math_2022_048

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЧЕРНІВЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ЮРІЯ ФЕДЬКОВИЧА

Факультет математики та інформатики

Кафедра алгебри та інформатики

Розробка факультативного курсу «Гіперкомплексні системи чисел та їх застосування» для старшої школи ЗЗСО

Дипломна робота

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Виконала:

студентка 6 курсу 606 групи

Стефурак Христина Миколаївна

Керівник:

кандидат фіз.-мат. наук, доцент

Боднарук Світлана Богданівна

До захисту допущено

на засіданні кафедри алгебри та інформатики

протокол №6 від 7 грудня 2022 р.

Зав. кафедрою ___________ доц. Колісник Р.С.

Чернівці – 2022

АНОТАЦІЯ

У дипломній роботі розглядається можливість викладання матеріалу, пов'язаного з теорією гіперкомплексних числових систем, на факультативних заняттях з математики для учнів старших класів ЗЗСО. Основною частиною є підбір матеріалу, що стане основою такого курсу.

У роботі наведено орієнтовний тематичний план даного факультативу. Основна частина – конспекти таких занять. Деякі із них відведено на ознайомлення учнів з основними положеннями теорії гіперкомплексних систем, інші – мають практичний зміст. Зокрема, вивчено питання умов існування та кількості розв'язків рівнянь 2-го та 3-го степеня у множинах окремих гіперкомплексних систем та наведено конкретні приклади, що ілюструють отримані результати. Для кращого розуміння матеріалу використовуємо візуалізацію з допомогою пакета динамічної геометрії GeoGebra 2D/3D.

Ключові слова: гіперкомплексні числові системи, факультатив.

ANNOTATION

The thesis examines the possibility of teaching material related to the theory of hypercomplex numerical systems in elective classes in mathematics for students of high school grades. The main part is the selection of material that will become the basis of such a course.

The work provides an approximate thematic plan of this elective. The main part is the abstracts of such classes. Some of them are devoted to familiarizing students with the basic principles of the theory of hypercomplex systems, others have a practical meaning. In particular, the question of the existence conditions and the number of solutions of equations of the 2nd and 3rd degree in sets of separate hypercomplex systems is studied, and specific examples are given that illustrate the obtained results.

For a better understanding of the material, we use visualization using the GeoGebra 2D/3D dynamic geometry package.

Key words: hypercomplex numerical systems, elective course.

Кваліфікаційна робота містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів наукових досліджень інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_________________ Х.М. Стефурак

(підпис)

ЗМІСТ

ВСТУП

Відомості про числа складалися в математиці поступово в результаті тривалого розвитку, який відбувався під дією теоретичних і практичних потреб математики.

Всім добре відомий ланцюжок $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, який демонструє співвідношення між числовими множинами та ілюструє процес їх розширення. Багато в чому це розширення стимулювалося розвитком теорії розв'язування алгебраїчних рівнянь.

Рівняння $\mathrm{x} + 2 = 0$ не має натуральних коренів. Проте, зазначене рівняння має розв'язки на множині $\mathbb{Z}$. Рівняння $2\mathrm{x} - 1 = 0$ не має розв'язків на множині $\mathbb{Z}$, але воно має розв'язки на множині $\mathbb{Q}$. Рівняння $x^2 - 2 = 0$ не має розв'язків на множині $\mathbb{Q}$, але має розв'язки в $\mathbb{R}$. Ці приклади показують, що розширення числових множин може зробити нерозв'язане раніше рівняння розв'язуваним.

Рівняння $x^2 + 1 = 0$ не має розв'язків у множині $\mathbb{R}$. Виникає природнє запитання: чи є необхідність розширити множину $\mathbb{R}$ так, щоб це рівняння стало розв'язуваним?

Перше узагальнене поняття дійсного числа – введення комплексних чисел. Ці числа є зручним математичним апаратом, який дозволяє описувати кількісні співвідношення, розв'язувати багато математичних проблем, нерозв'язаних в множині дійсних чисел. Виникнувши суто теоретично математичним шляхом, комплексні числа поступово знайшли своє застосування в різних науках (аеродинаміці, геодезії, картографії, електротехніці та ін.). Сучасні дослідники знаходять комплексним числам досить цікаві застосування, зокрема в фінансових розрахунках, при побудові математико-економічних моделей та ін.

Історія розвитку комплексних чисел починається з XVI століття. Італійські математики Джироламо Кардано (1501-1576) і Рафаель Бомбеллі (1526-1572), розв'язуючи квадратні рівняння, ввели в розгляд символ $\sqrt{-1}$ — формальний розв'язок рівняння $x^2 + 1 = 0$, а також вираз $b\sqrt{-1}$ — формальний розв'язок рівняння $x^2 + b^2 = 0$. Тоді вираз більш загального вигляду $a + b\sqrt{-1}$ можна розглядати як формальний розв'язок рівняння $(x - a)^2 + b^2 = 0$.[1]

Згодом вирази $a + b\sqrt{-1}$ стали називати «уявними» і записувати у вигляді $a + bi$. Символ «i» для позначення уявної частини комплексного числа було введено Ейлером у 1777 році. Поняття «модуль» і «аргумент» комплексного числа були запропоновані французьким ученим д'Аламбером. Геометричні тлумачення комплексних чисел і дій над ними остаточно закріпилось у математиці лише після виходу у 1831 році праці відомого німецького математика Гаусса «Теорія біквадратних лишків».

Науковці XVI ст. і наступних поколінь аж до початку XIX століття ставилися до комплексних числах з явним недовір'ям і упередженням. За словами Кардано, ці числа – «неіснуючі», «вигадані», «виникли від надлишкового мудрування». Лейбніц називав ці числа «витонченим і чудовим притулком божественного духу», а $\sqrt{-1}$ вважав символом потойбічного світу.

В 70-х роках XVIII століття Ейлер і Лагранж застосували поняття комплексної змінної до розв'язування багатьох задач. Цих чисел виявляється вже досить для розв'язання будь-якого квадратного рівняння. [7]

Спроби узагальнити поняття комплексного числа привели до першого прикладу гіперкомплексної системи – кватерніонів. Створення таких об'єктів належить ірландському вченому В. Гамільтону, який задався проблемою побудувати із точок простору числову систему, схожу до множини дійсних чисел.

Теорія кватерніонів захопила багатьох математиків. Тільки в XIX ст. було видано близько шістсот наукових робіт, посвячених кватерніонам. В цих роботах вони успішно застосовуються для вирішення різних задач з фізики, геометрії, теорії чисел.

Гіперкомплексні числові системи є розширенням поля комплексних чисел. Їх вивчення є новим напрямом сучасної математики, що бере початок у дев'ятнадцятому столітті та інтенсивно розвивається у наші дні в роботах вітчизняних та зарубіжних вчених [7].

Останнім часом спостерігається активізація досліджень, пов'язаних з гіперкомплексними числами. Це зумовлено тим, що деякі математичні твердження набувають значно простішого вигляду, або значно легше доводяться, якщо записати їх мовою дій над кватерніонами, або іншими гіперкомплексними числами.[2]

Проте, на сьогодні є значна кількість і таких вчених, які вважають, що користі від досліджень гіперкомплексних систем небагато.[25]

Комплексні числа, на жаль, не вивчаються у курсі математики у ЗЗСО у класах рівня стандарт. Згідно ж навчальної програми з математики для учнів 10-11 класів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) загальноосвітніх навчальних закладів (профільний рівень) [17], вивченню теорії комплексних чисел відводиться в курсі алгебри 34 години у 11 класі (Тема 10. Комплексні числа та многочлени).

Паралельно із вивченням даного матеріалу на уроках алгебри пропонуємо на факультативних заняттях з математики познайомити учнів із окремими питаннями класичної теорії гіперкомплексних чисел.

Для учнів старших класів, які хочуть отримати глибші знання, аніж передбачено шкільною програмою, доцільним буде розширення змістової числової лінії. Саме тому актуальним є дослідження можливості вивчення гіперкомплексних числових систем на факультативних заняттях з математики в ЗЗСО. В роботі розроблено перелік тем факультативних занять та, зокрема, підібрано теоретичний матеріал та ряд цікавих задач, що стане основою факультативного курсу «Гіперкомплексні системи чисел та їх застосування» для учнів старших класів.

Окрім цього, для геометричного тлумачення розв'язків наведених прикладів використовуватимемо пакет динамічної геометрії GeoGebra 2D/3D. На нашу думку, саме візуалізація за допомогою новітніх технологій значно збільшує інтерес та мотивує сучасних школярів до розширення знань.

РОЗДІЛ 1. ІНФОРМАЦІЯ ПРО ФАКУЛЬТАТИВНИЙ КУРС

1.1 Мотивація навчально-пізнавальної діяльності

Із давніх часів поступово відбувався процес розширення множини чисел і уявлення про них змінювалось. Так в результаті сформувались поняття натуральних, цілих, раціональних, ірраціональних та дійсних чисел. Але й на цьому розвиток систем чисел не зупинився, адже у багатьох розділах математики та її застосуваннях неможливо обмежитися розглядом лише дійсних чисел.

Хоча довгий час гіперкомплексні числа вважалися абстрактною категорією, яка не має застосування в реальному світі, проте за останні століття було неодноразово доведено, що це не так.

Для учнів старших класів, які захоплюються математикою та хочуть отримати глибші знання, аніж передбачені шкільною програмою, доцільним буде розширення змістової числової лінії. У цьому їм допоможе наш факультативний курс “ Гіперкомплексні системи чисел і їх застосування”.

1.2 Орієнтовний тематичний план факультативного курсу

1. Числові множини.
   - Поняття множини та її елементів. Скінченні та нескінченні множини.
   - Множина натуральних чисел **N**. Множина цілих чисел **Z**. Множина раціональних чисел **Q.** Множина ірраціональних чисел I. Множина дійсних чисел R.
   - Розв’язання квадратних і кубічних рівнянь в системі дійсних чисел.
2. Множина комплексних чисел.

- Розширення множини дійсних чисел. Історія виникнення комплексного числа.
- Алгебраїчна форма комплексного числа.
- Арифметичні операції над комплексними числами в алгебраїчній формі. Спряжені комплексні числа.
- Геометричне зображення комплексного числа.

3. Тригонометрична форма запису комплексного числа.
   - Тригонометрична форма запису комплексного числа.
   - Перехід від алгебраїчної до тригонометричної форми.
4. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі.
   - Множення та ділення комплексних чисел в тригонометричній формі.
   - Степінь комплексного числа з натуральним та цілим показником.
   - Формула Муавра.
   - Добування квадратного кореня з комплексного числа.
5. Застосування комплексних чисел у теорії многочленів.
   - Основна теорема алгебри.
   - Розв’язування алгебраїчних рівнянь другого та вищих степенів у системі комплексних чисел.
6. Двовимірні гіперкомплексні числові системи.
   - Основні відмінності подвійних і дуальних чисел від комплексних.
   - Властивості дій над дуальними та подвійними числами.
7. Дуальні числа.
   - Квадратні рівняння в системі дуальних чисел.

- Геометрична інтерпретація розв’язків квадратних рівнянь у системі дуальних чисел.
- Квадратний корінь з дуального числа.

8. Дуальні числа. Розв’язування прикладів.
   - Квадратні рівняння в системі дуальних чисел.
9. Подвійні числа.
   - Квадратні рівняння в системі подвійних чисел.
   - Геометрична інтерпретація розв’язків квадратних рівнянь в системі подвійних чисел.
   - Квадратний корінь з подвійного числа.
10. Подвійні числа. Розв’язування прикладів.
    - Квадратні рівняння в системі подвійних чисел.
11. Кубічні рівняння в системі дуальних чисел.
    - Корінь кубічний із дуального числа.
    - Особливості розв’язування кубічних рівнянь в системі дуальних чисел.
12. Кубічні рівняння в системі подвійних чисел.
    - Корінь кубічний із подвійного числа.
    - Особливості розв’язування кубічних рівнянь в системі подвійних чисел.
13. Розв’язування кубічних рівнянь у системі дуальних та подвійних чисел.
    - Розв’язування кубічних рівнянь в системі дуальних чисел.

- Розв’язування кубічних рівнянь в системі подвійних чисел.

14. Гіперкомплексні системи більших розмірностей. Кватерніони.
    - Означення кватерніонів.
    - Властивості дій над кватерніонами.
    - Таблиця множення в системі кватерніонів.
15. Розв’язування завдань у системі кватерніонів.
    - Знаходження кореня квадратного з кватерніонів.
    - Розв’язування квадратних рівнянь в системі кватерніонів.
    - Геометрична інтерпретація розв’язків таких рівнянь.
16. Алгебри
    - Означення алгебри розмірності n.
    - Гіперкомплексна система – окремий випадок алгебри.
    - Комутативні, асоціативні алгебри, алгебри з діленням.
    - Ізоморфні алгебри.
    - Алгебри з одиницею. Теорема Фробеніуса.
17. Застосування гіперкомплексних чисел.
    - Застосування гіперкомплексних чисел в математиці.
    - Застосування при розв’язанні задач з електротехніки.
    - Застосування в комп'ютерній графіці й програмуванні ігор.

РОЗДІЛ 2. КОНСПЕКТИ ЗАНЯТЬ ФАКУЛЬТАТИВНОГО КУРСУ

Звертаємо увагу на те, що згідно навчальної програми з математики для учнів 10-11 класів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) загальноосвітніх навчальних закладів у 11 класі відведено 34 год. на вивчення теми “Комплексні числа та многочлени”. Зокрема, програма передбачає опрацювання таких тем [17]:

- Множина комплексних чисел. [4, с. 198-200]
- Геометрична інтерпретація комплексного числа. [4, с. 209-210]
- Тригонометрична форма запису комплексного числа. [4, с. 211-212]
- Дії над комплексними числами в різних формах запису. [4, с. 216-217]
- Формула Муавра. Корінь n-го степеня з комплексного числа. [4, с. 218-220]
- Многочлен та його корені. [6, с. 50]
- Розклад многочлена на незвідні множники. [18, с. 50-52]
- Кратні корені. Основна теорема алгебри. Теорема Вієта. [24]
- Рівняння вищих степенів. Формула Кардано. [16, 19]

Оскільки теми 1-5 із нашого плану охоплені навчальною програмою, то не вважаємо за потрібне детально описувати їх у нашій роботі. Переходимо до наступного матеріалу.

2.1 Двовимірні гіперкомплексні числові системи

Мета: ознайомити із теоретичними відомостями про множини дуальних та подвійних чисел, їх властивостями; активізувати мислення учнів; виховувати інтерес до математики.

Форми проведення: словесні, наочні, практичні.

- **Теоретичні відомості про множини комплексних, дуальних та подвійних чисел**

При введенні комплексних чисел, побудовано числову систему із виразів $a + +bi$, додавання та множення яких здійснюється за формулами:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i, \quad (2.1)$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + dc)i. \quad (2.2)$$

Формула (2.1) для дії додавання виглядає повністю природно. Що ж стосується формули (2.2), то цього сказати не можна. Виникає питання: чи можна із цих же виразів $a + bi$ отримати ще якусь числову систему, зберігши правило додавання (2.1), але змінивши при цьому (2.2) якимось новим законом множення?

Вкажемо вимоги, які ставимо до нового правила множення:

1) Множення дійсного числа a (якщо його розглядати як елемент нової числової системи $a = a + 0i$) на довільне число $z = b + ci$ повинно давати той же результат, що і у випадку комплексних чисел, тобто:

$$(a + 0i)(b + ci) = ab + aci \text{ і } (b + ci)(a + 0i) = ab + aci.$$

В частковому випадку це означає, що для дійсних чисел нове множення має співпадати із звичайним:$(a + 0i)(b + 0i) = ab + 0i$.

Оскільки те ж саме справедливе для додавання, то дійсні числа включаються в нову числову систему з їх природною арифметикою.

2) Має виконуватись рівність:

$$(az_1)(bz_2) = (ab)(z_1z_2), \text{ де } a, b \text{ – довільні дійсні числа.}$$

3) Має виконуватися розподільний (дистрибутивний) закон:

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3,\ (z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3.$$

Звичайно, що ці вимоги ще не дозволяють написати до кінця новий закон множення, але, врахувавши їх, маємо, наприклад,

$$(a+bi)(c+di)=a(c+di)+bi(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2.$$

Тепер, щоб записати результат, залишається тільки вказати, чому дорівнює вираз i^2.

Взявши $i^2=-1$, приходимо до множення комплексних чисел. Але це не єдина можливість, бо треба тільки вимагати, щоб добуток $i*i$ належав нашій системі, тобто був числом вигляду $p+qi$. Знайшовши (задавши) числа p та q ми остаточно отримаємо вигляд закону множення:

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bdp)+(ad+bc+bdq)i \qquad (2.3)$$

Тепер можна підвести підсумки: розглядається система чисел виду $a+bi$ з законом додавання (2.1) і законом множення (2.3), де p,q – два фіксовані дійсні числа (ці числа будуть визначати «арифметику» даної системи чисел).

Із (2.3) випливає (легко довести безпосередньою перевіркою):

1) для правила (2.3) має місце комутативний закон: $z_1z_2=z_1z_2$;

2) для правила (2.3) виконується асоціативний закон: $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_{3)}$.

Здається, що можна знайти нескінченно багато числових систем, бо до формули (2.3) входять два довільні дійсні числа p та q. Але це не зовсім так. Відомо, що будь-яка система зводиться до однієї із трьох:

I) числа $a+bi$, де $i^2=-1$ (комплексні числа);

II) числа $a+bi$, де $i^2=1$ (подвійні числа);

III) числа $a+bi$, де $i^2=0$ (дуальні числа).

Основна відмінність подвійних і дуальних чисел від комплексних чисел – їх не завжди можна ділити. Згадаємо, що «ділення» означає: щоб розділити z_1 на z_2 ($z_2\neq 0$) треба розв’язати рівняння $z_2x=z_1$. [1,2]

- **Розв’язання прикладів**

Приклад 2.1. **а)** Показати, що в системі подвійних чисел неможливо (наприклад) поділити число $z_1=1$ на $z_2=1+i$.

Дійсно, якби рівняння $(1+i)x=1+0\cdot i$ мало розв'язок, то помноживши обидві частини рівняння на $1-i$, ми отримаємо: $(1-i^2)x = 1-i$, тобто $0 = 1-i$, але це неправильна рівність.

б) Знайти частку дуальних чисел $3+i$ та $1-3i$.

Відомо, що для можливості ділення на дуальне число необхідно, щоб $|z|$ цього числа був відмінним від нуля (при цьому, на відміну від комплексних чисел, дуальне число нульового модуля може бути відмінним від нуля).

Модуль дільника в нашому випадку відмінний від нуля, тому виконаємо ділення:

$$\frac{3+i}{1-3i} = \frac{(3+i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{3+9i+i}{1} = 3+10i.$$

Приклад 2.2. Знайти суму, різницю і добуток $3+2i$ та $5-i$, якщо $i^2 = 1$.
Сума: $3+2i+5-i = 8+i$;
Різниця: $3+2i-(5-i) = -2+3i$;
Добуток: $(3+2i)(5-i) = 15-3i+10i-2 = 13+7i$.

- **Завдання для самостійної роботи**

1) Знайти суму, різницю і добуток $6-i$ та $7+9i$, якщо $i^2 = 0$.

2) Навести приклади, які ілюструють те, що в системі дуальних чисел не завжди можна виконати дію ділення.

3) Додатково можна ознайомитись із поняттям “дільники нуля” числових систем.

*Також можна запропонувати учням написання наукової роботи на тему “Дільники нуля у подвійних та дуальних системах чисел”.

2.2 Квадратні рівняння в системі дуальних чисел

Мета: продемонструвати перехід від квадратного рівняння у дуальних числах до системи двох рівнянь у дійсних числах, удосконалити вміння і навички розв'язування систем рівнянь; розвивати творче, креативне мислення учнів; виховувати інтерес до навчання.

Форми проведення: словесні, наочні, практичні.

- **Зведене квадратне рівняння у загальному вигляді**

Нехай $x + iy -$ невідоме дуальне число, $i^2 = 0$, та $\alpha, b, c, d -$ відомі дійсні числа. Розв'яжемо наступне квадратне рівняння [8]:

$$(x + iy)^2 + (\alpha + bi)(x + iy) + (\, c + di) = 0 + i0. \quad (2.4)$$

Розкриємо дужки: $x^2 + 2xiy + \alpha x + \alpha iy + bix + \ c + di = 0 + i0. \quad (2.5)$

Прирівнюємо дійсну частину рівності (2.5) до дійсної, а уявну – до уявної:

$$\begin{cases} x^2 + \alpha x + \ c = 0, \\ 2xy + \alpha y + bx + d = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Для того, щоб перше рівняння системи (2.6) мало дійсні розв`язки, має виконуватися умова: D=$b^2 - 4\alpha c \geq 0$. Графічним образом цього рівняння будуть або дві дійсні паралельні прямі, або дві уявні паралельні прямі, або дві дійсні прямі, що співпадають (лінії третьої групи).

Для розпізнання графіка другого рівняння системи (2.6) потрібно здійснити спочатку поворот навколо точки O прямокутної декартової системи координат xOy на певний кут γ за формулами:[27]

$$\begin{cases} \mathrm{x} = x' \cos\gamma - \mathrm{y}' \sin\gamma\,, \\ \mathrm{y} = \ x' \sin\gamma + \mathrm{y}' \cos\gamma. \end{cases} \quad (2.7)$$

Підставимо вирази з формул (2.7) у друге рівняння системи (2.6):

$$2(x' \cos\gamma\text{-}y' \sin\gamma)(x' \sin\gamma\text{+}y' \cos\gamma) + \alpha(x' \sin\gamma\text{+}y' \cos\gamma) +$$

$$+b(x' \cos\gamma\text{-}y' \sin\gamma) + d = 0;$$

$$2(x'^2 \cos\gamma \sin\gamma\text{+} x'y'cos^2\gamma - x'y'sin^2\gamma - y'^2 \cos\gamma \sin\gamma) +$$

$$+\alpha(x' \sin\gamma\text{+}y' \cos\gamma) + b(x' \cos\gamma\text{-}y' \sin\gamma) + d = 0.$$

Тепер підберемо кут γ так, щоб коефіцієнт біля добутку $x'y'$ дорівнював нулеві, тобто щоб виконувалась рівність $cos^2\gamma - sin^2\gamma$=0 $\Rightarrow cos^2\gamma = sin^2\gamma$.

Один із кутів, що задовільняє дану рівність - це $\gamma = \frac{\pi}{4}$. При цьому $\sin\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$ і $\cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Отримуємо: x'^2-$y'^2 + \alpha\frac{\sqrt{2}}{2}x'$+ $\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}y' + b\frac{\sqrt{2}}{2}x' - b\frac{\sqrt{2}}{2}y' + d = 0$.

Після виділення повних квадратів по обох змінних маємо:

$$(x' + (\alpha + b)\frac{\sqrt{2}}{4})^2 - (y' + (b - \alpha)\frac{\sqrt{2}}{4})^2 = \frac{ab}{2} - d.$$

Канонічне рівняння цих ліній отримуємо після здійснення заміни змінних $\begin{cases} X = x' + (\alpha + b)\frac{\sqrt{2}}{4}, \\ Y = y' + (b - \alpha)\frac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases}$ в останньому рівнянні (тобто здійснюємо паралельне перенесення системи координат $x'Oy'$ в точку $Q\left(-(\alpha + b)\frac{\sqrt{2}}{4}, -(b - \alpha)\frac{\sqrt{2}}{4}\ \right)$).

Тоді в новій системі координат XQY простіше рівняння лінії матиме вигляд: $\mathrm{X}^2 - Y^2 = \frac{ab}{2} - d$.

a) Якщо $\frac{ab}{2} - d = 0$, то досліджуване рівняння (2.4) задаватиме дві дійсні прямі, що перетинаються.

b) Якщо ж $\frac{ab}{2} - d \neq 0$, то отримуємо гіперболу.

Зауваження 1. При $\frac{ab}{2} - d = 0$ і при $\alpha^2 - 4\alpha c = 0$ рівняння $(x + iy)^2 + (\alpha + bi)(x + iy) + (\ c + di) = 0 + i0$ має безліч розв`язків, бо перше рівняння системи $\begin{cases} x^2 + \alpha x +\ c = 0, \\ 2xy + \alpha y + bx + d = 0, \end{cases}$ задає пряму, що співпадає із однією з прямих, що визначаються другим рівнянням цієї системи.

Природньо, що кількість розв’язків вихідного рівняння (2.4) залежатиме від кількості точок перетину графіків рівнянь (2.6).

Надзвичайно цікаво спостерігати за поведінкою графічних образів, які задаються системою $\begin{cases} x^2 + \alpha x +\ c = 0, \\ 2xy + \alpha y + bx + d = 0, \end{cases}$ за допомогою пакета динамічної геометрії GeoGebra [22], змінюючи значення параметрів α, b, c, d.

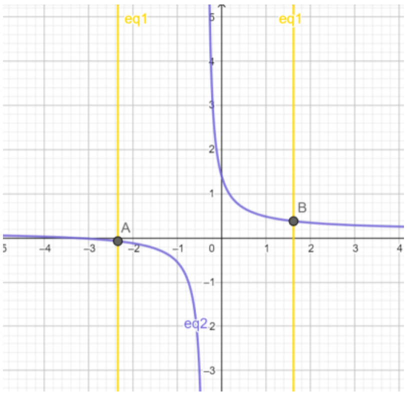

Рис. 2.1

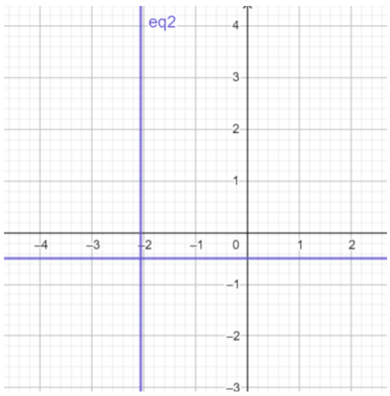

Рис. 2.2

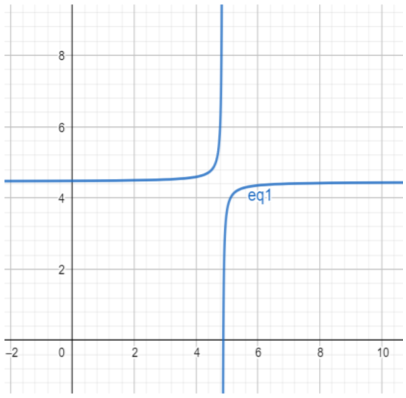

Рис. 2.3

Дослідження показали, що в залежності від значення коефіцієнтів, рівняння типу (2.4) можуть мати або два (рис. 2.1), або безліч (рис. 2.2), або ж не мати жодного розв’язку (рис. 2.3).

- **Розв’язання прикладів**

Приклад 2.3. Знайти квадратний корінь із дуального числа $4 + 12i$.

Наше завдання рівносильне знаходженню кореня такого рівняння: $z^2 = 4 + {}$ $+12i,$ де $z = x + iy, i^2 = 0$.

$$x^2 + xyi + xyi = 4 + 12i;$$

Прирівнюємо дійсну частину до дійсної, уявну до уявної:

$$\begin{cases} x^2 = 4; \\ 2xy = 12. \end{cases}$$

Така система має два розв’язки: (2; 3), (-2; -3). Відповідно і початкове рівняння має два корені: $2 + 3i$ та $-2 - 3i$.

- **Завдання для самостійної роботи**

1) Знайти квадратний корінь із дуального числа

$$a)\ 1 + 10i;\ \ b)\ 4 - 12i.$$

2.3 Дуальні числа. Розв’язування прикладів

Мета: навити учнів розв’язувати на основі загального рівняння, продемонстрованого раніше, приклади із конкретними коефіцієнтами, удосконалити навички розв’язування систем рівнянь; розвивати уяву; виховувати колективізм.

Форми проведення: словесні, наочні, практичні.

- **Актуалізація опорного матеріалу**

При визначенні до якого класу належить певна лінія зручно використовувати таблицю (2.1):[3]

Вид кривої	Канонічне рівняння
Невироджені криві	
Еліпс	$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
Гіпербола	$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
Парабола	$y^2=2\rho x$
Вироджені криві	
Точка	$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$
Дві прямі що перетинаються	$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$
Дві паралельні прямі	$\frac{x^2}{\alpha^2}=1$
Одна пряма	$x^2=0$

Порожня множина	
Уявний еліпс	$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$
Дві уявні паралельні прямі	$\frac{x^2}{\alpha^2}=-1$

Табл. 2.1

- **Розв'язування прикладів**

Приклад 2.4. Привести рівняння до системи рівнянь у дійсних числах; визначити лінії, які задані рівняннями такої системи; записати розв'язки заданого рівняння, скориставшись ППЗ**.**

$$(x+iy)^2+(4+2i)(x+iy)-2+i=0+i0,\ \ i^2=0.$$

Розкриваємо дужки:

$$x^2+2xiy+4x+4iy+2ix-2+i=0+i0.$$

Останнє рівняння рівносильне системі: $\begin{cases} x^2+4x-2=0, \\ 2xy+4y+2x+1=0. \end{cases}$

Розглянемо перше рівняння системи (нагадаємо, що вище отримано умову для існування його розв'язків: D=$\alpha^2-4\alpha c\geq 0$). Маємо: D=16+8=24. Отже, $x_{1,2}=-2\pm\sqrt{6}$. – дві паралельні прямі.

Для розпізнавання геометричного образу другого рівняння здійснимо поворот на певний кут γ за формулами: x=x` $\cos\gamma$-$y$`$\sin\gamma$, y= x` $\sin\gamma$+$y$`$\cos\gamma$.

Підставимо записані вище вирази в рівняння . Маємо:

$$2(x`\cos\gamma\text{-}y`\sin\gamma)(x`\sin\gamma\text{+}y`\cos\gamma)+4(x`\sin\gamma\text{+}y`\cos\gamma)+$$
$$+2(x`\cos\gamma\text{-}y`\sin\gamma)+1=0,$$
$$2((x`^2-y`^2)\cos\gamma\sin\gamma+x`y`(cos^2\gamma-sin^2\gamma))+4x`\sin\gamma\text{+}4y`\cos\gamma+$$
$$+2x`\cos\gamma\text{-}2y`\sin\gamma+1=0.$$

Тепер потрібно підібрати такий кут γ, щоб виконувалась рівність $cos^2\gamma-$ $-sin^2\gamma$=0 $\Rightarrow cos^2\gamma=sin^2\gamma$. Кут, що задовольняє дану рівність $\gamma=\frac{\pi}{4}$.

Отже, $\sin\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Тоді рівняння набуває вигляду:

$$2(x`^2\frac{1}{2} - y`^2\frac{1}{2}) + 4\frac{\sqrt{2}}{2}x`+ 4\frac{\sqrt{2}}{2}y`+2\frac{\sqrt{2}}{2}x` - 2\frac{\sqrt{2}}{2}y`+1 = 0,$$

$$x`^2 - y`^2 + 2\sqrt{2}x`+ 2\sqrt{2}y`+2\frac{\sqrt{2}}{2}x - 2\frac{\sqrt{2}}{2}y`+1 = 0,$$

$$(x' + \frac{3\sqrt{2}}{2}x)^2 - (y' - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{12}{4},$$

Здійснимо заміну змінних: $\begin{cases} X = x` + \frac{3\sqrt{2}}{2}, \\ Y = y` - \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

Точка $Q\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ - початок нової системи координат, в якій рівняння лінії має вигляд: X^2-Y^2=3. Це рівностороння гіпербола, асимптоти якої взаємно перпендикулярні і паралельні до старих осей координат Ox та Oy.

Зрозуміло, що шуканий розв'язок – це точки перетину отриманих прямих та гіперболи. А зараз із допомогою GeoGebra зобразимо ці лінії на координатній площині. Тут же побачимо точки їх перетину.

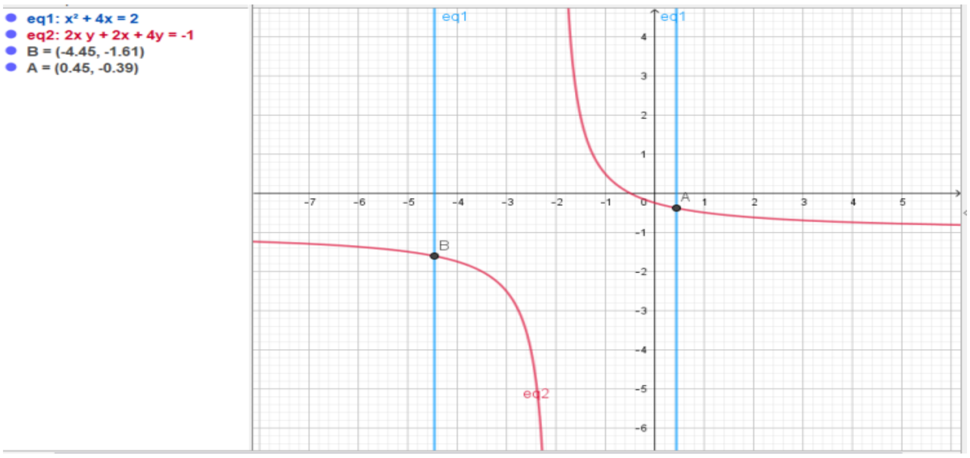

Рис. 2.4

Очевидно, що система рівнянь, а, отже, і задане рівняння має 2 розв'язки (за рис. 2.4): $-4.45 - 1.61i;\ 0.45 - 0.39i.$

Приклад 2.5. Розв'язати рівняння

$$(x + iy)^2 + (2 + i)(x + iy) + 1 + i = 0 + i0,\ \ i^2 = 0.$$

Розкриваємо дужки:

$$x^2 + 2xiy + 2x + 2iy + ix + 1 + i = 0 + i0.$$

Отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 1 = 0, \\ 2xy + 2y + x + 1 = 0. \end{cases}$$

Перетворимо рівняння системи:

$$\begin{cases} (x+1)^2 = 0, \\ 2y(x+1) + x + 1 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)^2 = 0, \\ (2y+1)(x+1) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1, \\ \left[\begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}, \\ x = -1. \end{array}\right. \end{cases}$$

Графіком першого рівняння є подвійна пряма $x = -1$, що паралельна осі $0y$.

Графіком другого − дві прямі, що перетинаються , та паралельні осям $0y$ та $0x$: $y = -\frac{1}{2}$ та $x = -1$.

Очевидно, що система має безліч розв`язків, бо перше рівняння задає пряму, яка співпадає із однією з прямих, які визначаються другим рівнянням цієї ж системи.

Отже, початкове рівняння має безліч розв'язків вигляду $-1 + yi$, де $y \in \mathbb{R}$.

Приклад 2.6. Розв'язати рівняння

$$(x+iy)^2 + (3+5i)(x+iy) + 3 + 2i = 0 + i0, \;\; i^2 = 0.$$

Розкриваємо дужки:

$$x^2 + 2xiy + 3x + 3iy + 5ix + 3 + 2i = 0 + i0.$$

Отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + 3x + 3 = 0, \\ 2xy + 3y + 5x + 2 = 0. \end{cases}$$

Для першого рівняння системи знайдемо дискримінант:

$$D = 3^2 - 4 \cdot 3 = -3.$$

Одразу ж очевидно, що система не має розв`язків, бо перше рівняння не має жодного дійсного кореня.

Отже, початкове рівняння не має коренів у системі дуальних чисел.

▪ **Завдання для самостійної роботи**

1) Привести рівняння до системи рівнянь у дійсних числах; визначити лінії, які задані рівняннями такої системи; записати розв'язки заданого рівняння, скориставшись ППЗ GeoGebra**.**

$$(x+iy)^2+(4+2i)(x+iy)+(4-4i)=0+i0,\ \ i^2=0.$$

(Відповідь: розв'язків немає.)

2) Розв'язати рівняння

$$(x+iy)^2+(3+5i)(x+iy)+5+2i=0+i0,\ \ i^2=0.$$

2.4 Квадратне рівняння в системі подвійних чисел

Мета: продемонструвати перехід від квадратного рівняння у подвійних числах до системи двох рівнянь у дійсних числах, розвивати вміннння визначати види ліній другого порядку, заданих рівняннями; розвивати культуру математичного мислення; виховувати вміння і навички міркування.

Форми проведення: словесні, наочні, практичні.

- **Зведене квадратне рівняння у загальному вигляді**

Нехай $x + iy -$ невідоме подвійне число, $i^2 = 1$, та $\alpha, b, c, d -$ відомі дійсні числа. Розв'яжемо наступне квадратне рівняння [8, 14]:

$$(x + iy)^2 + (\alpha + bi)(x + iy) + (c + di) = 0 + i0. \qquad (2.8)$$

Розкриваємо дужки:

$$x^2 + 2xiy + y^2 + \alpha x + \alpha iy + bix + by + c + di = 0 + i0. \qquad (2.9)$$

Прирівнюємо дійсну частину у (2.9) до дійсної, а уявну – до уявної:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \alpha x + by + c = 0, \\ 2xy + \alpha y + bx + d = 0. \end{cases} \qquad (2.10)$$

Спочатку перетворимо перше рівняння системи (2.10):

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = \left(x^2 + ax + \frac{a^2}{4}\right) + \left(y^2 + by + \frac{b^2}{4}\right) - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} + c.$$

Отримуємо рівняння:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2-4c}{4} \ .$$

Здійснивши паралельне перенесення: $\begin{cases} x = X - \frac{a}{2}, \\ y = Y - \frac{b}{2}. \end{cases}$ (O′($-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}$), XO′Y – нова система координат), отримуємо рівняння : $X^2 + Y^2 = \frac{a^2+b^2-4c}{4}$.

a) $a^2 + b^2 - 4c = 0$, то графічним образом цього рівняння будуть дві уявні прямі, що перетинаються у дійсній точці;

b) $a^2 + b^2 - 4c > 0$, то отримуємо коло з центром у точці $(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2})$, радіуса $r = \sqrt{\frac{a^2+b^2-4c}{4}}$;

c) $a^2+b^2-4c<0$, то графічним образом є уявне коло (або ж уявний еліпс).

Для розпізнавання графіка другого рівняння системи (2.10) потрібно здійснити спочатку поворот ПДСК хОу на певний кут γ.

Підставимо вирази з формул (2.7) у друге рівняння системи (2.10):

$$2(x'\cos\gamma\text{-}y'\sin\gamma)(x'\sin\gamma\text{+}y'\cos\gamma)+\alpha(x'\sin\gamma\text{+}y'\cos\gamma)+$$
$$+b(x'\cos\gamma\text{-}y'\sin\gamma)+d=0;$$
$$2(x'^2\cos\gamma\sin\gamma\text{+}\,x'y'cos^2\gamma-x'y'sin^2\gamma\ \ -\ y'^2\cos\gamma\sin\gamma)+$$
$$+\alpha(x'\sin\gamma\text{+}y'\cos\gamma)+b(x'\cos\gamma\text{-}y'\sin\gamma)+d=0.$$

Тепер підберемо кут γ так, щоб коефіцієнт біля добутку $x'y'$ дорівнював нулеві, тобто щоб виконувалась рівність $cos^2\gamma-sin^2\gamma$=0 $\Rightarrow$ $cos^2\gamma=sin^2\gamma$. Один із кутів, що задовольняє дану рівність $-$ $\gamma=\frac{\pi}{4}$. Тоді $\sin\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2}$ і $\cos\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Отримуємо: $$2(x'^2\cos\gamma\sin\gamma\ \text{-}y'^2\cos\gamma\sin\gamma)+\alpha(x'\sin\gamma\text{+}y'\cos\gamma)+$$
$$+b(x'\cos\gamma\text{-}y'\sin\gamma)+d=0,$$
$$2(x'^2\tfrac{1}{2}\text{ - }y'^2\tfrac{1}{2})+\alpha\tfrac{\sqrt{2}}{2}x'\text{+}\,\alpha\tfrac{\sqrt{2}}{2}y'\text{+}b\tfrac{\sqrt{2}}{2}x'-b\tfrac{\sqrt{2}}{2}y'\text{+}d=0,$$
$$x'^2\text{-}y'^2+\alpha\tfrac{\sqrt{2}}{2}x'\text{+}\,\alpha\tfrac{\sqrt{2}}{2}y'\text{+}b\tfrac{\sqrt{2}}{2}x'-b\tfrac{\sqrt{2}}{2}y'\text{+}d=0.$$

Після виділення повних квадратів по обох змінних маємо:

$$(x'+(\alpha+b)\tfrac{\sqrt{2}}{4})^2-(y'+(b-\alpha)\tfrac{\sqrt{2}}{4})^2+d-\tfrac{ab}{2}=0,$$
$$(x'+(\alpha+b)\frac{\sqrt{2}}{4})^2-(y'+(b-\alpha)\frac{\sqrt{2}}{4})^2=\frac{ab}{2}-d.$$

Канонічне рівняння цих ліній отримуємо після здійснення заміни змінних в останньому рівнянні: $\begin{cases} X=x'+(\alpha+b)\frac{\sqrt{2}}{4}, \\ Y=y'+(b-\alpha)\frac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases}$ (тобто здійснюємо паралельне перенесення системи координат $x'Oy'$ в точку $Q\left(-(\alpha+b)\frac{\sqrt{2}}{4},-(b-\alpha)\frac{\sqrt{2}}{4}\ \right)$).

Тоді в новій системі координат XQY простіше рівняння лінії матиме вигляд:

$$\mathrm{X}^2-Y^2=\tfrac{ab}{2}-d.$$

a) $\frac{ab}{2} - d = 0$, то досліджуване рівняння задаватиме дві дійсні прямі, що перетинаються.

b) $\frac{ab}{2} - d \neq 0$, то графічним образом є гіпербола.

Природно, що кількість розв'язків вихідного рівняння залежатиме від кількості точок перетину графіків рівнянь системи (2.10).

Надзвичайно цікаво спостерігати за поведінкою графічних образів, які задаються системою $\begin{cases} x^2 + \alpha x + \ c = 0, \\ 2xy + \alpha y + bx + d = 0, \end{cases}$ за допомогою пакета динамічної геометрії GeoGebra [22], змінюючи значення параметрів α, b, c, d.

Очевидно, що в залежності від вибору коефіцієнтів отримуємо різну кількість розв'язків початкового рівняння (2.8).

- **Розв'язання прикладів**

Приклад 2.7. Знайти квадратний корінь із подвійного числа $5 - 4i$.

Наше завдання рівносильне знаходженню кореня такого рівняння: $z^2 = 5 - -4i,$ де $z = x + iy, i^2 = 1$.

$$x^2 + xyi + xyi + y^2 = 5 - 4i;$$

Прирівнюємо дійсну частину до дійсної, уявну до уявної: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5; \\ 2xy = -4. \end{cases}$

Така система має два розв'язки: (-1; 2), (2; -1). Відповідно і початкове рівняння має два корені: $-1 + 2i$ та $2 - i$.

- **Завдання для самостійної роботи**

1) Знайти квадратний корінь із подвійного числа

$$a)\ 10 + 6i; \quad b) - 5 - 4i.$$

2.5 Подвійні числа. Розв’язування прикладів

Мета: навити учнів розв’язувати на основі загального рівняння, продемонстрованого на попередньому занятті, приклади із конкретними числовими коефіцієнтами; розвивати логічне мислення; виховувати самостійність.

Форми проведення: словесні, наочні, практичні.

- **Розв’язування прикладів**

Приклад 2.8. Привести рівняння до системи рівнянь у дійсних числах; визначити лінії, які задані рівняннями такої системи; записати розв’язки заданого рівняння, скориставшись ППЗ**.**

$$(x+iy)^2+(3-6i)(x+iy)+(2-9i)=0+i0.$$

Розкриваємо дужки: $x^2+2xiy+y^2+3x+3iy-6ix-6y+2-9i=0+i0$. Прирівнюємо дійсну частину до дійсної, а уявну – до уявної:

$$\begin{cases} x^2+y^2+3x-6y+2=0, \\ 2xy+3y-6x-9=0. \end{cases}$$

Перетворимо перше рівняння. Виділимо повні квадрати в лівій частині рівності: $x^2+y^2+3x-6y+2=\left(x^2+3x+\frac{9}{4}\right)+(y^2-6y+9)-\frac{9}{4}-9+2$.

Отримуємо рівняння:

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y-3)^2=\frac{37}{4}.$$

Графічним образом цього рівняння є коло з центром в точці О$(-\frac{3}{2};3)$, радіуса $r=\sqrt{\frac{37}{4}}$.

Для розпізнання графіка другого рівняння системи потрібно здійснити спочатку поворот навколо точки О прямокутної декартової системи координат хОу на певний кут γ за формулами:

$$\begin{cases} \mathrm{x}=x'\cos\gamma-\mathrm{y}'\sin\gamma, \\ \mathrm{y}=\ x'\sin\gamma+\mathrm{y}'\cos\gamma. \end{cases}$$

Підставимо вирази з останніх формул у друге рівняння системи:

$$2(x'\cos\gamma\text{-}y'\sin\gamma)(x'\sin\gamma\text{+}y'\cos\gamma)+3(x'\sin\gamma\text{+}y'\cos\gamma)-$$
$$-6(x'\cos\gamma\text{-}y'\sin\gamma)-9=0;$$
$$2(x'^2\cos\gamma\sin\gamma\text{+}\,x'y'cos^2\gamma-x'y'sin^2\gamma\text{−}y'^2\cos\gamma\sin\gamma)+$$
$$+3(x'\sin\gamma\text{+}y'\cos\gamma)-6(x'\cos\gamma\text{-}y'\sin\gamma)-9=0.$$

Тепер підберемо кут γ так, щоб коефіцієнт біля добутку $x'y'$ дорівнював нулеві, тобто щоб виконувалась рівність $cos^2\gamma-sin^2\gamma\text{=}0\Rightarrow cos^2\gamma=sin^2\gamma.$

Один із кутів, що задовольняє дану рівність: $\gamma=\frac{\pi}{4}$. При цьому, $\sin\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2}$ і $\cos\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Отримуємо: $x'^2\text{-}y'^2-\frac{3\sqrt{2}}{2}x'\text{+}\frac{9\sqrt{2}}{2}y'-9=0.$

Після виділення повних квадратів по обох змінних маємо:

$$(x'-\frac{3\sqrt{2}}{4})^2-(y'+\frac{9\sqrt{2}}{4})^2=0,$$

Канонічне рівняння цих ліній отримуємо після здійснення заміни змінних $\begin{cases}X=x'-\frac{3\sqrt{2}}{4},\\ Y=y'+\frac{9\sqrt{2}}{4}.\end{cases}$ в останньому рівнянні (тобто здійснюємо паралельне перенесення системи координат $x'Oy'$ в точку $Q\left(\frac{3\sqrt{2}}{4},-\frac{9\sqrt{2}}{4}\right)$).

Тоді в новій системі координат XQY простіше рівняння лінії матиме вигляд $\mathrm{X}^2-Y^2=0$ – пара дійсних прямих, що перетинаються. Зобразимо ці об'єкти на площині за допомогою програми GeoGebra (див. рис. 2.5).

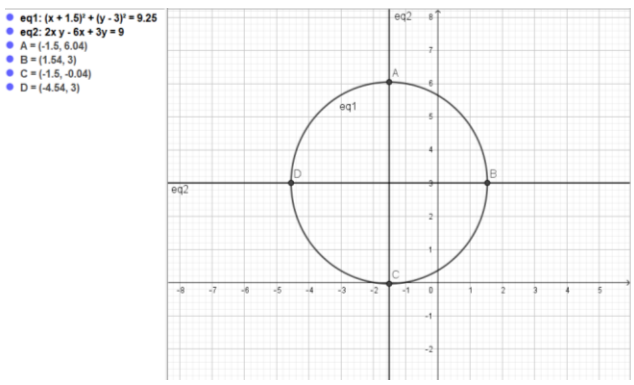

Рис. 2.5

Отже, розв'язком системи є чотири точки, координати яких позначені на зображенні вище, – (-1.5; 6.04), (1.54; 3), (-1.5; -0.04), (-4.54;3). Тоді розв'язки початкового рівняння, відповідно: -1.5+ 6.04i, 1.54+3i, -1.5 -0.04i, -4.54+3i.

Приклад 2.9. Привести рівняння до системи рівнянь у дійсних числах; визначити лінії, які задані рівняннями такої системи; записати розв'язки заданого рівняння, скориставшись ППЗ**.**

$$(x+iy)^2+(1+i)(x+iy)+(-2+2i)=0+i0,$$

Прирівнюємо дійсну частину до дійсної, а уявну – до уявної:

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y-2=0, \\ 2xy+y+x+2=0. \end{cases}$$

Спочатку перетворимо перше рівняння отриманої системи. Виділимо повні квадрати в лівій частині рівності:

$$x^2+y^2+x+y-2=\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+\left(y^2+y+\frac{1}{4}\right)-\frac{2}{4}-2.$$

Отримуємо рівняння:

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{10}{4}$$

Графічним образом цього рівняння є коло з центром в точці O$(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$, радіуса $r=\sqrt{\frac{10}{4}}$.

Для розпізнання графіка другого рівняння системи потрібно здійснити спочатку поворот навколо точки O прямокутної декартової системи координат xOy на певний кут γ за формулами: $\begin{cases} \mathrm{x}=x'\cos\gamma-\mathrm{y}'\sin\gamma, \\ \mathrm{y}=\ x'\sin\gamma+\mathrm{y}'\cos\gamma. \end{cases}$

Підставимо вирази з останніх формул у друге рівняння системи:

$$2(x'\cos\gamma\text{-}y'\sin\gamma)(x'\sin\gamma\text{+}y'\cos\gamma)+x'\sin\gamma\text{+}y'\cos\gamma+$$
$$+x'\cos\gamma\text{-}y'\sin\gamma+2=0;$$
$$2(x'^2\cos\gamma\sin\gamma\text{+}\ x'y'cos^2\gamma-x'y'sin^2\gamma\text{−}y'^2\cos\gamma\sin\gamma)+$$
$$+x'\sin\gamma\text{+}y'\cos\gamma+x'\cos\gamma\text{-}y'\sin\gamma+2=0.$$

Тепер підберемо кут γ так, щоб коефіцієнт біля добутку $x'y'$ дорівнював нулеві, тобто щоб виконувалась рівність $cos^2\gamma-sin^2\gamma$=0 ⇒ $cos^2\gamma=sin^2\gamma$.

Один із кутів, що задовольняє дану рівність: $\gamma = \frac{\pi}{4}$. При цьому, $\sin\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$ і $\cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Отримуємо:

$$x'^2 \text{-} y'^2 + \frac{2\sqrt{2}}{2}x' + 2 = 0.$$

Після виділення повних квадратів по обох змінних маємо:

$$(x' + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - y'^2 = -\frac{3}{2},$$

Канонічне рівняння цих ліній отримуємо після здійснення заміни змінних $\begin{cases} X = x' + \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ Y = y'. \end{cases}$ в останньому рівнянні (тобто здійснюємо паралельне перенесення системи координат $x'Oy'$ в точку $Q\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$).

Тоді в новій системі координат XQY простіше рівняння лінії матиме вигляд $X^2 - Y^2 = -\frac{3}{2}$ – гіпербола. Зобразимо ці обєкти на площині за допомогою програми GeoGebra (див. рис. 2.6).

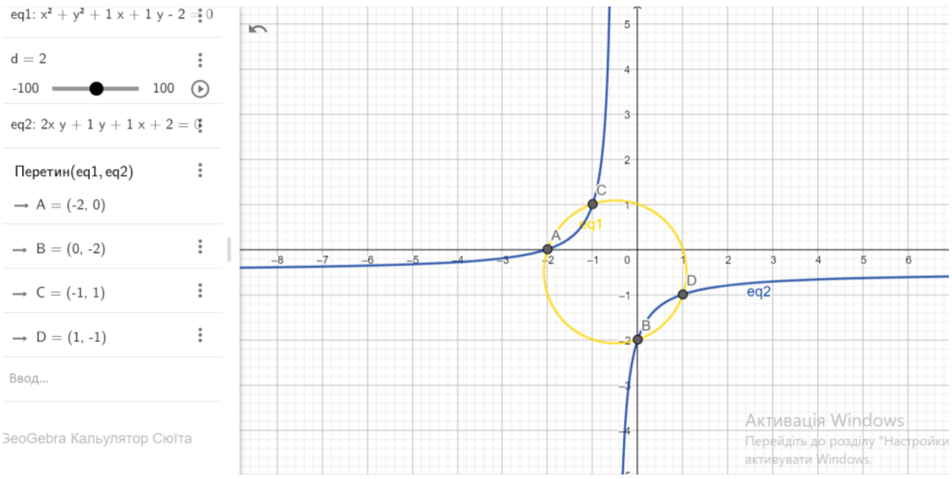

Рис. 2.6

Отже, розв'язком системи є чотири точки, координати яких позначені на зображенні вище, – (-2; 0), (0; -2), (-1; 1), (1;-1). Тоді розв'язки початкового рівняння, відповідно: -2; $-2i$; $-1 + i$; $1 - i$.

Приклад 2.10. Розв'язати рівняння

$$(x+iy)^2+2(x+iy)+(1+i)=0.$$

Прирівнюємо дійсну частину до дійсної, а уявну – до уявної:

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+1=0, \\ 2xy+2y+1=0. \end{cases}$$

У першому рівнянні системи утворюємо повні квадрати:

$$(x+1)^2+y^2=0.$$

Зрозуміло, що таке рівняння має розв'язок лише за умови, що $x=-1$ та $y=0-$ одночасно.

Однак, підставивши отримані дані значення змінних у друге рівняння, отримаємо неправильну числову рівність.

Зобразимо за допомогою програми GeoGebra лінії, задані двома рівняннями (див. рис. 2.7), аби наочно побачити, що система не має розв'язків.

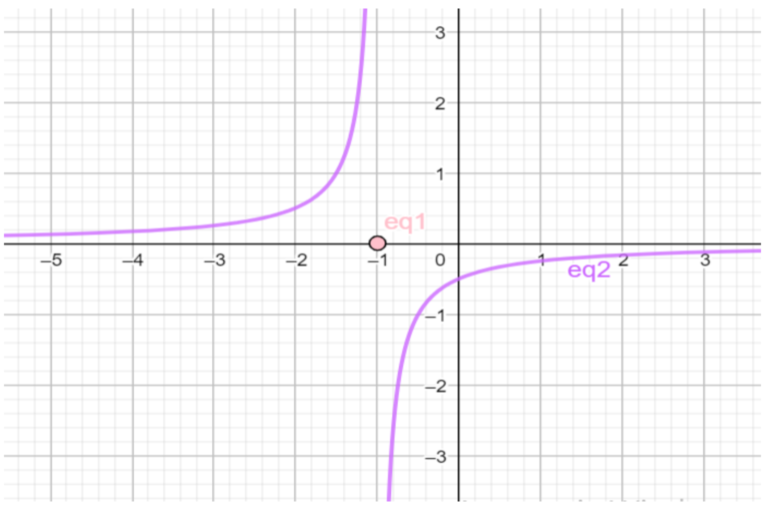

Рис. 2.7

Робимо висновок, що початкове рівняння не має розв'язків.

- **Завдання для самостійної роботи**

1) Привести рівняння до системи рівнянь у дійсних числах; визначити лінії, які задані рівняннями такої системи; записати розв'язки заданого рівняння, скориставшись ППЗ.

$$(x + iy)^2 + (-5 - 3i)(x + iy) + (3 + 2i) = 0 + i0.$$

(Рівняння має два корені)

2) Розв'язати рівняння $(x + iy)^2 + (-4 + i)(x + iy) + (5 + 5i) = 0 + i0$

(Рівняння не має коренів)

2.6 Кубічні рівняння в системі дуальних чисел

Мета: ознайомити із особливостями кубічних рівнянь у дуальній системі чисел; розвивати вміння аналізувати; спонукати до пізнавальної діяльності.

Форми проведення: словесні, практичні, наочні.

- **Найпростіше кубічне рівняння в системі дуальних чисел**

Розглянемо кубічне рівняння такого вигляду [9]:

$$z^3 = a + bi\ ,\ \text{ де } z = x + yi - \text{невідоме}, i^2 = 0 \tag{2.11}$$

Зауважимо, що розв'язання такого рівняння рівносильне знаходженню кореня кубічного від числа $(a + bi)$.

Оскільки $(x + yi)^3 = x^3 + 3x^2yi$, то рівняння (2.11) набуває такого вигляду:

$$x^3 + 3x^2yi = a + bi \tag{2.12}$$

Прирівняємо дійсну частину рівності (2.12) до дійсної, а уявну – до уявної:

$$\begin{cases} x^3 = a; \\ 3x^2y = b. \end{cases} \tag{2.13}$$

Із першого рівняння системи (2.13) визначаємо, що $x = \sqrt[3]{a}\ ,\ a \in \mathbb{R}$. Тому друге рівняння має вигляд $3a^{\frac{2}{3}}y = b$.

Тоді можливі такі випадки:

a) $a = 0,\ b = 0$: $\begin{cases} x = 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} -$ розв'язків існує безліч (всі дуальні числа з нульовою дійсною частиною);

b) $a = 0,\ b \neq 0 -$ розв'язків немає;

c) $a \neq 0,\ b = 0$: $\begin{cases} x = \sqrt[3]{a} \\ y = 0 \end{cases} -$ існує єдиний розв'язок $z = \sqrt[3]{a}$ (тут ми шукаємо корінь кубічний з дійсного числа);

d) $a \neq 0,\ b \neq 0$: $\begin{cases} x = \sqrt[3]{a} \\ y = \frac{b}{3\sqrt[3]{a}^2} \end{cases}$ – єдиний розв’язок $z = \sqrt[3]{a} + \frac{b}{3\sqrt[3]{a}^2} i$.

- **Кубічне рівняння канонічного вигляду в системі дуальних чисел**

Розглядається рівняння вигляду

$$z^3 + pz + q = 0\,, \qquad (2.14)$$

де $z = x + iy$ – невідоме дуальне число, $p = a + bi, q = c + di, i^2 = 0$.

Підставивши значення p і q в початкове рівняння (2.14) і розкривши дужки, отримуємо:

$$x^3 + 3x^2yi + ax + ayi + bxi + c + di = 0. \qquad (2.15)$$

Прирівнюємо дійсну частину рівності (2.15) до дійсної, уявну – до уявної. Отримуємо систему двох рівнянь, яку потрібно розв’язати в дійсних числах:

$$\begin{cases} x^3 + ax + c = 0, \\ 3x^2y + ay + bx + d = 0. \end{cases} \qquad (2.16)$$

Щодо першого рівняння системи (2.16), то це – кубічне рівняння канонічного вигляду в дійсних числах. Його можна розв’язати за формулами Кардано, або іншим зручним методом знайти дійсні корені.

$D = \frac{c^2}{4} + \frac{a^3}{27}$ - дискримінант цього кубічного рівняння.

a. Якщо $D > 0$, то є один дійсний корінь;

b. Якщо $D = 0$, то рівняння має три дійсних корені, принаймі два однакові;

c. Якщо $D < 0$, то воно має три різні дійсні корені.

Друге рівняння системи (2.16) – рівняння від двох змінних, y входить в це рівняння лінійно. Тому його можна виразити через x:

$$(3x^2 + a)y = -(bx + d);$$

$$y = -\frac{bx + d}{3x^2 + a};$$

Нехай x_0 – корінь першого рівняння системи. Тоді підставимо x_0 у друге:

$$(3{x_0}^2 + a)y = -(bx_0 + d);$$

Тоді можливі такі випадки:

a. Якщо $3{x_0}^2 + a$ =0 і $bx_0 + d = 0$, то друге рівняння має безліч розв'язків (отже, і система (2.16), і відповідне рівняння в дуальних числах (2.14) має безліч розв'язків);

b. Якщо $(3{x_0}^2 + a) = 0$ а $bx_0 + d \neq 0$, то друге рівняння розв'язків не має (у цьому випадку, за умови, що $D > 0$, ні система (2.16), ні відповідне рівняння в дуальних числах (2.14) розв'язку не мають);

c. Якщо жодна із попередніх умов не виконується для будь-якого із коренів першого рівняння системи (2.16), то друге може мати 1, 2, або ж 3 розв'язки, відповідно до кількості розв'язків попереднього (отже, і система, і відповідне рівняння (2.14) в дуальних числах буде мати 1, або 2, або ж 3 розв'язки). Провівши такі міркування, і додатково дослідивши за допомогою пакета динамічної геометрії GeoGebra можливі кількості перетинів графіків рівнянь системи (2.16), змінюючи значення параметрів α, b, c, d, ми дійшли висновку, що кубічне рівняння (2.14) в системі дуальних чисел може мати 1, 2, 3 розв'язки, або жодного, або ж безліч. На наступних заняттях розв'яжемо декілька рівнянь, які продемонструють можливі кількості розв'язків.

- **Розв'язування прикладів**

Приклад 2.11. Знайти корінь кубічний з дуального числа $27 + 27\mathrm{i}$.

Тут значенн a і b задовольняють умову (d), тому:

$$\sqrt[3]{27 + 27\mathrm{i}} = \sqrt[3]{27} + \frac{27}{3\sqrt[3]{27}^2} i = 3 + i\ .$$

- **Завдання для самостійної роботи**

1) Знайти корінь кубічний із дуальних чисел:

a) $8 + 12\mathrm{i}$; b) 64; c)$-27\mathrm{i}$.

2.7 Кубічні рівняння в системі подвійних чисел

Мета: ознайомити із особливостями кубічних рівнянь у системі подвійних чисел, формувати вміння переносити набуті знання в нові ситуації; розвивати вміння аналізувати та узагальнювати; виховувати взаємоповагу та колективізм .

Форми проведення: словесні, практичні, наочні.

Наочність: мультимедійна презентація для супроводу уроку.

- **Найпростіше кубічне рівняння в системі подвійних чисел**

Розглядаємо рівняння вигляду

$$z^3 = a + bi\ , \text{ де } z = x + yi - \text{невідоме}, \qquad i^2 = 1. [9] \tag{2.17}$$

Зауважимо, що розв'язання рівняння (2.17) рівносильне знаходженню кореня кубічного від подвійного числа $(a + bi)$.

Оскільки $(x + yi)^3 = x^3 + 3x^2yi + 3xy^2 + y^3i$, то рівняння (2.17) набуває такого вигляду:

$$x^3 + 3x^2yi + 3xy^2 + y^3i = a + bi. \tag{2.18}$$

Прирівняємо дійсну частину рівності (2.18) до дійсної, а уявну – до уявної:

$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = a, \\ 3x^2y + y^3 = b. \end{cases} \tag{2.19}$$

Тепер віднімемо від першого рівняння системи (2.19) друге:

$$x^3 + 3xy^2 - 3x^2y - y^3 = a - b;$$

$$(x - y)^3 = a - b;$$

$$x - y = \sqrt[3]{a - b};$$

$$x = y + \sqrt[3]{a - b};$$

Підставимо дане x у друге рівняння системи (2.19):

$$3y(y + \sqrt[3]{a - b})^2 + y^3 = b;$$

$$4y^3+6(a-b)^{\frac{1}{3}}y^2+3(a-b)^{\frac{2}{3}}y-b=0.$$

Відомо, що кубічне рівняння вигляду $cx^3+dx^2+ex+f=0$ можна звести до простішого вигляду $z^3+pz+q=0$, де $x=z-\frac{d}{3c}$, а p і q шукають так:

$$p=-\frac{d^2}{3c^2}+\frac{e}{c},\ q=\frac{2\mathrm{d}^3}{27\mathrm{c}^3}-\frac{\mathrm{de}}{3\mathrm{a}^2}+\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{c}}.$$

Визначимо p і q для нашого рівняння:

$$p=-\frac{36\cdot(a-b)^{\frac{2}{3}}}{3\cdot 16}+\frac{3(a-b)^{\frac{2}{3}}}{4}=0,\ q=\frac{2\cdot 6^3(a-b)}{27\cdot 64}-\frac{2\cdot 3(a-b)}{3\cdot 16}+\frac{-b}{4}=-\frac{a+b}{8}.$$

Отримали зведене неповне кубічне рівняння

$$z^3-\frac{a+b}{8}=0;\quad \Rightarrow z=\frac{\sqrt[3]{a+b}}{2}.$$

Тоді $y=\frac{\sqrt[3]{a+b}}{2}-\frac{\sqrt[3]{a-b}}{2}=\frac{\sqrt[3]{a+b}-\sqrt[3]{a-b}}{2}$, а $x=\frac{\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{a-b}}{2}$.

Отже, початкове рівняння (2.17) має єдиний розв'язок:

$$\mathrm{z}=x+iy=\frac{\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{a-b}}{2}+\frac{\sqrt[3]{a+b}-\sqrt[3]{a-b}}{2}i.$$

Якщо $a=b$, тоді розв′язок(2.17) задається формулою $z=\frac{\sqrt[3]{2a}}{2}+\frac{\sqrt[3]{2a}}{2}i$;

- **Кубічне рівняння канонічного вигляду в системі подвійних чисел**

Розглядається рівняння вигляду: $z^3+pz+q=0,$ (2.20)

де $z=x+iy-$ невідоме подвійне число, $p=a+bi, q=c+di, i^2=1$.

Підставивши значення p і q в рівняння (2.20) і розкривши дужки, отримуємо:

$$x^3+3x^2yi+3y^2x+y^3i+ax+ayi+bxi+by+c+di=0. \qquad (2.21)$$

Прирівнюємо дійсну частину рівності (2.21) до дійсної, уявну – до уявної. Отримуємо систему двох рівнянь, яку треба розв'язати в дійсних числах:

$$\begin{cases}x^3+3y^2x+ax+by+c=0;\\ 3x^2y+y^3+ay+bx+d=0.\end{cases} \qquad (2.22)$$

Від першого рівняння системи (2.22) віднімемо друге:

$$x^3 + 3y^2x + ax + by + c - (3x^2y + y^3 + ay + bx + d) = 0;$$
$$(x - y)^3 + (a - b)(x - y) + c - d = 0.$$

Робимо заміну змінних $(x - y) = t$:

$$t^3 + (a - b)t + (c - d) = 0. \quad (2.23)$$

Рівняння (2.23) – кубічне канонічного вигляду відносно t. Його можна розв’язати за формулами Кардано, або іншим зручним методом.

$D = \frac{(c-d)^2}{4} + \frac{(a-b)^3}{27}$ - дискримінант цього кубічного рівняння.

a) Якщо $D > 0$, то (2.23) рівняння має один дійсний корінь;

b) Якщо $D = 0$, то рівняння має три дійсні корені і принаймі два з них однакові;

c) Якщо $D < 0$, то рівняння (2.23) має три різні дійсні корені.

Нехай $t_0 \in \mathbb{R}$ - один із коренів рівняння(2.23), тоді $y = x - t_0$ підставимо у одне із рівнянь системи (2.22), наприклад у перше:

$$x^3 + 3(x - t_0)^2x + ax + b(x - t_0) + c = 0$$

Отримали кубічне рівняння

$$4x^3 - 6t_0x^2x + (a + b + 3t_0{}^2)x + c - bt_0 = 0$$

Знайшовши всі x, що задовольняють дане рівняння, за формулою $y = x - t_0$ обчислимо відповідні значення y.

Провівши такі міркування, і додатково дослідивши за допомогою пакета динамічної геометрії GeoGebra можливі кількості перетинів графіків рівнянь системи (2.22), змінюючи значення параметрів a, b, c, d, ми дійшли висновку, що кубічне рівняння (2.20) в системі подвійних чисел може мати 1, або 3, або ж 9 розв’язків.

Пізніше розв'яжемо декілька рівнянь, які продемонструють можливі кількості розв’язків.

- **Розв’язування прикладів**

Приклад 2.12. Знайти корінь кубічний з подвійного числа i.

Скористаємось формулою, яку вивели трохи раніше: z=$x + iy = \frac{\sqrt[3]{0+1}+\sqrt[3]{0-1}}{2} + \frac{\sqrt[3]{0+1}-\sqrt[3]{0-1}}{2} i = i$.

Приклад 2.13. Знайти корінь кубічний з подвійного числа $4 + 4i$.

В цьому випадку $a = b$, тому, за останньою формулою $\sqrt[3]{4+4i} = \frac{\sqrt[3]{2\cdot 4}}{2} + \frac{\sqrt[3]{2\cdot 4}}{2} i = 1 + i$.

- **Завдання для самостійної роботи**

1) Знайти корінь кубічний з подвійного числа**:**

$$a)\ 0.5 + 0.5i; \qquad b) 4 - 4i.$$

2.8 Розв’язування кубічних рівнянь в системах дуальних та подвійних чисел

Мета: навити учнів розв’язувати окремі види кубічних рівнянь у системах дуальних, або подвійних чисел, удосконалити навички розв’язування систем рівнянь оптимальними способами; розвивати кмітливість; виховувати колективізм.

Форми проведення: словесні, наочні, практичні.

- **Розв’язування прикладів**

Приклад 2.14. Розв’язати рівняння $z^3 + (29 + 3i)z + 30 + 3i = 0$, де $z = x + +iy$, $i^2=0$.

Розкриваємо дужки:

$$x^3 + 3x^2yi + 29x + 3xi + 29yi + 30 + 3i = 0;$$

Прирівнюємо дійсну частину рівняння до дійсної, а уявну – до уявної. Отримуємо таку систему:

$$\begin{cases} x^3 + 29x + 30 = 0; \\ 3x^2y + 3x + 29y + 3 = 0\,. \end{cases}$$

Розглянемо перше рівняння: $x^3 + 29x + 30 = (x + 1)(x^2 - x + 30)$.

$$(x + 1)(x^2 - x + 30) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x + 1 = 0; \\ x^2 - x + 30 = 0; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1; \\ x \in \emptyset\,. \end{array}\right.$$

Отже, $x = -1 -$ єдиний дійсний корінь.

Підставимо у друге рівняння системи: $3y - 3 + 29y + 3 = 0 \ \Rightarrow \ y = 0$.

Очевидно, що наша система має єдиний дійсний розв’язок (-1;0).

Це можна побачити і з допомогою засобу програмно-педагогічного забезпечення GeoGebra на рис. 2.8.

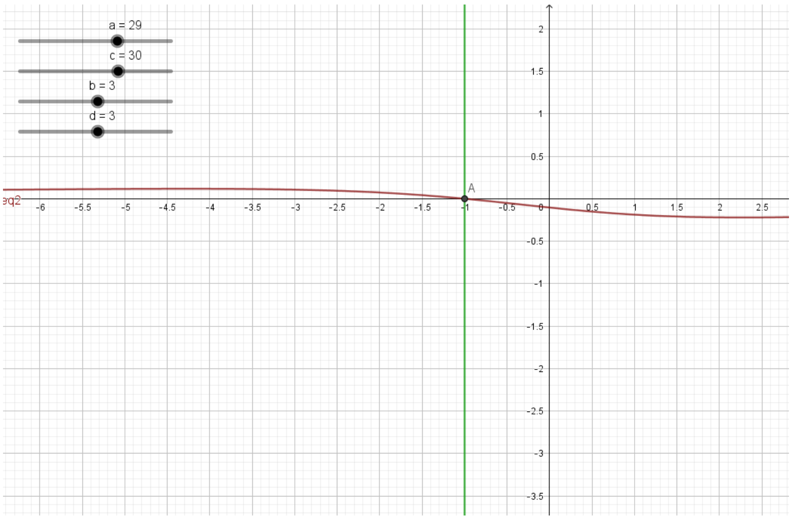

Рис. 2.8

Отже, початкове рівняння у дуальних числах має єдиний розв’язок: $z = -1$.

Приклад 2.15. Розв′язати рівняння $z^3 + (-28 + 30i)z + 48 + 60i = 0$,

де $z = x + iy$, $i^2=0$.

Розкриємо дужки:

$$x^3 + 3x^2yi - 28x - 30xi - 28yi + 48 + 60i = 0.$$

Прирівнюємо дійсну та уявну частини рівності. Отримуємо таку систему:

$$\begin{cases} x^3 - 28x + 48 = 0, \\ 3x^2y - 30x - 28y + 60 = 0 \end{cases}.$$

Розглянемо і перетворимо перше рівняння системи перше рівняння:

$$x^3 - 28x + 48 = (x - 2)(x^2 + 2x - 24);$$

$$(x - 2)(x^2 + 2x - 24) = 0; \qquad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{c} x - 2 = 0, \\ x^2 + 2x - 24 = 0. \end{array}\right.$$

Маємо три дійсні корені першого рівняння системи: $x_1 = 2;\ x_2 = -6;\ x_3 = 4.$

Тоді підставимо знайдені значення x у друге рівняння системи і знайдемо відповідні значення y:

$$y_1 = \frac{30 \cdot 2 - 60}{3 \cdot 4 - 28} = 0;\ y_2 = \frac{30 \cdot (-6) - 60}{3 \cdot 36 - 28} = -3;\ y_3 = \frac{30 \cdot 4 - 60}{3 \cdot 16 - 28} = 3;$$

Система має три розв’язки: (2;0), (-6;-3), (4;3).

Це чітко видно і на рисунку 2.9 нижче.

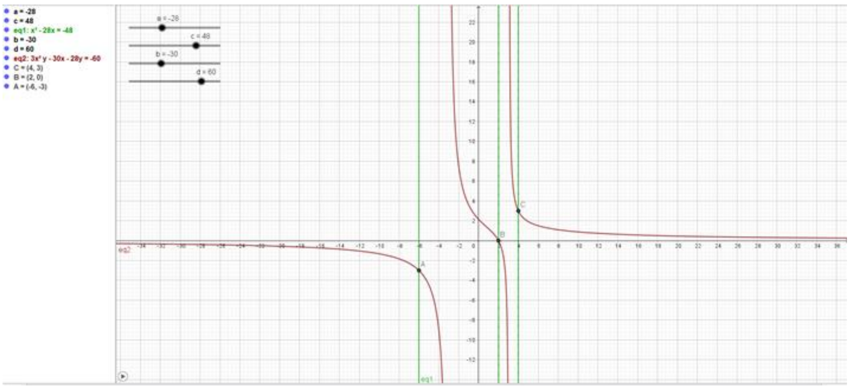

Рис. 2.9

Тому початкове рівняння має такі три розв’язки у системі дуальних чисел:

$$z_1 = 2,\ z_2 = -6 - 3i,\ z_3 = 4 + 3i.$$

Приклад 2.16. Розв′язати рівняння $z^3 + (-3 + i)z + 2 - i = 0$,

де $z = x + i + y,\ i^2=0$.

Розкриваємо дужки:

$$x^3 + 3x^2yi - 3x + xi - 3yi + 2 - i = 0;$$

Прирівнюємо дійсну частину рівняння до дійсної, а уявну – до уявної. Отримуємо таку систему:

$$\begin{cases} x^3 - 3x + 2 = 0, \\ 3x^2y + x - 3y - 1 = 0. \end{cases}$$

Розглянемо перше рівняння: оскільки $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2)$, то

$$(x - 1)(x^2 + x - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{c} x - 1 = 0; \\ x^2 + x - 2 = 0; \end{array}\right. \Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = 1;\ x_3 = -2.$$

З другого рівняння системи виразимо другу змінну :

$$y = (1 - x)/(3x^2 - 3).$$

Для $x = 2$: $y = \frac{1-2}{3 \cdot 4 - 3} = -\frac{1}{9}$. Отже, $(2; -\frac{1}{9})$ – один із розв'язків системи.

Бачимо, що при $x = 1$ друге рівняння системи має вигляд $0y = 0$.

Отже, така система має безліч розв'язків вигляду $(1; y)$, де $y \in \mathbb{R}$.

У геометричному трактуванні (рис. 2.10) це означатиме, що пряма $x = 1$ належить графіку і першого, і другого рівняння системи.

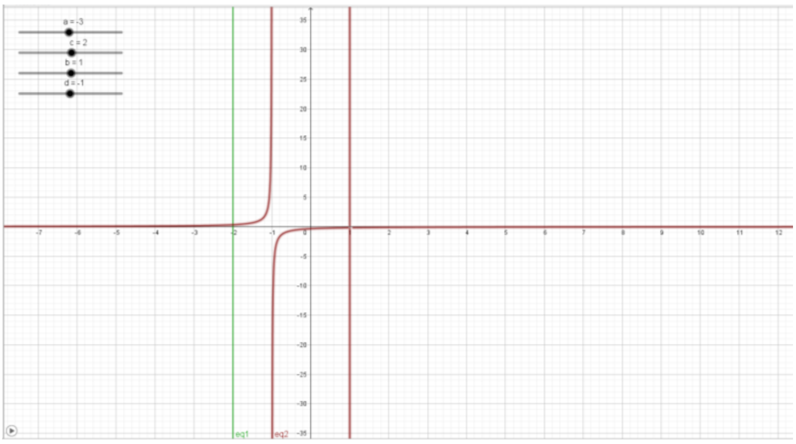

Рис. 2.10

Отже, початкове дуальне рівняння має безліч розв'язків $1 + iy$ $(y \in \mathbb{R})$ та розв′язок $2 - \frac{1}{9}i$.

Приклад 2.17. Розв'язати рівняння $z^3 + (1 + i)z + 1 + 2i = 0$, де $z = x + {} + iy$, $i^2=1$.

$$x^3 + 3x^2yi + 3xy^2 + y^3i + x + xi + yi + y + 1 + 2i = 0.$$

Прирівнюємо дійсну частину рівняння до дійсної, а уявну – до уявної. Отримуємо таку систему:

$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 + x + y + 1 = 0, \\ 3x^2y + x + y^3 + y + 2 = 0. \end{cases}$$

Від першого рівняння системи віднімаємо друге:

$$x^3 + 3xy^2 + x + y + 1 - (3x^2y + x + y^3 + y + 2) = 0;$$

$$x^3 + 3xy^2 - 3x^2y - y^3 = 1;$$

$$(x-y)^3 = 1 \;\Rightarrow\; x - y = 1.$$

Звідси отримуємо, що $x = y + 1$, і підставляємо це значення у перше рівняння системи:

$$(y+1)^3 + 3(y+1)y^2 + 2y + 2 = 0;$$

$$(\mathrm{y}+1)(\, y^2 + 2\mathrm{y} + 1 + 3y^2 + 2) = 0 \Longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{c} \mathrm{y} + 1 = 0, \\ 4y^2 + 2y + 3 = 0. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \mathrm{y} = -1, \\ \mathrm{D} = -44 \text{ (дійсних коренів немає)}. \end{array}\right.$$

Знайдемо другу змінну: $x = y + 1 = -1 + 1 = 0.$

Отже, (0;-1) - єдиний дійсний розв’язок нашої системи. Це видно і на площині GeoGebra (рис. 2.11).

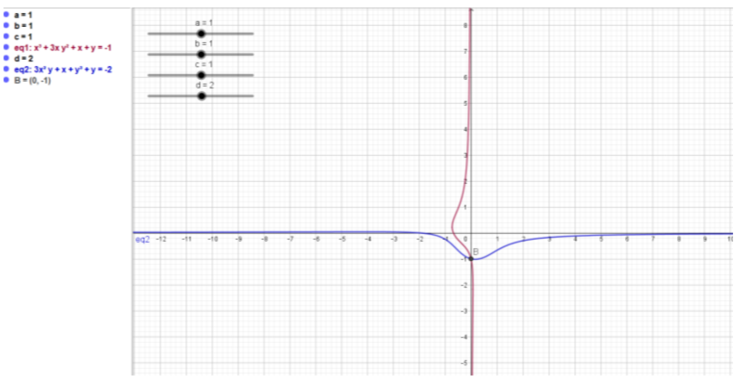

Рис. 2.11

Початкове рівняння має єдиний розв’язок у подвійних числах: $z = -i$.

Приклад 2.18. Розв’язати рівняння $z^3 + (2 + 18i)z = 0$, де $z = x + iy$, *i^2=1*.

$$x^3 + 3x^2yi + 3xy^2 + y^3i + 2x + 18xi + 2yi + 18y = 0;$$

Прирівнюємо дійсну частину рівняння до дійсної, а уявну – до уявної. Отримуємо таку систему:

$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 + 2x + 18y = 0, \\ 3x^2y + 18x + y^3 + 2y = 0\ . \end{cases}$$

Від першого віднімаємо друге рівняння системи:

$$x^3 + 3xy^2 - 3x^2y - y^3 - 16x + 16y = 0;$$

$$(x - y)^3 - 16(x - y) = 0.$$

Робимо заміну змінних: $x - y = t.$ Тоді отримуємо зведене неповне кубічне рівняння $t^3 - 16t = 0.$

$$t(\ t^2 - 16) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} t = 0, \\ t^2 - 16 = 0. \end{array}\right. \Rightarrow t_1 = 0, \quad t_2 = 4,\ \ t_3 = -4.$$

Повернемось до заміни:

1) $x - y = 0 \Rightarrow y = x$. Підставимо у в перше рівняння системи:

$$x^3 + 3x^3 + 2x + 18x = 0;$$

$$x(\ x^2 + 5) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{c} x = 0, \\ x^2 + 5 = 0. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x \in \emptyset. \end{array}\right.$$

(0;0) – розв’язок системи.

2) $x - y = 4 \Rightarrow y = x - 4$. Підставимо у в перше рівняння системи:

$$x^3 - 6x^2 + 17x - 18 = 0;$$

$$x(x^2 - 6x + 8) + 9(x - 2) = 0;$$

$$(x - 2)(x^2 - 4x + 9) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x - 2 = 0, \\ x^2 - 4x + 9 = 0. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x \in \emptyset. \end{array}\right.$$

$y_2 = x_2 - 4 = -2;$ (2;-2) – розв’язок системи.

3) $x - y = -4 \Rightarrow y = x + 4$. Підставимо у в перше рівняння системи:

$$x^3 + 3x(x+4)^2 + 2x + 18(x+4) = 0;$$

$$x^3 + 6x^2 + 17x + 18 = 0;$$

$$x(x^2 + 6x + 8) + 9(x+2) = 0;$$

$$(x+2)(x^2+4x+9) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+2=0, \\ x^2+4x+9=0. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x \in \emptyset. \end{array}\right.$$

$y_3 = x_3 + 4 = 2;$ (-2;2) – розв'язок системи.

Отримані розв'язки видно і на рис. 2.12, де побудовані графіки обох рівнянь системи.

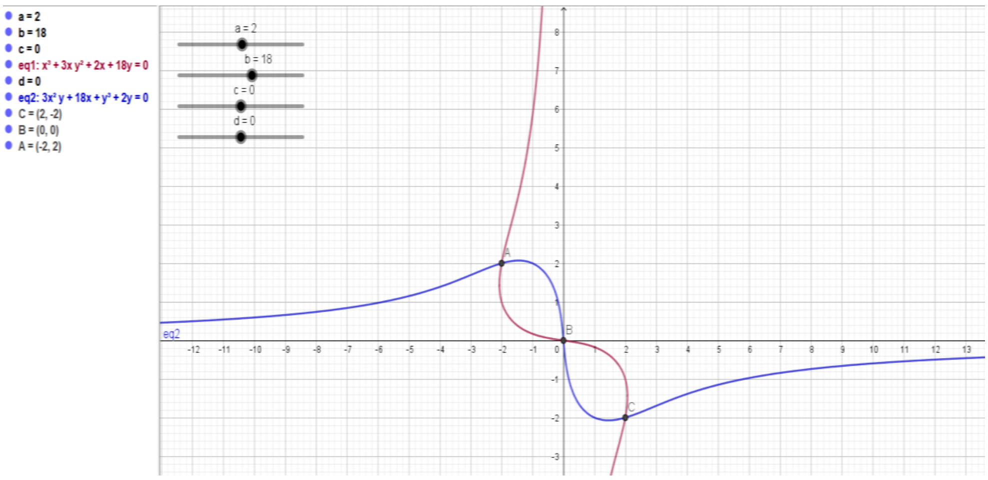

Рис. 2.12

Отже, початкове рівняння має три розв'язки у системі подвійних чисел: $z_1 = 0,\ z_2 = 2 - 2i, z_3 = -2 + 2i.$

- **Завдання для самостійної роботи**

1) Розв'язати рівняння $z^3 + (1+3i)z + 2 + 3i = 0,$ де $z = x + +iy$, $i^2=0$.

2) Розв'язати рівняння $z^3 + (1+i)z + 1 + 2i = 0,$ де $z = x + iy$, $i^2=1$.

2.9 Гіперкомплексні системи більших розмірностей. Кватерніони

Мета: ознайомити учнів із теоретичними відомостями про множини кватерніонів, їх властивостями; активізувати мислення; виховувати інтерес до нових знань.

Форми проведення: словесні, наочні, практичні.

- **Теоретичні відомості про множини кватерніонів**

➢ **Означення кватерніона, дії над ними**

Кватерніон — гіперкомплексне число, вперше описане В. Гамільтоном у 1843 році. Кватерніон використовують і в теоретичній, і у прикладній математиці, зокрема для розрахунків поворотів у просторі у тривимірній графіці.

Кватерніони — це чотиричленні числа (n=4). В частинному випадку вони перетворюються в тричленні вектори. За першу з чотирьох одиниць, з яких складається кватерніон, приймають звичайну одиницю. А три інших одиниці позначають за Гамільтоном *i, j, k.* [1]

Отже, кватерніонами називають числа вигляду $a + bi + cj + dk,$ де a, b, c, d — дійсні числа із законом додавання:

$$a + bi + cj + dk + a' + b'i + c'j + d'k =$$
$$= (a + a') + (b + b')i + (c + c')j + (d + d')k,$$

і законом множення уявних одиниць *i, j, k:*

$$i^2 = -1, \quad j^2 = -1, \quad k^2 = -1, \quad ij = k, \quad ji = -k, \quad ki = j,$$
$$ik = -j.$$

Отже, значення добутку залежить від порядку співмножників (переставна властивість множення не виконується).

Проте, для множення кватерніонів використовується сполучний (асоціативний) закон:

$$(q_1 q_2) q_{3=} q_1 (q_2 q_3).$$

Значно легше запам'ятати "таблицю множення" допомагає мал. 2.13, на якому *i, j, k* зображені трьома точками кола, які спрямовані в напрямку руху годинникової стрілки. Добуток будь-яких двох чисел $i,\ j,\ k$ дорівнює третьому, якщо рух від першого множника до другого відбувається за годинниковою стрілкою і дорівнює третьому зі знаком мінус, якщо рух відбувається проти годинникової стрілки.

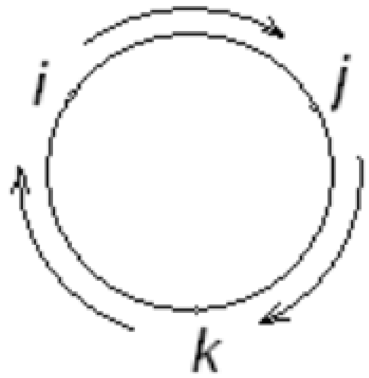

Рис. 2.13

- **Спряження кватерніонів**

За аналогією з комплексними числами вводиться ще одне означення: спряженим до кватерніона $q = a + bi + cj + dk$ називається кватерніон

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk.$$

Властивості спряжених кватерніонів:

1) $q + \bar{q} = 2a$;
2) $q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$;
3) $\overline{q_1 + q_2} = \overline{q_1} + \overline{q_2}$;
4) $\overline{q_1 \cdot q_2} = \overline{q_1} \cdot \overline{q_2}$.

- **Ділення в системі кватерніонів**

Із чисел вигляду: $a + bi + cj$ побудувати систему з діленням неможливо [1], але виявляється, що якщо ввести ще один символ k, то можна отримати систему з діленням.

Для комплексних чисел часткою при діленні z_1 та z_2 називається розв'язок рівняння $z_2x = z_1$. Але для кватерніонів добуток залежить від порядку співмножників, тому потрібно розглядати два рівняння:

$$z_2x = z_1, \tag{2.24}$$

$$xz_2 = z_1. \tag{2.25}$$

Розв'язок рівняння (2.24) називають лівою частиною від ділення q_1 та q_2 та позначають $x_л$, а розв'язок рівняння (2.25) — правою частиною $x_п$. Відомо[1,2]:

$$x_л = \frac{1}{|q_2|^2}\overline{q_2}q_1; \quad x_п = \frac{1}{|q_2|^2}q_1\overline{q_2}.$$

- **Модуль добутку**

Важлива властивість кватерніонів свідчить про те, що модуль двох кватерніонів дорівнює добутку модулів множників: $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$. Розпишемо тотожність $|\alpha\ \beta|^2 = |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2$ через компоненти кватерніонів. Отримуємо тотожність Ейлера:

$$(a_1{}^2 + b_1{}^2 + c_1{}^2 + d_1{}^2)(a_2{}^2 + b_2{}^2 + c_2{}^2 + d_2{}^2) = (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2)^2 +$$
$$+(a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 + d_1c_2)^2 + (a_1c_2 + c_1a_2 + d_1b_2 + b_1d_2)^2 + (a_1d_2 + d_1a_2 +$$
$$+b_1c_2 + c_1b_2)^2.$$

Тобто добуток суми чотирьох квадратів на суму чотирьох квадратів знову є сумою чотирьох квадратів. Нагадаємо, що у випадку комплексних чисел ми отримували аналогічну тотожність для суми двох квадратів.

Для яких n знайдеться така тотожність: добуток суми n квадратів на суму n квадратів дорівнює сумі n квадратів? Це питання довго залишалося без відповіді. Вичерпну відповідь дав німецький математик Гурвіц, який довів цікаву теорему: тотожності вказаного типу можливі тільки при n = 1,2,4,8 і не можливі при жодних інших n .

- **Числова і векторна частини кватерніона**

Якщо ввести в звичайному просторі прямокутну систему координат і позначити через *i, j, k* вектори довжини 1, які виходять з початку координат і напрямлені вздовж координат осей (мал. 2.14), то тоді будь-яка сума вигляду

$bi + cj + dk$, де b, c, d — довільні дійсні числа, є деяким вектором цього простору.

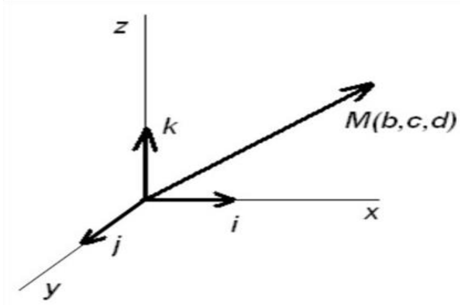

Рис. 2.14

Кожний кватерніон $q = a + bi + cj + dk$ є сумою дійсного числа a та вектора $bi + cj + dk$. Число a ми називаємо числовою частиною, а вираз $bi + cj + dk$— векторною частиною кватерніона q.

- **Розв'язування прикладів**

Приклад 2.19. Задано два кватерніона. Знайти їх суму, різницю та добуток, якщо:

$$q_1 = 1 + i + j + k, q_2 = 2 + 3i + 4j + 5k.$$

a) $(1 + i + j + k) + (2 + 3i + 4j + 5k) = 3 + 4i + 5j + 6k$;

b) $(1 + i + j + k) - (2 + 3i + 4j + 5k) = -1 - 2i - 3j - 4k$;

c) $(1 + i + j + k)(2 + 3i + 4j + 5k) = (2 - 3 - 4 - 5) + (3 + 2 + 5 - 4)i +$
$+(4 + 2 + 3 - 5)j + (5 + 2 + 4 - 3)k = -10 + 6i + 4j + 8k$.

Приклад 2.20. Записати числову і векторну частину добутку $q_1.q_2$, де $q_1 = = 7 + 6i - 4j + 9k$, $q_2 = -3 + 7i + 12j - 27k$.

$$(7 + 6i - 4j + 9k)(-3 + 7i + 12j - 27k) = 228 + 247i + 312j - 112k;$$

Числова частина: 228;

Векторна частина: $247i + 312j - 112k$.

- **Завдання для самостійної роботи**

1) Задано два кватерніона. Знайти їх суму, різницю та добуток , якщо:

$$q_1 = -2 + 3i + j + k, q_2 = 2 - 3i - 4j + k.$$

2) Записати числову і векторну частину добутку $q_1.q_2$, де $q_1 = 1 + 2i - 3j + 4k$, $q_2 = -1 + 2i + 3j - 4k$.

2.10 Розв’язування рівнянь в системі кватерніонів

Мета: навити учнів розв’язувати окремі види рівнянь у системі кватерніонів, удосконалювати навички розв’язування систем рівнянь оптимальними способами; розвивати вміння аналізувати інформацію; виховувати самостійність.

Форми проведення: словесні, наочні, практичні.

- **Розв’язування прикладів**

Приклад 2.21. Розв’язати рівняння $ix = xi$, де $x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$ – невідомий кватерніон.

Перетворимо окремо праву і ліву частини рівності:

$$ix = x_1 i - x_2 + x_3 k - x_4 \mathrm{j},\ xi = x_1 i - x_2 - x_3 k + x_4 j.$$

Прирівнявши коефіцієнти при відповідних одиницях цих двох кватерніонів, отримаємо таку систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} -x_2 = -x_2, \\ x_1 = x_1, \\ x_3 = -x_3, \\ -x_4 = x_4. \end{cases}$$

З 1-го і 2-го рівняння системи маємо, що, x_1 та x_2 – довільні дійсні числа, а з 3-го і 4-го рівнянь, очевидно: $x_3 = x_4 = 0$.

Отже, шуканий кватерніон має вигляд $x = x_1 + x_2 i + 0j + 0k = x_1 + x_2 i$, де $x_1, x_2 -$ довільні дійсні числа.

Приклад 2.22. Знайти квадратний корінь з кватерніона $-28 + 4i + 6j + 8k$.

Зауважмо, що це завдання рівносильне знаходженню розв’язку такого рівняння: $x^2 = -28 + 4i + 6j + 8k,$ де $x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$ – шуканий кватерніон.

$$(x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k)^2 = -28 + 4i + 6j + 8k;$$

Оскільки два кватерніони рівні, якщо рівні їх коефіцієнти при відповідних одиницях, то останнє рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} {x_1}^2 - {x_2}^2 - {x_3}^2 - {x_4}^2 = -28; \\ 2x_1x_2 = 4; \\ 2x_1x_3 = 6; \\ 2x_1x_4 = 8. \end{cases}$$

Із трьох останніх рівнянь виразимо інші змінні через x_1(за умови, що $x_1 \neq 0$):

$$x_2 = \frac{2}{x_1}; \qquad x_3 = \frac{3}{x_1}; \qquad x_4 = \frac{4}{x_1}.$$

Підставимо ці значення у перше рівняння системи:

$${x_1}^2 - \frac{4}{{x_1}^2} - \frac{9}{{x_1}^2} - \frac{16}{{x_1}^2} = -28 \quad \Longrightarrow \qquad {x_1}^4 + 28{x_1}^2 - 29 = 0.$$

Заміна: ${x_1}^2 = t, \quad t \geqslant 0$. Тоді маємо рівняння $t^2 + 28t - 29 = 0 \Longrightarrow$

$$t_1 = -29, \text{або } t_2 = 1.$$

$t = 1$ – задовольняє умову . Повертаємось до заміни: ${x_1}^2 = 1 \ \Longrightarrow$

$$x_1 = 1, \text{тоді } x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4,$$

$$\text{або } x_1 = -1, \text{тоді } x_2 = -2, x_3 = -3, x_4 = -4.$$

Отже, в результаті ми отримали два кватерніони, які задовольняють умову завдання: $1 + 2i + 3j + 4k$ та $-1 - 2i - 3j - 4k$.

Приклад 2.23. Дослідити умови існування розв’язку квадратного рівняння:

$$x^2 + 3x + (a + bi + cj + dk) = 0,$$

де $x = x_1 i + x_2 j + x_3 k$ – шуканий ненульовий суто уявний кватерніон, $a + bi + cj + dk -$ відомий кватерніон.

Оскільки два кватерніони рівні, якщо рівні їх коефіцієнти при відповідних одиницях, то останнє рівняння рівносильне системі:

$$
\begin{cases}
{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = a; & (2.26)\\
x_1 = -\dfrac{b}{3}; & (2.27)\\
x_2 = -\dfrac{c}{3}; & (2.28)\\
x_3 = -\dfrac{d}{3}. & (2.29)
\end{cases}
$$

Зауважимо, що (2.27) - (2.29) – рівняння площин, паралельних відповідно до координатних площин x_2Ox_3, x_1Ox_3, x_1Ox_2 прямокутної декартової системи координат в просторі. Щодо рівняння (2.26), то маємо в залежності від значень параметра a такі випадки:

1. Якщо $a < 0$, то рівняння (2.26) не має розв'язків;
2. Якщо $a = 0$, то $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, що суперечить умові;
3. Якщо $a > 0$, то рівняння (2.26) є рівнянням сфери радіуса $\sqrt{a}$.

Отже, при $b^2 + c^2 + d^2 = 9a$ та $a > 0$ існує єдиний розв'язок $\left(-\frac{b}{3}; -\frac{c}{3}; -\frac{d}{3}\right)$ початкового рівняння у системі кватерніонів.

Для геометричного тлумачення розв'язку системи використаємо пакет динамічної геометрії GeoGebra 3D.

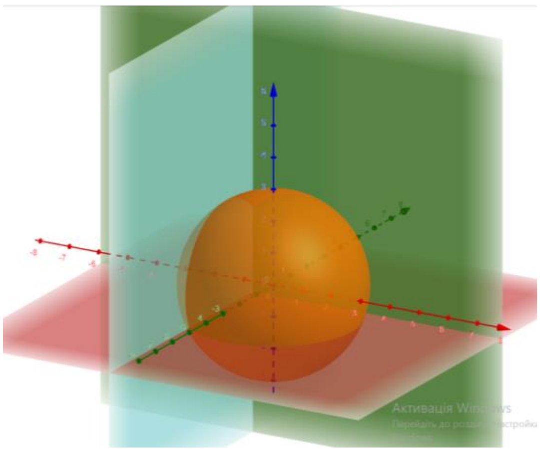

Рис. 2.15

Вибір в якості невідомої величини в розглянутому рівнянні саме суто уявного кватерніона $x = x_1 i + x_2 j + x_3 k$ дає можливість наочно зобразити отриманий розв'язок у тривимірному просторі (як на рис. 2.15).

Приклад 2.24. Розв'язати рівняння $x^2 + 3x + 14 + 3i - 6j + 9k = 0$, де $x_1 i + x_2 j + x_3 k$ – шуканий суто уявний кватерніон.

$$(x_1 i + x_2 j + x_3 k)^2 + 3(x_1 i + x_2 j + x_3 k) + 14 + 3i - 6j + 9k = 0;$$

Розкриваємо дужки:

$$-{x_1}^2 - {x_2}^2 - {x_3}^2 + 3x_1 i + 3x_2 j + 3x_3 k + 14 + 3i - 6j + 9k = 0;$$

Прирівнюємо в останньому рівнянні коефіцієнти при відповідних одиницях:

$$\begin{cases} {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 14; \\ 3x_1 = -3; \\ 3\,x_2 = 6; \\ 3\,x_3 = -9. \end{cases}$$

З останніх трьох рівнянь системи знаходимо $\begin{cases} x_1 = -1; \\ x_2 = 2; \\ x_1 = -3; \end{cases}$. Такі значення задовольняють і перше рівняння системи: $(-1)^2 + 2^2 + (-3)^2 = 14$.

Отже, система має єдиний розв'язок (-1;2;-3). Це чітко видно і на візуалізації з допомогою GeoGebra (див. рис. 2.16).

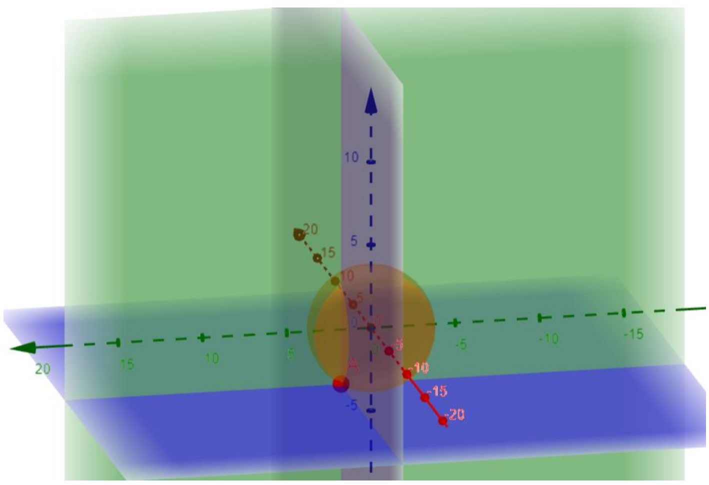

Рис. 2.16

Отже, шуканий кватерніон: $-i + 2j - 3k$.

Приклад 2.25. Розв'язати рівняння $x^2 + 3x + 2 + 3i - j + 6k = 0$, де $x = x_1 i + x_2 j + x_3 k$ – шуканий суто уявний кватерніон.

$$(x_1 i + x_2 j + x_3 k)^2 + 3(x_1 i + x_2 j + x_3 k) + 2 + 3i - j + 6k = 0;$$

Розкриваємо дужки: $-{x_1}^2 - {x_2}^2 - {x_3}^2 + 3x_1 i + 3x_2 j + 3x_3 k + 2 + 3i - j + 6k = 0;$

Прирівнюємо в останньому рівнянні коефіцієнти при відповідних одиницях:

$$\begin{cases} {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 2; \\ 3x_1 = -3; \\ 3\,x_2 = 1; \\ 3\,x_3 = -6. \end{cases}$$

З рівнянь останніх трьох рівнянь системи знаходимо $\begin{cases} x_1 = -1; \\ x_2 = \frac{1}{3}; \\ x_1 = -2; \end{cases}$. Очевидно, що перше рівняння системи такі значення не задовольняють. Отже, система не має розв'язків. Це чітко видно і з допомогою GeoGebra (див. рис. 2.17).

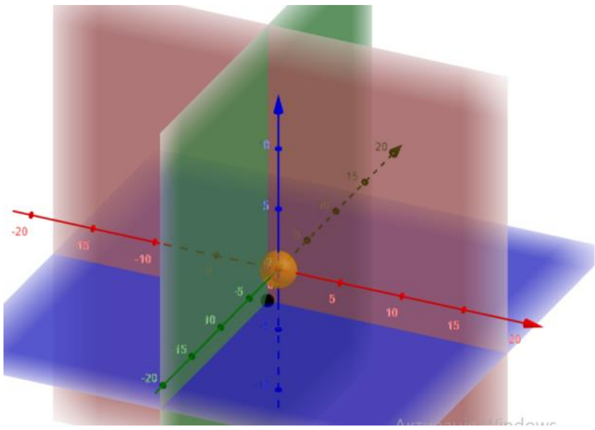

Рис. 2.17

Отже, початкове рівняння розв'язків у системі кватерніонів не має.

- **Завдання для самостійної роботи**

1) Розв'язати рівняння $x^2 + 3x + 3 + 3i - 3j + 3k = 0$, де $x_1 i + x_2 j + x_3 k$ — шуканий суто уявний кватерніон.

2) Знайти квадратний корінь з кватерніона $-24 + 4i + 8j + 10k$.

3) Розв'язати рівняння: $ix = xj$, де $x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4$ – невідомий кватерніон.

2.11 Гіперкомплексні числові системи. Алгебри

Мета: ознайомити із загальним поняттям гіперкомплексної системи чисел, алгебри розмірності n, навести одну з головних теорем теорії алгебр – теорему Фробеніуса; активізувати мислення учнів, розвивати вміння систематизувати раніше вивчений матеріал; виховувати інтерес до знань.

Форми проведення: наочні, словесні, практичні.

- **Теоретичні відомості про гіперкомплексну систему чисел, алгебри**

➢ **Означення гіперкомплексної системи чисел**

Розглянуті комплексні числа і кватерніони охоплюються більш загальним поняттям гіперкомплексної системи чисел. Тепер, коли ми знаємо найпростіші приклади таких систем, наведемо загальне означення гіперкомплексної системи чисел [1, 2].

Зафіксуємо натуральне число n і розглянемо вираз вигляду

$$a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_n i_n, \qquad (2.30)$$

де $a_0, a_1, \ldots a_n$ – довільні дійсні числа, а $i_1, i_2, \ldots i_n$ – деякі символи (які ми будемо іноді називати «уявними одиницями»).

Рівність двох таких виразів $a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_n i_n = b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + \cdots + b_n i_n$; означає, за означенням, що $a_0 = b_0, \ldots a_n = b_n$.

Додавання і віднімання виразів вигляду (2.30) визначаються такою формулою: $(a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_n i_n) \pm (b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + \cdots + b_n i_n) = (a_0 + +b_0) + (a_1 \pm b_1) i_1 + (a_2 \pm b_2) i_2 + \cdots + (a_n \pm b_n) i_n$.

Деякі властивості операції множення є справедливими в будь-якій гіперкомплексній системі.

1) Множення дійсного числа a, яке розглядається як гіперкомплексне число $a_0 + 0i_1 + 0i_2 + \cdots + 0i_n$ на довільне число $b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + \cdots + b_n i_n$ зводиться до множення всіх коефіцієнтів $b_0, b_1, \ldots b_n$ на a:

$$(a_0 + 0i_1 + 0i_2 + \cdots + 0i_n)(b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + \cdots + b_n i_n) = ab_0 + \\ + ab_1 i_1 + ab_2 i_2 + \cdots + ab_n i_n;$$

2) Якщо u і v — гіперкомплексні числа, то$(au)(bv) = (ab)(uv)$, де a, b – довільні дійсні числа.

3) Справедливі обидва варіанти (лівий і правий) розподільного закону: $u(v + w) = uv + uw, (v + w)u = vu + wu.$

Зазначимо, що нулем у гіперкомплексній системі є гіперкомплексне число такого вигляду: $a_0 + 0i_1 + 0i_2 + \cdots + 0i_n$. Можливість виконання дії ділення в кожній конкретній системі гіперкомплексних чисел залежить від вигляду «таблиці множення» уявних одиниць в цій системі.

- **Гіперкомплексна система – частковий випадок алгебри**

Алгеброю розмірності n називається множина виразів вигляду $a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_n i_n,$ де $a_{1,} \dots a_n$ – довільні дійсні числа, а $i_1, i_2, \dots i_n$ – деякі символи, в якій визначені наступні операції:

1) множення на дійсне число k, що виконується за формулою:

$$k(a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_n i_n) = ka_1 i_1 + ka_2 i_2 + \cdots + ka_n i_n;$$

2) додавання (віднімання):

$$(a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_n i_n) \pm (b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + \cdots + b_n i_n) =$$
$$= (a_0 + +b_0) + (a_1 \pm b_1) i_1 + (a_2 \pm b_2) i_2 + \cdots + (a_n \pm b_n) i_n.$$

3) множення, що задається таблицею вигляду:

$$i_\alpha i_\beta = p_{\alpha\beta} i_1 + p_{\alpha\beta} i_2 + \cdots + p_{\alpha\beta} i_n.$$

де α, β – будь-які номери від 1 до n.

Гіперкомплексна система — частковий випадок алгебри [1].

Для кращого розуміння поняття алгебри, введене вище, опиралось на поняття гіперкомплексної системи. Але варто чітко усвідомити, що поняття алгебри – більш широке. Будь-яка гіперкомплексна система може розглядатися як алгебра тієї ж розмірності.

- **Комутативна, асоціативна алгебра, алгебра з діленням**

Вище розглядали ряд термінів для позначення деяких властивостей гіперкомплексних систем. Ця термінологія без змін переноситься і на алгебру.

А саме, якщо для будь-яких двох елементів a і b алгебри A виконується рівність $ab = ba$, тоді алгебра називається комутативною; якщо для будь-яких трьох елементів a, b, c справедлива рівність $(ab)c = a(bc)$, тоді алгебра називається асоціативною.

Далі, якщо кожне з рівнянь $ax = b$, $ya = b$, де a, b – довільні елементи алгебри A, причому $a \neq 0$ має єдиний розв'язок, то кажуть, що алгебра А з діленням; елемент x, знайдений з допомогою першої рівності, називається в цьому випадку лівою часткою, а елемент y, знайдений за допомогою другого рівняння – правою часткою при діленні b на a . Легко побачити, що в алгебрах з діленням справедлива така властивість: якщо добуток ab дорівнює нулеві, то хоча б один із співмножників дорівнює нулеві.

Якщо в алгебрі А існує такий елемент e, що $ae = a$ і $ea = a$ для довільного $a \epsilon A$, то цей елемент називають одиницею алгебри А і алгебра А є алгеброю з одиницею. Будь-яка гіперкомплексна система є алгеброю з одиницею.

Найпростішим прикладом алгебри з одиницею є одновимірна алгебра з таблицею множення $i_1 i_1 = i_1$. Закон множення $(ai_1)(bi_1) = abi_1$ в цій алгебрі зводиться до множення дійсних чисел. Цю алгебру називають алгеброю дійсних чисел.

Головна особливість довільної гіперкомплексної системи полягає в тому, що гіперкомплексна система – це алгебра з одиницею, тобто вона містить елемент e такий, що $ae = ea = a$ для довільного елемента a з цієї системи.

Довільну алгебру розмірності n можна трактувати як n-вимірний векторний простір A_n [1], в якому задано таблицю множення базисних елементів $i_1, i_2, \dots i_n$. Така точка зору дозволяє легко ввести поняття ізоморфізму алгебр.

Дві алгебри однієї розмірності n називаються подібними (ізоморфними), якщо в них можна вибрати базиси з однаковими таблицями множення.

Відомо, що будь-яку гіперкомплексну систему можна розглядати як алгебру, в якій за перший базисний елемент взято одиницю алгебри. Навпаки: довільна алгебра з одиницею ізоморфна деякій гіперкомплексній системі.

Наприклад, довільна алгебра розмірності 2, що має одиницю, ізоморфна одній з трьох гіперкомплексних систем: комплексних, подвійних або дуальних чисел.

- **Теорема Фробеніуса**

Одна з класичних задач теорії алгебр – задача про пошук всіх алгебр з діленням. В повному об'ємі ця задача не розв'язана й досі. Якщо, окрім умови існування операції ділення, накласти ще й умову асоціативності дії множення, то задача спрощується. В 1878 році німецький математик Г.Фробеніус довів таку теорему.

Теорема Фробеніуса. Будь-яка асоціативна алгебра з діленням ізоморфна одній з трьох алгебр: алгебрі дійсних чисел, алгебрі комплексних чисел або алгебрі кватерніонів.

Згодом було встановлено більш загальний результат, який називають узагальненою теоремою Фробеніуса.

Теорема (узагальнена теорема Фробеніуса). Будь-яка альтернативна алгебра з діленням ізоморфна одній з чотирьох алгебр: алгебрі дійсних чисел, алгебрі комплексних чисел, алгебрі кватерніонів або алгебрі октав.

Зазначимо, що октоніо́н, окта́ва (число Келі) — гіперкомплексне число розмірності вісім. Його загальний вигляд: $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k + x_4 l + x_5 il +$ $+ x_6 jl + x_7 kl.$

Будь-яка асоціативна алгебра є альтернативною. Отже, теорема Фробеніуса випливає із узагальненої теореми Фробеніуса [1].

- **Розвязування прикладів**

Приклад 2.26. Довести, що в двовимірній алгебрі з таблицею множення, наведеною нижче, немає одиниці.

	i_1	i_2
i_1	i_1	i_2
i_2	$-i_2$	i_1

Алгебра з одиницею - алгебра, яка містить елемент e, такий, що $ae = ea = = a$ для довільного елемента a з цієї системи.

Припустимо, що $i_1 = e$. Перевіримо за наведеним нижче критерієм:

$$ei_2 = i_2, \text{але } i_2e = -i_2.$$

Аналогічна ситуація і для припущення $i_2 = e$.

- **Завдання для самостійної роботи**

1) Довести, що алгебра тривимірних векторів $ai+ bj +ck$ з операцією векторного добутку не є гіперкомплексною системою.

2.12 Застосування гіперкомплексних чисел

Мета: ознайомити учнів із широким спектром застосувань гіперкомплексних чисел у різних галузях діяльності; активізувати мислення учнів; виховувати інтерес до предмету.

Форми проведення: наочні, словесні, практичні.

- **Вступ**

Поняття про число розвивалось і розширювалося, починаючи з глибокої старовини, відповідно до потреб. Виникнувши суто теоретично математичним шляхом, гіперкомплексні числа поступово знайшли своє застосування в різних галузях.[26]

Цікаву оцінку дав комплексним числам Лейбніц у 1702 р. Він назвав їх «дивом аналізу, чудовиськом світу ідей, амфібією між буттям і небуттям». І справді, поява комплексних чисел, а пізніше інших гіперкомплексних числових множин цілком змінила уявлення про числа, спонукала математиків до досить активних досліджень у цій області, допомогла розв'язати багато нерозв'язуваних до того часу задач.

Поговоримо детальніше про деякі із застосувань таких чисел.

- **Застосування гіперкомплексних чисел у математиці**

Звісно ж, розвиток теоретичних досліджень і виявлення практичної спрямованості таких чисел найбільш пов'язані із математичною галуззю.

Одне із перших і основних застосувань - розв'язання квадратних рівнянь з від'ємним дискримінантом. Адже у восьмому класі, коли розпочинають вивчення квадратних рівнянь, про рівняння з від'ємним дискримінантом стверджують – воно не має розв'язків. І справді, таке рівняння не має розв'язку, коли ми обмежуємось дійсними числами. Але, якщо ми ознайомлені із множиною комплексних чисел, то легко знайдемо корені такого рівняння.

Саме завдяки кватерніонам виникла і розвинулась в самостійний розділ математики векторна алгебра. Теорія кватерніонів стала одним з джерел розвитку таких понять, як векторний та скалярний добутки векторів.

Кватерніони використовуються як у теоретичній, так і у прикладній математиці, зокрема - для розрахунку поворотів у просторі.

- **Застосування комплексних чисел при розв'язанні задач з електротехніки**

Оскільки комплексні числа геометрично представляються векторами на площині, то всі векторні фізичні величини, які мають напрям та довжину, можуть бути охарактеризовані за допомогою комплексних чисел. Представлення векторних фізичних величин комплексними числами полегшує виконання розрахунків цих величин, так як дії над векторами, які виконують графічно, замінюються відповідними діями над комплексними числами, які виконують аналітично, що значно простіше. При цьому комплексні числа можуть бути взяті у різних формах (алгебраїчній, показниковій, або тригонометричній) в залежності від конкретного випадку. [13]

Особливо широке застосування комплексні числа набувають в електротехніці при розрахунку електричних ланцюгів. Такі величини як напруга і струм, опір і провідність, потужність – виражаються комплексними числами.

- **Застосування в комп'ютерній графіці й програмуванні ігор**

Реальне застосування кватерніони знайшли в комп'ютерній графіці і програмуванні ігор, а також і в обчислювальній механіці, інерціальній навігації та теорії управління.

- **Висновок**

У багатьох галузях було знайдено більш загальні й практичні засоби, ніж кватерніони. Наприклад, для дослідження рухів у просторі найчастіше застосовують матричне числення. Однак там, де важливо описувати тривимірний поворот за допомогою мінімальної кількості скалярних параметрів, застосування параметрів Родріго-Гамільтона (тобто, чотирьох компонент кватерніона повороту) часто виявляється кращим: такий опис ніколи не вироджується.

Звісно ж, ми не перечислили всі застосування множин гіперкомплексних чисел. Але з наведеного можна зробити висновок про велику роль гіперкомплексних числових систем для розвитку теоретичних досліджень і виявлення їхньої практичної спрямованості.

Сучасні гіперкомплексні дослідження можна поділити на аналітичні та алгебраїчні, останні ще називають гіперкомплексним аналізом у широкому розумінні (тобто математичним аналізом із залученням власне гіперкомплексних чисел). Щодо алгебраїчних гіперкомплексних досліджень, то українські дослідники приділяють багато уваги питанням про розв'язки гіперкомплексних поліноміальних рівнянь. Також характерними (особливо для проф. А. Ф. Турбіна) є дослідження щодо конструювання нових гіперкомплексних систем і вивчення їх основних алгебраїчних характеристик.

Останнім часом окрім використання традиційних способів представлення даних в математичному моделюванні все частіше використовують і нетрадиційні форми представлення даних. Ці нетрадиційні представлення даних хоч і не претендують на універсальність, та все ж проявляють свої якості і можливості при вирішенні практичних задач. Однією з важливих нетрадиційних форм представлення даних стали гіперкомплексні числові системи. Теоретичні положення побудови гіперкомплексних числових систем почали розробляти ще в XIX ст. Проте, тривалий час не були визначені області використання гіперкомплексних систем чисел. У другій половині наступного століття було доведено дуже важливе значення кватерніонів для моделювання обертань в практичних задачах.

У наш час методи розробки і застосувань гіперкомплексних числових систем достатньо досліджені та доступні для широкого використання. [20]

ВИСНОВОК

В математиці поняття числа розширювалось з плином часу. Було додано такі поняття як нуль, від'ємні числа, раціональні числа, дійсні, а пізніше і комплексні числа, які розширюють дійсні числа введенням поняття про $\sqrt{-1}$.[25] Використання апарату комплексних чисел (незважаючи на підозріле ставлення до них деяких вчених), дозволило вирішити багато важких, нерозв'язаних досі завдань. Тому, з часом, комплексні числа здобули важливу роль в математиці і її застосуваннях . В першу чергу вони глибоко проникали в теорію алгебраїчних рівнянь, істотно спростивши їх вивчення.

Гіперкомплексні числові системи є розширенням поля комплексних чисел. Їх вивчення є відносно новим напрямом сучасної математики, що бере початок у дев'ятнадцятому столітті та інтенсивно розвивається у наші дні в роботах вітчизняних та зарубіжних вчених: Е. Садбері, А. Келі, І. Найвена, Ю.М. Березанського, О.Ф. Геруса та інших [7].

Вивченням комплексних чисел завершується одна із основних змістових ліній шкільного курсу математики – розвиток поняття числа. Учнів, які цікавляться математикою, варто було б ознайомити ще й з іншими гіперкомплексними числами.

Матеріал цієї роботи може стати основою факультативного курсу «Гіперкомплексні системи чисел та їх застосування» для учнів старших класів ЗЗСО.

У дипломній роботі наведено відомі теоретичні положення про гіперкомплексні числові системи. Оригінальною частиною роботи є розв'язання ряду задач, які можна розглянути на факультативних заняттях при вивченні множин двовимірних гіперкомплексних чисел, кватерніонів. Зокрема, було досліджено окремі види рівнянь другого і третього степеня, у яких невідомим є подвійне або дуальне число, або ж кватерніон.

Результати даної роботи апробовано на Щорічній студентській науковій конференції Чернівецького національного університету ім. Юрія Федьковича

[10, 11, 12], Всеукраїнському конкурсі студентських наукових робіт з методики навчання природничо-математичних дисциплін [21], Міжнародній науковій конференції, присвяченій 75-річчю кафедри диференціальних рівнянь та 85-річчю від дня народження Михайла Павловича Ленюка [15], та на XLII Міжнародній інтернет-конференції «Актуальні проблеми сучасної науки» [14].

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Городецький В.В., Боднарук С.Б. Вступ до теорії гіперкомплексних чисел та їх функцій: Навчальний посібник.– Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2021.–136 с.

2. Городецький В.В., Боднарук С.Б. Алгебра та геометрія в теоремах і задачах: Навчальний посібник. Частина І. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2009. – 336 с.

3. Городецький В.В., Колісник Р.С., Мироник В.І. Лінії другого порядку: Навчальний посібник. - Чернівці: «Місто», 2018.— 134 с.

4. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 класу : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський. В. Б. Полонський та ін. – Х. : Гімназія, 2019. – 304 с. : іл.

5. Монахов В.М. Методичні рекомендації з математики / Монахов В.М., Колягін Ю.М., Савицька Є.М. та ін.//Позакласна робота з математики: –М.: «Вища школа», 2002–78 с.

6. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін. – Харків : Вид-во "Ранок", 2018.-272 с.: іл.

7. Синьков М.В., Синькова Т.В., Боярінова Ю.Є. Гіперкомплексні числові системи: основи теорії, практичні використання, бібліографія. – К.: ІПРІ НАНУ, 2009. – 49 С.

8. Стефурак Х.М. Розв'язування алгебраїчних рівнянь у гіперкомплексних числових системах: курсова робота спеціальності 014.04 «Середня освіта (математика)» / Стефурак Христина Миколаївна; М-во освіти і науки України, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича. – Чернівці, 2020. – 34 с.

9. Стефурак Х.М. Гіперкомплексні числові системи в задачах елементарної математики: курсова робота: спеціальності 014.04 «Середня освіта (математика)» / Стефурак Христина Миколаївна; М-во освіти і науки України, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича. – Чернівці, 2021. – 34 с.

10. Стефурак Х. М. Розв’язування алгебраїчних рівнянь в деяких гіперкомплексних системах: матеріали студентської наукової конференції Чернівецького національного університету (22–23 квітня 2020 року). Факультет математики та інформатики. – Чернівці : Чернівец. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2020. С. 82-83.

11. Стефурак Х. М. Розв’язування алгебраїчних рівнянь в деяких гіперкомплексних системах: матеріали студентської наукової конференції Чернівецького національного університету (20–21 квітня 2021 року). Факультет математики та інформатики. – Чернівці : Чернівец. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2021. С. 64-65.

12. Стефурак Х. М. Гіперкомплексні числові системи на факультативних заняттях в ЗЗСО: матеріали студентської наукової конференції Чернівецького національного університету (12–14 квітня 2022 року). Факультет математики та інформатики. – Чернівці : Чернівец. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2022. С. 83-84.

13. Шаран О. В. Комплексні числа та їх застосування (10-11 класи)/О. В. Шаран// Математика в школі. – 2004. – №6. – С. 46-49.

14. Актуальні проблеми сучасної науки, XLII Міжнародна науковопрактична інтернет-конференція. – м. Вінниця, 6 квітня 2020 року. – Ч.7, с. 80. URL: https://bit.ly/3FvU4u3 (Дата звернення: 15.05.2022).

15. Міжнародна наукова конференція, присвячена 75-річчю кафедри диференціальних рівнянь та 85-річчю від дня народження Михайла Павловича Ленюка, 28 - 30 жовтня 2021 р., Чернівці: матеріали конференції. - Чернівці, 2021. - 194 с. - Укр., англ. URL: https://bit.ly/3DLUCuE (Дата звернення: 15.05.2022).

16. Моя освіта. Математика. Кубічні рівняння. URL: https://bit.ly/3U60moR (Дата звернення: 25.05.2022)

17. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) загальноосвітніх навчальних закладів. URL: https://bit.ly/2ByHkSA (Дата звернення: 15.01.2022).

18. Навчально-методичний посібник з алгебри для студентів 1-го курсу механіко-математичного факультету. URL: https://bit.ly/3gTphwX (Дата звернення: 21.05.2022).

19. Отримання знань. Дистанційна підтримка освіти школярів. URL: https://bit.ly/3gn2qdl (Дата звернення: 29.05.2022).

20. Розвиток технічних ідей. Історія та розвиток методів гіперкомплексного подання інформації. URL: https://bit.ly/3UdehJ1 (Дата звернення: 03.04.2022).

21. Fmf.udpu.edu. Уманський державний педагогічний університет ім. Павла Тичини. URL: https://bit.ly/3TShle7 (Дата звернення: 15.05.2022).

22. GeoGebra. Безкоштовні цифрові інструменти для класних занять, побудови графіків, геометрії, спільної дошки тощо. URL: https://bit.ly/2xV1QMM (Дата звернення: 12.04.2022).

23. StudFiles. Лінії другого порядку. URL: https://bit.ly/3Ub3qPX (Дата звернення: 13.02.2022)

24. StudFiles. Основна теорема алгебри. URL: https://bit.ly/3FvbSpe (Дата звернення: 25.05.2022).

25. Wikipedia. Гіперкомплексні числа. URL: https://bit.ly/3SRp6PU (Дата звернення: 12.02.2022).

26. Wiki.uk-ua.nina.az. Гіперкомплексні числа. URL: https://bit.ly/3sJN4lJ (Дата звернення: 12.04.2022).

27. YukhymCommunity. Поворот точки навколо початку координат. URL: https://bit.ly/3zvroh3 (Дата звернення: 29.05.2022).