2. Вивчення нового матеріалу.**

Для розв'язання деяких задач не завжди зручно використовувати звичайну декартову систему координат. Тому було винайдено так звану полярну систему координат, що задається за допомогою певної осі координат *Ox* і точки центру цієї осі *O*, яка називається полюсом. Для того, щоб визначити її координати потрібно знайти відстань від полюса до заданої точки та її кут. Крім того, потрібно задати орієнтацію, тобто вказати, який поворот на площині навколо точки *O* вважається додатним (зазвичай додатною орієнтацією вважають рух проти годинникової стрілки).

Нехай *M* – довільна точка площини, відмінна від полюса. Тоді віддаль $\rho$ від точки *M* до точки *O* називається першою полярною координатою точки *M* (полярним радіусом). Друга полярна координата (амплітуда) – кут $\varphi = \angle xOM$.




Для того, щоб відповідність між точками площини і впорядкованими парами полярних координат (ρ; φ) була взаємно-однозначною, вважають, що ρ і φ змінюються в межах: ρ∈[0;+∞)  φ∈[0;2π) .

Для полюса O перша координата ρ = 0, а друга – невизначена.

На площині, де введено полярну систему координат, розглянемо декартову прямокутну систему координат, прийнявши полюс O за початок координат і за додатну піввісь Ox – полярну вісь. За вісь Oy приймаємо вісь, що отримується поворотом осі Ox навколо точки O на кут 90°. Масштабний відрізок полярної системи координат вважаємо рівним масштабному відрізку прямокутної декартової системи. Якщо , ρ і φ – полярні координати довільної точки M, яка не збігається з точкою O площини, а $xy$ – її декартові координати, то очевидний такий взаємозв'язок:

$$x = \rho \cos \varphi\,, \qquad y = \rho \sin \varphi,$$

та

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

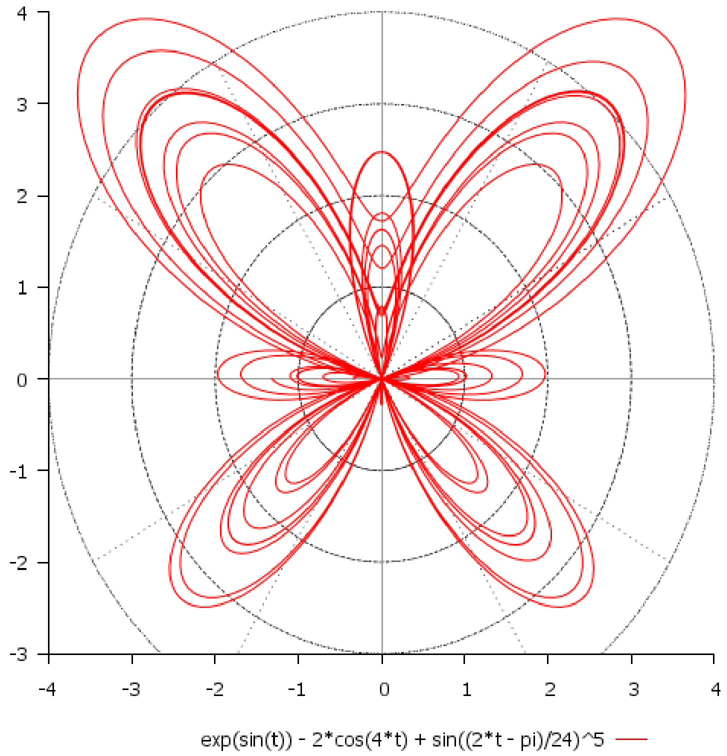
$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

На відміну від афінної системи координат, полярна має інші властивості і з її допомогою можна створити цікаві візерунки, які будуть мати нехарактерний і цікавий вигляд.

Зараз ми розглянемо конкретні рисунки, які легко будуються в полярній системі координат. Одним із них є графік «метелика», який має функцію:

$$r(t) = e^{\sin(t)} - 2\cos(4t) + sin^5\left(\frac{2t - \pi}{24}\right),$$

$$t \in [-8\pi; 8\pi].$$



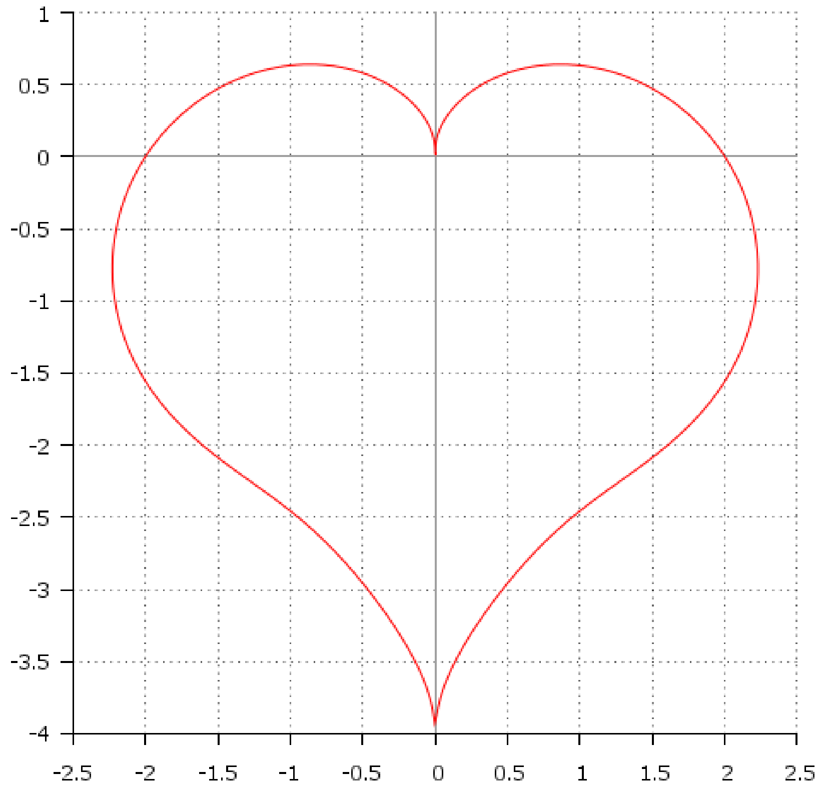

Незважаючи на те, що математика точна наука, вона є доволі романтичною. Так, за допомогою полярної системи координат, ви можете в нестандартній формі висловити свої почуття. А зробимо це за наступною формулою.

$$r(t) = 2 - 2\,sin(t) + \sin(t)\frac{\sqrt{|\cos(t)|}}{\sin(t) + 1{,}4},$$

$$t \in [0; 2\pi].$$

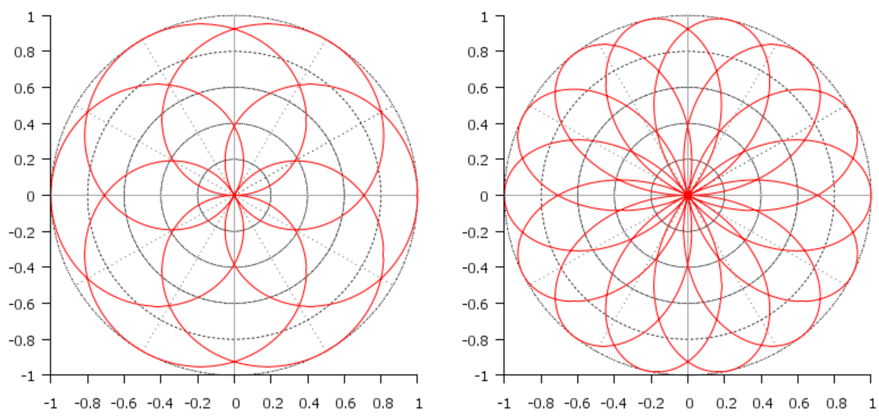
Дана функція має назву «серце», саме так справжні математики можуть подарувати комусь своє серце:

$$r(t) = \sin\left(\frac{3}{4}t\right), t \in [0; 8\pi].$$



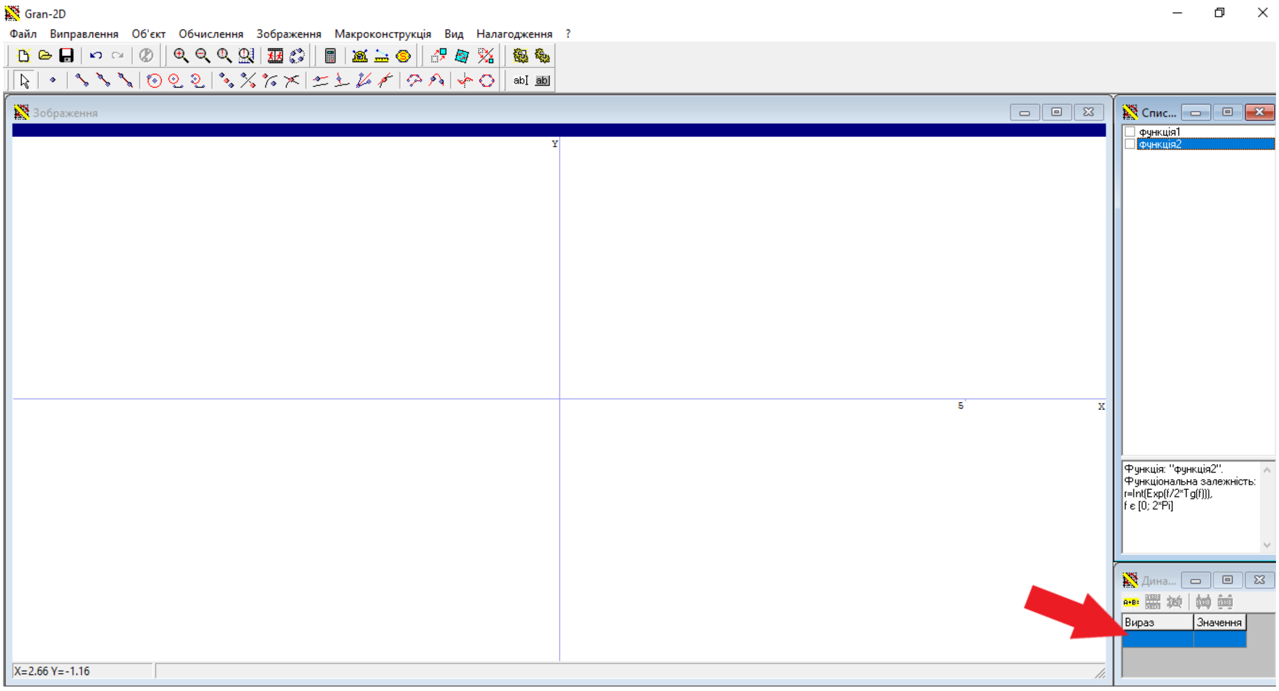

Зараз ми розглянемо ще одну функцію, яка допоможе вам ще більше здивувати свою обраницю. Адже яке освічення в коханні без квітів?

Отож, зараз я пропоную вам побудувати графік, який має назву «квітка». Кількість пелюсток нашої квітки буде залежати від того, який дріб ми напишемо перед *t*.



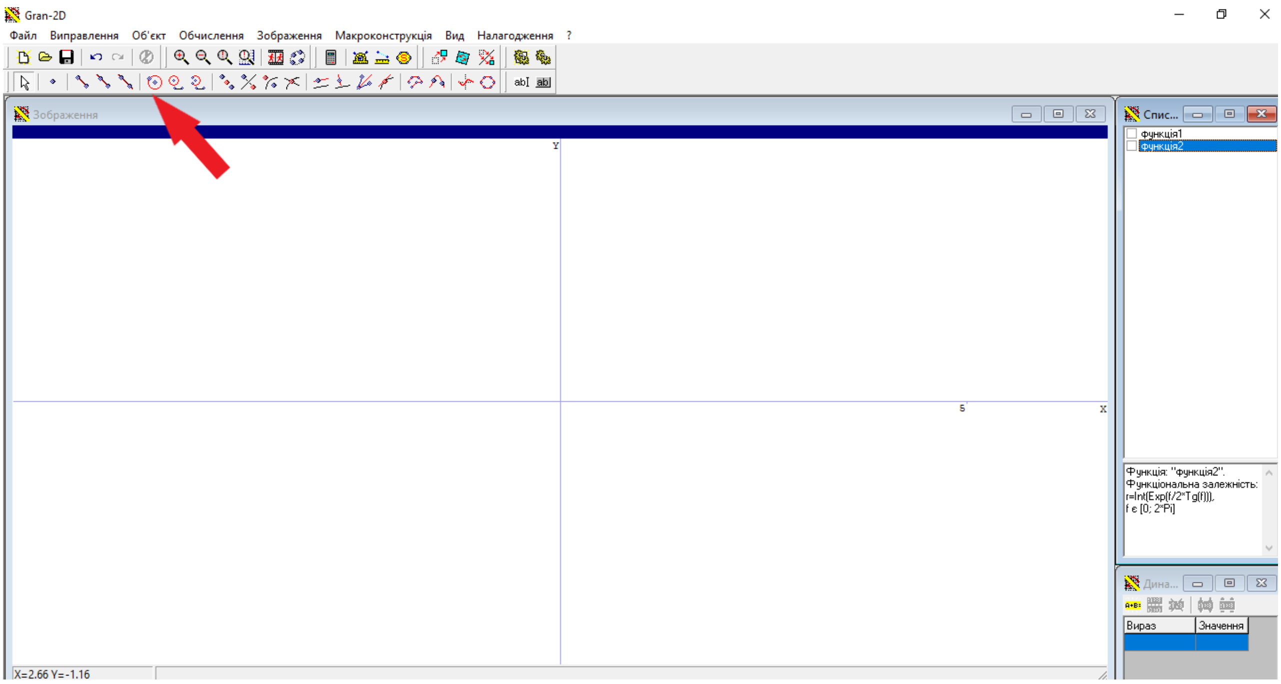
На попередніх заняттях ми вже з вами знайомились з програмою GeoGebra. Але, на жаль, створювати полярні рисунки в запропонованій програмі не можна. Тому ми повинні познайомимося з іншою програмою, в якій можна створювати рисунки не тільки в афінній, але і в полярній системі координат. Дана програма називається Gran-2D.

Справа внизу ми можемо побачити панель, в якій будуть відображатись всі обчислення: відстань, площа, кут. Програма обчислить все за нас і відобразить відповіді тут.

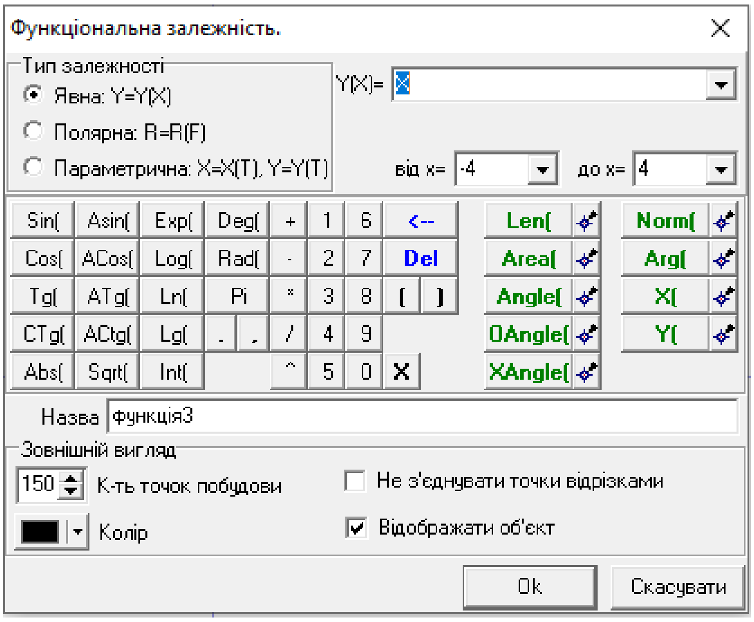



Зліва вверху ми можемо побачити панель інструментів. Тут отримуємо змогу додавати прямі, точки, вектори, міряти відстані та кути. Також можна створювати складні фігури: многокутники, круги, кола та дуги з певним радіусом. На відміну від GeoGebra, саме в цій програмі ми можемо вводити графік вручну і обирати систему координат. Для того, щоб зобразити певні об’єкти будемо звертатись до цього меню.

(демонстрація можливостей за допомогою комп’ютерної техніки)

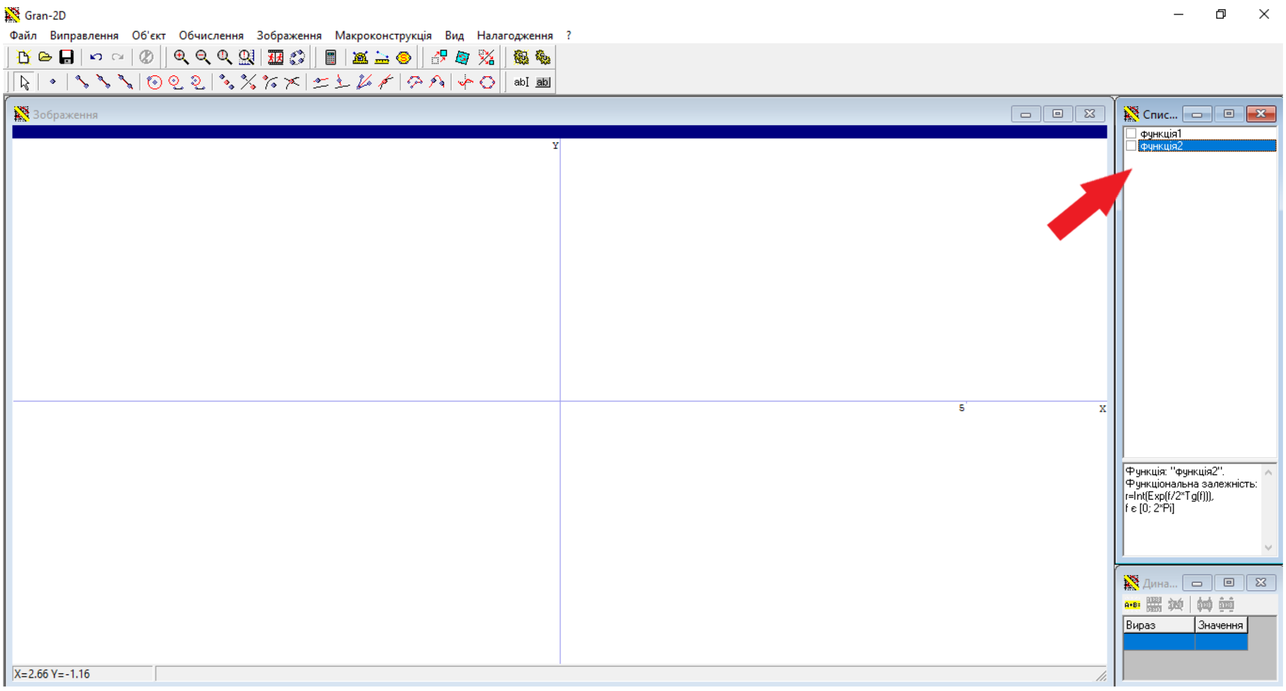



За допомогою кнопки «функціональна залежність», ми запишемо графік вручну, а також налаштуємо його під наші потреби.




Справа вверху ми можемо редагувати раніше створені об'єкти. Кожний об'єкт, який ми додали буде відображатись тут. І, наприклад, якщо ми створили графік, але забули змінити систему координат, ми завжди можемо змінити її саме тут.

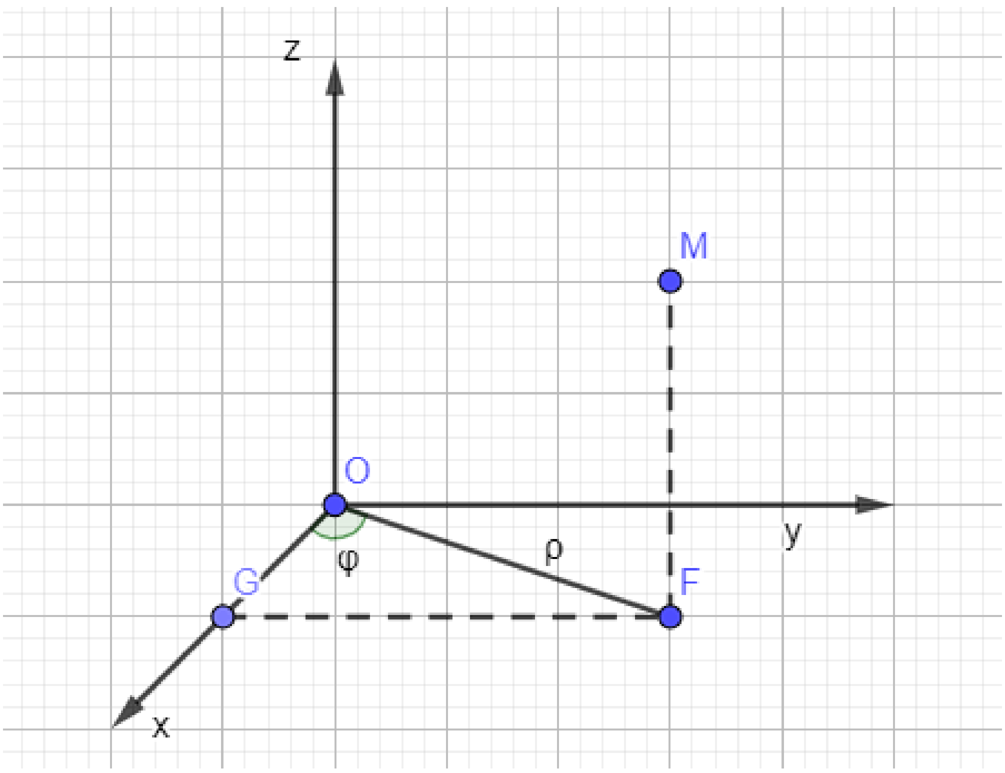
(демонстрація можливостей за допомогою комп'ютерної техніки)




Усі наші рисунки, які ми створюємо, будуть відображатись на центральній панелі.

**2**. Подання нового матеріалу**

Оскільки ми вже ознайомилися з полярною системою координат, не важко зрозуміти, що вона існує не тільки на площині, а й у просторі. Полярні системи координат, які створені у просторі називають циліндричними та сферичними системами координат.



Для отримання циліндричної системи координат потрібно взяти звичайну прямокутну систему *Oxyz*,  та замість перших двох координат $x, y$ взяти полярні координати ρ,  φ, а третю координату $z$ залишити без змін.

Координати точки М простору в цій системі записуються у вигляді *M (ρ; φ; z)*.

Залежність між прямокутними координатами точки *M(x; y; z)* і її циліндричними координатами *M (ρ; φ; z),* можна вивести з формул:

$$x = \rho\cos\varphi\,, y = \rho\sin\varphi\,, z = z,$$
$$0 \le \rho < +\infty, 0 \le \varphi < 2\pi, -\infty < z < +\infty$$

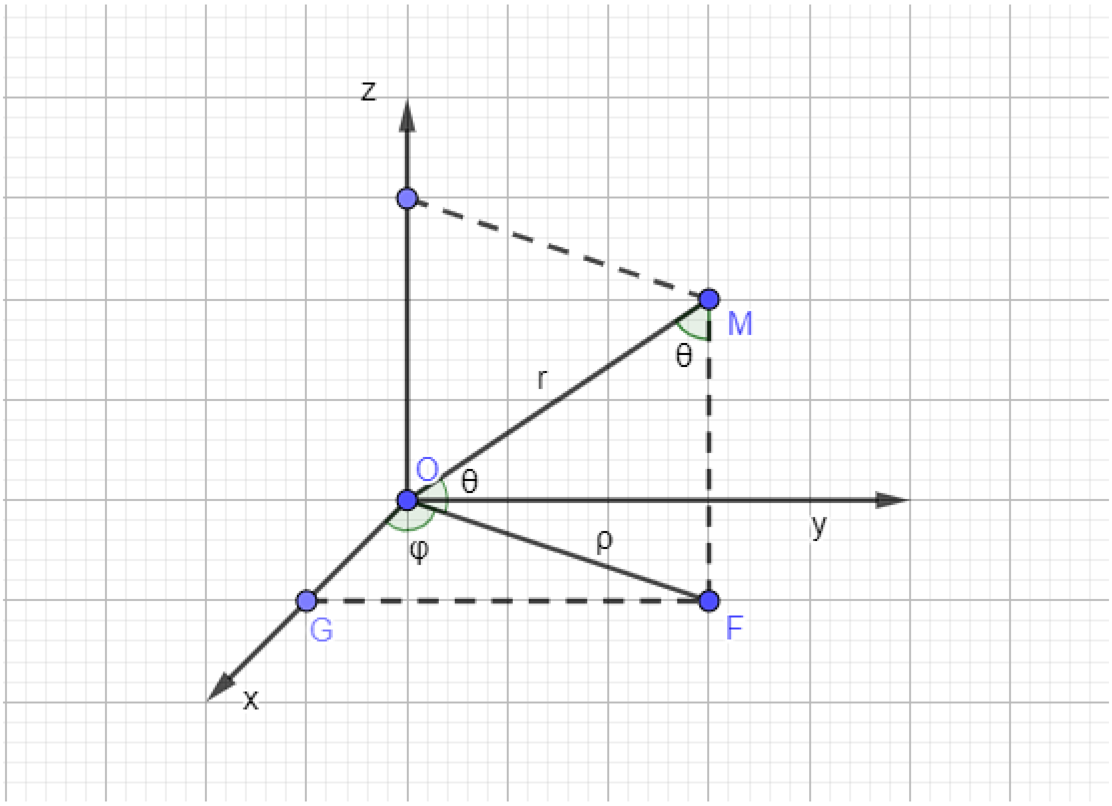
або

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z = z.$$

Отже, якщо прямокутна і циліндрична системи координат розміщені так, як на рисунку, то зв'язок між прямокутними і циліндричними координатами задається формулами.

Натомість для створення сферичної системи координат потрібно у системі Oxyz взяти довільну точку M і через неї та вісь Oz провести площину. Позначимо відрізок OM як r. φ – двогранний кут між площинами zOx і z$\overline{AB}$ , θ – кут між віссю Oz і променем OM . Упорядкована трійка чисел r, φ, θ однозначно визначає положення точки M у просторі. Ці числа називаються сферичними координатами точки M .

Знайдемо залежність між прямокутними і сферичними координатами точки M. З прямокутних трикутників ONM і OPN маємо




$$z = r\cos\theta\,, \qquad \rho = r\sin\theta\,, x = \rho\cos\varphi\,, \qquad y = \rho\sin\varphi.$$

Тоді

$$x = r\sin\theta\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi\,, \qquad z = r\cos\theta,$$

де

$$0 \le r < +\infty, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi, \qquad 0 \le \theta \le \pi$$

або

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \varphi = \arccos\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right).$$

Таким чином, якщо прямокутна і сферична системи координат розміщені так, як на рисунку, то зв'язок між прямокутними і сферичними координатами задається формулами.

## 3. Розв'язування задач.

**Задача 1.** Дано прямокутні координати точки М $(-1; \sqrt{3})$. Визначити полярні координати цієї точки.

**Розв'язання**. За формулами маємо:

2) $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2, \quad \cos\varphi = \frac{x}{r} = -\frac{1}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

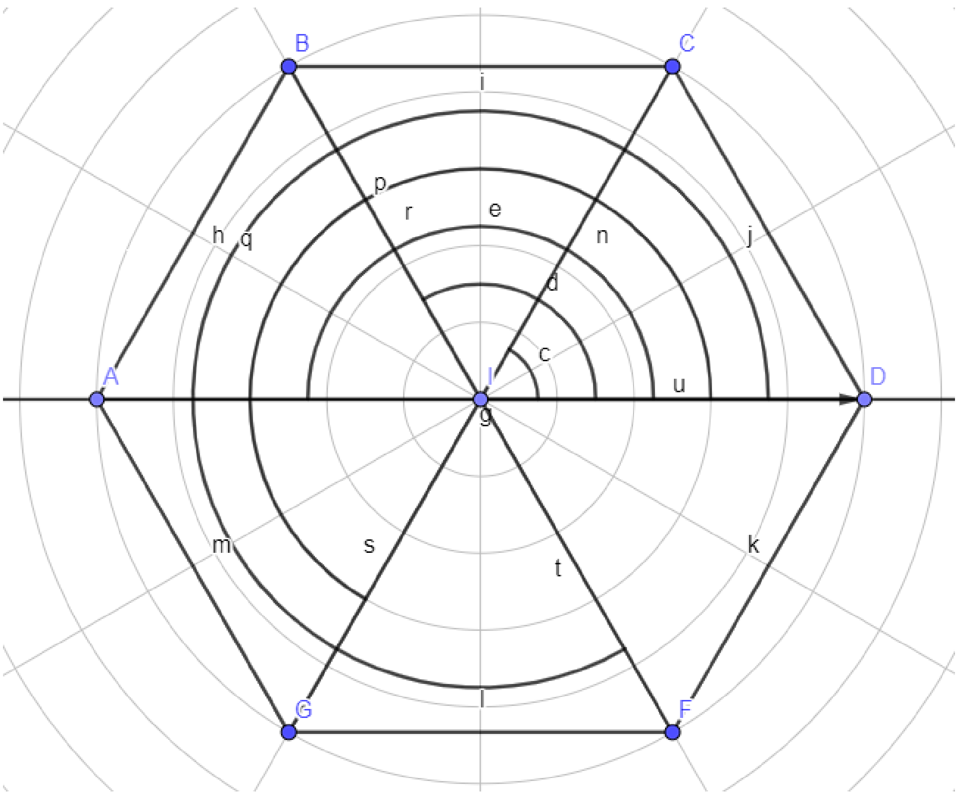
Значить, кут φ= 120° і M (2; 120°).

Точка M розташована в II чверті.

**Відповідь:** M (2; 120°).

**Задача 2.** Дано правильний шестикутник ABCDFG за допомогою полярної системи координат визначіть координати вершин даного шестикутника, обравши за центр точку I, за полярну вісь – промінь ID.

**Розв'язання.** для знаходження даних точок спробуємо зобразити даний шестикутник.




З малюнку можна зрозуміти, що точки A, B, C, D, F та G знаходяться на одному колі, тому наша змінна *r* буде однаковою для всіх точок, різниця – тільки в куті повороту φ. Для того, щоб визначити цей кут повернемось до малюнка. Якщо поглянути на трикутник ICD можна побачити, що він також правильний, а, отже, кут ICD дорівнює 60°, тому наші точки матимуть координати C(1; 0°). D(1; 60°)., F(1; 120°), G(1; 180°),A(1; 240°), B(1; 300°), якщо відрізок ID=1.

**Відповідь:** C(1; 0°). D(1; 60°)., F(1; 120°), G(1; 180°),A(1; 240°), B(1; 300°).

**4. Підсумки заняття.**

Діти, сьогодні ми з вами познайомилися з полярною системою координат, дізнались її основні властивості та означення, застосували дані знання на практиці під час розв'язування задач, а також познайомились з програмою Gran-2D, в якій можна створювати дані рисунки. Зверніть увагу що всі малюнки, які сьогодні були продемонстровані створені за допомогою GeoGebra та Gran-2D.

**5. Домашнє завдання.**

1) У програмі Gran-2D самостійно створити графік в полярній системі координат.

2) Дано правильний восьмикутник ABCDFGEH. За допомогою полярної системи координат визначіть координати вершин даного восьмикутника, обравши за центр точку I, за полярну вісь – промінь ID.

## 2.4. Поділ відрізка у заданому відношенні.

**Тема.** *Поділ відрізка у заданому відношенні. Розв'язування задач.*

**Мета:**

- *Навчальна: навчити дітей ділити відрізок в заданому співвідношенні, вивчити нові математичні формули, означення та теореми.*
- *Розвивальна: розвинути в дітей математичну логіку, вміння визначати та використовувати потрібні математичні формули*
- *Виховна: виховувати в дітей математичну компетентність.*

Використана література: [1], [5], [6]

### Хід заняття

**1. Вступ**

Ми вже з вами вивчили афінну та полярну системи координат, навчилися будувати рисунки. Сьогодні ми крокуємо далі. Інколи виникає потреба поділити не тільки навпіл, а в певному співвідношенні. Для цього нам потрібно вивчити формули, за допомогою яких можна це зробити.

**2. Вивчення нового матеріалу**

Ви вже могли зауважити, що для того, щоб намалювати відрізок AB ми спочатку відкладаємо точку A і B, а потім за допомогою олівця чи ручки з'єднуємо A та B. Зазвичай потрібно провести пряму у певному напрямку.

***Означення.*** *Напрямленим відрізком* $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ *називають відрізок, кінці якого взято в певному порядку. Точка A називається початком цього напрямленого відрізка, точка B – кінцем.*

Якщо точка A та B збігаються, тобто вони знаходяться в одній точці, то напрямлений $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ відрізок називається нульовим (виродженим).

Нехай на одній і тій же осі лежать два напрямлених відрізка $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ та $\overrightarrow{CD}$, то відношенням цих відрізків називається число λ, яке дорівнює відношенню $\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{\overrightarrow{CD}}$.

Якщо $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ – вироджений напрямлений відрізок, а $\overrightarrow{CD}$ – невироджений, то λ=0. Якщо ж напрямлений відрізок $\overrightarrow{CD}$ – вироджений, то відношення λ не визначається.

У частковому випадку, розглядаючи на деякій осі невироджений напрямлений відрізок $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ і точку C цієї ж осі, відміну від точки B, прийдемо до наступного означення.

***Означення.*** *Точка C ділить напрямний відрізок* $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ *в заданому співвідношенні λ, якщо виконується рівність* $\overline{\mathrm{AC}} = \lambda \cdot \overline{\mathrm{CB}}$.

Зауважимо, що точка C може знаходитись будь де, тобто C може знаходитись за межами даного відрізка.

***Означення.*** *Відношення, в якому точка C ділить невироджений напрямлений відрізок* $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, *називається число λ, що дорівнює відношенню величин напрямлених відрізків* $\overrightarrow{\mathrm{A}C}$ *та* $\overrightarrow{C\mathrm{B}}$, *тобто* $\lambda = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{C\mathrm{B}}}$.

Відношення невироджених напрямлених відрізків $\overrightarrow{\mathrm{A}C}$ та $\overrightarrow{C\mathrm{B}}$ називають також простим відношенням точок A,B,C і позначають (ABC).

Із означення випливає, що λ > 0, якщо точка C лежить між точками A і B, та λ < 0 в протилежному випадку. Крім того:

якщо точка C збігається з точкою M – серединою відрізка AB, то λ = 1;

якщо точка С належить променю МА, то | λ | ≤ 1;

якщо точка С належить променю МВ і не збігається з точкою В, то | λ | ≥ 1.

Зазначимо, що відношення, в якому точка С ділить невироджений напрямлений відрізок $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, не дорівнює -1.

Число λ не залежить від вибору масштабу на координатній осі.

***Теорема.*** *Якщо на декартовій осі координат задано дві різні точки А($x_1$) і В($x_2$), а точка С(х) ділить прямокутний відрізок* $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ *у відношенні λ, то*

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \ i \ x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

***Теорема.*** *Яке б не було число λ , λ ≠ -1, існує єдина точка С, яка ділить невироджений напрямлений відрізок* $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ *у відношенні λ.*

***Теорема.*** *Якщо відносно загальної декартової системи координат на площині задано дві різні точки* $A(x_1, y_1)$ *і* $B(x_2, y_2)$ *і точка С(х, у) ділить напрямлений відрізок* $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ *у відношенні λ, то λ дорівнює тому зі співвідношень* $\frac{x - x_1}{x_2 - x}$ *або* $\frac{y - y_1}{y_2 - y}$ *, в якому знаменник відмінний від нуля, і будь-якому з них, якщо обидва знаменники,* $x_2 - x$ *і* $y_2 - y$*, відмінні від нуля.*

Координати *х, у* точки С виражаються через координати точок А і В за допомогою формул:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 - \lambda}.$$

**3. Розв'язування задач.**

**Задача 1.** Відрізок АВ, що з'єднує точки А(3;1) та В(16;-8) розділити у відношенні λ=3/4.

**Розв'язання.** За правилами поділу відрізка знаходимо координати шуканої точки С за допомогою формули.

$$x = \frac{3 + \frac{3}{4} \cdot 16}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{15}{\frac{7}{4}} = 8\frac{4}{7};$$

$$y = \frac{1 - \frac{3}{4} \cdot 8}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{-5}{\frac{7}{4}} = -\frac{20}{7} = -2\frac{6}{7};$$

Невідома точка буде мати координати:

$$C\left(8\frac{4}{7}; -2\frac{6}{7}\right).$$

**Задача 2.** Знайти точку В, яка ділить відрізок АВ у відношенні $\frac{7}{11}$, якщо відомо координати точки поділу С(2;3) та початку відрізка А(-4;-7).

**Розв'язання.** Якщо в попередній задачі нам було задано крайні точки відрізка, а точку, яка його ділить треба було знайти, то в цій задачі нам даний один кінець і точка, яка його ділить. Для того, щоб знайти невідомий кінець, ми підставимо наші координати точки С замість лівої частини, а змінну $x_2$ залишемо невідомою:

$$2 = \frac{-4 + \frac{7}{11} \cdot x_2}{1 + \frac{7}{11}};$$

$$3 = \frac{-7 + \frac{7}{11} \cdot y_2}{1 + \frac{7}{11}}.$$

З отриманих рівностей визначаємо координати кінця відрізка, тобто точки В($x_2$; $y_2$):

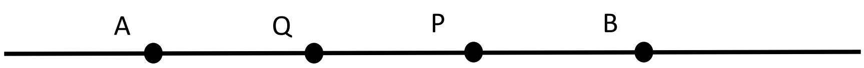
$$\frac{7}{11}x_2 = 2\left(1 + \frac{7}{11}\right) + 4 = \frac{80}{11} \Rightarrow x_2 = \frac{80}{7} = 11\frac{3}{7};$$

$$\frac{7}{11}y_2 = 3\left(1 + \frac{7}{11}\right) + 7 = \frac{131}{7} \Rightarrow y_2 = \frac{131}{7} = 18\frac{5}{7};$$

Точка В буде мати координати: В($11\frac{3}{7}; 18\frac{5}{7;}$).

**Задача 3.** Визначити координати кінців А і В відрізка, який точками Р(25) і Q( 9) поділено на три рівні частини.

**Розв’язання.** Зобразимо дані точки на прямій.



Нехай точка A має координату A(a), точка B(b) .

Очевидно, що $\frac{AP}{PB} = \frac{1}{2}$, тобто $\lambda = \frac{25-a}{b-25} = \frac{1}{2}$.

Аналогічно, $\frac{AQ}{QB} = \frac{2}{1}$, тобто $\lambda = \frac{9-a}{b-9} = \frac{2}{1}$.

Отримали систему:

$$\begin{cases} 2(25-a) = b-25, \\ 9-a = 2(b-9); \end{cases}$$

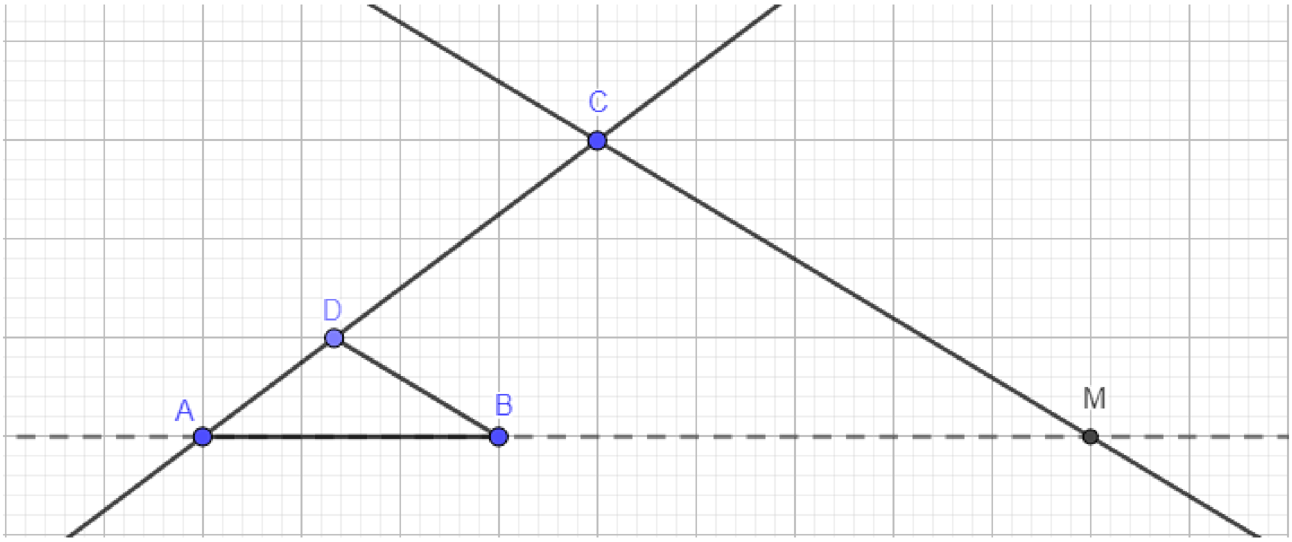
$$\begin{cases} 2a+b = 75, \\ a+2b = 27; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 41 \\ b = -7 \end{cases}$$

Отже, A(41), B(-7).

**Задача 4.** Дано відрізок AB, який розділений точкою M, яка не лежить на ньому у відношенні $\frac{3}{4}$.

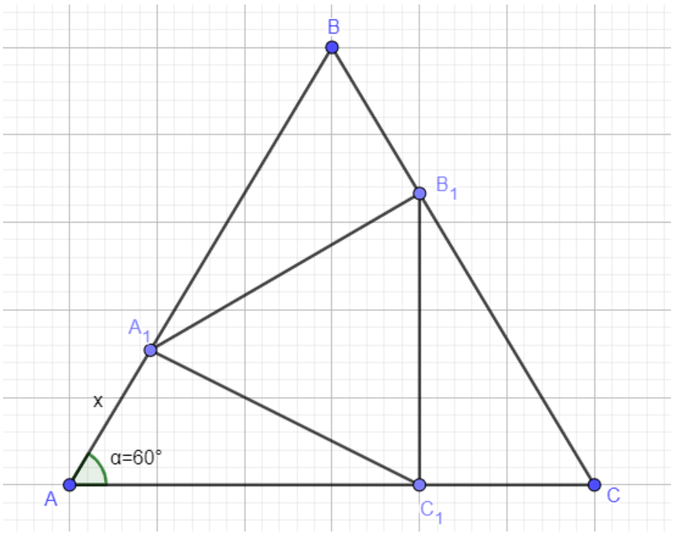
**Розв'язання.** Проведемо через точку A будь-яку пряму, і на цій прямій відкладемо відрізок AC такай, що AC=*3a,* де a довільна. Далі від точки C в сторону A відкладемо відрізок CD=*2a*.




Проведемо відрізок DB і CM || DB. Точка M і буде шуканою. Вона ділить даний відрізок зовнішнім образом у відношенні:

$$\frac{AN}{BN} = \frac{AC}{DC} = \frac{3a}{2a} = \frac{3}{2}.$$

**Задача 5.** На сторонах рівностороннього трикутника $ABC$ розташовані точки $A_1, B_1$ та $C_1$та, що $AA_1 = BB_1 = CC_1 = x$. Стороно трикутника рівна $a$. Знайти таке значення $x$, при якому відношення площ трикутників $A_1B_1C_1$та $ABC$ було рівне даному числу $m > 0$.




**Розв'язання.** Маємо $\Delta AA_1C_1 = \Delta BB_1A_1 = \Delta CC_1B_1$(за двома сторонами і кутом між ними). Тоді $A_1C_1 = B_1A_1 = C_1B_1$, а це означає що трикутник $A_1B_1C_1$ рівносторонній, тому

$$m = \frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta \mathrm{ABC}}} = \left(\frac{A_1C_1}{AC}\right)^2.$$

Можна зрозуміти, що $m < 1$. В $\Delta AA_1C_1$за теоремою косинусів знайдемо

$$A_1{C_1}^2 = x^2 + (a - x)^2 - 2x(a - x)cos60° = 3x^2 - 3ax + a^2.$$

Тоді $m = \frac{3x^2 - 3ax + a^2}{a^2}$; $3x^2 - 3ax + a^2(1 - m) = 0$;

$$x_{1,2} = \frac{a}{b}\left(3 \pm \sqrt{12m - 3}\right) \text{ при } 12m - 3 \geq 0, m \geq \frac{1}{4}$$

Необхідно щоб виконувалась умова *0 < x < a*. Розглянемо розв'язки рівняння

*1)* $x_1 = \frac{a}{6}\left(3 - \sqrt{12m - 3}\right); 0 < \frac{a}{6}\left(3 - \sqrt{12m - 3}\right) < a;$

$$0 < 3 - \sqrt{12m - 3} < 6;$$

$$\begin{cases} \sqrt{12m-3} < 3, \\ \sqrt{12m-3} < -3; \end{cases} \begin{cases} 12m-3 < 9, \\ 12m-3 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} m < 1, \\ m \geq \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Що підходить для умов рівняння $\frac{1}{4} \leq m < 1$.

$$2)\ x_2 = \frac{a}{6}\left(3 + \sqrt{12m-3}\right); 0 < \frac{a}{6}\left(3 + \sqrt{12m-3}\right) < a;$$

$$0 < 3 + \sqrt{12m-3} < 6;\ \sqrt{12m-3} < 3; \frac{1}{4} \leq m < 1.$$

**Відповідь:** $x_{1,2} = \frac{a}{6}\left(3 \pm \sqrt{12m-3}\right)$ при $\frac{1}{4} \leq m < 1$.

**4. Підсумки заняття.**

Сьогодні, діти, ми з вами навчилися ділити відрізок у заданому співвідношенні, дізнались основні властивості та означення, застосували дані знання на практиці під час розв'язування задач.

**5. Домашнє завдання.**

**1)** Відрізок АВ, що з'єднує точки А(1;2;) та В(4;-5) розділити у відношенні λ=1/4.

**2)** Визначити координати кінців А і В відрізка, який точками Р(-1) і Q(1) поділено на три рівні частини.

## 2.5. Площа трикутника.

**Тема.** *Площа трикутника. Розв'язування задач.*

**Мета:**

- *Навчальна: навчити дітей визначати площу трикутника за допомогою інших доступних методів.*
- *Розвивальна: розвивати в дітей математичну логіку, вміння визначати та використовувати потрібні математичні формули.*
- *Виховна: виховувати в дітей математичну компетентність.*

Використана література: [1], [2], [3].

### Хід заняття

**1. Вступ**

На попередніх заняттях під час розв'язування задач на знаходження площі трикутника найчастіше ви звертались до його сторін і кутів. Для того, щоб мати такі дані інколи достатньо знати координати кількох його точок. Сьогодні ми ознайомимось з різними методами, за допомогою яких можна знайти площу трикутника.

## 2. Подання нового матеріалу

Не завжди для знаходження площі трикутника потрібньо знати його сторини чи кути. Інколи ці дані можна вивести відомими нам методами з координат його вершин. Розглянемо задачу обчислення площі трикутника, якщо відомо координати його вершин.

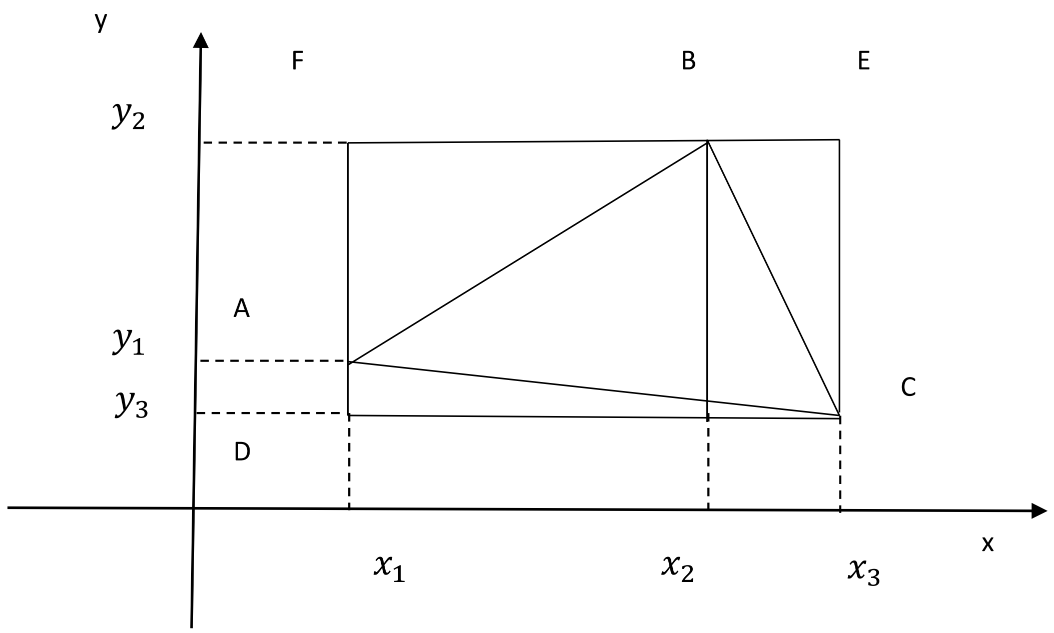
Для початку введемо в просторі прямокутну декартову систему координат. Розглянемо трикутник ABC, вершинами якого є точки: A$(x_1; y_1)$, B$(x_2; y_2)$ та C$(x_3; y_3)$. Необхідно знайти площу трикутника ABC.

Існує кілька методів розв'язування цієї задачі.

**Теорема.** *Якщо відносно прямокутної декартової системи координат на площині задано точки A$(x_1; y_1)$, B$(x_2; y_2)$, C$(x_3; y_3)$, то для обчислення його площі користуються формулою:*

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

***Доведення.*** Наведемо одне з відомих доведень цієї теореми.



Для цього опишемо навколо даного трикутника прямокутник так, як це зроблено на малюнку. Тоді очевидне таке співвідношення для вказаних площ:

$$S_{\Delta ABC} = S_{DFEC} - S_{\Delta ABF} - S_{\Delta BEC} - S_{\Delta ACD},$$

$$S_{DFEC} = DC \cdot DF = (x_3 - x_1)(y_2 - y_3),$$

$$S_{\Delta ABF} = \frac{1}{2} AF \cdot FB = \frac{1}{2}(y_2 - y_1)(x_2 - x_1),$$

$$S_{\Delta BEC} = \frac{1}{2} BE \cdot EC = \frac{1}{2}(x_3 - x_2)(y_2 - y_3),$$

$$S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} DC \cdot AD = \frac{1}{2}(x_3 - x_1)(y_1 - y_3),$$

Врахувавши виписані значення площ, отримаємо

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(x_3 y_2 + x_1 y_3 + x_2 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_3 - x_3 y_1).$$

З іншого боку, розкривши визначник, що фігурує у формулі для площі $\Delta ABC$, справедливість вказаної формули стає очевидною для поданого розташування трикутника відносно осей координат. Можна перевірити, що в кожному з інших можливих випадків розташування трикутника отримується така формула.

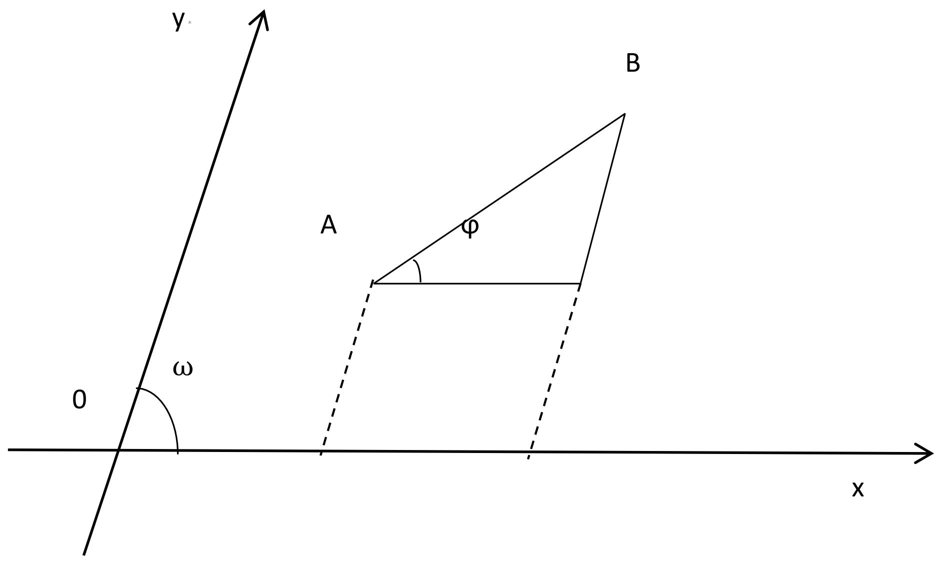
Площа трикутника в косокутній системі координат із вершинами у точках A$(x_1; y_1)$, B$(x_2; y_2)$, C$(x_3; y_3)$, обчислюється за формулою

$$S_{\Delta ABC} = \left| \frac{\sin \omega}{2} \{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\} \right|,$$

де ω - координатний кут.

***Зазначимо*** (система координат загальна декартова). Площу даного трикутника можна знайти інакше. Оскільки маємо косокутну систему координат кутом ω між осями координат, то віддаль між двома точками A$(x_1; y_1)$, B$(x_2; y_2)$ шукаємо за допомогою формули

$$AB = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)cos\omega} \ ,$$




### 3. Розв'язування задач.

**Задача 1.** Обчислити площу трикутника ABC за відомими координатами його вершин A(1;1), B(6;4), C(8;2).

**Розв'язання** (система координат прямокутна). Скористаємось формулою

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|(1 \cdot 4 \cdot 1 + 6 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 8 - 1 \cdot 8 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 6)| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 16 = 8 \text{ (кв. од.)}.$$

**Задача 2.** Знайти площу трикутника, вершини якого A(3;5), B(-4;7), C(5,5;-3,5) відносно афінної системи координат з кутом між осями $\frac{\pi}{4}$, одиниці масштабу на кожній з осей рівні між собою.

**Розв'язання** (прямокутна система координат). Знайдемо прямокутні декартові координати вершин трикутника. Для цього скористаємося формулами наведеними вище:

$$x = bcos\omega + a,$$

$$y = bsin\omega.$$

Отже,

$$x_A = 5cos\frac{\pi}{4} + 3 = \frac{5\sqrt{2} + 6}{2},$$

$$y_A = 5sin\frac{\pi}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{2},$$

$$x_B = 7cos\frac{\pi}{4} - 4 = \frac{7\sqrt{2} - 8}{2},$$

$$y_B = 7sin\frac{\pi}{4} = \frac{7\sqrt{2}}{2},$$

$$x_C = -3{,}5cos\frac{\pi}{4} + 5{,}5 = \frac{-3{,}5\sqrt{2} + 11}{2},$$

$$y_C = -3{,}5sin\frac{\pi}{4} = \frac{-3{,}5\sqrt{2}}{2}.$$

Таким чином, A($\frac{5\sqrt{2}+6}{2}$;$\frac{5\sqrt{2}}{2}$), B($\frac{7\sqrt{2}-8}{2}$; $\frac{7\sqrt{2}}{2}$), C($\frac{-3{,}5\sqrt{2}+11}{2}$;$\frac{-3{,}5\sqrt{2}}{2}$).

Тоді площа трикутника

$$S = \frac{1}{2} \cdot mod\left(\frac{21\sqrt{2}}{2} + \frac{55\sqrt{2}}{4} + 7\sqrt{2} + \frac{77\sqrt{2}}{4} + 10\sqrt{2} + \frac{21\sqrt{2}}{4}\right) =$$

$$= \frac{109\sqrt{2}}{8} = 13{,}625\sqrt{2}\,\text{кв. од.}$$

**4. Підсумки заняття.**

Сьогодні, діти, ми з вами вивчили, що площу трикутника можна знайти не тільки за допомогою формули $S = \frac{1}{2}a \cdot b$. Дізнались її основні властивості та означення, застосували дані знання на практиці під час розв'язування задач.

**5. Домашнє завдання.**

1) Знайти площу трикутника, вершини якого А(7;3), В(-1;2), С(1;1) відносно афінної системи координат з кутом між осями $\frac{\pi}{3}$, одиниці масштабу на кожній з осей рівні між собою.

## 2.6. Віддаль між точками.

**Тема.** *Віддаль між точками. Розв'язування задач.*

**Мета:**

- *Навчальна: ознайомити дітей з поняттями віддаль між точками, навчити їх розв'язувати складніші задачі про віддаль між точками.*

- *Розвивальна: розвивати в дітей математичну логіку, вміння визначати та використовувати потрібні математичні формули.*
- *Виховна: виховувати в дітей математичну компетентність.*

Використана література: [1], [5], [6]

**Хід заняття**

**1. Вступ**

На цьому уроці ми навчимось знаходити відстань між двома точками і спробуємо розв'язати декілька складних задач.

**2. Подання нового матеріалу**

Нам вже відомо, що відстанню називають найкоротшу пряму між точками. Цю відстань в геометрії називають Евклідовою.

Евклідовою відстанню між двома точками на площині, що мають в прямокутній декартовій системі координат координати $(x_1, y_1)$ та $(x_2, y_2)$ , є

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Це є версією теореми Піфагора в декартовій системі координат. У тривимірному просторі відстанню між точками $(x_1, y_1, z_1)$ та $(x_2, y_2, z_2)$ є

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

це рівняння можна отримати, якщо двічі послідовно застосувати теорему Піфагора.

У косокутній системі координат віддаль між двома точками $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$ обчислюється за формулою $AB = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)cos\omega}$ ,

де ω - координатний кут.

**3. Розв'язування задач**

**Задача 1.** Знайти відстань між точками в косокутній системі координат з кутом між осями $\frac{\pi}{3}$ A(-1, 3) і B(6,2).

Розв'язання. (в прямокутній декартовій системі координат)

$$AB = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)cos\omega} =$$

$$= \sqrt{(6-(-1))^2 + (2-3)^2 + 2(6-(-1)) \cdot (2-3)\cos\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \sqrt{7^2 + 1^2 + 2 \cdot 7 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{57}.$$

Відповідь: AB = $\sqrt{57}$.

**Задача 2.** A(–1; 2), B(0; 6), C(–5; 3) – вершини трикутника ABC. Доведіть, що трикутник ABC – рівнобедрений.

**Розв'язання.** AC $= \sqrt{(-1+5)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{17}$;

$$\mathrm{BC} = \sqrt{(0+5)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{34};$$

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(-1-0)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{17}.$$

Оскільки AB=AC, то за означенням рівнобедреного трикутника ΔABC – рівнобедрений.

**Задача 3.** У трикутнику ABC  A(–4; 2), B(4; 7),  C(–2; 12). Знайдіть довжину  середньої лінії, яка паралельна стороні AC.

**Розв'язання.** Нехай KM – середня лінія ΔABC, KM || AC. Тоді за означенням середньої лінії  BK = KA, BM = MC.

$$x_M = \frac{-2+4}{2} = 1,\ \ y_M = \frac{7+12}{2} = 9{,}5,\ \ x_K = \frac{-4+4}{2} = 0,\ \ y_K = \frac{7+2}{2} = 4{,}5.$$

Отже,  KM $= \sqrt{(1-0)^2 + (9{,}5-4{,}5)^2} = \sqrt{26}$.

Дану задачу можна розв'язувати двома способами давайте розглянемо другий спосіб. Оскільки нам відомо, що KM – середня лінія, а за  властивостями середньої лінії трикутника KM $= \frac{\mathrm{AC}}{2}$.

$$\mathrm{KM} = \frac{\sqrt{(-2+4)^2 + (12-2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{4+100}}{2} = \frac{\sqrt{104}}{2} = \sqrt{\frac{104}{4}} = \sqrt{26}$$

**Відповідь.** $\sqrt{26}$

**Задача 4.** Доведіть, що точки A(–1; –2), B(3; 2) і C(8; 7) лежать на одній прямій. Яка з точок лежить між двома іншими?

Розв’язання. $\mathrm{AC} = \sqrt{(-1-8)^2 + (-2-7)^2} = \sqrt{81+81} = 9\sqrt{2};$

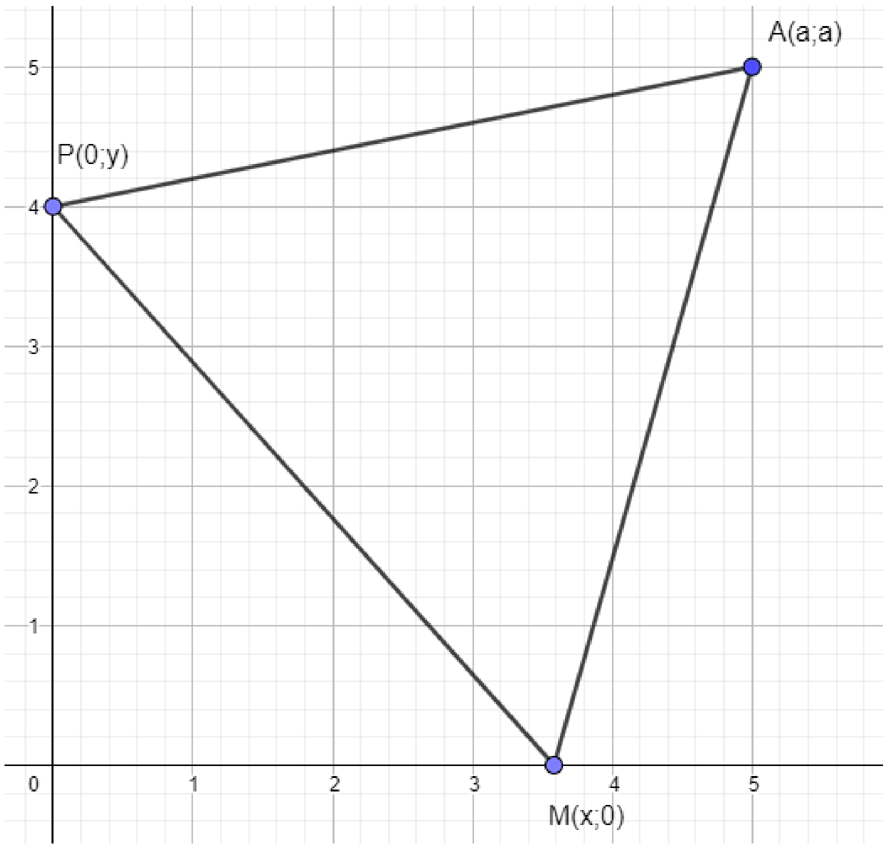
$$\mathrm{BC} = \sqrt{(3-8)^2 + (2-7)^2} = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2};$$

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(-1-3)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$$

Оскільки AC = BC + AB, то точки A, B, C лежать на одній прямій і точка B лежить між точками A і C.

**Задача 5.** Дано дві перпендикулярні осі *Ox* та *Oy*, а також точка *A(a, a)*, де $a > 0$. Знайдіть координати таких точок M та P на осях *Ox* та *Oy* відповідно, так щоб трикутник AMP був рівностороннім.

**Розв’язання.** Нехай *M(x; 0)* та *P(0; y)*- шукані точки.




Маємо:

$$AM^2 = (x-a)^2 + a^2;$$

$$AP^2 = (y-a)^2 + a^2;$$

$$PM^2 = x^2 + y^2.$$

Згідно умови отримаємо

$$\begin{cases}(x-a)^2+a^2=(y-a)^2+a^2,\\ (x-a)^2+a^2=x^2+y^2;\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-a=y-a,\\ -2ax+2a^2=y^2;\end{cases}\\ \begin{cases}x-a=-(y-a),\\ -2ax+2a^2=y^2;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}x=y,\\ x=2a-y,\\ y^2+2ax-2a^2=0.\end{cases}$$

Розглянемо конкретні випадки:

1) $\begin{cases}x=y,\\ y^2+2ax-2a^2=0;\end{cases}$ $x=y=a\left(-1\pm\sqrt{3}\right)$.

2) $\begin{cases}x=2a-y,\\ y^2+2a(2a-y)-2a^2=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x=2a-y,\\ y^2-2ay+2a^2=0;\end{cases}$

Немає розв'язків

**Відповідь:** $M_1\left(a\left(-1-\sqrt{3}\right);0\right), P_1\left(0;a\left(-1-\sqrt{3}\right)\right)$ або

$$M_2\left(a\left(-1+\sqrt{3}\right);0\right), P_2\left(0;a\left(-1+\sqrt{3}\right)\right)$$

**4. Підсумки заняття.**

Сьогодні, діти, ми з вами навчилися знаходити відстань між точками, дізнались її основні властивості та означення, застосували дані знання на практиці під час розв'язування задач.

**5. Домашнє завдання.**

1) Знайти відстань між точками в косокутній системі координат з кутом між осями π/4 A(-4, 7) і B(1,-11).

2) У трикутнику ABC A(–5; 0), B(3; 10), C(4; -8). Знайдіть довжину середньої лінії, яка паралельна стороні AC.

## 2.7. Повторення поняття вектор.

**Тема.** *Повторення поняття вектор. Розв'язування задач.*

**Мета:**

- *Навчальна: поглиблено ознайомити дітей з поняттями вектор,* *координати вектора, скалярний добуток.*

- *Розвивальна: розвивати в дітей математичну логіку, вміння визначати та використовувати потрібні математичні формули.*
- *Виховна: виховувати в дітей математичну компетентність.*

Використана література: [1], [4], [9], [10]

**Хід заняття**

**1. Вступ**

Під час вивчення геометрії ви вже зустрічались з поняттям вектор. Сьогодні на уроці ми спробуємо дізнаємось дещо нове. Спочатку повторимо те, що вже знаємо.

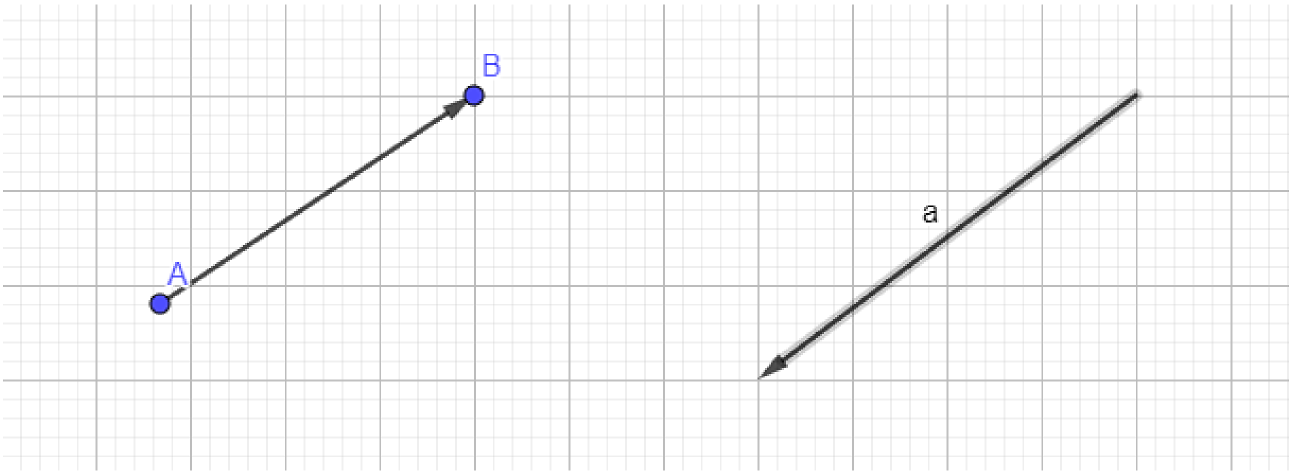
**2. Вивчення нового матеріал**

Розглянемо відрізок АВ. Якщо ми домовимося точку А вважати початком відрізка, а точку В — його кінцем, то такий відрізок буде характеризуватися не тільки довжиною, але й напрямом від точки А до точки В.

***Означення.*** *Напрямленим відрізком, або вектором називають відрізок, який має точку початку і кінця.[9]*

Вектор з початком у точці А та кінцем у точці В позначають так: $\overrightarrow{AB}$. Часто, коли говоримо про вектори, ми не конкретизуємо, яка точка є початком вектора.

Вектор зображають відрізком зі стрілкою. Для позначення векторів також використовують малі букви латинського алфавіту зі стрілкою зверху.



Ми вже знайомились з нульовими відрізками. Інколи можна зіткнутись із ситуацією, коли початок і кінець вектора збігаються, його називають нульовим вектором або нуль-вектором і позначають $\vec{0}$.

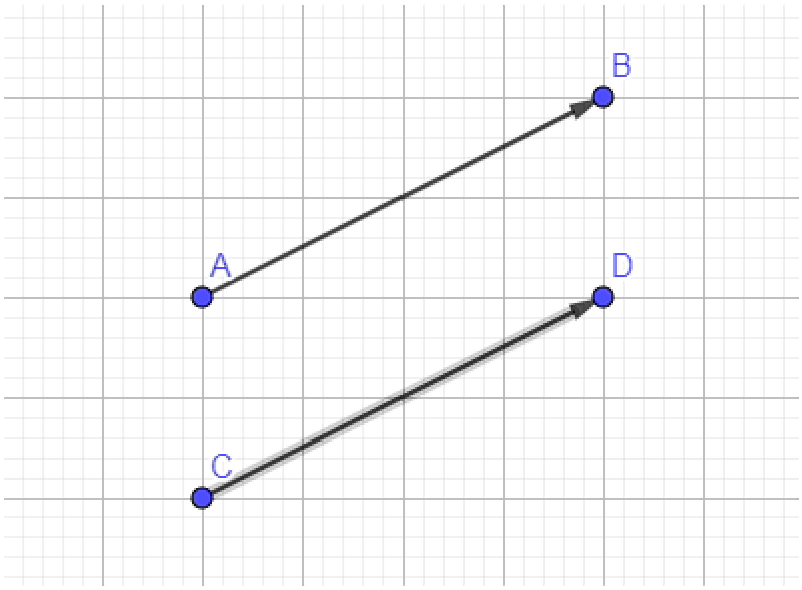
$|\overrightarrow{AB}|$ називають довжину відрізка AB. Модуль нульового вектора вважають рівним нулю.

***Означення.*** *Ненульові вектори називають колінеарними, якщо вони лежать на паралельних прямих або на одній прямій.*[10]

Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору.

Той факт, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, позначають так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Якщо ненульові колінеарні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ однаково напрямлені їх називають співнапрямленими.




Якщо $\vec{a} \parallel \vec{b}$ і $\vec{c} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} \parallel \vec{c}$. Аналогічну властивість мають і співнапрямлені вектори.

Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ називають рівними, якщо виконуються наступні умови:

1. Прямі AB і CD паралельні і співпадають.
2. Напрямок векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ збігається.
3. $|\overrightarrow{AB}|$ і $|\overrightarrow{CD}|$ рівні.

Якщо вектори рівні їх позначають так: $\vec{a} = \vec{b}$.

З попередніх тверджень випливає, що коли $\vec{a} = \vec{b}$ і $\vec{c} = \vec{b}$, то $\vec{a} = \vec{c}$.

Координатами вектора $\vec{a}$ називають координати точки A. Запис $\vec{a}$(x;y) означає, що вектор $\vec{a}$ має координати (x;y). Числа x і y називають відповідно першою та другою координатами вектора $\vec{a}$.

З означення випливає, що рівні вектори мають рівні відповідні координати. Справедливе й обернене твердження: якщо відповідні координати векторів рівні, то рівні й самі вектори.

Очевидно, що нульовий вектор має координати (0; 0).

**Теорема.** *Якщо точки A($x_1; y_1$) і B($x_2; y_2$) відповідно є початком і кінцем вектора $\vec{a}$, то числа $x_2 - x_1$ і $y_2 - y_1$ дорівнюють відповідно першій і другій координатам вектора $\vec{a}$.[9]*

**Доведення.** Нехай вектор $\vec{a}$, рівний вектору $\overrightarrow{AB}$, має координати $(a_1; a_2)$. Доведемо, що $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$.

Якщо $\vec{a} = \vec{0}$, то твердження теореми є очевидним.

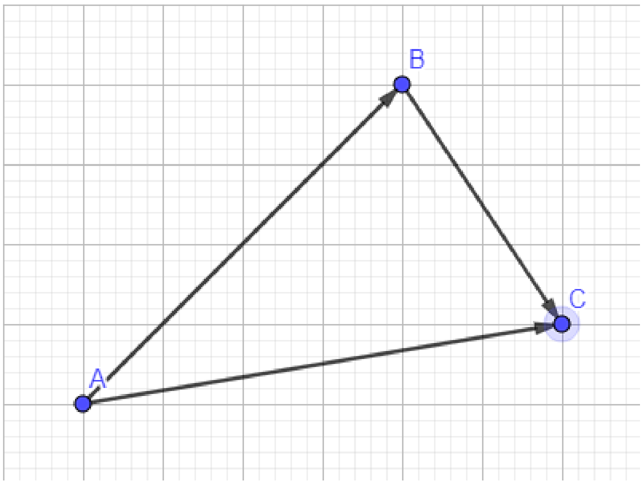
Нехай $\vec{a} \neq \vec{0}$. Відкладемо від початку координат вектор $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, рівний вектору $\overrightarrow{AB}$. Тоді координати точки M дорівнюють $(a_1; a_2)$.

Оскільки $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}$, то можемо зробити висновок, що середини відрізків OB і AM збігаються. Координати середин відрізків OB і AM відповідно дорівнюють $\left(\frac{0-x_2}{2}; \frac{0-y_2}{2}\right)$ і $\left(\frac{x_1+a_1}{2}; \frac{y_1-a_2}{2}\right)$. Тоді $\frac{0-x_2}{2} = \frac{x_1+a_1}{2}$, $\frac{0-y_2}{2} = \frac{y_1-a_2}{2}$.

Ці рівності виконуються й тоді, коли точка O збігається з точкою B або точка A збігається з точкою M.

Звідси $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$.

Якщо тіло перемістилося з точки A в точку B, а потім із точки B у точку C, то сумарне переміщення з точки A в точку C природно подати у вигляді вектора $\overrightarrow{AC}$, вважаючи цей вектор сумою векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$, тобто $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.




Відкладемо від довільної точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, рівний вектору $\vec{a}$. Далі від точки B відкладемо вектор $\overrightarrow{BC}$, рівний вектору $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ називають сумою векторів $\vec{a}$ $i$ $\vec{b}$ і записують: $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

Описаний алгоритм додавання двох векторів називають правилом трикутника.

Ця назва пов'язана з тим, що коли вектори $\vec{a}$ $i$ $\vec{b}$ не є колінеарними, то точки A, B і C є вершинами трикутника.

Отже, для будь-яких трьох точок A, B і C виконується рівність $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, яка виражає правило трикутника для додавання векторів.

**Теорема.** *Якщо координати векторів $\vec{a}$ $i$ $\vec{b}$ відповідно дорівнюють* ($a_1$; $a_2$) *i* ($b_1$; $b_2$)*, то координати вектора $\vec{a}+\vec{b}$ дорівнюють* ($a_1+b_1$; $a_2+b_2$)*.[9]*

**Доведення.** Нехай точки $A(x_1; y_1)$ $B(x_2; y_2)$ і $C(x_3; y_3)$ такі, що $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ $i$ $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$. Маємо: $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$. Доведемо, що координати вектора $\overrightarrow{AC}$ дорівнюють ($a_1+b_1$; $a_2+b_2$).

Знайдемо координати векторів $\vec{a}$ $i$ $\vec{b}$ і $\overrightarrow{AC}$: $\vec{a}(x_2-x_1; y_2-y_1)$, $\vec{b}(x_3-x_2; y_3-y_2)$, $\overrightarrow{AC}(x_3-x_1; y_3-y_1)$.

Маємо:

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}(x_3-x_1; y_3-y_1)=\overrightarrow{AC}(x_3-x_2+x_2-x_1; y_3-y_2+y_2-y_1).$$

З урахуванням того, що $x_2-x_1=a_1$, $x_3-x_2=b_1, y_2-y_1=a_2$, $y_3-y_2=b_2$, отримуємо: $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}(a_1+b_1; a_2+b_2)$.

***Зауваження.*** *Описуючи правило трикутника для знаходження суми векторів* $\overrightarrow{a}$ *і* $\vec{b}$, *ми відклали вектор* $\overrightarrow{a}$ *від довільної точки. Якщо точку A замінити точкою* $A_1$, *то замість вектора* $\overrightarrow{AC}$, *який дорівнює сумі векторів* $\overrightarrow{a}$ *і* $\vec{b}$, *отримаємо деякий вектор* $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$. *Із теореми випливає, що координати векторів* $\overrightarrow{AC}$ *і* $\overrightarrow{A_1C_1}$ *дорівнюють (*$a_1 + b_1$; $a_2 + b_2$*). Отже,* $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$. *Це означає, що сума векторів* $\overrightarrow{a}$ *і* $\vec{b}$ *не залежить від того, від якої точки відкладено вектор* $\overrightarrow{a}$*.[10]*

***Властивості додавання векторів:***

*Для будь-яких векторів* $\overrightarrow{a}, \vec{b}$ *і* $\vec{c}$ *виконуються рівності:*

*1)* $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;

*2)* $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ *- переставна властивість;*

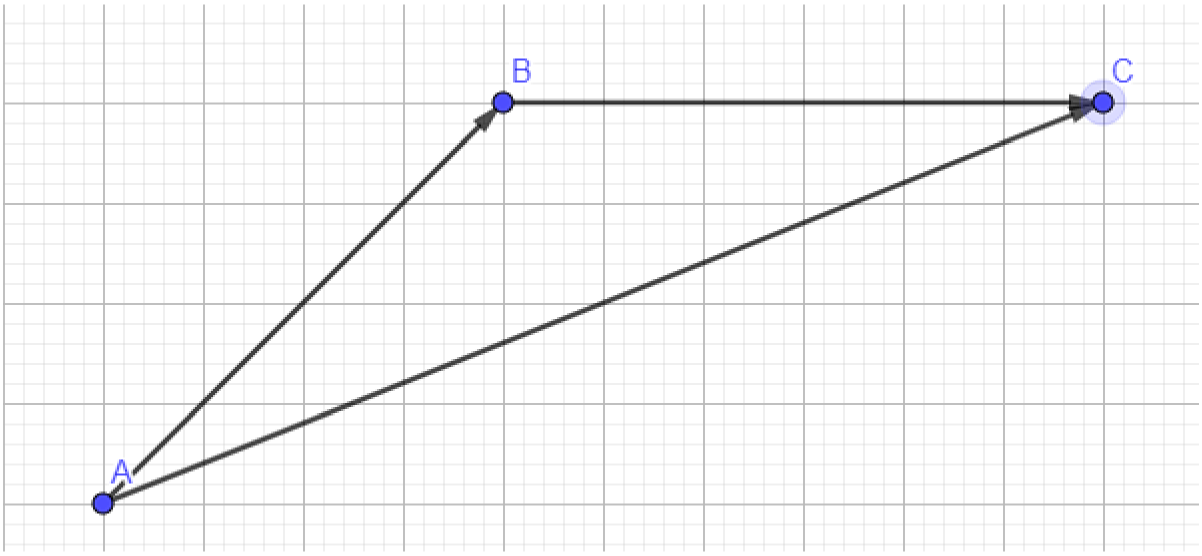
*3)* $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = (\vec{c} + \vec{b}) + \vec{a}$ *- сполучна властивість.*

Суму трьох і більше векторів знаходять так: спочатку додають перший і другий вектори, потім до отриманого вектора додають третій вектор і т. д.

Для векторів справедлива комутативність та асоціативність.

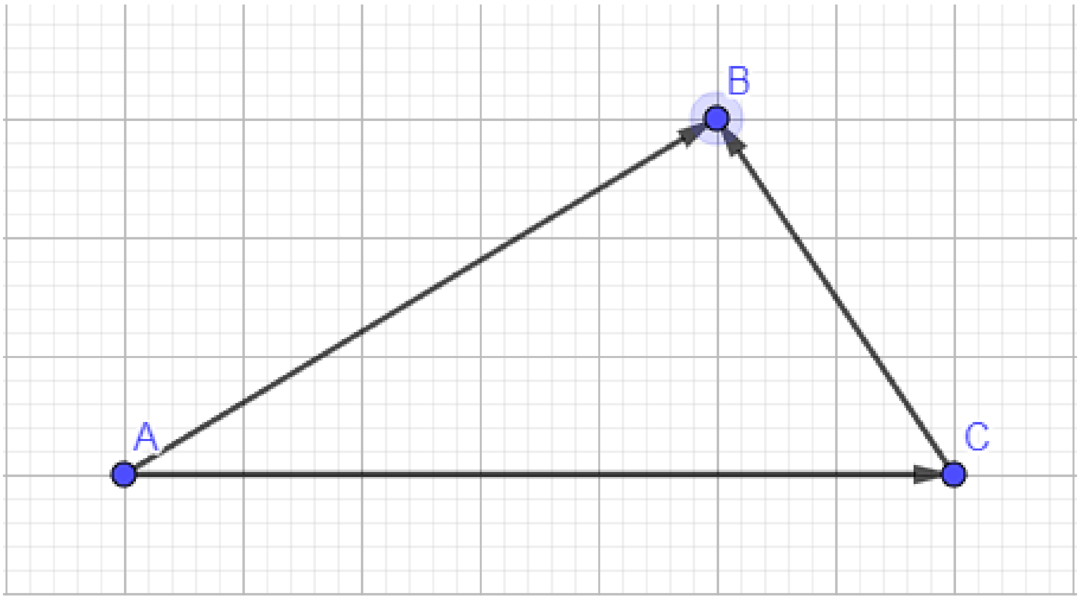
Для знаходження суми двох неколінеарних векторів, відкладених від однієї точки, зручно користуватися правилом паралелограма для додавання векторів.

Відкладемо від довільної точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, рівний вектору $\vec{a}$, і вектор $\overrightarrow{AD}$, рівний вектору $\vec{b}$. Побудуємо паралелограм ABCD. Тоді шукана сума $\overrightarrow{a} + \vec{b}$ дорівнює вектору $\overrightarrow{AC}$.




***Означення.*** *Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий вектор $\vec{c}$, сума якого з вектором $\vec{b}$ дорівнює вектору $\vec{a}$.[9]*

Пишуть: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ .




Всі дані обчислення можна застосовувати і для колінеарних векторів.

**Теорема.** *Якщо координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідно дорівнюють ($a_1; a_2$) і ($b_1; b_2$), то координати вектора $\vec{a} - \vec{b}$ дорівнюють ($a_1$-$b_1$; $a_2$-$b_2$).[10]*

***Означення.*** *Два ненульових вектори називають протилежними, якщо їхні модулі рівні й вектори протилежно напрямлені. [9]*

Вектором, протилежним нульовому вектору, вважають нульовий вектор.

Вектор, протилежний вектору $\vec{a}$, позначають так: $-\vec{a}$.

З означення випливає, що протилежним вектору $\overrightarrow{AB}$ є вектор $\overrightarrow{BA}$. Тоді для будь-яких точок А і В виконується рівність $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Із правила трикутника випливає, що

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$$

А і з цієї рівності випливає, що коли вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1, a_2)$, то вектор $-\vec{a}$ має координати$(-a_1, -a_2)$.

**Теорема.** *Для будь-яких векторів* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *виконується рівність* $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{a} + (-\vec{b})$.*[10]*

***Означення.*** *Добутком ненульового вектора* $\vec{a}$ *і числа k, відмінного від нуля, називають такий вектор* $\vec{b}$, *що:*

*1)* $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$;

*2) якщо k>0, то* $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{a}$*; якщо k<0, то* $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a}$.

Якщо $\vec{b}$ = 0 або k = 0, то вважають, що k$\overrightarrow{b}$ = $\vec{0}$.

З означення випливає, що коли $\vec{b} = k\vec{a}$, то вектори $\overrightarrow{a}$ $i$ $\vec{b}$ колінеарні.

**Теорема.** *Якщо вектори* $\overrightarrow{a}$ *і* $\vec{b}$ *колінеарні й* $\vec{a} \neq 0$*, то існує таке число k, що* $k\vec{a} = \vec{b}$. *[9]*

**Теорема.** *Якщо вектор* $\vec{a}$ *має координати* $(a_1; a_2)$*, то вектор* $k\vec{a}$ *має координати* $(ka_1; ka_2)$*.[10]*

**Доведення.** Якщо $\vec{a} = \vec{0}$ або k = 0, то твердження теореми очевидне.

Нехай $\vec{a} \neq \vec{0}$ і k ≠ 0. Розглянемо вектор $\vec{b}(ka_2; ka_2)$. Покажемо, що $\vec{b} = k\vec{a}$.

Маємо: $|\vec{b}| = \sqrt{(ka_1)^2 + (ka_2)^2} = |k|\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |k||\vec{a}|$.

Відкладемо від початку координат вектори $\overrightarrow{OA}$ $i$ $\overrightarrow{OB}$, рівні відповідно векторам $\overrightarrow{a}$ $i$ $\vec{b}$. Оскільки пряма ОА проходить через початок координат, то її рівняння має вигляд ax + by = 0.

Цій прямій належить точка $A(a_1; a_2)$. Тоді $aa_1 + ba_2 = 0$. Звідси a (k$a_1$) + b (k$a_2$) = 0.

Отже, точка B(k$a_1$;k$a_2$) теж належить прямій OA, тому вектори $\overrightarrow{OA}$ $i$ $\overrightarrow{OB}$ колінеарні, тобто $\vec{a}||\vec{b}$.

При k > 0 числа $a_1$ і k$a_1$ мають однакові знаки (або обидва дорівнюють нулю). Таку саму властивість мають числа $a_2$ і k$a_2$. Отже, при k>0 точки A і B лежать в одній координатній чверті (або на одному координатному промені), тому вектори $\overrightarrow{OA}$ $i$ $\overrightarrow{OB}$ співнапрямлені (рис.15.3), тобто $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$.

При k<0 вектори $\overrightarrow{OA}$ $i$ $\overrightarrow{OB}$ є протилежно напрямленими, тобто $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Отже, ми отримали, що $\vec{b} = k\vec{a}$.

**Наслідок.** Вектори $\vec{a}(\mathrm{a}_1; \mathrm{a}_2)$ і $\vec{b}(k\mathrm{a}_1; k\mathrm{a}_2)$ колінеарні.

**Наслідок.** Якщо вектори $\vec{a}(\mathrm{a}_1; \mathrm{a}_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ колінеарні, причому $\vec{a}$≠0, то існує таке число k, що $b_1$=$k\mathrm{a}_1$ і $b_2$=$k\mathrm{a}_2$.

Для будь-яких чисел k, m і будь-яких векторів $\vec{a}$ $i$ $\vec{b}$ виконуються рівності:

1) $(km)\vec{a} = k(m\vec{a})$ – сполучна властивість;

2) $(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ – перша розподільна властивість;

3) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ – друга розподільна властивість.

Нехай $\vec{a}$ $i$ $\vec{b}$ — два ненульових та неспівнапрямлених вектори. Від довільної точки O відкладемо вектори $\overrightarrow{OA}$ $i$ $\overrightarrow{OB}$,відповідно рівні векторам $\vec{a}$ $i$ $\vec{b}$. Величину кута AOB називатимемо кутом між векторами $\vec{a}$ $i$ $\vec{b}$.

Кут між векторами $\vec{a}$ $i$ $\vec{b}$ позначають так: $\angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Якщо вектори $\vec{a}$ $i$ $\vec{b}$ співнапрямлені, то вважають, що $\angle(\vec{a}, \vec{b})$=0°. Якщо хоча б один із векторів $\vec{a}$ або $\vec{b}$ нульовий, то також вважають, що $\angle(\vec{a}, \vec{b})$=0°.

Отже, для будь-яких векторів $\vec{a}$ $i$ $\vec{b}$ має місце нерівність:

0°≤$\angle(\vec{a}, \vec{b}) \leq 180°$.

Вектори $\vec{a}$ $i$ $\vec{b}$ називають перпендикулярними, якщо кут між ними дорівнює 90°. Позначають: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

***Означення.*** *Скалярним добутком двох векторів називають добуток їхніх модулів і косинуса кута між ними.*

$$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\angle(\vec{a},\vec{b})$$

Якщо хоча б один із векторів нульовий, то їхній добуток також 0.

Нехай $\vec{a} = \vec{b}$. Тоді $\vec{a}\, i\, \vec{b} = \vec{a}\ i\ \vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0° = |\vec{a}|^2$.

Скалярний добуток $\vec{a} * \vec{a}$ називають скалярним квадратом вектора $\vec{a}$ і позначають $\vec{a}^2$.

Ми отримали, що $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, тобто скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля.

**Теорема.** *Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли ці вектори перпендикулярні.[9]*

**Доведення.** Нехай $\vec{a} \perp \vec{b}$. Доведемо, що $\vec{a} * \vec{b} = 0$.

Маємо: $\angle(\vec{a},\vec{b}) = 90°$. Звідси $\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 90° = 0$.

Нехай тепер $\vec{a} * \vec{b} = 0$. Доведемо, що $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Запишемо: $|\vec{a}||\vec{b}| \cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = 0$. Оскільки $\vec{a} \neq 0$ і $\vec{b} \neq 0$, то $\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = 0$. Звідси $\angle(\vec{a},\vec{b}) = 90°$ тобто $\vec{a} \perp \vec{b}$.

**Теорема.** *Скалярний добуток векторів* $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ *можна обчислити за формулою*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2\,.$$

**Доведення.** Спочатку розглянемо випадок, коли вектори $\vec{a}\, i\, \vec{b}$ неколінеарні.

Відкладемо від початку координат вектори $\overrightarrow{OA}\ i\ \overrightarrow{OB}$, відповідно рівні векторам $\vec{a}\, i\ \vec{b}$. Тоді $\angle(\vec{a},\vec{b}) = \angle AOB$.

Застосуємо теорему косинусів до трикутника AOB:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot cos\angle AOB.$$

Звідси

$$OA \cdot OB \cdot cos\angle AOB = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2).$$

Оскільки $|\vec{a}| = OA\ i\ |\vec{b}| = OB$, то $OA \cdot OB \cdot \cos\angle AOB = \vec{a} \cdot \vec{b}$.

Крім того, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$. Звідси $\overrightarrow{AB}(b_1 - a_1; b_2 - a_2)$.

Маємо: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2+\left|\vec{b}\right|^2-\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\right)$. Використовуючи формулу знаходження модуля вектора за його координатами, запишемо:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}\left((a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-(b_1-a_1)^2-(b_2-a_2)^2\right).$$

Спростивши вираз, який записано в правій частині останньої рівності, отримуємо:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2.$$

Розглянемо випадок, коли вектори $\vec{a}\ i\ \vec{b}$ колінеарні.

Якщо $\vec{a}$ = 0 або $\overrightarrow{b}$ = 0, то очевидно, що $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$.

Якщо $\vec{a}\neq 0$ і $\vec{b}\neq 0$, то існує таке число k, що $\vec{b}=k\vec{a}$.

Якщо k>0, то $\angle(\vec{a},\vec{b})=0°$. Маємо:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{a})=|\vec{a}||k\vec{a}|\cos 0°=|k||\vec{a}|^2=k(a_1^2+a_2^2)=$$
$$=a_1\cdot ka_2+a_2\cdot ka_2=a_1b_1+a_2b_2.$$

Якщо k<0, то $\angle(\vec{a},\vec{b})=0°$. Маємо:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{a})=|\vec{a}||k\vec{a}|\cos 0°=|k||\vec{a}|^2=k(a_1^2+a_2^2)=$$
$$=a_1\cdot ka_2+a_2\cdot ka_2=a_1b_1+a_2b_2.$$

**Наслідок.** *Косинус кута між ненульовими векторами* $a\vec{a}(\mathrm{a}_1;\mathrm{a}_2)$ і $\vec{b}(b_1;b_2)$ *можна обчислити за формулою*

$$cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}} \qquad (*)$$

**Доведення.** З означення скалярного добутку векторів $\vec{a}\ i\ \vec{b}$ випливає, що $\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$. Використовуючи теорему і формулу знаходження модуля вектора за його координатами, отримуємо формулу (*).

За допомогою теореми легко довести такі властивості скалярного добутку векторів:

для будь-яких векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ і будь-якого числа k виконуються рівності:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}-$ переставна властивість;

2) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{b} \cdot \vec{a})$ — сполучна властивість;

3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ — розподільна властивість.

Для доведення цих властивостей достатньо виразити через координати векторів скалярні добутки, записані в правих і лівих частинах рівностей, та порівняти їх.

Ці властивості разом із властивостями додавання векторів і множення вектора на число дають змогу перетворювати вирази, які містять скалярний добуток векторів, аналогічно тому, як ми перетворюємо алгебраїчні вирази.

**3. Розв'язання задач**

**Задача 1.** Дано вектори $\vec{a}(-1; 3)$ та $\vec{b}(3; -1)$. Знайти абсолютну величину вектора $5\vec{a} + 4\vec{b}$.

**Розв'язання.** Для того, щоб знайти абсолютну величину спочатку нам потрібно знайти $5\vec{a}$ та $4\vec{b}$. Щоб знайти ці вектори ми маємо кожну з їхніх координат помножити на константу, яка стоїть перед вектором, тобто вектор $\vec{a}$ ми маємо множити на 5 , а вектор $\vec{b}$ на 4:

$$5\vec{a} = (-1 \cdot 5; 3 \cdot 5) = (-5; 15),$$

$$4\vec{b} = (3 \cdot 4; -1 \cdot 4) = (12; -4).$$

Тепер додаймо знайдені вектори:

$$5\vec{a} + 4\vec{b} = (-5 + 12; 15 + (-4)) = (7; 11).$$

І в кінці знайдемо довжину знайденого вектора:

$$|5\vec{a} + 4\vec{b}| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{170}$$

Отже, абсолютна величина даного вектор дорівнює $\sqrt{170}$.

**Задача 2.** Дано вектори $\vec{a}(-4; n), \vec{b}(5; 6)$. При яких значеннях n скалярний добуток буде дорівнювати 4.

**Розв'язання.** Нам відомо, що скалярний добуток обчислюється за формулою $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\mathrm{a}_1 b_1 + \mathrm{a}_2 b_2)$ отож, складемо і розв'яжемо рівняння з невідомою n.

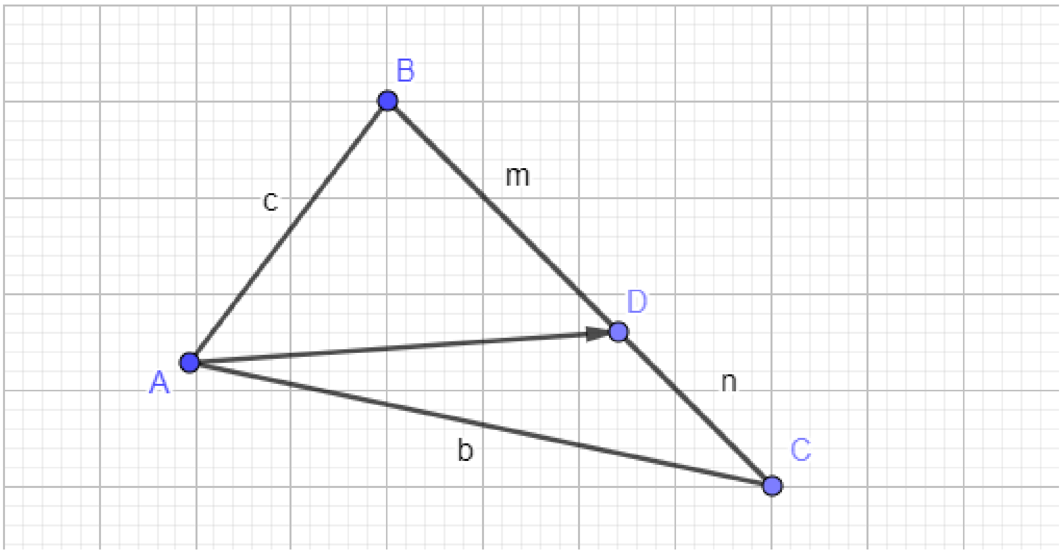
$$-4 \cdot 5 + 6 \cdot n = 4;$$

$$6n = 24,$$

$$n = 4.$$

Таким чином, ми знайдемо невідому n, яка дорівнює 4.

**Задача 3.** У трикутнику ABC сторона BC поділена точкою D у відношенні n : m, тобто $\overrightarrow{BD} = \frac{m}{n}\overrightarrow{DC}$. Розкласти вектор $\overrightarrow{AD}$ за векторами $\overrightarrow{AB} = \vec{c}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}$.




**Розв'язання.** Зобразимо даний трикутник.

Звідси ми маємо:

$$\vec{c} + \frac{m}{n}\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{DC} + \vec{b},$$

$$\left(1 + \frac{m}{n}\right)\overrightarrow{DC} = -\vec{c} + \vec{b},$$

$$\overrightarrow{DC} = \frac{n}{m+n}\left(-\vec{c} + \vec{b}\right).$$

$$\overrightarrow{AD} = \vec{c} \cdot \frac{m}{n}\left(\frac{n}{m+n}\left(-\vec{c} + \vec{b}\right)\right) = \vec{c} - \frac{m}{n+m}\left(-\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{c} - \frac{\vec{c} \cdot m}{n+m} + \frac{m}{n+m}\vec{b} =$$

$$= \vec{c}\left(\frac{m+n-m}{m+n}\right) + \frac{m}{m+n}\vec{b} = \vec{c}\frac{n}{m+n} + \vec{b}\frac{m}{m+n}.$$

Відповідь: $\overrightarrow{AD}$=$\vec{c}\frac{n}{m+n} + \vec{b}\frac{m}{m+n}$.

**Задача 4.** Дано точки A(2; 1), B(3; -1), C(-4; 0), які є вершинами рівнобедреної трапеції ABCD. Знайти координати вершини D, якщо $\overline{AB} = k\overline{CD}$.

**Розв'язання.** За умовою $\overline{AB} = k\,\overline{CD} \Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Знайдемо координати векторів $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$. $\overline{AB}(1;-2), \overline{CD}\ (x+4; y)$, де $x$ і $y$ – координати точги D. З цього випливає.

$$\frac{1}{x+4} = -\frac{2}{y} \text{ або } y = -2x - 8.$$

Оскільки дана трапеція рівнобедрена, то $|\overline{AC}| = |\overline{BD}|$ і $\overline{AC} \nparallel \overline{BD}$. Знайдемо вектори $\overline{AC}(-6;-1), \overline{BD}\ (x-3; y+1)$, та скористаємося тим, що $\overline{AC}^2 = \overline{BD}^2$, маємо

$$36 + 1 = (x-3)^2 + (y+1)^2, \text{або } x^2 + y^2 - 6x + 2y = 27.$$

Розв'язавши дані системи, отримаємо $x_1 = -1{,}4, y_1 = -5{,}2$ або $x_2 = -3, y_2 = -2$. Цим значенням відповідають два вектори: $\overline{BD}(-4{,}4; -4{,}2)$ і $\overline{BD}(-6;-1)$. Оскільки останній вектор колінеарний до $\overline{AC}$ це означає що він не задовольняє умову. Отже D(-1,4; -5,2)

**Відповідь:** D(-1,4; -5,2)

**4. Підсумок заняття**

Сьогодні, діти, ми з вами працювали з векторами: повторили основні властивості та означення, застосували дані знання на практиці під час розв'язування задач.

**5. Домашнє завдання.**

1) Дано вектори $\vec{a}(-13;5), \vec{b}(3;-10)$. Знайти абсолютну величину вектора $4\vec{a} - 7\vec{b}$.

2) Дано три вектори $\vec{a}$ (0;5), $\vec{b}$ (1;3), $\vec{c}$ (7;1). Підібрати числа α та γ так, щоб вектори $\alpha\vec{a},\ \gamma\vec{b}, \vec{c}$, утворювали трикутник, якщо початок вектора $\vec{b}$ співпадає з кінцем вектора , $\vec{a}$ а початок вектора $\vec{c}$ – з кінцем вектора $\vec{b}$.

## 2.8. Рівняння прямої.

**Тема.** *Рівняння прямої. Розв'язування задач.*

**Мета:**

- *Навчальна: закріпити в дітей знання про рівняння прмої.*

- *Розвивальна: розвивати в дітей математичну логіку, вміння визначати та використовувати потрібні математичні формули.*
- *Виховна: виховувати в дітей математичну компетентність.*

Використана література: [5], [6], [8]

**Хід заняття**

**1. Вступ**

На цьому уроці ми познайомимося з полярною системою координат, навчимось переходити від афінної системи до полярної і почнемо ми своє знайомство з означення.

**2. Вивчення нового матеріалу**

Для того, щоб зображати фігури на графіку математики, використовують рівняння за допомогою якого можна відкласти безліч точок, які і будуть утворювати даний об'єкт. Сьогодні ми розглянемо одне із них, а саме рівняння прямої.

Щоб вивести рівняння прямої, розглянемо її послідовність точок, які рівновіддалені одна від одної .

Нехай а – задана пряма. Виберемо дві точки A($x_1; y_1$) і B($x_2; y_2$), які рівновіддалені від прямої $a$.

Нехай M($x; y$) – довільна точка прямої а. Тоді за властивістю серединного перпендикуляра відрізка виконується рівність MA=MB, тобто

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}. \qquad (*)$$

Ми показали, що координати (x; y) довільної точки M прямої а є розв'язкам рівняння (*). Тепер покажемо, що будь-який розв'язок рівняння (*) є координатами точки, яка належить даній прямій а.

Нехай ($x_0; y_0$) — довільний розв'язок рівняння (*).

Тоді $\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$. Ця рівність означає, що точка N($x_0; y_0$) рівновіддалена від точок A($x_1; y_1$) і B($x_2; y_2$), отже, точка N належить серединному перпендикуляру відрізка AB, тобто прямій а.

Таким чином, ми довели, що рівняння (*) є рівнянням даної прямої а.

Але вам відомий інший вигляд рівняння прямої: $ax + by = c$, де $a$, $b$ і $c$ – деякі числа, причому $a$ і $b$ не дорівнюють нулю одночасно. Насправді це одне і теж рівняння тільки остання дещо спрощене. Давайте зведемо рівняння (*) до канонічного вигляду.

Піднесемо обидві частини рівняння (*) до квадрата. Маємо: $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$.

Розкриваємо дужки та скорочуємо рівняння. Отримаємо:

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y = x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2.$$

Позначивши $2(x_2 - x_1)$=a, $2(y_2 - y_1)$=b, $x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2$=c, отримаємо рівняння ax + by=c.

**Теорема.** *Рівняння прямої має вигляд ax + by + c = 0, де a, b і c — деякі числа, причому a і b не дорівнюють нулю одночасно*.[5]

Є правильним і таке твердження: будь-яке рівняння виду $ax + by + c = 0$, де $a$, $b$ і $c$ – деякі числа, причому $a$ і $b$ не дорівнюють нулю одночасно, є рівнянням прямої.

Якщо $a = b = c = 0$, то графіком рівняння $ax + by = c$ є вся площина ху. Якщо $a = b = 0$ і $c \neq 0$, то рівняння не має розв'язків.

Якщо в рівнянні прямої $ax+by=c$ покласти $b=0$, то його можна переписати так: $x = \frac{c}{a}$. Ми отримали окремий вид рівняння прямої, усі точки якої мають однакові абсциси. Отже, ця пряма перпендикулярна до осі абсцис. Її називають вертикальною.

Коли $b \neq 0$, то рівняння прямої $ax + by = c$ можна записати так: $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. Позначивши $-\frac{a}{b} = k$, $\frac{c}{b} = p$, отримаємо рівняння $y = kx + p$.

Отже, якщо $b=0$ і $a\neq0$,то рівняння прямої ax+by=c задає вертикальну пряму; якщо $b \neq 0$, то це рівняння задає не вертикальну пряму.

Рівняння невертикальної прямої зручно записувати у вигляді $y = kx + p$.

Припустимо, що нам задано дві точки з координатами $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$ через які проходить пряма. Як нам знайти рівняння цієї прямої? Для цього давайте домовимось $x_1 \neq x_2$, тому що в такому випадку пряма $M_1M_2$ не паралельна осі ординат. А, як нам уже відомо, рівняння будь-якої прямої яка проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$ і не паралельна осі *Oy* є рівняння виду:

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

Оскільки пряма проходить також і через точку $M_2(x_2, y_2)$, то координати даної точки повинні задовольняти рівняння прямої. Підставляючи в рівняння, замість поточних координат, координати $x_2$ і $y_2$ , отримаємо:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Звідси знаходимо:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2$$

Тобто кутовий коефіцієнт прямої дорівнює різниці ординат будь-яких двох її точок, розділеної на різницю абсцис цих точок. Підставивши знайдене значення *k* в рівняння, отримаємо рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

Відмітимо, що рівняння (3), доволі часто, записують і у наступному вигляді:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

Таким чином, ми познайомились з рівнянням прямої.

**3. Розв’язання задач.**

**Задача 1**. Знайти кутовий коефіцієнт лінії, заданої рівнянням *6x - 3y – 18 = 0.*

**Розв’язання.** Перетворимо вихідне рівняння.

$$6x - 3y = 18,$$

$$3y = 6x – 18,$$

$$y = 2x – 6.$$

**Відповідь.** Потрібний кутовий коефіцієнт даної прямої дорівнює 2.

**Задача 2.** Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2; -3)$ і паралельна вектору $\vec{a} = (2; -2)$.

***Розв'язання.*** Використовуючи канонічне рівняння прямої, маємо

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{-2}.$$

Доводимо рівняння до загального вигляду:

$$-2(x-2)=2(y+3);\ -x+2=y+3; x+y+1=0.$$

**Задача 3.** Трикутник задано вершинами: A(2; 5), B(-6; -4), C(6; -3). Складіть рівняння медіани BD.

***Розв'язання.*** Знайдемо координати точки D - середини сторони AC:

$$x_D=\frac{x_A+x_C}{2};\ y_D=\frac{y_A+y_C}{2};$$

$$x_D=\frac{2+6}{2}=4;\ y_D=\frac{5-3}{2}=2.$$

Отже, координати точки дорівнюють D(4; 2). Тоді рівняння сторони BD, де B(-6; -4), має вигляд:

$$\frac{x-4}{-6-4}=\frac{y+2}{-4-2};$$

$$\frac{x-4}{-10}=\frac{y+2}{-6};$$

$$-6(x-4)=-10(y-2);$$

$$-6x+24=-10y+20;$$

$$6x-10y-4=0;$$

$$3x-5-2=0.$$

**Задача 4.** З точки $M_0(-2{,}3)$ під кутом α до осі *Ox* напрямлено промінь світла. Відомо, що tg α=3 . Дійшовши до осі *Ox* , промінь відбився від неї. Скласти рівняння прямих, на яких лежать обидва промені: падаючий і відбитий.

**Розв'язання:** нам відомий кутовий коефіцієнт прямої, який дорівнює 3. Отже, можемо скласти рівняння: $y=3x+C$ підставивши в це рівняння точку $M_0$ отримаємо

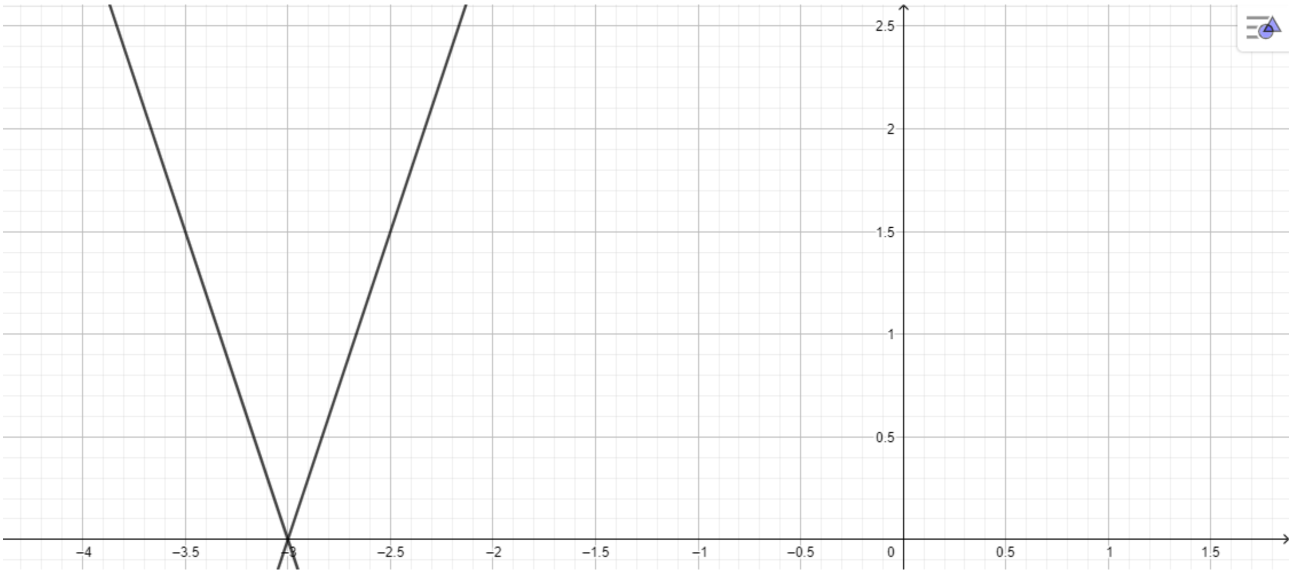
$$3=3*(-2)+C,$$

$$\mathrm{C}=-9.$$

Значить рівняння даного променя дорівнює

$$3x - y + 9 = 0.$$

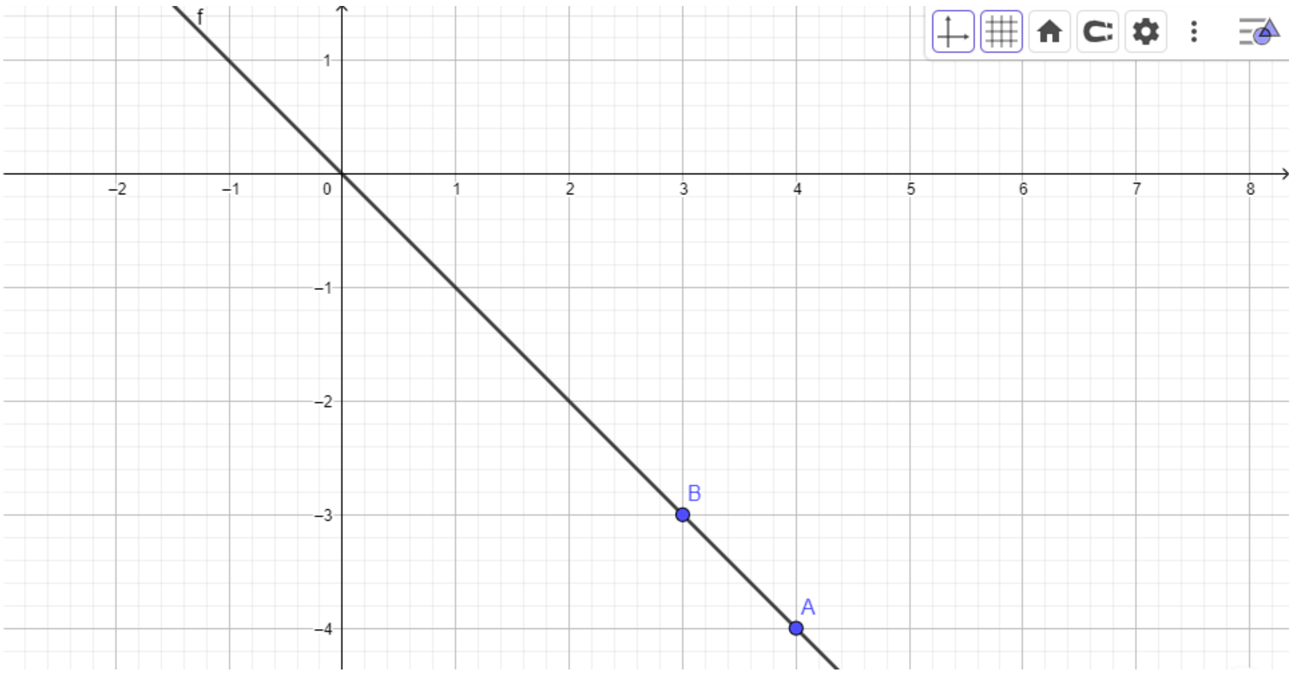
Відбиваючий промінь буде дорівнювати даному тільки y=|y|.



**Відповідь:** рівняння даних променів буде:

$$3x - y + 9 = 0, \qquad 3x + y + 9 = 0.$$

**Задача 4.** Знайти рівняння прямої за координатами її двох точок A(4;-4) та B(3;-3)




**Розв'язання:** Нам уже відомо знаходити рівняння прямої за двома її точками. Отже, його рівняння буде мати вигляд:

$$\frac{x-4}{3-4} = \frac{y+3}{-3+4},$$

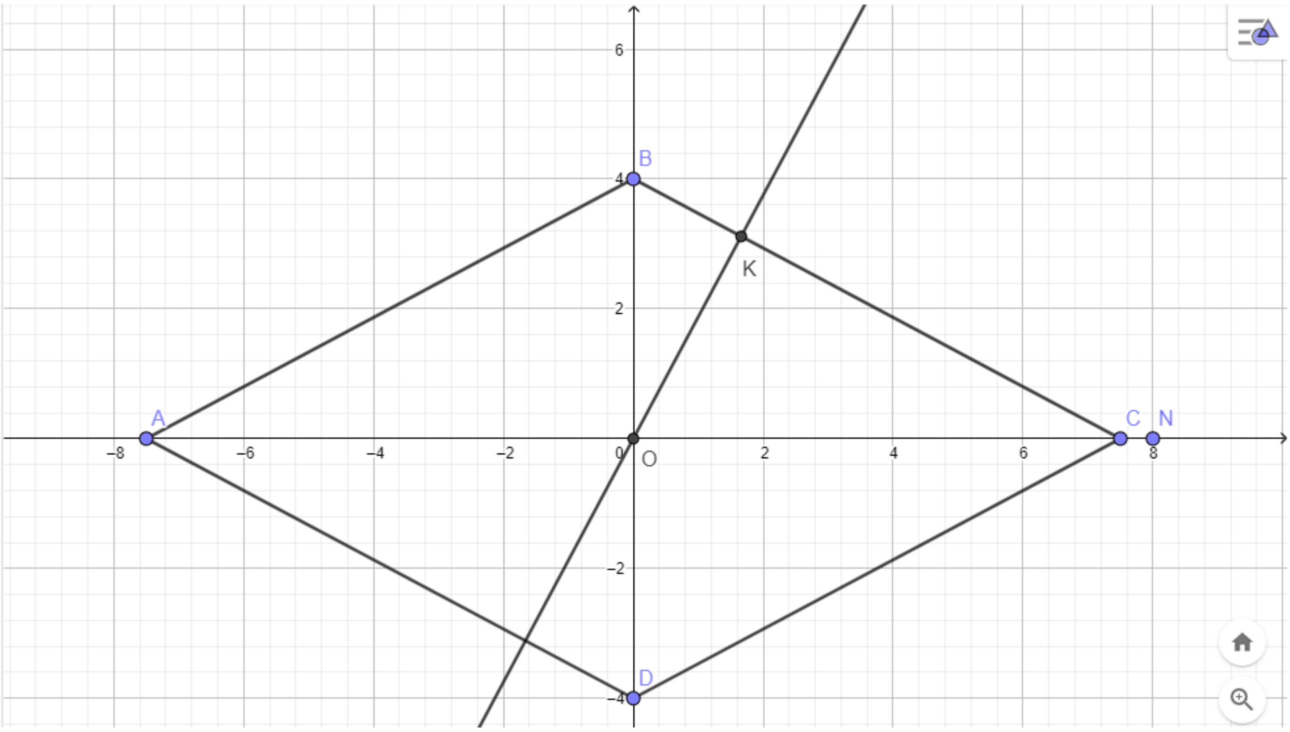
$$\frac{x-4}{-1}=\frac{y+3}{1},$$

$$-x+4=y+3,$$

$$x+y=1$$

**Відповідь:** Рівняння прямої буде мати вигляд $x+y=1$.

**Задача 5.** Довжина діагоналей ромба AC і BD рівна 15 і 8. Перша діагональ направлена по осі *Ox*, а друга по осі *Oy* Скласти рівняння сторони ромба і знайти відстань від початку координат до сторони ромба.




**Розв'язання.** За умовою AC = 15 см., BD = 8 см.. звідси знаходимо координати ромба: A(-7,5; 0), B(0; 4), C(7,5; 0), D(0, -4). Кутовий коефіцієнт прямої BC $k_1=tg\angle BCN=-tg\angle BCO=-\frac{4}{7{,}5}=-\frac{8}{15}$. Тоді знаючи точку B складемо рівняння сторони BC: $y$-4= $-\frac{8}{15}(x-0)$, або *8x + 15y – 60 = 0.* Рівняння сторони AD знайдемо за допомогою кутового коефіцієнта $k_1=-\frac{8}{15}$, і координати точки D: $y+4=-\frac{8}{15}(x-0)$, або *8x + 15y – 60 = 0.* Кутовий коефіцієнт прямої AB дорівнює $k_2=tg\angle BAO=\frac{4}{7{,}5}=\frac{8}{15}$. І рівняння прямої AB: *8x - 15y + 60 = 0,* а рівняння DC *8x - 15y – 60 = 0.*

Проведемо ОК$\perp$ $BC$ і для знаходження ОК скористаємося тим, що $S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2}OC \cdot OB = \frac{1}{2}OK \cdot BC$, звідки $OK = \frac{OC \cdot OB}{BC}$. Оскільки $BC = \sqrt{7{,}5^2 + 4^2} = 8{,}5$ рзнаходимо ОК=$\frac{7{,}5 \cdot 4}{8{,}5} = \frac{60}{17}$(см).

**4.Підсумок заняття**

Сьогодні, діти, ми з вами познайомились з рівнянням прямої. Дізнались основні властивості та канонічний вигляд. Застосували дані знання на практиці під час розв’язування задач.

**5. Домашнє завдання.**

1) Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(-3;1)$ і паралельна вектору $\vec{a} = (1;-5)$.

2) Знайти кутовий коефіцієнт лінії, заданої рівнянням $x$ - $y = 8$

*3)* Знайти рівняння прямої за координатами її двох точок А(14;3) та В(-13;-3)

# Висновки

У даній дипломній роботі було розглянуто теми з шкільного курсу геометрії, які є частиною аналітичної геометрії.

У першому розділі створено факультативний курс. Було розроблено календарно-тематичне планування, в якому наведено теми рекомендованих занять: різновиди систем координат, їхні типи та застосування, поділ відрізка у заданому співвідношенні, площа трикутника, віддаль між двома точками, вектор, скалярний добуток та рівняння прямої. Також було додано урок вивчення ІКТ на заняттях математики, а саме вивчення програми GeoGebra та Gran-2D, в якій можна розв'язувати різноманітні геометричні задачі.

У другому розділі створено вісім конспектів занять, які передбачені факультативним курсом:

- Факультативне заняття 1. Вступ до вивчення аналітичної геометрії.

На даному занятті діти поринули в ті часи, коли зародилась геометрія як наука, ознайомилися з вченими, які досліджували аналітичну геометрію, зробили вагомий внесок у її розвитку як науки, мали можливість ознайомитись з їхнім способом життя і дізнатися про відомі праці, створені ними.

- Факультативне заняття 3. Афінна система координат. Розв'язування задач. GeoGebra. Афінна система координат в просторі.

Заняття передбачає вивчення нової системи координат, яку не розглядають під час уроків. Зокрема дізнались основні властивості та означення афінної системи координат. Не менш важливим є те, що діти навчились працювати в новім середовищі. На даному занятті було прийнято рішення ознайомити дітей з програмним забезпеченням GeoGebra, яке можна використовувати для побудови графіків до нестандартних задач. На запропонованому занятті розглядається частина матеріалу, який призначений для поглибленого вивчення. Даний матеріал не є обов'язковим і позначений **.

- Факультативне заняття 4. Полярна система координат. Розв'язування задач. Gran-2D. Сферична та циліндрична системи координат.

Полярна система є логічним продовженням у вивченні систем координат. Здобувачі освіти ознайомилися з полярною системою координат, дізнались її основні властивості та означення, вони усвідомили, що дані знання є необхідними для певних професій, зокрема тих, які пов'язані з мореплавством та астрономією. За допомогою полярної системи координат моряки визначають сторони горизонту за зірками. Також варто зазначити, що діти мали змогу ознайомитись з іншою програмою за допомогою якої можна працювати не тільки в афінній системі координат, а й в полярній. Дана програма має назву Gran-2D. За допомогою цієї програми можна будувати рисунки для різноманітних задач. Оскільки побудова даних графіків вручну є досить складною, то використання програми значно спрощує роботу. На даному занятті розглядається частина матеріалу, який призначений для поглибленого вивчення. Даний матеріал не є обов'язковим і позначений **.

- Факультативне заняття 6. Поділ відрізка у заданому відношенні. Розв'язування задач.

Зазвичай в школі дітей вчать ділити відрізок навпіл. На даному факультативному занятті ми навчили дітей ділити відрізок у різних співвідношеннях, дізнались основні властивості та означення. Новим для дітей було те, що точка, яка поділяє відрізок необов'язково повинна знаходитись на заданому відрізку. Здобувачі освіти застосували дані знання на практиці під час розв'язування задач різних рівнів складності. Для побудови графіків до задач діти мали змогу працювати в програмах Gran-2D і GebGebra, з якими вони познайомились на минулих заняттях. На практиці ці знання можуть бути застосованими під час архітектурних робіт та моделювання різних об'єктів.

- Факультативне заняття 12. Площа трикутника. Розв'язування задач.

На попередніх заняттях під час розв'язування задач на знаходження площі трикутника найчастіше здобувачі освіти зверталось до його сторін і кутів. Запропоноване факультативне заняття удосконалює ці знання і ознайомлює з різними методами, за допомогою яких можна знайти площу трикутника. Зокрема, діти розглянули метод знаходження площі трикутника за допомогою координат його вершин. Отримані знання діти застосували практично в ході розв'язання різнорівневих задач, в яких основним завданням є не тільки пошук площі за формулою, але й знаходження координат самих вершин за допомогою знань, отриманих на попередніх заняттях.

- Факультативне заняття 13. Віддаль між точками. Розв'язування задач.

Дане заняття передбачає повторення матеріалу, який діти вивчають під час шкільних занять. У ході розв'язання задач вони ознайомлюються з можливостями застосування здобутих знань в нестандартних ситуаціях. Різнорівневі задачі розв'язуються не тільки в прямокутній декартовій системі координат, але й в раніше вивчених: косокутній і полярній. Дані знання діти зможуть застосувати на уроках астрономії, географії, фізики. В умовах сучасного життя наші воїни Збройних Сил України застосовують їх для захисту території України від ворожих атак.

- Факультативне заняття 14. Повторення поняття вектор.

Пропоноване факультативне заняття поглиблює отримані раніше знання. Воно передбачає удосконалення вмінь і навичок під час роботи з векторами. На занятті діти мають змогу розв'язати складні задачі для яких непередбачено час на уроках. Дані знання можна застосувати на уроках фізики під час розв'язку задач на механічний рух, рух тіл під дією сил.

- Факультативне заняття 16. Рівняння прямої.

На даному занятті діти мають змогу навчитись виводити рівняння різних прямих за допомогою певних означень. Для поглиблення на даному занятті додано розгляд кутового коефіцієнта прямої і нестандартне виведення рівняння прямої, знайдено ускладнені задачі, які не розглядають на шкільних уроках. Набуті знання допоможуть розвити в здобувачів освіти просторове мислення та математичну логіку. Під час даного заняття діти можуть перевірити правильність розв'язання задач за допомогою програм Gran-2D і GebGebra, з якими вони познайомились на минулих заняттях.

Із перелічених вище уроків ми побачили, що актуальність вивчення аналітичної геометрії в школі має неабияке значення. Саме знання з цього предмету є важливими для багатьох спеціальностей: інженерія, фізика, астрономія, а це в свою чергу відкриває нові можливості проводити відкриття і розробляти нові проєкти.

Отже, під час виконання даної дипломної роботи досліджено теми, які можна розглядати на факультативних заняттях та знайдено задачі, які були б цікаві для розгляду дітям. Ці теми було визначено і виписано основні пункти теорії і кілька цікавих задач для кожної теми.

Результати даного дослідження було апробовано на III Всеукраїнській науково-методичній інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених.[17]

# Список використаних джерел


1. Білоусова В.П. Аналітична геометрія. –К.: Вища школа, 1973.– 326 с.
2. Городецький В.В., Боднарук С.Б. Алгебра та геометрія в теоремах і задачах: Навчальний посібник. Частина І. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2009. – 336 с.
3. Городецький В.В., Боднарук С.Б., Лучко В.С. Аналітична геометрія. Системи координат. Найпростіші задачі аналітичної геометрії: навчальний посібник у 4-х част., - Ч1, Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2011. – 92 с.
4. Городецький В.В., Боднарук С.Б., Довгей Ж.І. Аналітична геометрія: навчальний посібник: у 4 ч. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2012. – Ч.2. Елементи векторної алгебри – 100 с.
5. Городецький В.В., Боднарук С.Б. Аналітична геометрія. Площина і пряма в просторі: навчальний посібник: у 4 ч., – Ч.4, Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2013. – 96 с.
6. Городецький В.В., Боднарук С.Б., Шевчук Н.М. Аналітична геометрія. Пряма на площині : навч. посіб. у 4-х част. Ч. ІІІ/ В.В. Городецький, С.Б. Боднарук, Шевчук Н.М. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2018. – 96 с.
7. Городецький В.В., Боднарук С.Б., Довгей Ж.І., Лучко В.С. Аналітична геометрія в теоремах та задачах: навчальний посібник, Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2018. – 382 с.
8. Городецький В.В., Боднарук С.Б., Довгей Ж.І., Лучко В.С. - Аналітична геометрія в теоремах і задачах: Навчальний посібник, Чернівці: Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича 2018 – 384с.
9. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С Геометрія - підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів Харків «Гімназія» 2017 – 236 с.
10. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М.С. Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики -

підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів Харків «Гімназія» 2017 – 299 с.

11. П. Ф. Фільчаков – Геометрія, тригонометрія, векторна алгебра: Довідник з елементарної математики, Київ: Видавництво «Наукова думка» 1967р. – 436 с.

12. Офіційний вісник Європейського Союзу від 30.12.2006 — 2006 р., / L394 /, стор. 10

13. *Вільна Енциклопедія* (*Wikipedia: The Free Encyclopedia*) 1 липня 2022 23:45 UTC [цитовано 16 серпня 2022 року]. Режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/GeoGebra – Назва з екрану.

14. *Вільна Енциклопедія* (*Wikipedia: The Free Encyclopedia*), 1 липня 2022 23:45 UTC [цитовано 28 серпня 2022 року]. Режим доступу: https://cutt.ly/b0t7f4i – Назва з екрану.

15. *Вільна Енциклопедія* (*Wikipedia: The Free Encyclopedia*), 1 липня 2022 23:45 UTC [цитовано 28 серпня 2022 року]. Режим доступу: https://cutt.ly/F0t7qyE – Назва з екрану.

16. Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова [Електронний ресурс] : Web-сайт. – Електрон. дані та прогр. – К. : НБУВ, 2012 – 2021. – Режим доступу: https://ktoi.fi.npu.edu.ua/zavantazhyty/category/2-Gran-2Dd# – Назва з екрану.

17. Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2022 Форум молодих дослідників»: матеріали ІІІ Всеукраїнської науково-методичної інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених (18 листопада 2022 р., м. Суми) – Суми: [СумДПУ імені А.С.Макаренка], 2022. – 152 с.