МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЧЕРНІВЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ЮРІЯ ФЕДЬКОВИЧА

Факультет математики та інформатики

Кафедра алгебри та інформатики

Різні методи розв’язування текстових задач

Дипломна робота

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Виконала:
студентка 6 курсу 606 групи
Биндю Крістіна Петрівна

Керівник:
кандидат фіз.-мат. наук, асистент
Довгей Жанна Іллінічна

До захисту допущено
на засіданні кафедри алгебри та інформатики
протокол № 6 від 7 грудня 2022 р.
Зав. кафедрою _______________ доц. Колісник Р.С.

\

Чернівці – 2022

Анотація

У дипломній роботі розглянуто різні методи розв'язування текстових задач, розроблено методичні рекомендації для вчителів при проведенні факультативного курсу "Різні методи розв'язування текстових задач" та навчально-тематичне планування. Складено та систематизовано збірник задач по даній темі.

Ключові слова: текстові задачі, методи розвязяння.

Abstract

The diploma thesis examines various methods of solving text problems, developed methodological recommendations for teachers when conducting the optional course "Different methods of solving text problems" and educational and thematic planning. Compiled and systematized a collection of problems on this topic.

Keywords: text problems, solving methods.

Дипломна робота містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів наукових досліджень інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

___________________ Ініціали Прізвище

(підпис)

Зміст

Вступ

Сьогодні математика проникає у всі сфери життя людини. Практично в кожній професії людям необхідні знання з математики. Саме тому, важливу роль у цьому сенсі має вміння змоделювати математично визначені реальні ситуації. Застосування на практиці різних завдань, пов'язаних з навколишнім життям, дозволяє створювати такі навчальні ситуації, які вимагають від учня вміння змоделювати математично певні фізичні, хімічні, економічні процеси та явища, скласти план дії (алгоритм) у вирішенні реальної проблеми. Крім того, практика останніх років говорить про необхідність формування вміння розв'язувати завдання різних типів ще і у зв'язку з включенням їх до змісту ЗНО. Тому в учня має бути цілий арсенал методів розв'язання таких завдань. Інколи, через обмеження у часі у вчителя не вистачає уроків, щоб розглядати кілька прийомів розв'язання текстових завдань.

Актуальність даної роботи обумовлена тим, що при всьому різноманітті та кількості різних робіт, написаних на цю тему, велика кількість учнів не вміють розв'язувати задачі, або у них виникають сильні труднощі.

Об'єкт дослідження: навчання математики у закладах освіти.

Предмет дослідження: методика навчання різним методам розв'язання текстових завдань.

Мета дослідження: вивчити та проаналізувати методичну та навчальну літературу що стосується теми "Різні методи розв'язання текстових задах".

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати такі завдання:

- ознайомитися з сучасною науково-методичною літературою;

- розробити методичні рекомендації для вчителя по проведенню факультативного курсу;

- розробити навчально-тематичне планування для факультативного курсу;

- скласти та систематизувати збірник задач на цю тему.

Дипломна робота складається зі вступу, десяти параграфів висновків та списку використаних джерел. У першому параграфі розглянуто основні поняття та означення текстової задачі, наведено деякі методи розв’язання текстових задач, які найчастіше зустрічаються в шкільному курсі математики. Наступні вісім параграфів присвячені задачам з невідомими, які приймають тільки цілі значення; задачам з альтернативною умовою; задачам, які розв’язуються за допомогою нерівностей; задачам на рух на зустріч; задачам на рух в одному напрямку навздогін; задачам на рух в одному напрямку із відставанням; задачам на комбінований рух та задачам на роботу. До кожного блоку задач наведено приклад повного розв’язання, однієї з них, вивчивши яке, учень може самостійно розв’язати інші типові задачі з даної теми. Останній параграф містить розробку факультативного курсу: “Різні методи розв’язуваня текстових задач”. Розроблені методичні рекомендації щодо проведення факультативного курсу та навчально-тематичне планування для факультативного курсу, а також приклад контрольної роботи.

Дана робота може бути використана вчителями математики при вивченні теми, яка стосується розв’язування текстових задач та у своїй позакласній роботі.

§1. Текстові задачі

1.1. Поняття текстової задачі

“Математичні задачі, в яких є хоча б один об’єкт, що є реальним предметом, прийнято називати текстовими (сюжетними, практичними тощо). Наведені назви беруть початок від способу запису. Останнім часом найбільш поширеним є термін “текстова задача” [5].

Існують різні визначення текстових задач, такі як:

1. “Задача є виклад вимоги “знайти” за “даними” речам інші, “шукані” речі, що перебувають один до одного і до даних речей у зазначених співвідношеннях” [17];

2. “Задача, в якій залежність між даними та шуканими не виражена у явній формі, а сформульована словами, так само як і питання задачі, називаються власне задачами чи задачами з текстом” [9];

3. У подальшому під текстовою задачею будемо розуміти означення подане Л.П. Стойловою:

“Текстова задача є опис деякої ситуації (явища, процесу) на природній та (або) математичній мові з вимогою дати кількісну характеристику будь-якого компонента цієї ситуації (визначити числове значення деякої величини за відомими числовими значеннями інших величин і залежностям), або встановити наявність або відсутність деякого відношення між її компонентами та визначити вид цього відношення, або знайти послідовність необхідних дій” [15].

У кожній текстовій задачі можна виділити:

- числові значення величин, які називаються даними або відомими,

- деяку систему функціональних залежностей у неявній формі, взаємно пов'язують шукане з даними та дані між собою (словесний матеріал, що вказує на характер зв'язків між даними та шуканими),

- вимога або питання, на яке треба знайти відповідь.

1.2. Методи розв'язання задач

Є різні методи розв'язання текстових задач: арифметичний, алгебраїчний, геометричний, практичний, графічний, логічний, комбінований тощо.

Арифметичний:

Це метод, при якому здійснюються арифметичні дії над даними числами. Одну і ту ж задачу можна розв'язати різними способами, тобто відношення між даними та шуканими, покладеними в основу розв'язку, повинні відрізнятись.

Наприклад. Грають у шахи та займаються музикою 82 учні, займаються музикою та футболом 32 учні, а грають у шахи та займаються футболом 78 учнів. Скільки учнів грають у шахи, скільки у футбол, а скільки займаються музикою, якщо відомо, що кожен учень займається лише чимось одним?

Розв'язання.

1) 82+32+78=192 (уч.) – подвоєна кількість учнів, котрі займаються у всіх секціях.

2) 192:2=96 (уч.) – кількість учнів, що займаються у всіх секціях,

3) 96-32= 64 (уч.) – грають у шахи,

4) 96-78=18 (уч.) – займаються музикою,

5) 96-82=14 (уч.) – займаються футболом.

Відповідь: 64 учні грають у шахи, 18 займаються музикою та 14 займаються футболом.

Алгебраїчний:

Це метод, у якому задача розв’язується шляхом складання та розв’язання рівнянь (нерівностей) або системи рівнянь (системи нерівностей). Задача вважається розв’язаною алгебраїчним способом, якщо для її розв’язання складені інші рівняння (нерівності) або системи рівнянь (системи нерівностей), в основі яких знаходяться зовсім інші співвідношення між даними та шуканими.

Наприклад. Шахтер може видобути кілька кілограмів вугілля за 3 дні. Якщо він на день видобуватиме на 10 кілограмів більше, то впорається за 2 дні. Яка початкова продуктивність робітника та скільки кілограмів вугілля він має видобути?

Розв’язання.

Нехай x кг/день – початкова продуктивність шахтаря. Тоді, $(x + 10)$ кг/день – нова продуктивність, $3x$ кг – кількість кілограмів, які він має здобути. За умовою одержуємо рівняння $3x = 2(x + 10)$, розв’язавши яке, знайдемо $x = 20$. Отже, $20 \cdot 3 = 60$ (кг) – повинен видобути шахтер.

Відповідь: початкова продуктивність шахтаря 20 кг на день, а добути йому необхідно 60 кг.

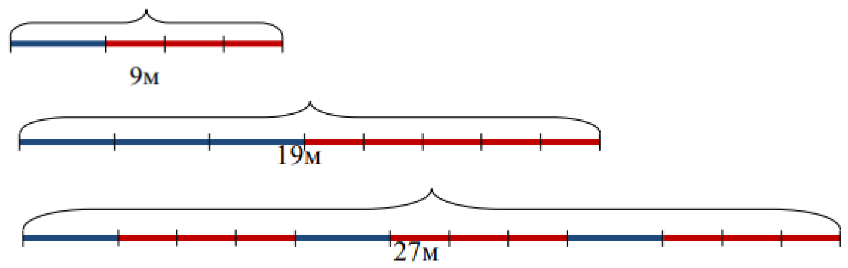
Геометричний:

При розв’язанні задачі цим методом використовуються геометричні побудови та властивості геометричних фігур. Одну і ту ж задачу можна розв’язати принципово різними геометричними методами, якщо для її розв’язання застосувати різні побудови чи властивості.

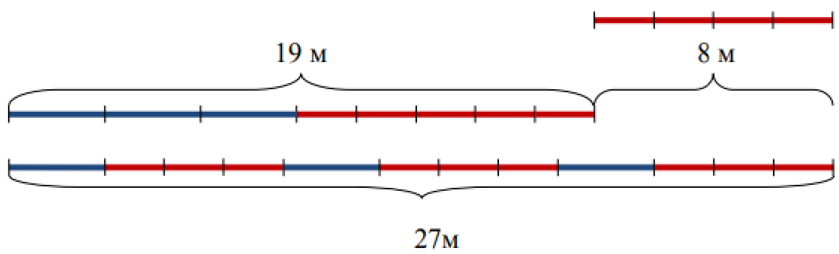
Наприклад. На одну футболку та три кофти пішло 9 метрів матеріалу, а на три таких самих футболки та п’ять кофт – 19 метрів матеріалу. Скільки тканини потрібно на виготовлення однієї футболки та однієї кофти?

Розв’язання.

По-перше, складемо геометричну модель цієї задачі. Зобразимо одну футболку синім відрізком однієї довжини, а три кофти – трьома червоними відрізками іншої довжини. Усі чотири відрізки будуть моделювати кількість матеріалу, який використаний для виготовлення однієї футболки та трьох кофт, тобто 9м.



Нижче зобразимо відповідними відрізками умову задачі, що на три таких самих футболки і п’ять кофт витратили 19м матеріалу, значить, накреслимо три синіх і п’ять червоних відповідних відрізка. Оскільки у другій умові задачі футболок у три рази більше, ніж у першій умові, то в третьому рядку накреслимо три фігури першого рядка, отримаємо три сині та дев’ять червоних відрізків загальною умовною довжиною 27м.



Отримали, що довжина третьої фігури відрізняється від довжини другої фігури на 4 рівних синіх відрізка, а довжина їх відповідає 27–19=8м. Отже, отримали, що на 4 кофти витрачено 8м матеріалу, отже, на одну кофту – 2м.

Знайти довжину тканини, витраченої на футболку, дозволить перша фігура. Зрозуміло, що довжина синього відрізка відповідає 9–3·2= 3м матеріалу. Таким чином, ми відповіли на головні питання задачі: 3м матеріалу потрібно на одну футболку та 2м на одну кофту.

Відповідь: 3м матеріалу потрібно на одну футболку та 2м на одну кофту.

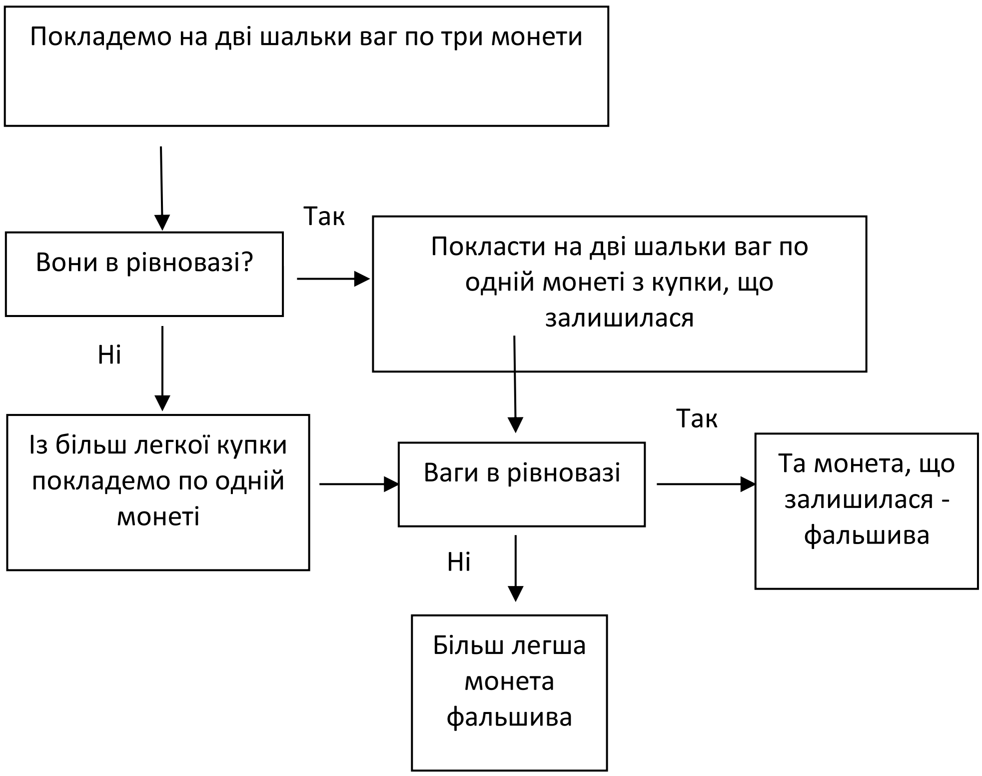
Логічний:

Це метод, у якому, зазвичай, не здійснюють обчислення, а користуються логічними міркуваннями.

Наприклад. З 9 монет одна фальшива (більш легша). Як двома зважуваннями на шалькових вагах визначити фальшиву монету?

Розв’язання.

Хід міркування оформимо як блок – схеми.



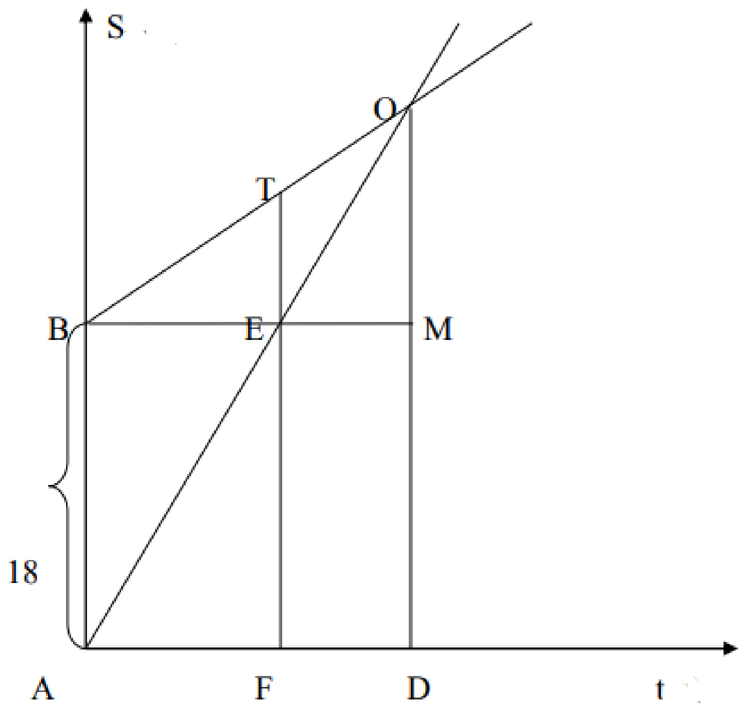
Графічний:

Це метод, у якому задача розв’язується за допомогою побудови графіків у прямокутній системі координат. Математичною моделлю буде графік, побудований за цими умовами задачі.

Наприклад. Із міста А у бік міста В вийшла людина зі швидкістю 6 км/год. У той самий час, у тому ж напрямку з міста В вийшла друга людина з швидкістю 4 км/год. Через скільки годин та на якій відстані від міста В перша людина наздожене другу, якщо відстань між містами А і В 18 км?

Розв’язання.

У прямокутній системі координат по горизонталі відкладемо час руху (у годинах), по вертикалі відстань (у км). Побудуємо графіки, що характеризують рух кожного пішохода.



1) 18 : 6 = 3 (год) – AF

2) 3 · 4 = 12 (км) – TE

3) $\Delta ABO \sim \Delta ETO \rightarrow \frac{AB}{ET} = \frac{AO}{EO} = \frac{AE+EO}{EO} = \frac{18}{12} \rightarrow AE = \frac{1}{2}EO$

4) $\Delta AOD \sim \Delta AEF \rightarrow \frac{AO}{AE} = \frac{AE+EO}{AE} = \frac{AD}{AF} = \frac{AD}{3} \rightarrow \frac{1,5EO}{0,5EO} = \frac{AD}{3} \rightarrow AD = 9$

5) 9 – 3 = 6 (год) – FD

6) 6 · 6 = 36 (км) – OM

Відповідь: перша людина наздожене другу через 9 год, на відстані 36 км від B.

Застосування того чи іншого методу при розв’язанні текстової задачі залежить від конкретного задачі. Зокрема, задачі на роботу часто розв’язують саме геометричним методом. Оскільки за виконану роботу дуже зручно брати площу деякого прямокутника, у якого одна сторона – продуктивність, а інша, відмінна від першої сторони, час.

І, звісно, вибір залежить від віку учнів. Так, наприклад, графічний метод краще підходить дев’ятим, десятим та одинадцятим класам, тому що в ньому дуже часто використовується подібність трикутників. Але є завдання, які можна розв’язати і без подібності, їх можна розв’язувати і в середній школі. Інші методи можуть застосовуватися як у старшій, так і в середній школі.

§2. Задачі з невідомими, які приймають тільки цілі значення

У цьому параграфі зібрані задачі, в яких необхідно скласти та розв'язати рівняння чи нерівності, у яких невідомі величини за змістом задачі можуть бути лише цілими. Дуже часто такі задачі складені таким чином, що однозначно їх можна розв'язати, тільки якщо приймати факт цілісності величин.

Задача. У гонках "Формула 1" беруть участь команди, в яких рівна кількість машин марки "Мерседес" і марки "Феррарі", і в кожній команді кількість усіх машин менше 7. Якщо у всіх командах кількість машин марки "Мерседес" не змінювати, а кількість машин марки "Феррарі" збільшити втричі, то загальна кількість "Феррарі", які беруть участь у ралі, стане на 50 більше загальної кількості "Мерседесів", а кількість машин в обох командах буде понад дванадцять. Обчислити кількість команд, що беруть участь у перегонах, та кількість "Мерседесів" та "Фераррі" у кожній команді.

Розв'язання.

Позначимо кількість команд, які беруть участь у перегонах, через N, а число "Мерседесів" та "Фераррі" у кожній команді – через m та n відповідно.

Умова задачі призводить до наступної системи рівнянь та нерівностей.

Умова задачі	Рівняння, нерівності
У кожній команді кількість всіх автомобілів менше 7	$m + n < 7$
Якщо у кожній команді кількість "Мерседесів" не змінювати, а кількість "Феррарі" збільшити втричі, то всього "Феррарі" буде на 50 більше загальної кількості "Мерседесів"	$3nN - mN = 50$
Кількість машин в обох командах стане більше дванадцяти	$m + 3n > 12$

Виявляється, що навіть такої невеликої кількості інформації достатньо для однозначного визначення трьох цілих додатних невідомих m, n та N. Розглянемо останню нерівність

$m + 3n = (m + n) + 2n > 12$, або $n > 6 - \frac{m+n}{2}$

Оскільки m і n – натуральні числа, то першу нерівність можна записати так: $m + n \leq 6$; очевидно також, що $n < 6$. Використовуючи ці обмеження, отримуємо, що $3 < n < 6$.

Можливі варіанти:

1. $n = 4$, $m = 1$;

2. $n = 4$, $m = 2$;

3. $n = 5$, $m = 1$.

Відповідно до цього єдине наявне в системі рівняння дає:

1. $11N = 50$;

2. $10N = 50$;

3. $14N = 50$.

Оскільки N − ціле число, то $N = 5$.

Відповідь. У гонках брало участь 5 команд, у кожній з яких є 2 “Мерседеса” та 4 “Феррарі”.

Задачі для самостійного розв’язання.

1) Василь придбав 30 цуценят за 30 золотих. За кожних трьох пуделів заплачено один золотий, за кожні дві такси — теж 1 золотий, за кожного спанієля − 2 золоті. Скільки Вася купи цуценят кожного виду?

Відповідь. 9 пуделів, 10 такс, 11 спанієлів.

2) Валера придбав кілька блокнотів і підручників, так, що підручників придбано на 4 більше, ніж блокнотів. За всі блокноти він віддав 72 цента, а за всі підручники – 6 доларів 60 центів. Якби блокнот коштував так само, як і підручник, а підручник − так само як і блокнот, то Валера витратив би на все менше, ніж 4 долари 44 центи. Скільки придбано блокнотів?

Відповідь. 2 блокнота.

3) Коля та Міша розподілили між собою 39 грибів. Кількість грибів, що дісталися одному з них, менша за подвоєну кількість грибів, що дісталася іншому. Квадрат третини кількості грибів, що дісталися Міші, менше збільшеної на одну кількість грибів, що дісталися Колі. Скільки грибів у кожного з хлопців?

Відповідь. 14 та 25 грибів.

4) Є однакові набори поштових марок, що складаються з гашених і негашених марок, причому в кожному наборі кількість гашених марок більша ніж на 2 перевищує кількість негашених. Якщо в кожному наборі кількість гашених марок збільшити в 4 рази, а кількість негашених не змінювати, то кількість гашених марок в одному наборі перевищить кількість негашених не більше ніж на 20, а загальна кількість марок у всіх наявних наборах дорівнюватиме 44. Визначити кількість наявних наборів та кількість гашених та негашених марок у кожному наборі.

Відповідь. 2 набори, що складаються з 5 гашених та 2 негашених марок кожен.

5) 4 однокласники купили в магазині наступне: один придбав маркер і лінійку, заплативши 40 грн; інший купив лінійку та циркуль, заплативши 12 грн; третій купив маркер, циркуль та два транспортири, заплативши 50 грн; четвертий купив маркер і транспортир. Скільки заплатив четвертий учень?

Відповідь. 39 грн.

6) У магазині продали однакові набори, що складаються лише із зелених та жовтих ручок, так що в кожному наборі кількість зелених ручок більш ніж на три перевищувала кількість жовтих. Якби в кожному наборі кількість зелених ручок збільшили у 3 рази, а жовтих – у 2 рази, то кількість зелених ручок в одному наборі перевищувало б кількість жовтих не більше ніж на 16, а всього проданих ручок стало б 81. Обчислити, скільки було продано наборів і скільки було в кожному наборі зелених та жовтих ручок.

Відповідь. 3 набори по 7 зелених та 3 жовтих ручки.

7) Група студентів, із 30 людей, отримала на заліку оцінки 2, 3, 4 та 5. Якщо скласти всі їхні оцінки, то вийде 93, причому оцінок “3” було більше, ніж оцінок “5”, і менше, ніж оцінок “4”. Також кількість оцінок “4” кратна 10, а кількість оцінок “5” кратна двом. Обчислити, скільки і яких оцінок одержала група студентів.

Відповідь. 11 “двійок”, 7 “трійок”, 10 “четвірок”, 2 “п’ятірки”.

8) У новобудові на всіх поверхах однакова кількість квартир. Всього в будинку 96 квартир та площа кожної з них дорівнює 46 м^2. При будівництві будинку загальні витрати на земляні роботи, оздоблювальні та обладнання квартир не перевищили 252 720 грн, причому на оздоблювальні роботи було витрачено по 2760 грн, на кожен поверх будинку, на обладнання квартир – по 2000 грн на кожну квартиру та на земляні роботи на відведеній під будівництво ділянці землі − 14 грн за 1 м^2 земельної ділянки Відомо, що площа ділянки землі не перевищує 2550 м^2, а загальна площа всіх квартир кожного поверху у 5 разів менше ніж площа земельної ділянки. Скільки поверхів у будівлі?

Відповідь. 12.

9) У Тані була деяка кількість грошей купюрами номіналом 15 доларів і 20 доларів, причому двадцятидоларних купюр було більше, ніж п’ятнадцятидоларних. П’яту частину всіх грошей Таня витратила, віддавши

дві купюри на квиток до театру. Половину грошей, що залишилися в неї, вона витратила на обід, сплативши його трьома купюрами. Скільки купюр кожного номіналу було в Тані спочатку?

Відповідь. 2 п'ятнадцятидоларових купюр та 6 двадцятидоларових купюр.

§3. Задачі з альтернативною умовою

Умова деяких задачах сформульована таким чином, що при складанні одного із рівнянь виникає альтернатива: залежно від умов рівняння записуються по-різному, і слід розглядати кілька варіантів. В інших розділах математики так само зустрічаються задачі, для розв’язання яких потрібно розбирати всі допустимі варіанти. Наприклад, під час розв’язання рівнянь чи нерівностей з модулями доведеться окремо розглядати випадки, коли вирази, що стоять під знаком модуля, додатні (або дорівнюють нулю) і коли вони від’ємні. При розв’язанні логарифмічних нерівностей зі змінною основою досліджуються випадки, коли основи логарифмів, що входять до задачі, більше або менше одиниці тощо. Кожна з таких задач вимагає розгляду всіх можливих варіантів, і розв’язок буде знайдено тільки після того, як всі ці варіанти будуть розглянуті.

Задача. У басейні є дві труби різної пропускної спроможності. Одна з труб розташована на бічній стіні, а інша – на дні басейну. Обидві труби можуть працювати на злив та наповнення. Пропускна здатність кожної труби при переході від наповнення до зливу не змінюється і не залежить від рівня води над нею. Перша труба працює на злив у тому випадку, якщо рівень води вище рівня розташування її входу. Басейн наповнили на $\frac{1}{4}$ і включили першу трубу на злив, а другу – на наповнення. При цьому виявилося, що басейн наповнився за час, в $\frac{13}{12}$ раз більше, ніж те, що знадобиться для наповнення порожнього басейну лише другою трубою. Наступного разу при наповненому повністю басейні включили обидві труби на злив, і тоді виявилося, що вся вода витікла з басейну за час, що становить $\frac{5}{18}$ від часу, необхідного для наповнення спочатку порожнього басейну тільки першою трубою. У скільки разів пропускна спроможність другої труби більша за пропускну спроможність першої?

Розв’язання.

Виходячи з умови задачі, не можна сказати відразу, чи знаходиться вхід в першу трубу вище $\frac{1}{4}$ висоти басейну або він нижче за цей рівень. В той же час перша умова задачі (першу трубу включили на злив, а другу – на наповнення) приводить у кожному з можливих випадків розташування входу першої труби до різних рівнянь. Для того щоб знайти розв’язання, необхідно розглянути обидва можливі варіанти.

1 випадок: $x < \frac{h}{4}$, де h – висота басейну, x – рівень знаходження входу першої труби. Позначимо пропускні здібності труб через v_1 і v_2 відповідно, а площу дна басейну приймемо за 1. Тоді маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{3h}{4}}{v_2 - v_1} = \dfrac{13}{12} \cdot \dfrac{h}{v_2} \\ \dfrac{h - x}{v_2 + v_1} + \dfrac{x}{v_2} = \dfrac{5}{18} \cdot \dfrac{h}{v_1} \end{cases}$$

Ця система рівнянь фактично містить тільки дві невідомі величини $\frac{x}{h}$ і $\frac{v_2}{v_1}$, тому систему можна записати так:

$$\begin{cases} \dfrac{0.75}{\frac{v_2}{v_1} - 1} = \dfrac{13}{12} \cdot \dfrac{1}{\frac{v_2}{v_1}} \\ \dfrac{1 - \frac{x}{h}}{1 + \frac{v_2}{v_1}} + \dfrac{\frac{x}{h}}{\frac{v_2}{v_1}} = \dfrac{5}{18} \end{cases}$$

Розв’язуючи цю систему, знаходимо невідомі: $\frac{x}{h} = \frac{169}{288}$, $\frac{v_2}{v_1} = \frac{13}{4}$. Нерівність $x < \frac{h}{4}$ показує, що у розглянутому випадку відношення $\frac{x}{h}$ менше $\frac{1}{4}$. Тому розв’язок $\frac{x}{h} = \frac{169}{288}$ не задовольняє умову задачі.

2 випадок: $x \geq \frac{h}{4}$. В цьому випадку система рівнянь задачі має інший вид:

$$\begin{cases} \dfrac{x-\dfrac{h}{4}}{v_2}+\dfrac{h-x}{v_2-v_1}=\dfrac{13}{12}\cdot\dfrac{h}{v_2} \\ \dfrac{h-x}{v_2+v_1}+\dfrac{x}{v_2}=\dfrac{5}{18}\cdot\dfrac{h}{v_1} \end{cases}$$

Перетворюючи цю систему так само, як і в попередньому випадку, отримаємо два рівняння

$$\begin{cases} \dfrac{\dfrac{x}{h}-\dfrac{1}{4}}{\dfrac{v_2}{v_1}}+\dfrac{1-\dfrac{x}{h}}{\dfrac{v_2}{v_1}-1}=\dfrac{13}{12}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{v_2}{v_1}} \\ \dfrac{1-\dfrac{x}{h}}{1+\dfrac{v_2}{v_1}}+\dfrac{\dfrac{x}{h}}{\dfrac{v_2}{v_1}}=\dfrac{5}{18} \end{cases}$$

для визначення двох невідомих $\frac{x}{h}, \frac{v_2}{v_1}$. Розв’язуючи цю систему, знаходимо невідомі:

$$\frac{x}{h}=\frac{1}{3}, \frac{v_2}{v_1}=3$$

Оскільки в цьому випадку $x \geq \frac{h}{4}$, тобто, $\frac{x}{h} \geq \frac{1}{4}$, то знайдене відношення $\frac{v_2}{v_1}$ дає розв’язок задачі.

Відповідь: у 3 рази

Таким чином, розв’язок такої задачі вдалося знайти після того, як були розглянуті обидва можливі випадки. Правильним виявився лише один із них, який і визначив розв’язок задачі.

Задачі для самостійного розв'язання:

1) Між містом А та містом В знаходиться місто С, причому від міста А до міста В – 17 км, від міста С до міста В –3 км. З міста А до міста В виїхав мотоцикліст, який, не проїхавши й двох кілометрів, зупинився. Через якийсь час він поїхав далі в місто С, і в цей же час із міста С в місто В вирушили з постійними швидкостями пішохід та велосипедист, кожен з яких, прийшовши до міста С, відразу ж вирушає назад. З ким раніше зустрінеться мотоцикліст, з пішоходом чи велосипедистом, якщо його швидкість у 4 рази більша за швидкість велосипедиста і у 8 разів більша за швидкість пішохода?

Відповідь. З велосипедистом.

2) Дві електрички рушили разом в однаковому напрямку з міст А та В, що знаходяться на відстані 60 км один від одного, і одночасно приїхали на станцію С. Якби хтось із них збільшив свою швидкість на 25 км/год, а інший – на 20 км/год, то вони все одно приїхали б одночасно на станцію С, але на дві години раніше. Знайти швидкість електричок.

Відповідь. 50 км/год, 40 км/год.

3) Літак йде на посадку і їде по посадковій смузі деякий час рівномірно зі швидкістю v. Після цього пілот включає гальма, і швидкість літака стає рівносповільненою, причому в кожну секунду швидкість зменшується на 2 м/с. Відстань від точки приземлення до точки абсолютної зупинки дорівнює 4 км. Відношення часу, за який літак проходить перші 400 м, до часу, протягом якого літак проходить весь шлях землею, дорівнює 4:65. Визначити швидкість v.

Відповідь. v = 100 м/с.

4) Відстань між містом та селом, що знаходяться на одному шосе дорівнює 120 км. Одночасно з міста в село, із села в місто виїхали два мотоциклісти. За дві години після початку руху вони зустрілися. Якщо б швидкість першого

мотоцикліста була вдвічі більшою, а швидкість другого мотоцикліста на 10 км/год менше, то вони зустрілися б на 1 годину пізніше. Обчислити, скільки часу потрібно першому мотоциклісту, щоб доїхати від міста до села.

Відповідь: 12 год.

5) У колгоспі є 2 кукурудзяні поля. Перше поле було прибрано бригадою А, після чого друге поле було прибрано разом бригадами А та В. Коли була прибрана третина загальної площі, з'ясувалося, що час, потрібний для завершення прибирання, в $\frac{21}{13}$ рази менше часу, який знадобився б бригаді А, для прибирання обох полів. Крім того, бригаді В, для прибирання другого поля, необхідно часу, удвічі більше часу, за який могла б зібрати обидва поля одна бригада А. У скільки разів продуктивність бригади А більша за продуктивність бригади В?

Відповідь. У 6 разів.

6) 3 особи, які в один і той же час виходять з пункту M і одночасно приходять в пункт O, пройшовши маршрутом, що складається з прямолінійних відрізків MN, NK, KM, MO ($MNKO$ – паралелограм). На кожному з цих відрізків швидкості всіх людей сталі і рівні: у першого 3, 6, 5 і 8 км/год відповідно, у другого – 4, 5, 6 і 7 км/год відповідно. Швидкість третьої людини на відрізку MO дорівнює 8 км/год, а на інших відрізках збігається або зі швидкістю першого, або зі швидкістю другого на відповідному відрізку, проте ні з тим, ні з іншим він не проходить весь маршрут повністю. Встановити, чи є кут MNK гострим або тупим.

Відповідь. Кут MNK гострий.

7) Три спортсмени синхронно починають біг у пункті А і так само синхронно закінчують біг у пункті А, подолавши дистанцію, що складається з прямолінійних відрізків АВ, ВС, СМ, МА (АВС – трикутник, М – середина відрізка АВ). На кожному з цих відрізків швидкості всіх спортсменів незмінні:

у першого $13\frac{5}{7}$, 10, 10 та 16 км/год відповідно, а у другого – $12\frac{12}{13}$, 14, 12 та 14 км/год відповідно. Останній спортсмен на відрізку BC біжить поряд з одним з інших бігунів, на ділянці MA його швидкість та ж, що й на ділянці AB, причому на всьому шляху він змінює швидкість не більше двох разів. З'ясувати більше чи менше 90° кут ABC.

Відповідь. Кут ABC менший за 90°.

8) 3 вантажні автомобілі завантажуються піском двома транспортерами. Вантажопідйомність першого з них дорівнює 12 т, другого не менше 2 т, а третього – не менше, ніж другого. Перший транспортер завантажує $\frac{1}{2}$ т піску за хвилину, другий – $\frac{2}{3}$ т за хвилину. Вантажівки можуть під'їхати до транспортеру у довільній послідовності, при цьому завантаження однієї вантажівки може здійснюватися тільки одним транспортером. Якщо транспортер почав навантажувати вантажівку, то та вже не може поїхати до іншого транспортера. Час навантаження вважається від початку завантаження першої вантажівки до закінчення завантаження останньої. Якщо дотримуватися цих умов, найменший час завантаження складає 22,5 хв. Припустимо, що на зміну у транспортера завантаженого вантажівки іншою порожньою вантажівкою час не витрачається. Відомо, що другий транспортер може завантажити всі вантажівки за 36 хвилин. Обчислити вантажопідйомності другої та третьої вантажівок.

Відповідь. 3 т, 9 т.

9) Три спортсмени пробігли послідовно три пункти, M, N, K (MNK – трикутник). Старт знаходиться в пункті M, фініш в пункті K. Відомо, що дистанції між пунктами – це відрізки. На кожному з цих відрізків швидкості у спортсменів незмінні. У першого 10, 16 і 14 км/год відповідно, у другого 12, 10 і 16 км/год відповідно. Третій спортсмен у пунктах N і K біжить не один, а

з кимось, і змінює швидкість тільки один раз. З’ясувати, чи є трикутник MNK гострокутним або тупокутним.

Відповідь. Трикутник MNK тупокутний.

§4. Задачі, які розв’язуються за допомогою нерівностей

Дуже часто в умові задачі зустрічаються така умова, математичний запис якої еквівалентний нерівності. У таких задачах розв’язок можна знайти тільки в тому випадку, якщо врахувати нерівності, що випливають з умови. Врахування нерівностей дозволяє отримати додаткові співвідношення і тим самим знайти розв’язок. Більше того, існує цілий клас задач, який націлений на вміння складати не тільки рівняння, а й нерівності. Ці задачі доречно було б назвати «задачами на складання рівнянь і нерівностей».

Задача. Маша колекціонує монети. Якщо вона розкладатиме по 20 монет на сторінці, то їй не вистачить альбому, а якщо по 23 монети на сторінці то, принаймні одна сторінка буде порожньою. Якщо б Маша придбала ще один такий самий альбом, на кожній сторінці якого є по 21 монеті, то всього у неї буде 500монет. Скільки сторінок у альбомі?

Розв’язок.

Нехай у альбомі m сторінок, а у Маші N монет. Тоді рівняння та нерівності цієї задачі можна скласти в такий спосіб.

Умови задачі	Рівняння, нерівність
Якщо Маша збере по 20 монет на сторінку, їй не вистачить альбому	$20m < N$
Якщо Маша збере по 23 монети на одній сторінці, то принаймні одна сторінка виявиться порожньою	$23(m-1) \geq N$
Якщо Маша придбає такий самий альбом, в якому на кожній сторінці по 21 монеті, то всього у неї буде 500 монет	$21m + N = 500$

Таким чином, у цій задачі маємо одне рівняння та дві нерівності. Виразимо N з рівняння цієї системи і підставимо його в кожну з нерівностей:

$$20m < 500 - 21m$$

$$23(m - 1) \geq 500 - 21m,$$

враховуючи, що m − ціле число, з першої нерівності цієї системи знаходимо, що $m \leq 12$, а з другої нерівності – що $m \geq 12$. Порівнюючи між собою ці результати, одержуємо, $m = 12$.

Відповідь. В альбомі 12 сторінок.

Задачі для самостійного розв’язання:

1) Одночасно з двох міст, відстань між якими дорівнює 360 км, назустріч один одному виїхали два автобуси. Автобус, що виїхав із першого міста, приїхал в інше місто не раніше ніж через 5 год після початку руху. Якби його швидкість була в 1,5 рази більшою, ніж насправді, то він зустрів б другий автобус раніше, ніж через дві години після свого виходу з першого міста. Швидкість якого автобуса більша?

Відповідь. Швидкість автобуса з другого міста більша.

2) З міста А до міста В о 9 годин ранку виїхав швидкий поїзд. Одночасно з міста С, розташованого між містами А та В, виїжджають два пасажирських поїзди, один їде до міста А, а інший до міста В, і рухаються вони з однаковими швидкостями. Швидкий поїзд зустрічає перший пасажирський поїзд не пізніше ніж через 3 год після його відправлення, потім приїжджає до міста С не раніше 14 год того ж дня і, нарешті, прибуває в місто В у той же момент, що й другий пасажирський поїзд, через 12 год після зустрічі з першим пасажирським поїздом. Знайти час прибуття до міста А першого пасажирського поїзда.

Відповідь. 16 год 30 хв.

3) З одного табору до іншого за течією річки пливе пліт. У той момент, коли пліт рушив з першого табору до другого, з другого табору до першого, назустріч йому почав рух човен, який зустрічає пліт не раніше ніж через 2 год і потім припливає до першого табору. Відомо, що на весь шлях човен витратив менше 3 годин 20 хвилин. Чи зможе пліт доплисти до другого табору за п’ять годин, якщо відстань між таборами дорівнює 20 км?

Відповідь. Ні, не зможе.

4) У районі є п’ятиповерхові та дев’ятиповерхові будівлі, та дев’ятиповерхових будівель менше, ніж п’ятиповерхових. Якщо кількість дев’ятиповерхових будівель збільшити в 2 рази, то всього будівель буде більше 24, а якщо збільшити в 2 рази кількість п’ятиповерхових будівель, то загальна кількість будівель стане менше 27. Скільки п’ятиповерхових будівель та скільки дев’ятиповерхових?

Відповідь. 9 п’ятиповерхових будівель, 8 дев’ятиповерхових будівель.

5) По річці сплавляється пліт, пропливаючи між двома селами на добу. Такий же шлях, і назад катер пропливає не менше ніж за 10 годин. Як би власна швидкість катера збільшилася на 40%, то для проходження такої ж відстані знадобилося б не більше 7 годин. За який час катер пропливе від одного села до іншого за течією річки, якщо її швидкість не змінювати.

Відповідь. За 4 год.

6) О 9 годині ранку з пункту А в пункт В рухається мотоцикліст. Через 2 години після виїзду мотоцикліста з А в В виїхала легкова машина, яка наздогнала мотоцикліста не пізніше 12 години дня. Після того, як легковик доїхав до пункту В, він тут же розвертається та їде назад. В якийсь момент після розвороту машина зустрічає мотоцикліста, і приїжджає до А о 17 годині того ж дня. О котрій годині мотоцикліст приїхав до пункту В, якщо між зустрічами пройшло не більше 3 год.

Відповідь. 18 год.

7) Від однієї пристані до іншої пливе пліт зі швидкістю v км/год. Через годину після цього від цієї ж пристані відпливає моторний човен, швидкість якого у стоячій воді дорівнює 10 км/год. Наздогнавши пліт, човен пливе назад. Обчислити всі можливі значення v, при яких пліт встигне проплививти більше 15 км, у той момент, коли човен припливе назад до пристані.

Відповідь. $5 < v < 10$.

8) Толя та Коля йдуть на зустріч один одному по одній дорозі. Спочатку між ними було 7 км. Як би Толя йшов у 2 рази швидше, ніж він йшов насправді, а швидкість руху Коля була б на 2 км/год більша за його справжню швидкість, то на момент зустрічі Коля пройшов би більше, ніж Толя. Швидкість, кого з хлопців більша?

Відповідь. Швидкість Колі більше.

9) З міста N до міста M, відстань між якими 120 км, одночасно назустріч один одному виїжджають два автомобілі. Вони зустрілися пізніше, ніж через п'ять годин після початку руху. Наступного дня вони виїжджають одночасно в один і той же бік з пунктів H і T, відстань між якими 36 км, причому автомобіль, що їде попереду, рухається зі швидкістю, на 6 км/год більше, ніж напередодні, а автомобіль, що їде ззаду, рухається з тією ж швидкістю, що й напередодні. Чи вистачить другому автомобілю дві години, щоб наздогнати першого?

Відповідь. Не вистачить.

10) З одного міста до іншого з постійною швидкістю рухається маршрутний автобус. Відстань між містами дорівнює 105 км. Через півгодини за ним із першого міста зі швидкістю 40 км/год виїжджає легковий автомобіль. Він наздогнав автобус і розвертається назад. Обчислити ті значення v, при яких автомобіль повертається в місто А пізніше, ніж автобус приходить до другого міста.

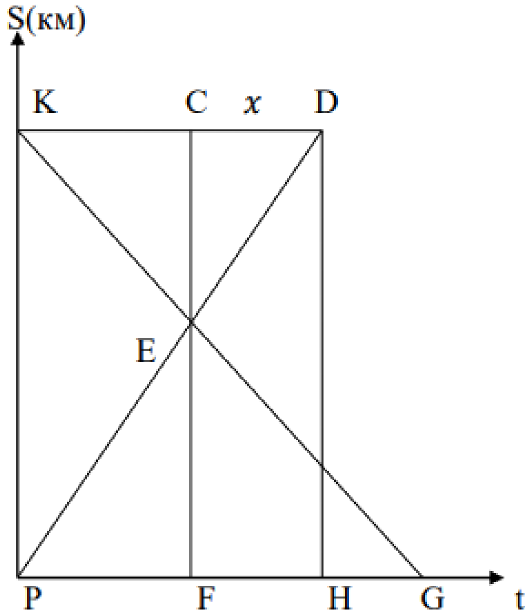
Відповідь. $30 < v \leq 33{,}6$.

§5. Задачі на рух на зустріч

<u>Задача.</u> З села K у село P вийшов чоловік. У той же момент із села Р до села К виїхав скутер, який зустрів чоловіка через $\frac{5}{6}$ години після того, як виїхав із села Р. Скільки часу потрібно чоловікові, щоб подолати відстань до села Р, якщо скутер може проїхати всю відстань на 4 години швидше за чоловіка.

Розв'язання.

Побудуємо графіки руху скутера та чоловіка



Позначимо $CD = FH = x$

$PF = KC = \frac{5}{6}$ (год)

$HG = 4$

$\Delta PEG \sim \Delta DEK \rightarrow \frac{KD}{PG} = \frac{CE}{FE}$

$\Delta PEF \sim \Delta DEC \rightarrow \frac{DC}{PF} = \frac{CE}{FE}$

$$\to \frac{KD}{PG} = \frac{DC}{PF} \to \frac{\frac{5}{6} + x}{\frac{5}{6} + x + 4} = \frac{x}{\frac{5}{6}},$$

звідки

$$x^2 + 4x - \frac{25}{36} = 0$$

$x_1 = -\frac{25}{6}$ (не задовольняє); $x_2 = \frac{1}{6}$

1) $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} + 4 = 5$ (год)

Відповідь: 5 год.

Задачі для самостійного розв'язання:

1) Маша та Катя вийшли один одному назустріч, з пунктів А та В, о 12:00 та зустрілися через 30 хвилин. Катя прийшла до пункту А на одинадцять хвилин пізніше, ніж Маша прийшла до пункту В. За який час подолала відстань АВ кожна дівчина?

Відповідь: 55 хв; 66 хв.

2) Назустріч один одному виїхали мотоцикл та автобус. Щоб проїхати від пункту А до пункту В автобус витрачає, на 160 хв більше, ніж потрібно мотоциклісту на дорогу з В в А, а сума цих часів у $5\frac{1}{3}$ рази більше часу, що минув від початку руху автобуса та мотоцикліста до моменту їхньої зустрічі. Скільки часу потрібно автобусу, щоб проїхати з А в В, а мотоциклу з В в А?

Відповідь: 4 год; $4\frac{1}{3}$ год.

3) Пішохід вийшов з пункту А в пункт В о 10 год, а через деякий час з В в А виїхав автомобіль і приїхав до А о 14 год того ж дня. Швидкості автомобіля та пішохода сталі. Пішохід прийшов в В через 6 годин після виїзду звідти

автомобіля. Знайдіть, яку частину шляху з А в В пройшов пішохід до його зустрічі з автомобілем.

Відповідь: 0,4.

4) Відстань від міста А до міста В 210 км. З А в В і з В в А виїхали автомобілі назустріч один одному. Перший автомобіль прибув у В через 2 години після моменту зустрічі, а другий прибув в А через 1,125 години після моменту зустрічі. Знайдіть суму швидкостей автомобілів.

Відповідь: 140 км/год.

5) З міста А до міста В виїхав автомобіль. Через деякий час з В в А по тій же дорозі виїхав мотоцикліст. Швидкості автомобіля та мотоцикліста сталі. Автомобіль до зустрічі з мотоциклістом перебував у дорозі 7 годин 30 хвилин, а мотоцикліст до зустрічі їхав 3 години. Мотоцикліст прибув до А о 23 годині, а автомобіль прибув до В о 16 годині 30 хвилин. Знайдіть час відправлення мотоцикліста із міста В.

Відповідь: 11 год.

6) З села M до села N виїжджає мотоцикліст. Через якийсь час з В в А тією ж дорогою виїхав велосипедист. Швидкості велосипедиста та мотоцикліста сталі. Мотоцикліст до зустрічі з велосипедистом перебував у дорозі 5 годин, а велосипедист до зустрічі їхав 2 години. Велосипедист прибув до А о 20 годині, а мотоцикліст прибув до В о 17 годині. Знайдіть час відправлення велосипедиста із міста В.

Відповідь: 13:00.

7) З міста C до міста D виїхав електропоїзд. У той самий час, з D в C виїхав другий електропоїзд, цією ж залізницею. Перший поїзд прибув у D на 5 годин раніше, ніж другий у C. Якби перший поїзд виїхав із C на 1 годину раніше, ніж другий з D, то через 2 години після виходу другого поїзда їх розділяло б 850

км. Визначте відстань від C до D. (Потяги рухаються кожен з своєю сталою швидкістю та без зупинок).

Відповідь: 160 км.

8) З міста А до міста В о 6 годині ранку виїхав вантажний автомобіль. Через шість годин поспіль із міста В до міста А тією ж дорогою виїхав легковий автомобіль. Автомобілі рухаються зі сталими швидкостями. За попередньою домовленістю вони одночасно приїхали в селище С, розташоване на дорозі між А та В. Розвантаження та оформлення документів тривали п'ять годин. Потім автомобілі продовжили кожен свій шлях. Легковий та вантажний автомобілі прибули відповідно до міст А та В одночасно о 23 годині того ж дня. Знайдіть час прибуття автомобілів до міста С.

Відповідь: 14.00.

9) Від однієї пристані А до пристані В пливе катер, назустріч йому пливе другий катер. Вони зустрілися через 30 хвилин після відплиття від пристаней, рухаючись зі сталими швидкостями. Скільки часу потрібно кожному катеру, щоб пропливти відстань між пристанями, якщо відомо, перший приплив до В на 25 год пізніше, ніж другий приплив до А?

Відповідь: 50 год; 75 год.

10) Ігор вийшов зі школи о 17:00 і побіг додому, а через деякий час із дому у школу пішов його батько. Ігор прибіг додому за 6 хвилин після виходу батька. Батько прийшов о 17:14 того ж дня. Швидкості Ігоря та батька сталі. Знайдіть, яку частину шляху зі школи пробіг Ігор до зустрічі з батьком.

Відповідь: 0,7.

11) Два пішоходи вийшли одночасно назустріч один одному з пунктів А і В. Перший вийшов з А, другий – з В. Вони зустрілися через 3 години. Знайдіть

час, за який перший пройшов відстань від A до B, якщо перший прийшов у B на 2,5 години пізніше, ніж другий прийшов до A.

Відповідь: 5 год.

12) З міста A до міста B виїхав товарний поїзд. Через 5 год 5 хв тією ж дорогою виїхав із міста B до міста A пасажирський поїзд. Обидва поїзди зустрілися на проміжній станції. Від цієї станції товарний поїзд йшов до міста B 12 год 55 хв і від тієї ж станції пасажирський поїзд йшов до міста A 4 год 6 хв. Скільки часу витратив кожен поїзд на шлях між містом A та містом B?

Відповідь: 9 год 16 хв, 23 год 10 хв.

13) Пішохід та велосипедист, що вирушили з пунктів A та B назустріч один одному о 10 год, зустрілися о 16 год. Пішохід і вершник, що вирушили з цих же пунктів назустріч один одному о 12 год, також зустрілися о 16 год. Визначити, на скільки кілометрів відстане до 20 год велосипедист від вершника, якщо вони вийдуть із пункту A об 11 год в одному напрямку. Шлях від A до B дорівнює 120 км.

Відповідь: 90 км

14) Два автомобілі рухаються назустріч один одному з двох міст A та B. Першому автомобілю, щоб подолати $\frac{2}{5}$ всієї відстані, необхідно на 2 години більше, ніж другому, щоб проїхати $\frac{2}{15}$ всієї відстані. Скільки годин потрібно кожному автомобілю, щоб доїхати від одного до іншого міста?

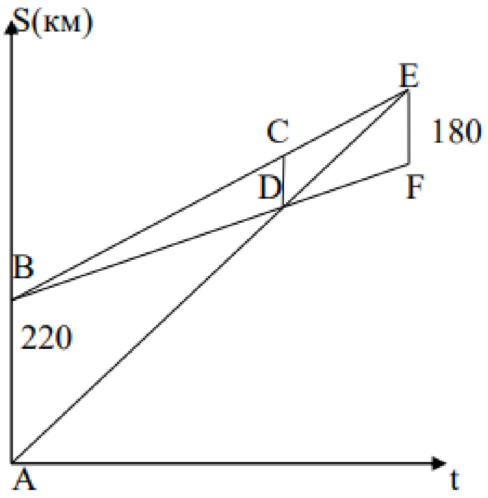
Відповідь: 10 год; 15 год.

§6. Задачі на рух в одному напрямку навздогін

Задача. Петя та Вася розташовуються за 220 м від Олега. Як тільки Олег наздогнав Петю, Вася відставав від них на 180 м. За скільки метрів від Васі був Петя, коли Олег наздогнав Васю?

Розв'язання.

Побудуємо графіки руху Петі, Васі та Олега.



Позначимо $BC = m$, $CE = n$, $CD = x$

$\Delta\, ABE \sim \Delta\, DCE \to \frac{CD}{AB} = \frac{CE}{BE}, \frac{x}{220} = \frac{n}{m+n}, x = \frac{220n}{m+n}$

$\Delta\, FBE \sim \Delta\, DBC \to \frac{DC}{FE} = \frac{BC}{BE}, \frac{x}{180} = \frac{m}{m+n}, x = \frac{180m}{m+n}$

$$\frac{220n}{m+n} = \frac{180m}{m+n},$$

$$n = \frac{9m}{11},$$

$$x = \frac{220 \cdot \frac{9m}{11}}{m + \frac{9m}{11}}, x = 99$$

Відповідь: 99 м.

Задачі для самостійного розв’язання:

1) Трьом спортсменам необхідно пропливти з А в В і назад. Довжина колії дорівнює 55 м. Вони стартують послідовно, з інтервалом у п’ять секунд. В деякий момент часу, до розвороту, спортсмени опинилися в одному місці. Останній спортсмен, діставшись В і відразу розвернувшись назад, зустрічає другого в 9 м від В, а першого в 15 м від В. Обчисліть, швидкість третього спортсмена.

Відповідь: 1 м/с.

2) Пішохід, велосипедист і мотоцикліст їдуть дорогою в один бік зі сталими швидкостями. У той момент, коли пішохід і велосипедист перебували в одній точці, мотоцикліст випереджав їх на 6 км. Коли мотоцикліст наздогнав велосипедиста, пішохід відставав від них 3 км. На скільки кілометрів велосипедист випередив пішохода в той момент, коли пішохода наздогнав мотоцикліст?

Відповідь: 2 км.

3) З пункту А до пункту В о 9 год вирушив пішохід, а о 10 год 30 хв – велосипедист. Об 13 год велосипедист наздогнав пішохода, а о 18 год – приїхав до пункту В. Знайдіть, о котрій годині в пункт В прийшов пішохід.

Відповідь: 21 год.

4) На дорозі послідовно розташовані пункти M, N, K, O. Відстань від M до N дорівнює 24 км. Із M до O виїхала з сталою швидкістю машина. В той же час з N в O почали рух з сталими швидкостями велосипедист та мотоцикліст. У той момент, коли машина зрівнялася з велосипедистом, мотоцикліст був попереду на 6 км. Машина наздогнала мотоцикліста в пункті K і, доїхавши до O, тут же поїхала назад у M, зустрівшись з велосипедистом вдруге в K. Обчислити відстань між N і K, якщо відомо, що час від початку руху до

моменту другої зустрічі машини та велосипедиста в 2 рази більше, ніж час від початку руху до того моменту, коли машина вперше наздогнала мотоцикл.

Відповідь: 16 км.

5) Автомобіль проїхав першу половину шляху зі швидкістю 40 км/год, а другу – 60 км/год. Знайдіть середню швидкість руху автомобіля.

Відповідь: 48 км/год.

6) Згідно з розкладом, автобус курсує за маршрутом з пункту А до пункту В і назад, без зупинок. На шляху з А в В він змушений був зробити зупинку, тому на зворотному шляху збільшив швидкість на 25%. Приїхавши до А з 10-хвилинним відхиленням від розкладу, він зменшив останню швидкість на 24% і прибув у В вчасно. Яка була тривалість зупинки (у хвилинах)?

Відповідь: 28 хв.

7) Група відпочиваючих протягом 2 год 40 хв каталася на моторному човні по річці зі сталою швидкістю (відносно води) поперемінно то за течією, то проти течії – загалом не менше ніж по 1 годині. У результаті човен пройшов весь шлях 40 км (відносно берега) і, відчаливши від пристані А, причалила до пристані В на відстані 10 км від А. У який бік текла річка? Яка за цих умов максимальна швидкість її течії?

Відповідь: 8 км/год.

8) Юнак пішов до залізничної станції, до якої від його будинку було 10,5 км. Через півгодини з того ж будинку слідом за юнаком тією ж дорогою вийшов його брат, який, йдучи зі швидкістю 4 км/год, наздогнав юнака, передав забуту ним річ, і відразу повернув назад з колишньої швидкістю. З якої швидкістю йшов юнак, якщо відомо, що йшов він всю дорогу рівномірно, а його брат повернувся у той момент, коли хлопець підійшов до станції.

Відповідь: 3 км/год.

9) З А до В через однакові інтервали часу виїжджають три мотоцикли. Вони доїжджають до В синхронно, після цього їдуть до пункту С, що знаходиться на відстані 120 км, від В. Перший мотоцикл прибуває туди через 1 годину після другого. Третій мотоцикл приїхавши в С, відразу повертає назад і в 40 км від С зустрічає перший мотоцикл. Обчислити швидкість першого мотоцикла, якщо швидкість всіх мотоциклістів була незмінною.

Відповідь: 30 км/год.

10) З одного міста в інше їдуть 2 автомобілі. Через 1 год за ними виїхав ще один автомобіль. Ще через 1 год відстань між третім і першим автомобілями зменшилася в 1,5 рази, а між третім і другим – у 2 рази. У скільки разів швидкість першого автомобіля більша за швидкість другого, якщо відомо, що третій автомобіль не обганяв перших двох?

Відповідь: $\frac{9}{8}$.

11) Лісовою стежкою йдуть два пішоходи, і їде один лижник. Усі учасники рухаються в одному напрямку. Лижник відставав від пішоходів на 900 метрів, в той момент, коли вони були в одному місці. Як тільки лижник наздогнав другого пішохода, перший відставав від них на 100 м. На скільки метрів другий пішохід випереджав першого, коли лижник наздогнав першого пішохода.

Відповідь: 90 м.

12) Пункти А, В і С розташовані по одній прямій, так що пункт В знаходиться між пунктами А і С. З пунктів А і В до пункту С в один і той же час, вийшли два пішоходи. Через 3 години відстань між ними дорівнювала чверті відстані ВС, а ще через 3 години вони прибули в С в один і той же час. Знайти відношення швидкостей цих пішоходів. Швидкості пішоходів вважати сталими протягом усього шляху.

Відповідь: $\frac{3}{2}$.

13) З одного пункту до іншого вийшов пішохід. Через 2 години з пункту A виїхав велосипедист, а ще за півгодини – мотоцикліст. Пішохід, мотоцикліст та велосипедист рухалися рівномірно і без зупинок. Через деякий час після виїзду мотоцикліста виявилося, що вони подолали однакову частину шляху від A до B. На скільки пізніше мотоцикліста до B прибув велосипедист, якщо пішохід прийшов на 1 годину пізніше мотоцикліста?

Відповідь: 48.

14) Дорога проходить послідовно через пункти A, B, C, D. Відстань від B до C дорівнює 12 км. З A в D виїхав зі сталою швидкістю мотоцикліст. Одночасно з ним з B в D вирушили зі сталими швидкостями пішохід і велосипедист. Коли мотоцикліст наздогнав пішохода, велосипедист обганяв їх на 6 км. У пункті C мотоцикліст наздогнав велосипедиста і, доїхавши до D, одразу поїхав назад в A, зустрівшись з пішоходом вдруге в C. Знайдіть відстань між A і B, якщо відомо, що час від початку руху до моменту повторної зустрічі мотоцикліста та пішохода в 4 рази більше, ніж час від початку руху до того моменту, коли мотоцикліст вперше наздогнав велосипедиста.

Відповідь: 18 км.

15) Турист, що йде з села на станцію, пройшовши за першу годину 3 км, розрахував, що він запізниться до поїзда на 40 хв, якщо рухатиметься з тією самою швидкістю. Тому решта шляху проходить зі швидкістю 4 км/год і прибуває на станцію, за 45 хв до відходу поїзда. Знайдіть відстань від села до станції.

Відповідь: 20 км.

16) Протягом 2 годин пароплав рухався річкою в тумані. Після того, як туман розвіявся, пароплав удвічі збільшив свою швидкість і рухався ще шість годин.

Який шлях подолав пароплав у тумані, якщо його середня швидкість за 8 годин руху становила 14 км/год?

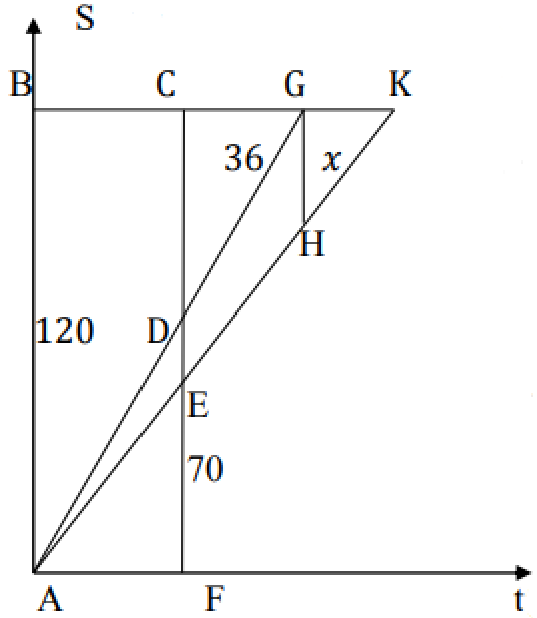
Відповідь: 16 км.

§7. Задачі на рух в одному напрямку із відставанням

Задача. З села А до села В, довжина шляху між якими 120 км, синхронно виїхали 2 мотоцикли. Коли один з них подолав 70 км, другому потрібно було здолати ще 36 км. Скільки кілометрів потрібно буде проїхати одному з мотоциклів, коли другий прибуде до села В?

Розв'язання.

Побудуємо графіки руху мотоциклістів.



Позначимо $AD = n$; $DG = m$; $GH = x$

Оскільки CD = 36, FE = 70, то DE= 14

$\Delta\ GCD \sim \Delta\ GBA$: $\frac{GD}{GA} = \frac{CD}{BA}, \frac{m}{m+n} = \frac{36}{120}, \frac{m}{n} = \frac{3}{7}$

$\Delta\ ADE \sim \Delta\ AGH$: $\frac{AD}{AG} = \frac{DE}{GH}, \frac{n}{m+n} = \frac{14}{x}$

$x = 14 \cdot \frac{m}{n} + 14 = 14 \cdot \frac{3}{7} + 14 = 20$ (км)

Відповідь: 20 км.

Задачі для самостійного розв'язання:

1) Від причалу А до причалу В відпливли катер і човен, причому швидкість катера в 5 разів більша за швидкість човна. Відомо, що вони пливли з сталими швидкостями, але катер зробив кілька зупинок. Скільки часу катер витратив на всі зупинки, якщо він доплив до причалу В за 2 години, а човен за 4 години?

Відповідь: $\frac{6}{5}$ год.

2) Два автомобілі брали участь у гонці. Перші $\frac{2}{3}$ шляху вони проїхали одночасно і обидва заїхали на піт-стоп. За півхвилини обидві машини продовжили гонку, при цьому перший гонщик збільшив швидкість у півтора рази, а другий рухався з колишньою швидкістю. Скільки часу пройшло від старту автомобілів до їхнього фінішу, якщо перший фінішував на одну хвилину раніше?

Відповідь: 8,5 хв; 9,5 хв.

3) Перший автомобіль проходить за хвилину на 300 м більше, ніж другий, тому час проходження одного кілометра на 10 с менше. На скільки метрів збільшується відставання другого автомобіля від першого за час, поки перший проходить один кілометр?

Відповідь: 200 м.

4) Два пішоходи одночасно вийшли з дому до магазину, до якого 150 метрів. Яка відстань залишиться пройти першому в той момент, коли другий пішохід пройде 70 метрів, якщо в той момент, коли перший прийшов у магазин, другому залишилося пройти 50 метрів?

Відповідь: 45 м.

5) Син поїхав велосипедом на озеро о 7 ранку. Через деякий час батько поїхав за ним. У той момент, коли батько вийшов із дому, син встиг проїхати 10 км,

а за 1,5 год після виїзду батька йому залишилося проїхати 20 км, а син приїхав на озеро. О котрій виїхав батько?

Відповідь: 7:36.

6) Перший пішохід вийшов на вокзал та прибув за 25 хвилин до поїзда. Через 10 хвилин за першим пішоходом вийшов другий пішохід, який теж хотів встигнути на той самий поїзд. Швидкість другого пішохода в 0,5 рази менша за швидкість першого, і він спізнюється на 10 хвилин. У скільки разів йому потрібно збільшити швидкість, щоб прийти за 5 хвилин до відправлення поїзда?

Відповідь: $1\frac{3}{7}$.

7) Перший катер проходить за хвилину на 200 м більше, ніж другий, тому час проходження одного кілометра в нього на 8 с менше. На скільки метрів збільшується відставання другого катера від першого за час, поки перший проходить один кілометр?

Відповідь: 42 м.

8) Три бігуни брали участь у марафоні на 10 км. Перший бігун прибіг раніше другого на 4 хв, а третього на 6 хв. У той момент, коли перший учасник добіг до фінішу, третьому залишилося пробігти ще 4 км. За скільки часу кожен бігун пробіг марафон?

Відповідь: 9 хв, 13 хв, 15 хв.

9) З міста А до міста В виїхали вантажний та легковий автомобілі, причому, швидкість легкового автомобіля в 1,5 рази більша за швидкість вантажного. Відомо, що вони їхали зі сталими швидкостями, але легковий автомобіль зробив кілька зупинок. Скільки часу легковий автомобіль витратив на всі зупинки, якщо на всю дорогу він витратив 2 години, а вантажний 3 години?

Відповідь: 12 год.

10) Автомобіль та мотоцикл виїхали одночасно з міст А та В, відстань між якими 100 км у напрямку міста С, яке розташоване між містами А і С. Через дві години автомобіль знаходився за 180 км від мотоцикліста, а через 3 години від початку шляху мотоцикліст подолав 90 км. На якій відстані вони будуть через 8 годин після початку руху?

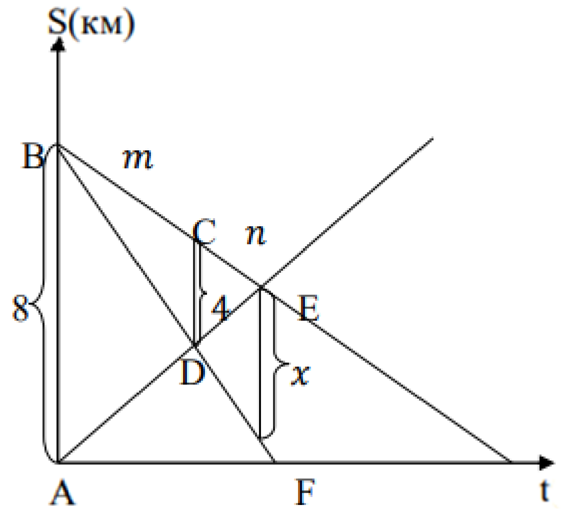
Відповідь: 220 км.

§8. Комбінований рух

Задача. По шосе назустріч пішоходу рухаються велосипедист і мотоцикліст. У момент, коли велосипедист та мотоцикліст перебували в одній точці, пішохід був від них за 8 км, а коли мотоцикліст зустрів пішохода, велосипедист відставав від мотоцикліста на 4 км. Яка відстань буде між мотоциклістом та велосипедистом, коли пішохід зустріне велосипедиста?

Розв'язання.

Побудуємо графіки руху велосипедиста, мотоцикліста та пішохода.



Позначимо: $BC = m$; $CE = n$

$\Delta\, ABE \sim \Delta\, DCE \rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{BC}{CE} = \frac{BC+CE}{CE} \rightarrow \frac{8}{4} = \frac{m+n}{n} \rightarrow m = n$

$\Delta\, FBE \sim \Delta\, DBC \rightarrow \frac{FE}{DC} = \frac{BE}{BC} = \frac{m+n}{m} \rightarrow \frac{x}{4} = 2 \rightarrow x = 8$

Відповідь: 8 км.

Задачі для самостійного розв'язання:

1) З пункту А до пункту В виїхав велосипедист. Діставшись В, він розвернувся і поїхав назад. З А в В рухається пішохід, який зустрів велосипедиста через 20 хв після відправлення велосипедиста з А. Доїхавши до А, велосипедист знову

повернув і наздогнав пішохода через 10 хвилин після першої зустрічі. Через який час пішохід прийде до В?

Відповідь: 1 год.

2) Три мотоциклісти А, В і С брали участь у гонці. Мотоциклісти А і С стартували відразу, а мотоцикліст В через деякий час. Першим фінішував мотоцикліст А. Мотоцикліст В через 1 годину після свого старту наздогнав мотоцикліста С і прибув на фініш через 4 години після старту мотоциклістів А та С, та за 2 години до фінішу мотоцикліста С. Знайдіть відношення швидкості мотоцикліста А до швидкості мотоцикліста С, якщо відомо, що мотоцикліст А рухався в $\frac{8}{5}$ рази повільніше за мотоцикліста В.

Відповідь: $\frac{15}{8}$.

3) Дорогою зі швидкістю 90 км/год їде автомобіль “Жигулі”, на відстані 100 м перед ним зі швидкістю 60 км/год їде дитячий автобус, а назустріч їм на відстані 1 км від “Жигулів” зі швидкістю 120 км/год рухається “Мерседес”. Чи може “Жигулі”, не змінюючи швидкості, випередити автобус, якщо для безпеки обгону потрібно, щоб в момент закінчення обгону він знаходився від двох машин на відстані, чисельно рівним (м) їх швидкості (км/год)?

Відповідь: так, 120.

4) З пункту А до пункту В виїхали одночасно велосипедист та мотоцикліст. Доїхавши до пункту В, мотоцикліст, не зупиняючись, розвернувся і вирушив у пункт А. Проїхавши $\frac{1}{4}$ частину шляху від А до В мотоцикліст зустрів велосипедиста. До пунктів В і А відповідно велосипедист та мотоцикліст прибули одночасно. Знайдіть відношення їх швидкостей.

Відповідь: 3:1.

5) З пункту А до пункту В вирушили одночасно пішохід і велосипедист. Велосипедист, доїхавши до пункту В, повернув назад і зустрів пішохода через 20 хв після відправлення з А. Доїхав до А, він знову повернув і наздогнав пішохода за 5 хвилин після зустрічі. Через який час пішохід прийде до В?

Відповідь: $55\frac{1}{3}$ хв.

6) З селища в одному і тому самому напрямку виїхали послідовно з інтервалом в 1 годину три велосипедисти. Перший їхав зі швидкістю 12км/год, другий – 10 км/год, а третій, маючи більш високу швидкість, наздогнав спочатку другого велосипедиста, ще за 2 години – першого. Запишіть у відповіді число, яке виражає швидкість (км/год) третього велосипедиста.

Відповідь: 20 км/год.

7) З міста в село одночасно вирушили бігун Б і пішохід $П_1$, а в той самий момент із села до міста вийшов пішохід $П_2$. Швидкість пішоходів рівна. Зустрівшись, Б і $П_2$ деякий час стояли на місці, а потім попрямували до села. При цьому Б побіг із колишньою швидкістю 12 км/год, а $П_2$ зменшив свою швидкість у півтора рази. В результаті до села спочатку прибіг Б, а потім через деякій проміжок часу, удвічі більший тривалості зустрічі Б і $П_2$, одночасно прийшли обидва пішоходи. Знайдіть швидкість пішохода $П_1$.

Відповідь: 6 км/год.

8) Пункти А, В і С віддалені від пункту М відповідно на 60, 55 та 56 км. Одночасно з цих пунктів до пункту М вийшли три пішоходи: перший – з А, другий – з В, третій – з С. Перший пройшов весь шлях зі сталою швидкістю і прибув у М на 2 години раніше другого і третього, що прибули одночасно. Другий пішохід, пройшовши 40 км із тією самою швидкістю, як і перший, зробив зупинку на 1 годину. Залишок шляху він пройшов зі швидкістю, яка менша за швидкість третього пішохода на стільки ж, на скільки швидкість

третього менша за швидкість першого. Третій пішохід весь шлях пройшов із сталою швидкістю. Визначити швидкості першого та третього пішоходів.

Відповідь: 5 км/год; 4 км/год.

9) На річці розташовані пункти A і B, причому пункт B розташований нижче за річкою, на відстані 20 км від A. Катер прямує з A до B, потім відразу повертається до A і знову слідує в B. Одночасно з катером з A відправляється пліт. При поверненні з B катер зустрів пліт на відстані 4 км від A. На якій відстані від A катер наздожене пліт, слідуючи вдруге в B?

Відповідь: 5 км.

10) Моторний човен пройшов відстань від міста M за течією річки до міста N та, не зупиняючись, повернувся назад за 12 годин. За який час пройде пліт цю відстань, якщо він вийшов з M в той момент, коли човен вийшов з міста N, та зустрівся з човном на його зворотному шляху на відстані, що дорівнює $\frac{1}{3}$ MN від міста M.

Відповідь: 16 км.

11) По шосе зі сталими швидкостями рухаються пішохід, а назустріч йому – велосипедист і мотоцикліст. У той момент, коли велосипедист і мотоцикліст знаходилися в одній точці, пішохід був на відстані 8 км від них. В той момент, коли мотоцикліст зустрів пішохода, велосипедист відставав від мотоцикліста на 4 км. На скільки кілометрів мотоцикліст обганятиме велосипедиста в той момент, коли пішохід зустрінеться з велосипедистом?

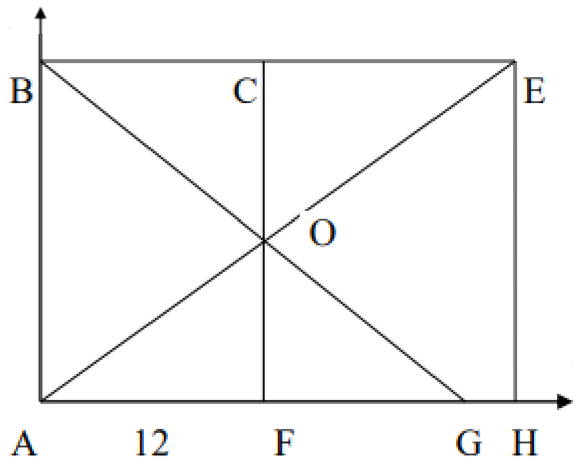
Відповідь: 8 км.

§9. Задачі на роботу

Задача. Дві бригади, працюючи одночасно, обробили ділянку землі за 12 год. За який час могла б обробити цю ділянку кожна з бригад окремо, якщо швидкості виконання роботи бригадами відносяться як 3:2?

Розв’язання.

Побудуємо графіки, що характеризують продуктивність кожної бригади.



За умовою v_1:v_2=3:2, а також $\frac{AG}{AB} = \frac{BE}{AB} \to \frac{AG}{BE} = \frac{3}{2}$

$\Delta\, AOF \sim \Delta\, EOC \to \frac{AF}{CE} = \frac{AO}{EO}$

$\Delta\, AOG \sim \Delta\, EOB \to \frac{AG}{BE} = \frac{AO}{EO}$

$\frac{AF}{CE} = \frac{AG}{BE} \to \frac{12}{CE} = \frac{3}{2} \to CE$=8

$BE = BC + CE = 12 + 8 = 20$

$\frac{AG}{BE} = \frac{3}{2}, AG = 30$

Відповідь: 20; 30.

Задачі для самостійного розв’язання:

1) Три басейни D, F і G однакового об’єму заповнювали водою з труб із сталими швидкостями. Басейни D та G почали заповнювати одночасно, а басейн F – пізніше. Першим був заповнений басейн D. Через 20 хвилин після початку заповнення басейну F об’єм води в ньому зрівнявся з об’ємом води в басейні G. Басейн F був заповнений через 80 хвилин після початку заповнення басейнів D і G і за 40 хвилин до закінчення заповнення басейну G. Знайдіть, на скільки хвилин пізніше почали заповнювати басейн F, ніж басейни D і G, якщо відомо, що басейн F, заповнюється в $\frac{5}{3}$ рази швидше за басейн D.

Відповідь: 40 хв.

2) Дві бригади робітників мали відремонтувати дві ділянки дороги (перша бригада – перша дільниця, друга – друга). Причому, обсяг робіт на першій ділянці був удвічі меншим, ніж на другому, а в першій бригаді було на 10 робітників менше, ніж у другій. Продуктивність всіх робітників однакова. Бригади одночасно розпочали роботу, і коли перша бригада закінчила роботу, друга ще працювала. Яка найменша кількість робітників могла б бути в першій бригаді?

Відповідь: 11 чоловіків.

3) Тракторна бригада може зорати $\frac{5}{6}$ ділянки землі за 4 год 15 хв. До обідньої перерви бригада працювала 4,5 год, після чого залишилися невиораними ще 8 га. Яка плаща ділянка?

Відповідь: 68 га.

4) Два екскаватори, працюючи разом, можуть викопати котлован за 4 години. Щоб викопати половину котловану, першому потрібно на 7,5 год менше, ніж другому. Перший екскаватор почав працювати о 9 год, а другий о 10 год. До 11 год було вийнято 180 кубометрів ґрунту. Яка ємність котловану?

Відповідь: 400 $м^3$.

5) Трьом робітникам потрібно зробити однакові деталі. Один приступив до роботи на 1 годину раніше за інших, які почали синхронно. Незабаром третій робітник зробив стільки ж деталей, скільки і перший, а другий зрівнявся з першим на дві години пізніше, ніж третій. Знайдіть відношення продуктивностей першого та третього робітників, якщо відношення продуктивності другого робітника до продуктивність третього становить 2:3?

Відповідь: 1:2.

§10. Розробка факультативного курсу:

"Різні методи розв'язуваня текстових задач"

Навчально-тематичне планування:

Таблиця 1. Навчально-тематичне планування

Тема уроку	Кількість годин
Задачі з цілими розв'язками	2
Задачі з альтернативною умовою	2
Задачі, які розв'язуються за допомогою нерівностей	2
Задачі на рух навздогін, що розв'язуються графічним методом розв'язання текстових задач	2
Задачі на рух назустріч, що розв'язуються графічним методом розв'язання текстових задач	2
Задачі на рух з відставанням, які розв'язуються графічним методом розв'язання текстових задач	2
Задачі на комбінований рух, що розв'язуються графічним методом розв'язання текстових задач	2
Задачі на роботу, які розв'язуються графічним методом розв'язання текстових задач	2
Контрольна робота	1

Клас: 10

Кількість годин: всього – 16; на тиждень – 1 год.

Запланованих контрольних уроків: 1.

В даному факультативному курсі розглядається алгебраїчний та графічний методи розв'язання текстових задач. Алгебраїчний метод використовується не тільки для складання та розв'язання рівнянь, а й для складання та розв’язання нерівностей, та діофантових рівнянь першого порядку. Графічний метод розв’язання текстових задач, як і інші методи розв’язання задач не є універсальним, але найчастіше, при розв’язанні задач типу “Швидкість, час, відстань” може виявитися дуже корисним. Навіть якщо сам метод для розв’язання задачі не підходить, зобразивши на графіку всі умови, учні можуть швидше побачити розв’язок за дачі.

Курси алгебри та геометрії у 9 та 10 класах можуть бути об’єднані для розв’язання задач за допомогою графіків, на яких учні можуть побачити деякі геометричні властивості, такі, наприклад, як подібність трикутників. І розв’язати задачу за допомогою простих алгебраїчних операцій, не вдаючись до тривалих та громістких обчислень. Факультативний курс розрахований на 16 занять, по одному занять на тиждень. На кожне заняття необхідно задавати домашнє завдання, виконання якого є обов’язковою умовою успішного засвоєння курсу.

До складу факультативного курсу входять:

1. Тематичне планування.

2. Пояснювальна записка (анотація).

3. Методичні рекомендації для вчителя.

4. Збірник задач, для аудиторних (домашніх) занять.

5. Контрольна робота.

Курс розбитий на кілька основних тем, кожна з яких є окремим видом текстових задач, що найбільш успішно розв’язується запропонованим методом. До цього курсу пропонується збірник задач із відповідями для самоперевірки, а також для перевірки учителем. Збірка розбита на параграфи, які відповідають обраним темам, а кожен параграф містить завдання, які можна давати учням в аудиторії, вдома та на контрольній роботі, а також приклад розібраної та розв’язаної задачі, щоб учні могли самостійно засвоїти курс.

Контрольна робота.

Контрольна робота складається з чотирьох завдань, відповідно до середнього рівня завдань, розв’язуваних на факультативному курсі.

До кожної задачі обов’язково має бути надано рисунок, вказані всі теореми, властивості, ознаки та інші необхідні для розв’язання факти з курсу алгебри та геометрії середньої школи. Кожну задачу пропонується оцінювати в десять балів. Усього за контрольну роботу можна отримати 40 балів.

Критерії переведення балів до дванадцятибальної системи оцінювання

Бали	Оцінка	Бали	Оцінка
0-3	1	20-23	7
4-6	2	24-26	8
7-9	3	27-29	9
10-13	4	30-33	10
14-16	5	34-37	11
17-19	6	38-40	12

Контрольна робота

1. Від пристані в один і той самий час відплили 2 катери: перший – вниз за течією річки до пристані А, а другий – вгору за течією річки – до пристані В. В пункт призначення А і В катери припливли через 5 та 9 годин відповідно. Припливши до пристані, катери не пришвартовувалися, розвернулися і попливли назад: один з них до пристані А, а другий – до пристані В, і зустрілися на відстані 20 км від пристані вниз за течією. (Власні швидкості катерів під час руху сталі і рівні). Шлях від пристані А до пристані В становить 200 км. Обчислити швидкість течії річки.

Відповідь: 6 км/год.

2. Від станції А до станції В виїхав пасажирський поїзд. У цей час від станції В до станції А виїхав товарний поїзд. Пасажирський поїзд приходить на станцію В на 3 години швидше, ніж товарний поїзд на станцію А. Коли пасажирський поїзд проїхав 250 км, товарний поїзд проїхав 200 км. Знайти швидкість кожного поїзда.

Відповідь: 50 км/год; 40 км/год.

3. Поруч із будівлею мерії посадили дуби та каштани. Якби дубів посадили в 2 рази більше, а кількість каштанів збільшили на 18, то каштанів буде більше, ніж дубів. Якщо збільшити вдвічі кількість каштанів, не змінюючи кількості дубів, то дубів все одно буде більше, ніж каштанів. Скільки дубів та скільки каштанів було посаджено, якщо всього дерев було більше 14?

Відповідь. 11 дубів та 5 каштанів.

4. Вода із циліндричного басейну глибиною h витікає по двох трубах різної пропускної здатності, перша з яких розташована на дні басейну, а друга – на бічній стінці. Якщо при наповненому повністю басейні відкрити тільки другу трубу, то вода витікатиме через неї протягом часу, який в $\frac{4}{3}$ рази менший за час, який потрібний для зливу всієї води з басейну через першу трубу. При дії обох труб тривалість зливу всієї води з басейну, наповненого повністю, в $\frac{4}{3}$ рази більша, ніж наповненого на $\frac{2}{3}$. Пропускна здатність труб не залежить від рівня води над трубою. На якій висоті розташована друга труба?

Відповідь. $\frac{h}{2}$.

Мета курсу:

Навчити учнів розв’язувати текстові задачі графічним та алгебраїчним методами.

Основні завдання:

- Розвинути логічне мислення, просторову уяву, вміння самостійно розмірковувати та обґрунтовувати.

- Розширити знання з окремих тем курсу алгебри та геометрії.

Вимоги до рівня підготовки учнів:

Для успішного засвоєння та застосування даного методу необхідно знання та розуміння наступних алгебраїчних та геометричних фактів:

1. Поняття лінійної функції та її графіка.

2. Вміння розв'язувати системи лінійних нерівностей.

3. Вміння розв'язувати лінійні рівняння в натуральних числах.

4. Визначення відповідних, різносторонніх та односторонніх кутів.

5. Ознаки подібності трикутників.

6. Вміння застосовувати формулу, що зв'язує швидкість, час та відстань.

7. Вміння складати та застосовувати пропорції.

Методичні рекомендації:

Даний факультативний курс розрахований на учнів 10 класів. Тому перше завдання, що постає перед учителем – показати нові способи розв'язання здавалося раніше відомих текстових задач. Для цього варто використовувати проблемне навчання. При знайомстві учнів із кожним новим способом розв'язання задач можна запропонувати учням розв'язати задачу самостійно за допомогою того математичного апарату, який у них є. Як тільки учні стикаються з труднощами, наприклад, замість рівняння вийшла нерівність, причому з двома змінними, вчитель у розмові спонукає учнів до усвідомлення, що складається проблемна ситуація. Після цього учні будуть готові до більш швидкого та якісного розуміння нових способів розв’язання текстових задач.

Наприклад, розглянемо проблемну задачу до методу розв’язання задач з альтернативною умовою.

При першому знайомстві учнів із задачами з альтернативною умовою учням дається завдання, розв’язати наступну задачу. *З міста А до міста В, відстань між якими 200 км, мотоцикліст їхав 6 годин. Спочатку він рухався зі швидкістю* v_1*, що перевищує 15 км/год, а потім зі швидкістю* v_2*, причому час руху з кожною швидкістю пропорційний цій швидкості. Через 4 години після виїзду мотоцикліст був за 120 км від міста А. Обчислити швидкості* v_1 *та* v_2*.*

Ввівши відповідні змінні для часу, учні зможуть скласти три рівняння.

$$v_1 t_1 + v_2 t_2 = 200$$

$$t_1 + t_2 = 6$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_1}{t_2},$$

де t_1 – час руху мотоцикліста зі швидкістю v_1, t_2 – час руху мотоцикліста зі швидкістю v_2.

А ось з останнім питанням виникнуть складнощі. Тому що через формулювання задачі не зрозуміло, чи 120 км було пройдено зі швидкістю v_1, чи рух здійснювався то з однією, то з іншою швидкістю. Вчитель за допомогою системи питань приводить учнів до необхідності розглядати два випадки. Питання можуть бути наприклад такими: “Чи знаємо ми, з якою швидкістю рухався мотоцикл перші 120 км?”, “Чи міг би він рухатися лише з однією швидкістю? А з різними швидкостями?”, “Чи зобов’язує нас умова, розглядати обидва ці випадки?”, “Чи міг мотоцикл рухатися спочатку з першою швидкістю, потім із другою, і потім знову з першою?” Запитань має бути стільки, щоб учні почули, на що потрібно звертати свою увагу при прочитанні умови задасі, і самі вчилися задавати подібні запитання. Тепер учні знають, що слід розглядати два випадки.

I випадок. $t_1 \geq 4$, => $v_1 = 30$ км/год.

II випадок. $t_2 < 4$ => $v_2 = 40$ км/год.

Розв'язуючи систему для першого випадку, вийде, що час руху з першою швидкістю або менше 4 годин, або більше 6 годин. Обидві відповіді суперечать або умові задачі, або випадку, що розглядається. Тому правильним буде лише другий випадок цієї задачі, коли перші чотири години автомобіль рухався з різними швидкостями.

Розглянемо проблемну задачу до методу розв'язання задач з цілими невідомими.

На першому уроці на тему: "Задачі з цілими невідомими" вчитель пропонує учням розв'язати наступну задачу: *зустрічаються дві команди учнів, які грають у шахи А та В. За умовами змагань кожен учасник однієї команди грає по одній партії із кожним учасником іншої команди. Загальна кількість майбутніх партій у 4 рази більша від кількості всіх гравців в обох командах. Однак через хвороби два гравці не змогли з'явитися на матч, у зв'язку з чим кількість всіх зіграних у матчі партій виявилося на 17 менше, ніж передбачалося. Скільки гравців виступило у матчі за команду А, якщо відомо, що в ній було менше гравців, ніж у команді В?*

Під час розв'язання учні зможу скласти одне рівняння без проблем, а от скласти друге відразу не можна, тому що невідомо, до яких команд належали хворі гравці. Тому учням доведеться складати три рівняння, і розв'язати кожне з них. Це учні зможуть зробити самостійно, оскільки задачі з альтернативною умовою вже розв'язували на минулих уроках.

Нехай у команді А – m гравців, а у команді В – n гравців, $n > m$. Очевидно, що планувалося зіграти mn партій. Тоді ми отримаємо наступне рівняння:

$$mn = 4(m + n)$$

Друге рівняння має три можливі випадки:

1) Якщо захворіли гравці команди А, то

$(m - 2)n = mn - 17$;

2) Якщо захворіли гравці команди В, то

$(n - 2)m = mn - 17$;

3) Якщо захворіло по одному гравцю з команд А та В, то

$(m - 1)(n - 1) = mn - 17$.

Вчитель пропонує обговорити умову задачі і розв’язати три рівняння, у процесі чого учні приходять до двох аналогічних рівнянь: $2n = 17$, $2m = 17$. Якщо учні самі не побачать протиріччя цього рівняння з умовою, то вчитель може поставити уточнююче питання: “Що означає змінна m, n?” І оскільки ці змінні означають кількість гравців, отже, це рівняння не розв’язується в цілих числах і нам підійде лише третє рівняння. Завдяки умові, що змінні мають бути цілими числами задача має єдиний розв’язок.

Висновки

Вивчення більшої кількості способів розв'язання текстових задач має низку переваг. Учні менше витрачають часу на розв'язання, вибираючи найбільш раціональний спосіб. Оскільки одну і ту саму задачу можна розв'язати по-різному, то у учнів розвивається гнучкість розуму. Вчитель, організовуючи процес навчання за допомогою проблемного методу, мотивує учнів на подальше навчання математики за рамками шкільної програми. Також один із представлених методів – графічний, має перевагу, оскільки, реалізує міжпредметний зв'язок алгебри та геометрії.

В дипломній роботі розглянуто розв'язування текстових задач переважно графічним методом. Запропоновані методи розв'язання текстових завдань не є універсальними, проте найчастіше їх застосування є найбільш раціональним.

У ході написання дипломної роботи було вирішено такі задачі:

- вивчено та проаналізовано методичну, педагогічну, навчальну літературу з теми, що вивчається;

- складено та систематизовано збірник завдань. До кожного блоку задач наведено приклад повного розв'язання, однієї з них, вивчивши яке, учень може самостійно розв'язати інші типові задачі з даної теми;

- розроблені методичні рекомендації щодо проведення факультативного курсу;

- розроблено навчально-тематичне планування для факультативного курсу.

Список використаних джерел

1. Текстові задачі на складання рівнянь. [Електроний ресурс]. – Режим доступу. URL: https://yukhym.com/uk/matematika/tekstovi-zadachi-na-skladannya-rivnyan.html (дата звернення 12.07.2022)

2. Методика навчання учнів основної школи розв'язувати текстові задачі. [Електроний ресурс]. – Режим доступу. URL: https://sites.google.com/site/tekstovizadaci (дата звернення 14.08.2022)

3. Текстові задачі на сумісну роботу і планування в шкільному курсі математики. [Електроний ресурс]. – Режим доступу. URL: http://eprints.zu.edu.ua/19723/1 (дата звернення 15.08.2022)

4. Розв'язуємо текстові задачі. [Електроний ресурс]. – Режим доступу. URL: https://volrmk.at.ua/serednia/matematuka/01/1/3.pdf (дата звернення 10.06.2022)

5. Демідова Т.Е. Текстові задачі і методи їх розв'язання. [Електроний ресурс]. – Режим доступу. URL: https://webcache.googleusercontent.com/search?q (дата звернення 15.06.2022)

6. Навчання учнів розв'язувати текстові задачі. [Електроний ресурс]. – Режим доступу. URL: https://allref.com.ua/uk/skachaty/Navchannya_uchniv_rozvyazuvati_tekstovi_zadachi (дата звернення 18.07.2022)

7. Розв'язування прикладних задач методом рівнянь в основній школі. [Електроний ресурс]. – Режим доступу. URL: https://naurok.com.ua/rozv-yazuvannya-prikladnih-zadach-metodom-rivnyan-v-osnovniy-shkoli-38419.html (дата звернення 26.08.2022)

8. Розв'язання текстових задач геометричним методом в курсі математики. [Електроний ресурс]. – Режим доступу. URL: http://school2100.com/upload/iblock/536/5361fbdd868009f4bd985ecdfa334d88.pdf (дата звернення 17.08.2022)

9. Лур'є М.В. Задачі на складання рівнянь. [Електроний ресурс]. – Режим доступу. URL: https://obuchalka.org/20190617110264/zadachi-na-sostavlenie-uravnenii-lure-mv-aleksandrov-vi-1990.html (дата звернення 17.08.2022)

10. Методичний пошук вчителя математики. [Електроний ресурс]. – Режим доступу. URL: https://vspu.edu.ua› science › new-style (дата звернення 13.09.2022)

11. Текстові задачі на сумісну роботу у шкільному курсі математики. [Електроний ресурс]. – Режим доступу. URL: http://school4.edukit.kiev.ua (дата звернення 23.09.2022)

12. Збірник задач. Частина 15. Текстові задачі. [Електроний ресурс]. – Режим доступу. URL: https://vseosvita.ua/library/zbirnik-zadac-castina-15-tekstovi-zadaci-93306.html (дата звернення 16.07.2022)

13. Бурда М. Прикладна спрямованість змісту шкільної математичної освіти. Наукове забезпечення розвитку освіти в Україні: актуальні проблеми теорії і практики (до 25-річчя НАПН України): зб.наук. праць. Київ: Вид. дім "Сам", 2017. 210 с.

14. Розв'язування задач. [Електроний ресурс]. – Режим доступу. URL: http://catalog.library.tnpu.edu.ua:8080/library/TopicDescription?topic_id=69952&page=7 (дата звернення 25.07.2022)

15. Сафін В.Ф. Психологія самовизначення особистості. [Електроний ресурс]. – Режим доступу. URL: https://scibook.net/ (дата звернення 18.07.2022)

16. Гече Ф.Е. Збірник конкурсних тестових завдань з математики. [Електроний ресурс]. – Режим доступу. URL: https://www.uzhnu.edu.ua/en/infocentre/get/6183 (дата звернення 12.08.2022)

17. Шаригін І.Ф. Факультативний курс з математики 10. Розв'язання задач. [Електроний ресурс]. – Режим доступу. URL: https://retrokniga.com/estestvennye-i-tekhnicheskie-nauki/mathematics/sharyigin-

if-fakultativnyiy-kurs-po-matematike-10-reshenie-zadach (дата звернення 17.08.2022)

18. Слепкань З.І. Методика навчання математики: підручник / З. І. Слепкань. – 2-ге вид. Київ: Вища школа, 2006. 582 с.