math_2022_062

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЧЕРНІВЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ЮРІЯ ФЕДЬКОВИЧА

Факультет математики та інформатики

Кафедра алгебри та інформатики

Методичні особливості вивчення координатно-векторного методу в ЗЗСО

Дипломна робота

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Виконала:
студентка 6 курсу 606 групи
Когут Ольга Михайлівна

Керівник:
кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Сікора Віра Степанівна

До захисту допущено
на засіданні кафедри алгебри та інформатики
протокол № 6 від 7 грудня 2022 р.
Зав. кафедрою _______________ доц. Колісник Р.С.

Чернівці – 2022

АНОТАЦІЯ

Дипломна робота викладена на 58 сторінках, містить 2 розділи, 8 підрозділів, висновки, список використаної літератури та додаток. Об'єктом досліджень є координатно-векторний метод в елементарній (шкільній) математиці та процес його вивчення в курсі математики 9-11 класів. Мета роботи – систематизація відомого теоретичного матеріалу, пов'язаного з координатно-векторним методом з точки зору його викладання на уроках математики в ЗЗСО та його застосування до розв'язування математичних задач. Головним завданнями роботи є розгляд окремих питань щодо історії виникнення координатно-векторного методу, розкриття змісту цього методу, опис методичних поради щодо застосування методу під час вивчення відповідних тем у 9 та 10 класах ЗЗСО; розгляд завдань різного рівня складності, за допомогою яких можна навчати учнів 9-11 класів ЗЗСО розв'язувати математичні задачі вказаним методом; розробка плану-конспекту факультативного заняття з використанням координатно-векторного методу.

Ключові слова: *координати, вектор, координатно-векторний метод, методичні поради.*

ANNOTATION

The thesis work is presented on 58 pages, contains 2 sections, 8 subsections, conclusions, a list of references and an appendix. The object of research is the coordinate-vector method in elementary (school) mathematics and the process of its study in the course of mathematics in grades 9-11. The aim of the work is to systematize the known theoretical material associated with the coordinate-vector method from the point of view of its teaching in mathematics in school and its application to solving mathematical problems. The main objectives of the work are to consider certain issues regarding the history of the originating coordinate-vector method, to disclose the content of this method, to describe the methodological advice on the application of the method when studying the relevant topics in grades 9 and 10 of the school; consideration of tasks of different levels of complexity, with the help of which it is possible to teach students in grades 9-11 of school to solve mathematical problems using the method of education; development of the plan-outline of the optional lesson with the use of the coordinate-vector method.

Keywords: *coordinates, vector, coordinate-vector method, methodical advice.*

Дипломна робота містить результати власних досліджень.

Використання ідей, результатів і текстів наукових досліджень інших авторів мають посилання на відповідне джерело ___________________________ *О.М.Когут*

ЗМІСТ

ВСТУП

Важливе значення для розвитку геометрії мало застосування різних алгебраїчних методів до розв’язування геометричних задач. Саме це з часом переросло в окремий розділ математики – аналітичну геометрію, котра дає великий алгебраїчний ресурс для розв’язування різних типів геометричних задач. А основу цього розділу складають знання про вектори та координати на площині та в просторі, фундамент яких закладається у 9-11 класах ЗЗСО.

Досить часто знання про координати та вектори дають можливість спростити розв’язок задачі, уникнувши складних геометричних конфігурацій, обґрунтувань та доведень.

Прямокутними координатами (правда не в сучасному для нас звичному записі) користувалися ще у Древній Греції до початку нашої ери – давньогрецький математик Аполлоній Перський за допомогою координат визначав параболу, гіперболу та еліпс. Координати використовували і в середні віки, визначаючи розташування світил на небі та певних місць на поверхні Землі. Прямокутну сітку використовували також і художники епохи Відродження.

Вперше використовувати координати до розв’язування математичних задач почали П’єр Ферма (1601–1665) та Рене Декарт (1596–1650). Зокрема, у 1637 році Декарт опублікував трактат «Міркування про метод…», у якому виклав основи аналітичної геометрії – ввів до розгляду прямокутну систему координат (яку зараз часто називають прямокутною декартовою системою координат), ввів зручну алгебраїчну символіку, якою ми користуємося і сьогодні, запропонував способи побудови дотичних та нормалей до плоских алгебраїчних кривих. П’єр Ферма раніше та більш послідовно, аніж Декарт, розробив метод координат та вивів рівняння прямої та рівняння ліній другого порядку.

Що ж стосується векторів, то зачатки векторного числення з’явилися разом із геометричною моделлю комплексних чисел у роботах Гаусса у 1831 році. Термін «вектор» вперше в з’явився у 1845 року в ірландського математика та астронома Вільяма Гамільтона (1806–1865). Саме Гамільтон обґрунтував правила дій над векторами та їх описав властивості цих дій серед досліджень з кватерніонного числення — в його роботах вектор утворювали уявні компоненти кватерніона. Введений у роботах Гамільтона формалізм використовував шотландський вчений Джеймс Максвелл (1831–1879) у своїх статтях з електромагнетизму — саме цим він привернув увагу різних вчених до нового числення. У 1880-тих роках вийшли «Елементи векторного аналізу» американського фізика-теоретика Джозайя Вілларда Гіббса (1839-1903). А вже у 1903 році британський учений-самоук, інженер, математик і фізик англійського походження Олівер Гевісайд (1850–1925) надав векторному аналізу сучасного вигляду.

Координатно-векторний метод є досить актуальним і сьогодні, адже знаходить своє застосування в різних галузях науки та суспільного життя. Наприклад, метод координат лежить в основі механіки, астрономії, геодезії, використовується в географії, інформатиці, медицині, економіці. Вектори знайшли своє застосування у фізиці для роботи з багатьма фізичними величинами. Їх вивченню приділяють увагу як у шкільній програмі, так і в таких розділах вищої математики, як «Лінійна алгебра», «Аналітична геометрія», «Функціональний аналіз» тощо. Крім того, координати та вектори включені до програми зовнішнього незалежного оцінювання з математики.

Наведені вище міркування обґрунтовують актуальність тематики даної дипломної роботи та потребу вивчення координат, векторів та їх застосування для учнів старших класів ЗЗСО, особливо для тих, хто в майбутньому планує продовжити своє навчання у вузах.

У дипломній роботі розглянуто окремі методичні особливості та поради щодо вивчення координатно-векторного методу в ЗЗСО. Зокрема, розглянуто поради щодо вивчення в ЗЗСО прямокутної декартової системи координат на площині та в просторі; способи знаходження та задання координат точки на площині та в просторі; поняття вектора та пов’язані з ним визначення, теореми та властивості; показано як, об’єднавши координатний та векторний методи, можна виводити необхідні формули й знаходити зручний спосіб розв’язування певних типів геометричних задач.

Об'єкт дослідження – координатно-векторний метод в елементарній (шкільній) математиці та процес його вивчення в курсі математики старших класів.

Предмет дослідження – методичні особливості, методи та прийоми розв’язування задач за темою «Координатно-векторний метод»

Мета дослідження – систематизація відомого теоретичного матеріалу, пов’язаного з координатно-векторним методом з точки зору його викладання на уроках математики в ЗЗСО та його застосування до розв’язування математичних задач.

Завдання дослідження – розглянути окремі питання щодо історії виникнення координатно-векторного методу розв'язування задач; розкрити зміст цього методу та розглянути основні формули; описати методичні поради щодо застосування методу під час вивчення відповідних тем у 9 та 10 класах ЗЗСО; розглянути приклади завдань різного рівня складності, за допомогою яких можна навчати учнів 9-11 класів ЗЗСО розв’язувати математичні задачі вказаним методом; розробити план-конспект факультативного заняття з використанням координатно-векторного методу під час розв’язування задач.

Координатний та векторний методи розв'язування задач на сьогоднішній день – це дуже потужний апарат для використання в геометрії, а при правильному підході дозволяє розв'язувати фактично всі види математичних, фізичних, астрономічних чи технічних задач. Проте, ці методи в рамках шкільних програм з математики використовуються досить обмежено й неповно. В дипломній роботі ми розглянули приклади розв'язування окремих видів стереометричних задач, якщо на них поглянути з іншого боку, тобто розглянути задачу в дво- чи тривимірній системі координат або ввести вектори.

Самостійною частиною даної дипломної роботи є підбір системи задач, які варто розглянути з учнями 9-11 класів для навчання їх використовувати векторно-координатний метод більш ширше і не завжди традиційно, аналіз та формулювання методичних порад вчителю до кожної з них.

РОЗДІЛ І. ОСНОВИ КООРДИНАТНО-ВЕКТОРНОГО МЕТОДУ

1.1. Історія появи координат та векторів

Поява в першій половині XVII століття нового розділу математики – аналітичної геометрії, створеної П'єром Ферма та Рене Декартом – у якому тісно встановився зв'язок між алгеброю та геометррією, не була випадковою. Вона була природнім наслідком розвитку математики та була спричинена загальною потребою виробництва, торгівлі та економіки того часу.

Як відомо, в основі аналітичної геометрії [1] лежать дві ідеї: по-перше, ідея координат, котра призвела до арифметизації площини, оскільки кожній точці площини (простору) можна взаємно однозначно поставити у відповідність впорядковану пару (трійку) дійсних чисел; по-друге, ідея задання будь-якої лінії на площині (або поверхні в просторі) як деякого геометричного місця точок, котре можна описати за допомогою деякого рівняння (системи рівнянь) від двох (чи трьох) змінних та, навпаки – кожне рівняння від двох (трьох) змінних задає певну лінію на площині (поверхню в просторі).

Історично першою роботою, у якій було наведено опис системи координат та використання цього методу при розв'язуванні задач, вважають роботу П'єра Ферма [2] «Вступ до вчення про плоскі та тілесні місця» (написану приблизно всередині 30-х років XVII століття). До своїх нових ідей Ферма прийшов, детально вивчаючи класичні праці давньогрецьких учених, в тому числі Аполонія. Зокрема, у передмові до «Вступу…» Ферма звертає увагу на те, що давньогрецькі філософи не володіли загальними методами розв'язування геометричних задач – кожну задачу вони розглядали окремо та незалежно від інших, подібних до неї задач. Саме відсутність у древніх вчених єдиного загального підходу до певних математичних досліджень, до розв'язування задач, відсутність певної символіки, призводили до повторення одних і тих же міркувань та робили неможливим раціонально класифікувати різні задачі за типами чи способами. Саме Ферма взяв за мету сформувати деякий загальний підхід до дослідження геометричних місць точок. Для цього він вважав, що кожне рівняння між двома «невідомими» визначає деяку лінію на площині у певній системі координат. Проте одним з недоліків праці Ферма була обмеженість його системи координат — фактично вся система координат у його роботі складалася з одного (у сучасному розумінні – першого) квадранта, що суттєво обмежувало застосування цього методу.

Наступною ґрунтовною працею, у якій було вже детально обґрунтовано метод координат є «Геометрія» Декарта [3], котра вперше була опублікована французькою мовою у 1637 році в якості одного з трьох додатків до його філософського трактату «Міркування про метод». Саме в «Геометрії», як і в інших своїх творах, Декарт висловив думку про те, що «математика є найважливішим засобом для розуміння законів Всесвіту та найкращим підтвердженням того, що людський розум здатний знайти істину в науці і пізнавати природу». Ще у двадцятитрирічному віці Декарта осяяла думка про перебудову всіх наук з використанням математичної аналітичної основи – створення єдиної та всеосяжної науки «універсальної математики». Ця думка його постійно надихала, хоча втілити її повністю йому так і не вдалося. «Геометрія» Декарта якраз і з'явилася заради часткової реалізації його загальної ідеї – об'єднання арифметики і алгебри з геометрією. Фактично ж «Геометрія» Декарта – це повністю алгебраїчна праця. В ній є досить мало інформації з того розділу математики, котрий сьогодні називають аналітичною геометрією. Проте основна ідея аналітичної геометрії – алгебраїчний спосіб дослідження проблем геометрії за допомогою методу координат – викладена в цій роботі досить чітко. При цьому значну частину «Геометрії» Декарта присвячено саме методам алгебраїчного й графічного розв'язування рівнянь.

Отже, не лише у роботах Ферма, але й у працях Декарта ще не було того, що зараз називають системою декартових координат на площині (чи в просторі). В них зустрічається тільки вісь (абсцис) з початковою точкою (початком відліку) на ній. Хоча «Геометрія» Декарта ще не була справжньою аналітичною геометрією, все ж таки саме ця праця дала величезний поштовх для її розвитку. Через складний стиль і не дуже чіткий спосіб викладу матеріалу, «Геометрія» Декарта виявилася дуже важкою для читання. Наприклад, у 1649 році француз

Ф.Дебон у своїх «Коротких зауваженнях» коментує та доповнює Декарта. Аналогічно вчинив голландський математик Франц Ван Скоотен, котрий переклав та опублікував «Геометрію» Декарта латиною у 1649 й 1659 роках. Саме в перекладі Ван Скоотена вперше можна зустріти рівняння прямої $y = ax + k$, правила перетворення координат тощо. Дж. Валліс вперше ввів поняття від'ємних абсцис, котрі він застосував разом з від'ємними ординатами. Так поступово метод координат знаходив своє місце в математиці. При цьому окремі послідовники Декарта, хоча й зображали другу вісь координат, проте не використовували її.

Суттєвим поштовхом для подальшого розвитку координатної геометрії на площині були невелика стаття Ньютона «Перелік кривих третього порядку» (1706) та книга Дж. Стірлінга «Ньютонові криві третього порядку» (1717), у яких використовувалися обидві осі (хоча вісь ординат (вісь y) ще не вважалася рівноправною з віссю x) та квадранти. І тільки Г. Крамер у своїй роботі «Вступ до аналізу алгебраїчних кривих» у 1750 році вперше ввів вісь y, вважаючи її повністю рівноправною з віссю x, та чітко користувався поняттям двох координат точки на площині як впорядкованої пари чисел. Проте цими нововведеннями ще не користується Ейлер у другому томі своєї роботи «Вступ до аналізу» (1748). З іншого боку, згадана праця Ейлера, стала першою, у якій в сучасному розумінні розглядалися питання аналітичної геометрії щодо конічних перерізів. Близькими до сучасних є позначення та твердження аналітичної геометрії у праці С. Лакруа «Елементарний курс прямолінійної та сферичної тригонометрії та програм алгебри до геометрії», котру перевидавали багато разів протягом цілого століття, починаючи з 1798 року.

Що стосується ще одного розділу координатної геометрії – полярної системи координат, то вважають, що її основи були також закладені в «Геометрії» Декарта. Проте подальшого глибокого її розвитку в математиці тих років не простежується. Та й сучасні математики мало приділяють уваги цій системі координат – її вивчення не є основним для шкільного курсу математики. Це, очевидно, пов'язано з певною незручністю використання полярних координат при проведенні обчислень та побудов, складністю сприйняття об’єктів у полярній системі. Хоча, при вивченні об’єктів, котрі знаходяться на величезних відстанях та недоступних об’єктів дуже зручно використовувати саме полярну систему координат – вся теорія руху небесних тіл побудована на їх основі. Саме тому з полярними координатами учні ЗЗСО, як правило, знайомляться саме на уроках астрономії.

Що ж стосується сьогодення, різні системи координат (афінні, прямокутні декартові, сферичні, полярні тощо) застосовуються у різних галузях науки та техніки. Тому, на наш погляд, з ними варто ознайомити школярів хоча би на факультативних заняттях.

1.2. Зауваження щодо вивчення координат та векторів у ЗЗСО

Відповідно до Державного стандарту базової середньої освіти [4], кожен випускник ЗЗСО повинен добре володіти математичною компетентністю, «що передбачає здатність розвивати і застосовувати математичні знання та методи для розв’язання широкого спектра проблем у повсякденному житті; моделювання процесів та ситуацій із застосуванням математичного апарату; усвідомлення ролі математичних знань і вмінь в особистому та суспільному житті людини» [4]. Саме тому зусилля вчителя математики ЗЗСО повинні бути зосереджені в напрямку створення умов для розвитку інтелекту й формування творчих якостей учнів.

Для того, щоб математика й надалі залишалася знаряддям дослідження нових глибинних явищ світобудови, вона мусить систематично відшліфовувати розроблені нею методи досліджень, удосконалювати їх та створювати нові. Саме тому вчителі математики повинні розвивати в учнів бажання постійно удосконалювати власні знання та математичні вміння, оскільки якраз математичний апарат надає важливі знання, котрі можна застосовувати під час досліджень та розв’язуваннях різних математичних (і не тільки) задач. При цьому пошук розв’язку задачі, особливо коли цей розв’язок є нестандартним та оригінальним, розвиває в школярів ініціативність, наполегливість і кмітливість.

Якщо ж, крім того, надавати учням багато різнопланових задач, то їх розв'язування стане чудовим засобом для розвитку логічного мислення, точності міркувань та математичного смаку учнів.

Сьогодні виокремлюється одна досить цікава та актуальна проблема шкільної математичної освіти — проблема інтеграції математичних знань, формування в учнів ЗЗСО цілісних уявлень про математику як про науку та її зв'язок з іншими науками. Ця проблема є важливою для основної школи, де вивчаються дві математичні дисципліни – алгебра й геометрія, які, на перший погляд учнів, є дещо різними. Проте, оскільки в процесі вивчення математики в ЗЗСО основним видом діяльності учнів є саме розв'язування задач, то, очевидно, інтеграцію алгебри й геометрії доцільно виконувати щодо їх методів. Зокрема, алгебраїчний метод (в елементарній математиці) трактується як метод, котрий полягає у використанні певних символів та символьних виразів, що перетворюються за певними правилами (часто цей метод називають ще методом символьних обчислень). Геометричний же метод характеризують як метод, котрий базується на візуалізації. Його суттєвими ознаками є геометричні (візуальні) представлення і закони геометрії, котрі відображають властивості геометричних фігур.

Математика, в цілому, та геометрія, зокрема, використовує два головні методи вирішення проблем – перший базується на аксіомах, теоремах та властивостях геометричних фігур та вимагає логічної послідовності практичних міркувань. Другий метод – це координатний або координатно-векторний метод.

Основна цінність координатно-векторного методу полягає в перенесенні до геометрії тих методів розв'язування задач, котрі більше властиві алгебрі. При цьому ще одна його перевага полягає в тому, що використання координат та векторів часто позбавляє від необхідності вдаватися до візуалізації складних просторових конфігурацій. При цьому векторний метод є одним з основних методів розв'язування геометричних задач – з його допомогою можна вирішувати ряд афінних та метричних задач планіметрії і стереометрії, деякі прикладні задачі фізики й астрономії. Крім того, вивчення векторів має на меті й певний пізнавальний інтересом, адже на їх основі можна правильно ввести метод координат на площині та в просторі.

На даний час існує кілька підходів до методики введення поняття вектора та дій над векторами в ЗЗСО (див., наприклад [5-7]), окреслено коло завдань, котрі можна вирішувати векторним методом, описано вміння, котрі необхідні для використання цього методу. Все це грунтується на головному призначенні векторів – використанні алгебраїчного апарату для розв'язування геометричних задач. Проте багато фахівців зазначають, що деяким викладачам, студентам, а тим більше школярам, досить складно застосовувати векторний метод для вирішення складніших завдань.

Векторний та координатний методи розв'язування математичних задач на сьогоднішній день є найбільш потужними та при правильному підході дозволяють розв'язувати майже всі типи математичних, фізичних, астрономічних та технічних задач. Проте, на наш погляд, цей метод в межах шкільної програми використовується досить обмежено та неповно.

Варто зазначити, що вивчення векторів та координат є невід'ємною частиною шкільного курсу геометрії та ці теми включено до програми ЗНО з математики (яке у 2022-23 році, швидше за все, відбудеться у форматі НМТ). А тому з цими темами учнів потрібно ознайомити досить детально. Крім того, дуже часто вміння використовувати знання про вектори та координати дозволяють швидко розв'язувати складні завдання на ЗНО, в результаті чого діти отримують хороші результати на цих іспитах.

У даній дипломній роботі розглянуто можливості розв'язання різних геометричних завдань за допомогою координатно-векторного методу та наведено цікаві приклади використання даного методу до розв'язування алгебраїчних задач.

1.3. Аналіз навчальних програм з математики щодо координат та векторів

У 2022/2023 навчальному році викладання шкільного курсу математики здійснюється за оновленими у 2017 році навчальними програмами, розташованими на сайті МОН України [8]. При цьому, у всіх наведених програмах зазначено мету сучасної шкільної освіти – головним є учень, а не предмет, який він вивчає, тобто діє гасло: «від предметоцентризму до дитиноцентризму». Тому особлива увага звертається на те, що педагогічна спільнота повинна бути націлена на досягнення результатів, а чільне місце в них займають формулювання очікуваних результатів навчання в порівнянні із формулюванням змісту матеріалу, котрий вивчається. Саме в навчальних програмах вказано на відповідальність всіх учасників освітнього процесу за виклики сьогодення, описано зрівноваженість між знаннєвими й компетентнісними компонентами змісту освіти. Тобто навчальні програми – це дієвий інструмент для запровадження інноваційних методик; важливий документ для учнів, батьків та вчителів, котрі перебувають у вічному пошуку відповіді на питання «Для чого потрібно вчити певну тему». Таким чином, очікувані результати навчання включають: знаннєву, діяльнісну та ціннісну компоненти ключових компетенцій.

Нагадаємо, що згідно з чинною Навчальною програмою з математики [9], знайомство учнів з декартовою системою координат вперше на досить примітивному рівні відбувається у 5 класі. Зокрема в цій програмі вказано, що «важливе значення для підготовки учнів до систематичного вивчення алгебри, геометрії та інших предметів мають початкові відомості про метод координат, які дістають учні 5-6 класів: зображення чисел на координатній прямій, прямокутна система координат на площині, виконання відповідних побудов, побудова і аналіз окремих графіків залежностей між величинами» [9, ст.11].

Продовження вивчення координат та векторів відбувається вже в 9 класі ЗЗСО, де «розширюються уявлення учнів про аналітичне задання геометричних фігур, зокрема подається рівняння прямої, кола, виводяться формули довжини відрізка, координат середини відрізка, формується поняття про метод координат, який застосовується до доведення теорем та розв’язування задач. До відомих учням скалярних величин долучаються векторні величини. Розглядаються рівні, протилежні, колінеарні вектори» [9, ст. 14].

Продовжуючи вивчення геометрії у старшій школі за різними рівнями (профільний, стандарту чи поглиблений рівень) [10-12], учні поглиблюють отримані в основній школі відомості про систему координат на площині, розширюють знання про систему координат та вектори на випадок простору, вивчають рівняння деяких ліній та поверхонь у просторі.

При цьому, аналізуючи актуальні Навчальні програми з математики [9-12], звертаємо увагу, що методика введення різних видів систем координат (спочатку на вісі, потім на площині, і вже в старшій школі – у просторі) та векторів (з котрими учні спочатку зустрічають на уроках фізики у 7-8 класах, а потім вивчають на уроках геометрії в 9 класі (вектори на площині) та в 10 класі (вектори в просторі) є досить послідовним та зрозумілим для більшості учнів. Зазначимо, що при переході від простішої ситуації (пряма) до складнішої (площина, простір) з учнями обов’язково варто нагадувати вивчені раніше означення, властивості, твердження, формули та вказувати на схожість і відмінність між ними, звертати увагу на такі особливості в кожному випадку.

Наприклад, у 7 класі пропонується розглядати найпростіші геометричні задачі, котрі розв’язуються за допомогою певних формул (відстань між двома точками, середина відрізка, рівняння прямої тощо). На цьому етапі розглядаються, як правило, задачі, котрі одразу сформульовано на мові координат. І вже тільки після чіткого засвоєння вивчених формул, у дев’ятому у класі розглядається поняття рівняння фігури на площині, що часто є досить складним для багатьох учнів. Часто завдання на складання рівняння лінії викликають труднощі вже на етапі формулювання – визначення певної лінії як геометричного місця точок, що задовольняють вказану властивість (чи властивості) викликає деякі проблеми щодо розуміння, де в умові завдання взяти умови, щоб скласти потрібне співвідношення між змінними, як ввести систему координат, щоб рівняння лінії виглядало «красиво» тощо.

У шкільному курсі геометрії розглядають два види рівняння лінії – рівняння кола та рівняння прямої, а у 10 класі – рівняння сфери та рівняння прямої і площини в просторі (для класів, у яких математика вивчається на профільному та поглибленому рівнях).

Окрім загального рівняння прямої, згідно за програмою [9], розглядається поняття кутового коефіцієнта, за допомогою якого виводяться умови паралельності та перпендикулярності прямих на площині.

1.4. Поради вчителю та учням щодо застосування векторно-координатного методу

Як уже згадувалося, використання методу координат для розв’язування геометричних задач дозволяє алгебризувати геометричні співвідношення між фігурами та їх елементами. При цьому використання вказаного методу потребує дотримання певних загальних правил.

Насамперед – це доцільний вибір системи координат, оскільки досить часто саме від цього буде залежати рівень складності розв’язування конкретної задачі. Після введення системи координат потрібно знайти (вказати) координати основних (заданих та шуканих) точок у вибраній системі координат. На наступному кроці розв’язуємо задачу в координатній формі, встановлюємо співвідношення між координатами, використовуючи відповідні формули (складаємо рівняння прямих (у двовимірному просторі) чи площин, визначаємо відстані між точками, від точки до прямої чи площини, кути між прямими й площинами тощо). І, нарешті, перекладаємо отримані результати на мову геометрії.

Звісно, складність завдань, які вчитель розглядає на уроці, залежить від рівня математичних знань учнів та може варіюватися від найпростіших, знайомих для учнів, задач до складних та досить цікавих завдань на встановлення нових співвідношень.

Вчитель повинен розуміти, що результат розв’язування конкретної задачі залежить від вдалого чи не дуже вибору системи координат – звісно, що у будь-якому разі до відповіді можна буде прийти, проте від вдалого вибору системи координат залежатиме раціональний шлях її розв'язання, швидкість та легкість оримання необхідного результату. Тому, перш ніж вводити систему координат, треба уважно проаналізувати задачу, встановити, координати яких саме точок потрібно визначити, рівняння яких прямих та площин скласти й продумати, у якій з обраних систем координат це можна зробити з найменшою затратою фізичних і розумових сил. При цьому загальних правил тут немає: кожна задача вимагає індивідуального підходу. Але, звісно, вміння виконувати такі кроки приходить з досвідом і вчитель, насамперед, повинен сам розв'язати достатню кількість завдань, і навчити учнів аналізувати кожну конкретну ситуацію.

Перевага методу координат перед системним методом, при якому безпосередньо розглядаються фігури, а кожна задача потребує особливого підходу, – в його алгоритмічності. Дійсно, за допомогою методу координат більшість геометричних задач можна звести до алгебраїчної, а от вже алгебраїчні задачі алгоритмізувати дещо легше.

Зазначимо, що в курсі математики ЗЗСО координатний та векторний методи використовуються, в основному для роз'язування планіметричних задач – для стереометричних задач він майже не використовується. Наприклад, згідно з програмою [11], на вивчення теми «Вектори і координати» в 11 класі (рівень стандарту) виділяється всього 10 годин. При цьому застосування координат та векторів базується на аналогічних знаннях та застосуваннях з планіметрії. При цьому розглядаються, як правило, досить легкі та типові задачі.

У даній дипломній роботі ми пропонуємо добірку задач, які доречно було би розглянути з учнями на факультативних заняттях або заняттях гуртка з математики, для поглиблення знань учнів про координатно-векторний метод. При цьому вчителю радимо під час розв'язування задач із використанням векторів та координат звертати увагу на переваги координатно-векторного методу над тими методами, котрі вимагають знання великої кількості означень, ознак і формул.

РОЗДІЛ 2. ВИКОРИСТАННЯ КООРДИНАТНО-ВЕКТОРНОГО МЕТОДУ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ

2.1. Загальні зауваження щодо формул та тверджень

Згідно з «Переліком навчальних програм, підручників та навчально-методичних посібників, рекомендованих МОН України для використання в 5-11 класах закладів загальної середньої освіти з навчанням українською мовою» (див. [13, вкладка «Математика»]), при викладанні шкільного курсу математики використовується більше сотні підручники різних авторів та авторських колективів. І в кожному з них, враховуючи затверджені Міністерством освіти і науки України навчальні програми з математики, наводяться певні алгоритми та підходи до вивчення координат та векторів. Проте всі вони дають фактично однакові формулювання основних (класичних) визначеннь (координати точки на прямій, площині чи в просторі, відстань між двома точками, формули координати середини відрізка, поняття вектора, його координати тощо). А тому, щоб не перенасичувати дану дипломну роботу відомими класичними фактами, ми опустимо основні означення та твердження, з якими можна познайомитися у згаданих підручниках та порадимо при вивченні вказаних тем вчителю користуватися саме тими формулюваннями, котрі є в конкретному підручнику, з яким він працює з учнями в класі.

Часто в учнів та вчителів виникає запитання – коли варто використовувати координатно-векторний метод під час розв'язування геометричних задач. Насамперед, це завдання, мова в яких іде про прямокутник, квадрат чи прямокутний трикутник на площині та прямокутний паралелепіпед, куб чи піраміду з тригранним прямим кутом в просторі. Саме в такому випадку прямокутна система координат на площині чи в просторі вводиться природнім чином – початок системи координат, як правило, варто розміщувати у вершині з прямим кутом і тоді серед координат вершин многокутників (многогранників), котрі фігурують в задачі буде багато нульових координат, що, очевидно, спрощуватиме обчислення.

Розглянемо лише окремі формули та властивості, які нечасто зустрічаються в шкільних підручниках, проте з якими варто, на наш погляд, познайомити учнів, особливо тих старшокласників, котрі складатимуть ЗНО з математики або беруть участь в різних математичних конкурсах чи олімпіадах. Наприклад, опишемо способи задання площини в координатному просторі (для визначень і тверджень ми використовуємо інформацію із посібників [14, 15]).

Нагадаємо, що довільну площину в просторі можна однозначно задати за допомогою головного (тобто перпендикулярного до неї) вектора з координатами (A, B, C) і точкою з координатами $(x_0,\ y_0,\ z_0)$. Рівняння такої площини має вигляд

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + \ C(z - \ z_0) = 0,$$

або

$$Ax + By + Cz + D = 0, \text{де } D = -(Ax_0 + By_0 + C\ z_0).$$

Навпаки, будь-яке рівняння першого степеня $Ax + By + Cz + D = 0$ задає у координатному просторі одну й тільки одну площину, котра перпендикулярна до вектора з координатами (A, B, C).

При цьому, оскільки розташування деякої площини в просторі однозначно визначається заданням трьох точок, котрі не лежать на одній прямій, то, якщо деяка площина перетинає осі координат в точках $M_1(a; 0; 0)$, $M_2(0; b; 0)$, $M_3(0; 0; c)$ та не проходить через початок координат, то отримаємо рівняння вигляду $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ – рівняння площини у відрізках, яке досить зручно використовувати при розв'язуванні різних задач за допомогою координатного методу.

Крім того, з учнями варто досягнути чіткого знання формули віддалі між двома точками – наприклад, у просторі віддаль між точками $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$ та $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$ обчислюється за формулою:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Звідси отримуємо рівня сфери радіуса R з центром у точці $O(a, b, c)$:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

та рівняння сфери з центром в початку координат: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Зауважимо, що при розв’язуванні різних геометричних задач на обчислення довжин відрізків, знаходження величин кутів та доведення геометрричних нерівностей досить ефективним засобом є використання скалярного множення векторів. Наприклад, для знаходження довжини відрізка враховуємо, що $|AB| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}$, а для знаходження величини кута між двома векторами використовуємо формулу $\cos\angle ABC = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}$. Це означає, що зручно обчислювати віддалі між двома точками (як довжину певного вектора з початком в одній з них, а кінцем – в іншій), площі та інші метричні характеристики геометричних фігур, котрі фігурують в задачі. Крім того, для доведення перпендикулярності прямих чи прямих і площин зручним є використання ознаки перпендикулярності двох ненульових векторів:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Завдання на використання цих та інших формул часто зустрічаються в тестах ЗНО з математики [16, 17]. Саме з цього сайту та зі збірників [18-19] взято умови цікавих завдань, розв’язування яких запропоновано далі.

2.2. Приклади розв’язування алгебраїчних задач за допомогою координатно-векторного методу

Як вже зазначалося раніше, розв'язування багатьох геометричних задач можна спростити за допомогою зведення їх до певного алгебраїчного співвідношення. А для цього координатно-векторний метод є надзвичайно зручним, оскільки дає зручний та комфортний спосіб алгебризації геометричної задачі.

При розв'язуванні задач цим методом чітко визначається початок та алгоритм дій. Графічна ілюстрація часто спрощує та полегшує проведення аналізу умови задачі та складання потрібних співвідношень між відомими та невідомими величинами, допомагає знайти кілька способів розв'язування. При цьому учні розширюють власні знання щодо різних функцій та їх графіків, покращується графічна культура учнів, удосконалюється їх особиста техніка розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем; реалізовуються внутрішньопредметні (алгебра й геометрія) та міжпредметні (математика, фізика, хімія, географія тощо) зв'язки.

Вказаний метод варто також використовувати для розв’язування завдань підвищеної складності. Особливо в цьому сенсі вирізняються деякі рівняння та системи рівнянь, розв’язувати які аналітично дуже складно, але ввівши певну систему координат та використавши геометричні міркування, ми значно спрощуємо цей процес. Головне завдання такого методу – за поданим співвідношеннями визначають геометричну фігуру, обчислюють потрібні елементи та роблять висновок.

Цими методами дуже зручно розв'язувати задачі на знаходження геометричних місць точок та на доведення залежностей між лінійними елементами деяких геометричних фігур. Розглянемо приклади.

Задача 2.1. *Довести, що для довільних дійсних чисел* x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 *виконується нерівність:*

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \le \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$$

Доведення. Аналізуючи вигляд заданої нерівності, звертаємо увагу учнів на вирази, присутні у заданій нерівності, котрі нагадують формулу відстані між двома точками. Так і робимо – вираз вигляду $\sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ розглянемо як довжину відрізка AB, де $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$. Аналогічно, вирази $\sqrt{\left(x_3 - x_2\right)^2 + (y_3 - y_2)^2}$ та $\sqrt{\left(x_3 - x_1\right)^2 + (y_3 - y_1)^2}$ розглядаємо як довжини відрізків BC та AC, відповідно, якщо вибрати $C(x_3; y_3)$. Тоді задана в умові нерівність записується у вигляді $|AB| + |BC| \le |AC|$ – це відома геометрична «нерівність трикутника» для довільних трьох точок, котра випливає з аксіоми вимірювання відрізків.►

Задача 2.2. *Для довільних значень* $x, y \in \mathbb{R}$, *знайти найменше значення виразу* $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$.

Розв'язання. Аналізуючи з учнями 9 класу такий вираз, помічаємо, що його можна розглядати як суму віддалей від довільної точки $A(x; y)$ до точок $B(0; 1)$ та $C(2; 0)$. Тоді, враховуючи геометричне трактування, сума довжин відрізків $|AB| + |AC|$ буде найменшою, якщо точка A буде належати відрізку BC. При цьому її найменше значення буде дорівнювати довжині відрізка BC, тобто $\sqrt{(2-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{5}$.►

Задача 2.3. *З'ясувати, чи має додатні корені система рівнянь*

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4, \\ x^2 + xz + z^2 = 9, \\ y^2 + yz + z^2 = 36? \end{cases}$$

Розв'язання. Вказану систему варто розглядати з учнями 9 чи старше класу, які добре засвоїли теорему косинусів. Зокрема, аналізуючи рівняння даної системи, звертаємо увагу на умову додатності коренів рівняння, тобто невідомі в кожному рівнянні системи можна вважати, наприклад, довжинами сторін деякого трикутника. Після цього звертаємо увагу увагу учнів на те, що кожне із даних рівнянь – це запис теореми косинусів для деякого трикутника. А саме, перше рівняння – для трикутника зі сторонами $x, y, 2$ та кутом $120°$ між сторонами x та y. Друге рівняння – це теорема косинусів для трикутника зі сторонами x, z та 3 і кутом $120°$ між його сторонами x та z, а третє — для трикутника, сторони якого $y, z, 6$ й кут $120°$ між сторонами y та z.

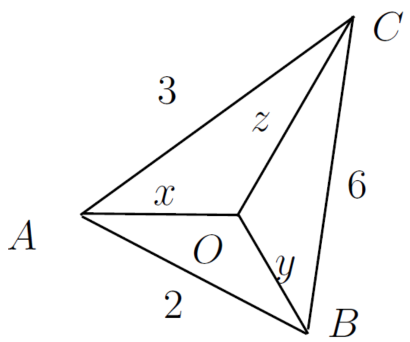


Рис. 2.1.

З'ясувавши вказані співвідношення, помічаємо, що сума $120° + 120° + 120° = 360°$, тобто ці трикутники можна зобразити на площині так, щоб вони мали спільну вершину (рис. 2.1). Тоді маємо, що $|AB| = 2$, $|AC| = 3$, $|BC| = 6$. Проте трикутника ABC з такими сторонами не існує (бо найдовша зі сторін не може перевищувати суму довжин двох інших). А тому задана система не має додатних коренів. ►

Зазначимо, що розв'язуваня вказаної системи суто алгебраїчними методами (наприклад, за допомогою методу підстановки) є досить довгим та складним. А оскільки в завданні ставилося питання лише про існування додатних коренів, то вказаний координатний спосіб є дуже зручним.

Задача 2.4. *Обчислити вираз* $M = 2\sqrt{3}xy + 2xz + \sqrt{2}yz$, *якщо додатні дійсні числа* $x > 0, y > 0$ *та* $z > 0$ *задовольняють систему рівнянь:*

$$\begin{cases} x^2 + \frac{z^2}{3} + \sqrt{\frac{2}{3}}xz = 64, \\ \frac{y^2}{2} + \frac{yz}{\sqrt{3}} + \frac{z^2}{3} = 225, \\ x^2 + \frac{y^2}{2} = 289. \end{cases}$$

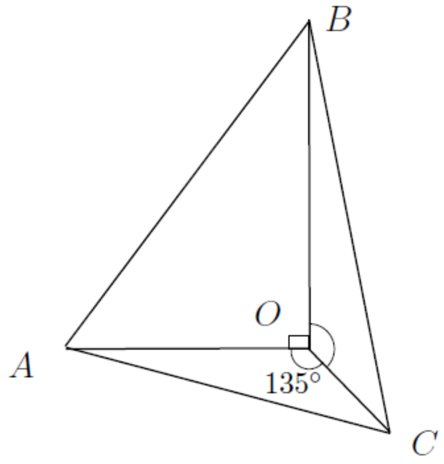


Рис. 2.2.

Задану систему зручно розглядати з учнями одразу після попереднього завдання – так вони закріплять отримані навички.

Розв'язання. Звертаємо увагу учнів на перші два рівняння системи, у яких добутки змінних мають «цікаві» коефіцієнти, які учні зустрічали в таблиці значень тригонометричних функцій (зокрема, $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos 90° = 0$). Тому зображаємо відрізки OA, OB та OC так, щоб $\angle AOC = \angle BOC = 135°$, $\angle AOB = 90°$ (рис.2.2), вважаючи, що $|OA| = x$, $|OB| = \frac{y}{\sqrt{2}}, |OC| = \frac{z}{\sqrt{3}}$.

Тоді кожне рівняння даної системи — це запис теореми косинусів для кожного з трикутників AOC, BOC та AOB. Звідси отримуємо, що $|AC| = 8$, $|BC| = 15, |AB| = 17$. Таким чином, помічаємо, що $\triangle ABC$ прямокутний з гіпотенузою AB. І тому для обчислення виразу M знаходимо добутки xy, xz, yz, використавши величини площ трикутників AOB, AOC, BOC:

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}x\frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{xy}{2\sqrt{2}}; \text{ звідки } xy = 2\sqrt{2}\,S_{\Delta AOB};$$

$$S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2}x\frac{z}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{xz}{2\sqrt{6}}; \text{ звідки } xz = 2\sqrt{6}\,S_{\Delta AOC};$$

$$S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2} x \frac{y}{\sqrt{2}} \frac{z}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{yz}{4\sqrt{3}}; \quad \text{звідки } yz = 4\sqrt{3}\, S_{\Delta BOC}.$$

Отже,

$$M = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2}\, S_{\Delta AOB} + 2 \cdot 2\sqrt{6}\, S_{\Delta AOC} + \sqrt{2} \cdot 4\sqrt{3}\, S_{\Delta BOC} =$$

$$= 4\sqrt{6}(S_{\Delta AOB} + S_{\Delta AOC} + S_{\Delta BOC}) = 4\sqrt{6} \cdot S_{\Delta ABC}.$$

А враховуючи, що $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 15 = 60$, отримуємо, що

$$M = 4\sqrt{6} \cdot 60 = 240\sqrt{6}. ►$$

Задача 2.5. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} x^6 + y^4 + z^2 = 1, \\ x^3 + 2y^2 + 3z = 4. \end{cases}$$

Розв'язання. Придивившись до заданої чистеми, учні помічають, що для її розв'язування можна використати векторний метод. Для цього розглядаємо вектори $\vec{a} = (x^3; y^2; z)$, $\vec{b} = (1; 2; 3)$. Тоді з першого рівняння отримуємо, що $|\vec{a}| = 1$, а ліва частина другого рівняння є скалярним добутком розглянутих векторів. Проте, обчислюючи довжину вектора $|\vec{b}| = \sqrt{14}$ отримуємо, що скалярний добуток векторів більший від добутку їх довжин, що неможливо, оскільки $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ та $|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})| \leq 1$. Отже, задана система не має розв'язку. ►

Розглянувши наведені приклади, бачимо, що геометричні міркування значно спрощують розв'язування досить складних вправ і дозволяють отримувати бажаний результат навіть у випадках, коли інші методи не спрацьовують. Даний методичний підхід можна використати при підготовці учнів до олімпіад з математики та на уроках в класах з поглибленим вивченням математики.

2.3. Приклади розв'язування тригонометричних задач за допомогою координатно-векторного методу

Окремі тригонометричні задачі легко розв'язуються за допомогою геометричних засобів. Наведемо приклади таких задач.

Задача 2.6. *Довести правильність рівності:*

$$sin\, 9° + sin\, 49° + sin\, 89° + \cdots + sin\, 289° + sin\, 329° = 0.$$

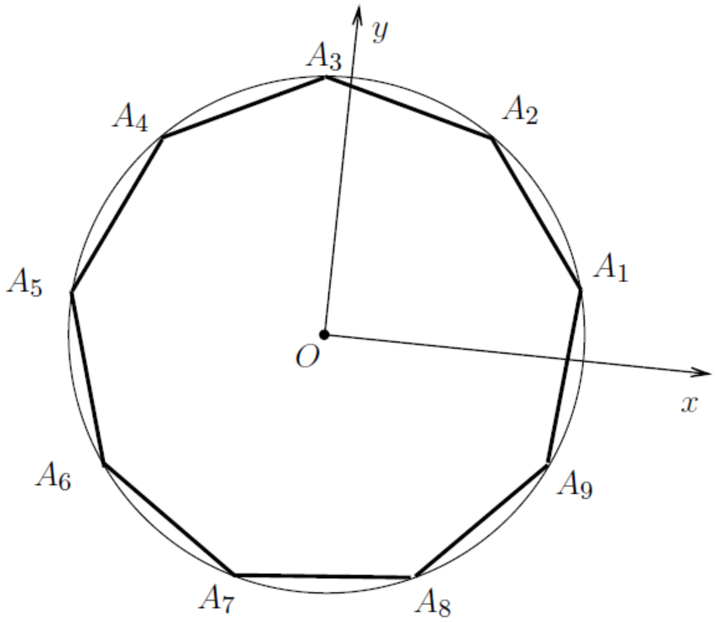


Рис. 2.3.

Доведення. Аналізуючи умову даної задачі, помічаємо, що кути у заданій рівності відрізняються на одну й ту ж величину – $40°$, що становить дев'яту частину повного оберта, тобто від 360°. Це спостереження дозволяє запропонувати учням розглянути правильний дев'ятикутник $A_1A_2...A_9$, вписаний у коло одиничного радіуса з центром у деякій точці $O.$ Тоді домовимося позначити вектори $\overrightarrow{OA_k} = \overrightarrow{a_k}$ $(k = 1,2,...,9)$. Тоді

$$\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \cdots + \overrightarrow{a_9} = \vec{0}, \qquad (2.1)$$

оскільки для довільного правильного n-кутника $A_1A_2...A_n$ сума усіх радіус-векторів $\overrightarrow{a_\iota} = \overrightarrow{OA_\iota}$ його вершин дорівнює нульовому вектору.

Залишається вибрати систему координат так, щоб задача звелася до простого розв'язування. Для даного випадку виберемо початок системи координат у точці O (в центрі правильного дев'ятикутника) та вісь Ox направимо так, щоб вектор $\overrightarrow{a_1}$ мав у цій системі координати $\overrightarrow{a_1} = (\cos 49°; \sin 49°)$. Тоді можна записати, що

$$\overrightarrow{a_\iota} = (\cos 9° + 40° \cdot i;\ \sin 9° + 40° \cdot i)$$

для усіх $i = 1,2,...,9$. А тому, враховуючи рівність (2.1), отримуємо, що сума усіх абсцис (відповідно, сума всіх ординат) векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \dots, \overrightarrow{a_9}$ дорівнює нулеві, тобто

$$\cos 9° + \cos 49° + \cos 89° + \cdots + \cos 289° + \cos 329° = 0,$$

та

$$\sin 9° + \sin 49° + \sin 89° + \cdots + \sin 289° + \sin 329° = 0.▶$$

Задача 2.7. *Відомо, що* $sin\,x + sin\,y + sin\,z = 0, cos\,x + cos\,y + cos\,z = 0.$ *Довести, що*

$$\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 0,$$

$$\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0$$

Доведення. Застосовуємо векторний спосіб. Для цього розглянемо вектори $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$, задані в прямокутній декартовій системі координат наступним чином:

$$\overrightarrow{b_1} = (\sin x\,; \cos x), \overrightarrow{b_2} = (\sin y\,; \cos y), \overrightarrow{b_3} = (\sin z\,; \cos z).$$

Тоді з умови задачі випливає, що $\overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{b_2} + \overrightarrow{b_3} = \vec{0}$, а це означає, що з цих векторів можна побудувати трикутник. Для цього кінець вектора $\overrightarrow{b_1}$ сумістимо з початком вектора $\overrightarrow{b_2}$, кінець вектора $\overrightarrow{b_2}$ – з початком $\overrightarrow{b_3}$, а кінець вектора $\overrightarrow{b_3}$ – з початком $\overrightarrow{b_1}$, причому цей трикутник буде рівностороннім з стороною 1, бо

$$\left|\overrightarrow{b_1}\right| = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = 1, \left|\overrightarrow{b_2}\right| = \sqrt{\sin^2 y + \cos^2 y} = 1,$$

$$\left|\overrightarrow{b_3}\right| = \sqrt{\sin^2 z + \cos^2 z} = 1.$$

Кути між векторами $\overrightarrow{b_i}$ та $\overrightarrow{b_j}$ $(i, j\ =\ 1,2,3;\ i\ \neq\ j)$ дорівнюватимуть по $180° - 60° = 120°$ (при цьому звертаємо увагу учнів, що внутрішній кут рівностороннього трикутника дорівнює $60°$, а для знаходження кута між векторами їх потрібно розташувати так, щоб вони мали спільний початок – саме тому потрібно знаходити кут між векторами як зовнішній кут трикутника).

Отже, розглядаючи далі вектори

$$\overrightarrow{c_1} = (\sin 2x\,; \cos 2x), \overrightarrow{c_2} = (\sin 2y\,; \cos 2y), \overrightarrow{c_3} = (\sin 2z\,; \cos 2z),$$

отримуємо, що $|\overrightarrow{c_1}| = |\overrightarrow{c_2}| = |\overrightarrow{c_3}| = 1$ та

$$\left(\widehat{\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{c_2}, \overrightarrow{c_3}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{c_3}, \overrightarrow{c_1}}\right) = 120°.$$

Таким чином, ми маємо три одиничні вектори, кути між якими дорівнюють по $120°$, тобто їх можна розташувати аналогічно до векторів $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$ (послідовно по сторонам рівносторноннього трикутника), тому їх сума теж дорівнює нулеві, звідки випливає потрібне.►

Задача 2.8. *Доведемо, що для довільних* $x, y, z \in \mathbb{R}$*:*

$$|\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z + \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z| \leq 1.$$

Доведення. Проаналізувавши з учнями задану нерівність, звертаємо увагу, на те, що ми можемо розглянути вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$, задані наступним чином:

$$\vec{a} = (\sin x \cdot \sin y\, ; \cos x \cdot \cos y), \quad \vec{b} = (\sin z\, ; \cos z).$$

Тоді їх скалярний добуток $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z + \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z$. Звідси, враховуючи, що $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \leq |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi \leq |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \leq 1$, де φ - кут між цими векторами, тобто отримуємо потрібне.►

Задача 2.9. *Довести, що якщо для деяких дійсних чисел* a, b, c, d *виконуються умови* $a^2 + b^2 = 1$ *та* $c^2 + d^2 = 1$*, то* $|ac - bd| \leq 1$.

Доведення. Розглянемо два допоміжні вектори $\vec{x} = (a; b)$, $\vec{y} = (c; -d)$. Нескладно перевірити, що, враховуючи умову задачі, $|\vec{x}| = 1$ та $|\vec{y}| = 1$. А тому із того, що модуль скалярного добутку векторів не перевищує добуток їх модулів, отримуємо, що $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|$, тобто $|ac - bd| \leq 1$.►

Задача 2.10. *Довести, що якщо для деяких дійсних чисел* x, y *виконується рівність* $x^2 + y^2 = 1$*, то тоді* $|x + y| \leq \sqrt{2}$.

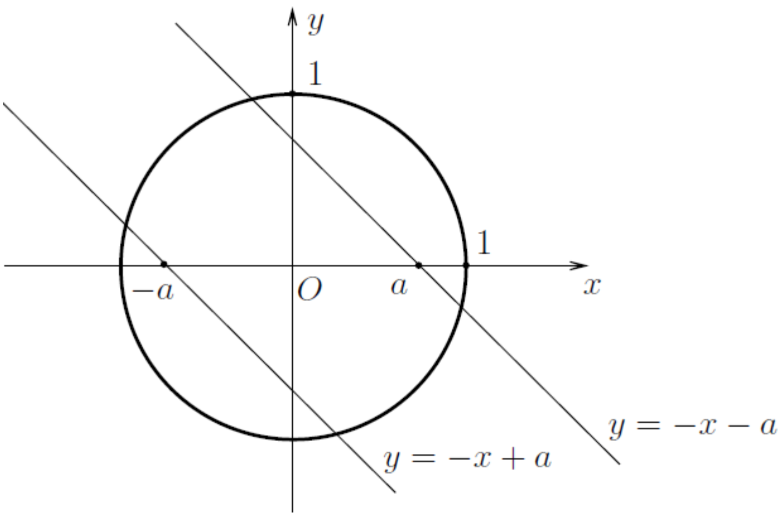


Рис. 2.4.

Доведення. Для доведення потрібної нерівності скористаємося координатним методом. Пригадуємо з учнями, що на координатній площині графіком рівняння $x^2 + y^2 = 1$ є коло з центром у початку координат та радіусом 1 (рис. 2.4).

Тому для доведення потрібної нерівності знайдемо максимум виразу $a = |x + y|$. Для цього пригадуємо з учнями, що на координатній площині цей вираз визначає дві прямі: $y = -x + a$ та $y = -x - a$, котрі можуть мати (або не мати) спільні точки з колом.

Згідно з умовою задачі, змінні x, y повинні задовольняли умову $x^2 + y^2 = 1$, тобто прямі повинні мати з колом щонайменше одну спільну точку. Звідси стає зрозумілим, що максимальне значення a буде досягатися у випадку дотику прямих до цього кола. Нескладно підрахувати, що в такому випадку значення a повинне дорівнювати радіусу цього кола, тобто $a = \sqrt{2}$. Звідси й отримуємо, що $|x + y| \leq \sqrt{2}$.▶

Задача 2.11. *Знайти всі розв'язки системи:*

$$\begin{cases} \sqrt{(x-5)^2 + (y-4)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y-8)^2} = 5, \\ 2xy - 3y = 24. \end{cases}$$

Розв'язання. Якщо розв'язувати дану систему рівнянь звичайним методом підстановки, то, очевидно, отримаємо дещо складні перетворення ірраціонального рівняння з дробово-раціональними виразами та двома квадратними коренями. Наприклад, у випадку, якщо розв'язування цієї системи відбувається з учнями, котрі вивчають математику на профільному або поглибеному рівні, варто все-таки спробувати з ними застосувати й чисто алгебраїчний метод: виражаємо з другого рівняння $x = \frac{24+3y}{2y} = \frac{8}{y} + \frac{3}{2}$ та підставляємо в перше рівняння. Далі можна розв'язати з учнями отримане рівняння до кінця або запропонувати їм виконати це вдома самостійно з подальшою перевіркою.

Проте, враховуючи тему даної дипломної роботи, наведемо ще один спосіб, який (як показує наш доосвід) для учнів є надзвичайно цікавим, зрозумілим та набагато простішим.

Для цього знову використаємо координатно-векторний метод, для чого пропонуємо учням ввести звичайним чином прямокутну декартову систему координат, а в цій системі розглядаємо точки $A(x; y), B(5,4), C(2; 8)$. Тоді

$$\sqrt{(x-5)^2 + (y-4)^2} = |AB|, \quad \sqrt{(x-2)^2 + (y-8)^2} = |AC|$$

та, враховуючи що $|BC| = \sqrt{(5-2)^2 + (4-8)^2} = 5$, помічаємо, що перше рівняння даної системи записується у вигляді $|AB| + |AC| = |BC|$. Враховуючи знання про розташування трьох точок на площині, робимо висновок, що точка A є внутрішньою точкою відрізка BC (належить цьому відрізку). А це означає, що точки A, B, C лежать на одній прямій, тобто вектори $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ колінеарні, тобто їх координати пропорційні. Звідси маємо систему:

$$\begin{cases} \dfrac{x-5}{2-5} = \dfrac{y-4}{8-4}, \\ 2 \le x \le 5; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x + 3y = 32, \\ 2 \le x \le 5. \end{cases}$$

Друга нерівність в отриманій системі означає, що точка A є внутрішньою точкою відрізка BC, тобто її абсциса знаходиться між абсцисами точок B та C.

Отже, задана в умові початкова система, рівносильна набагато простішій системі

$$\begin{cases} 4x + 3y = 32, \\ 2xy - 3y = 24, \\ 2 \le x \le 5. \end{cases}$$

Розв'язуючи її, маємо $x = \frac{7}{2}$, $y = 6$.▶

Задача 2.12. *Знайдемо найменше значення виразу*

$$\sqrt{x^2 + (y-4)^2} + \sqrt{(x+3)^2 + y^2}.$$

Розв'язання. Знову розглядаємо прямокутну декартову систему координат, у якій даний вираз задає суму відстаней від точки $A(x; y)$ до точок $B(0; 4)$ й $C(-3; 0)$. Зрозуміло, що геометрично сума $|AB| + |AC|$ буде найменшою у випадку, коли точка A буде належати відрізку BC. А найменше значення такої суми буде дорівнювати довжині відрізка BC, тобто

$$\sqrt{(-3-0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{25}.$$▶

2.4. Приклади застосування координатно-векторного методу до розв'язування стереометричних задач

У шкільному курсі математики координатний та векторний методи використовуються для роз'язування геометричних задач досить мало. Наприклад, згідно з програмою [11], на вивчення теми «Вектори і координати» в 11 класі (навчання рівня стандарт) заплановано всього 10 годин, тому використовується для досить легких та типових задач. Саме тому ми в роботі розглядаємо завдання дещо складніші, котрі доречно було би розглядати на факультативних заняттях, заняттях гуртка чи заняттях підготовки до ЗНО для поглиблення знань учнів про даний метод. При цьому щоразу радимо звертати учнів на переваги та (або) недоліки вказаного методу в порівнянні з іншими методами, котрі, як правило, вимагають знання великої кількості теоретичної інформації різного рівня складності [6,7].

Задача 2.13. *Нехай $SABCD$ – піраміда, основою якої паралелограм $ABCD$. Нехай в цій піраміді побудовано площину, котра перетинає бічні ребра SA, SB, SC та SD піраміди, відповідно, в точках K, L, M, N так, що $SK = \frac{1}{k}SA$, $SL = \frac{1}{l}SB$, $SM = \frac{1}{m}SC$, $SN = \frac{1}{n}SD$. Знайти співвідношення між числами k, l, m, n.*

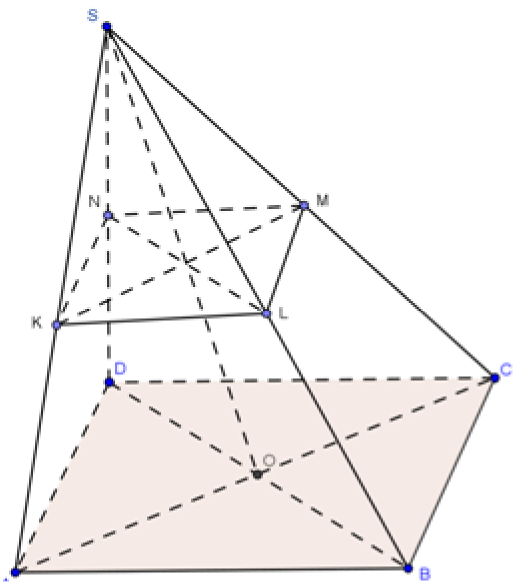


Рис. 2.5.

Розв'язання. Для знаходження потрібної залежності між числами k, l, m, n, скористаємося векторами. А саме, скористаємося умовою належності чотирьох точок M, N, K і L, одній площині [14]:

$$\overrightarrow{MN} = \alpha \cdot \overrightarrow{MK} + \beta \cdot \overrightarrow{ML}. \qquad (2.1)$$

Тому подамо кожен з векторів, котрий входить у рівність (2.1) у вигляді різниці двох векторів, котрі мають спільний початок в точці S (див. рис. 2.5). Матимемо:

$$\overrightarrow{SN} - \overrightarrow{SM} = \alpha \cdot \left(\overrightarrow{SK} - \overrightarrow{SM}\right) + \beta \cdot \left(\overrightarrow{SL} - \overrightarrow{SM}\right).$$

Звідси $\overrightarrow{SN} = \alpha \cdot \overrightarrow{SK} + \beta \cdot \overrightarrow{SL} + \gamma \cdot \overrightarrow{SM}$, де $\gamma = 1 - \alpha - \beta$. А тому, враховуючи умову задачі, попередню рівність можемо переписати наступним чином:

$$\frac{1}{n}\overrightarrow{SN} = \frac{\alpha}{k} \cdot \overrightarrow{SK} + \frac{\beta}{l} \cdot \overrightarrow{SB} + \frac{\gamma}{m} \cdot \overrightarrow{SC}.$$

Нехай тепер точка O – перетин діагоналей паралелограма $ABCD$. Тоді

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO},$$

$$\frac{1}{n}\overrightarrow{SD} = \frac{1}{n}\cdot\left(\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}\right).$$

Отже, вектор $\frac{1}{n}\overrightarrow{SD}$ можна двома різними способами виразити через некомпланарні вектори $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}$ та $\overrightarrow{SC}$. А тому, враховуючи єдиність такого розкладу, отримуємо співвідношення: $\frac{\alpha}{k} = \frac{1}{n}, \frac{\beta}{l} = \frac{1}{n}, \frac{\gamma}{m} = \frac{1}{n}$. Звідси, враховуючи, що $\alpha + \beta + \gamma = 1$, знаходимо, що $\frac{k}{n} - \frac{l}{n} + \frac{m}{n} = 1$, тобто

$$k + m = l + n$$

– шукане співвідношення між числами k, l, m, n.►

Наведений приклад спонукає учнів аналізувати умови розташування точок простору, щоб ці точки лежали в одній площині. Очевидно, що розв'язування цієї задачі чисто геометричним методом є досить складним та може виявиться незрозумілим для більшості учнів. А от векторний спосіб – досить нескладний для їх сприйняття.

Зазначимо, що наприкінці розв'язування варто розглянути з учнями конкретні значення для k, l, m, n, враховуючи виведене співвідношення

$$k + m = l + n.$$

Наприклад, нехай площина проходить через вершину A заданої в задачі 2.1 піраміди та нехай її ребра SB та SD в точках L та N так, щоб $\overrightarrow{SL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$. Тоді $k = 1$, $l = 2$, $n = 3$, тобто $m = l + n - k = 2 + 3 - 1 = 4$, звідки $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$. Знаючи ці співвідношення, нескладно побудувати переріз піраміди $SABCD$ площиною, яка проходить через точки A, L, M, N.

Задача 2.13 (побудова й обчислення довжини спільного перпендикуляра) [20, с. 22]. *У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро якого дорівнює a, знайти віддаль між прямими AB_1 та BC_1.*

Розв'язання. Скористаємося векторним способом розв'язування. Для цього виберемо вектори $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{BB_1}$ в ролі базисних векторів (для спрощення обчислень можна вважати їх довжини рівними 1) та, враховуючи векторні співвідношення, виразимо через них всі інші вектори, котрі нам будуть потрібні при розв'язуванні.

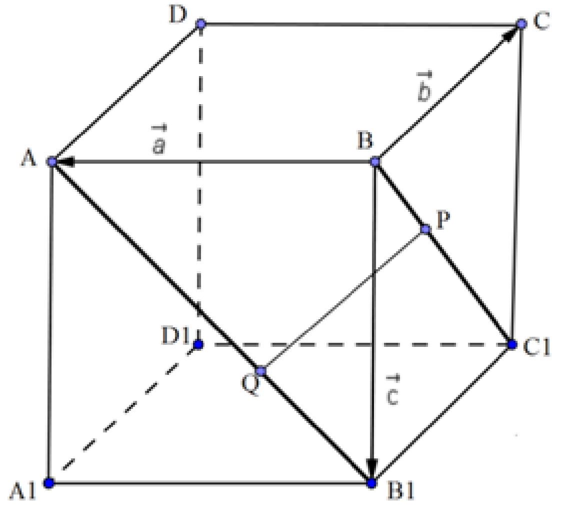


Рис. 2.6.

Розглянемо P та Q — деякі довільні точки прямих AB_1 та BC_1, між якими потрібно знайти віддаль (див. рис. 2.6). Тоді існують такі дійсні числа x, y що

$$\overrightarrow{BP} = x \cdot \overrightarrow{BC_1} = x \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right),$$

$$\overrightarrow{AQ} = y \cdot \overrightarrow{AB_1} = y \cdot (\vec{c} - \vec{a}).$$

Тоді маємо, що вектор

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AQ} =$$

$$= -x \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) + \vec{a} + y \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = (1 - y)\vec{a} - x\vec{b} + (y - x)\vec{c}.$$

Оскільки віддаль між мимобіжними прямими – це довжина спільного перпендикуляра, то знайдемо значення для величин x, y так, щоб вектор $\overrightarrow{PQ}$ був перпендикулярним до кожного з векторів $\overrightarrow{BC_1}$ та $\overrightarrow{AB_1}$. Тобто потрібно, щоб скалярні добутки відповідних векторів дорівнювали нулю. Отже, маємо:

$$\begin{cases} \left((1 - y)\vec{a} - x\vec{b} + (y - x)\vec{c}\right) \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = 0, \\ \left((1 - y)\vec{a} - x\vec{b} + (y - x)\vec{c}\right) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0. \end{cases}$$

Оскільки вектори вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, згідно з вибором, утворюють базис, тобто є попарно перпендикулярними та одиничними, то із останньої системи, після відкривання дужок та збору подібних, отримаємо:

$$\begin{cases} 2x - y = 0, \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}.$$

Отже, для побудови точок P та Q шуканого спільного перпендикуляра використовуємо знайдені значення x, y, тобто

$$\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{BC_1}, \quad \overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB_1}.$$

Далі, враховуючи, що $\overrightarrow{PQ} = \left(1 - \frac{2}{3}\right)\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)\vec{c} = \frac{1}{3}\left(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right)$, то

$$|PQ| = \sqrt{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ}} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\left(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right)\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\left(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right)\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \frac{1}{\sqrt{3}}|\vec{a}|,$$

тобто, враховуючи, що довжина сторони куба, згідно з умовою, дорівнює a, отримуємо, що $|PQ| = \frac{a}{\sqrt{3}}$ — шукана довжина спільного перпендикуляра до двох мимобіжних прямих AB_1 та BC_1.►

Задача 2.14. (Умова компланарності трьох векторів). *Нехай у паралелепіпеді* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *точка* М *– середина діагоналі* A_1C_1 *грані* $A_1B_1C_1D_1$, *а точка* K *— середина ребра* BB_1. *Довести, що прямі* A_1B_1, KM *та* BC_1 *паралельні до деякої площини.*

Розв'язання. Насамперед звертаємо увагу учнів, що в умові задачі мова йде про паралелепіпед і не вказується його вид. Тобто, в загальному випадку, цей паралелепіпед не обов'язково є прямокутним. А це означає, що під час розв'язування задачі ми можемо користуватися тільки умовами паралельності деяких об'єктів, зокрема векторів.

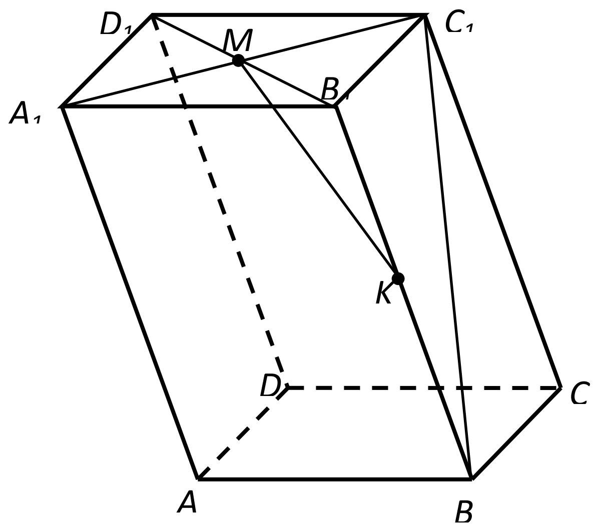


Рис. 2.7.

Розв'язання. Насамперед звертаємо увагу учнів, що в умові задачі мова йде про паралелепіпед і не вказується його вид. Тобто, в загальному випадку, цей паралелепіпед не обов'язково є прямокутним. А це означає, що під час розв'язування задачі ми можемо користуватися тільки умовами паралельності деяких об'єктів, зокрема векторів.

Отже, розглянемо три вектори зі спільним початком (рис. 2.7): $\overrightarrow{B_1A_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{B_1C_1} = \vec{b}$, $\overrightarrow{B_1B} = \vec{c}$. Тоді можемо вважати ці три некомпланарні вектори базисом. А це означає, що через них будемо виражати інші вектори, зокрема:

$$\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{B_1C_1} - \overrightarrow{B_1B} = \vec{b} - \vec{c},$$

$$\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{BC_1} = \vec{a} + (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c},$$

$$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{B_1M} - \overrightarrow{B_1K} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) - \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{BC_1}),$$

тобто вектор $\overrightarrow{KM}$ виражається через вектори $\overrightarrow{B_1A_1}$ та $\overrightarrow{BC_1}$, тобто всі три вони лежать в одній площині або паралельні до деякої площини (є компланарними). А це означає, що до цієї деякої площини паралельними є також прямі A_1B_1, KM та BC_1, оскільки вектори $\overrightarrow{B_1A_1}$, $\overrightarrow{KM}$ та $\overrightarrow{BC_1}$ є для цих прямих, відповідно, напрямними. Задачу доведено.►

Задача 2.15. *На діагоналях AB_1 та BC_1 граней AA_1B_1B і BB_1C_1C паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вибрано точки H та M відповідно так, щоб відрізки MH і A_1C були паралельними. Знайти відношення довжин цих відрізків.*

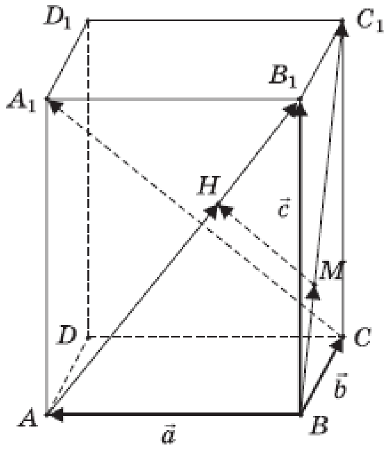


Рис. 2.8.

Розв'язання. Скористаємося векторним методом. Для цього введемо базисні вектори: $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{BB_1}=\vec{c}$ та розкладемо вектори $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$ та $\overrightarrow{CA_1}$ за вибраним базисом. Будемо мати:

$$\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{BB_1}-\overrightarrow{BA}=\vec{c}-\vec{a},\quad \overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1}=\vec{b}+\vec{c},$$

$$\overrightarrow{CA_1}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA_1}=-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}.$$

Враховуючи, що точка H належить діагоналі AB_1, то вектори $\overrightarrow{AH}$ та $\overrightarrow{AB_1}$ колінеарні, тобто існує таке дійсне значення x, що $\overrightarrow{AH}=x\cdot\overrightarrow{AB_1}=x\cdot\left(\vec{c}-\vec{a}\right)$. Крім того, оскільки вектори $\overrightarrow{BM}$ та $\overrightarrow{BC_1}$ теж колінеарні, то існує таке дійсне число y, що $\overrightarrow{BM}=y\cdot\overrightarrow{BC_1}=y\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$. Отже,

$$\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AH}=-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AH}=-y\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)+\vec{a}+x\cdot\left(\vec{c}-\vec{a}\right)=$$

$$=(1-x)\vec{a}+(-y)\vec{b}+(x-y)\vec{c}$$

— зображення вектора $\overrightarrow{MH}$ через базисні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Згідно з умовою, пряма MH паралельна до прямої A_1C. Отже існує таке дійсне число t, що $\overrightarrow{MH}=t\cdot\overrightarrow{CA_1}$, тобто виконується така рівність:

$$(1-x)\vec{a}+(-y)\vec{b}+(x-y)\vec{c}=t\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\right),$$

$$(1-x-t)\vec{a}+(t-y)\vec{b}+(x-y-t)\vec{c}=\vec{0}.$$

Із останньої умови, враховуючи єдність розкладу довільного вектора по базису, отримуємо, що всі множники біля базисних елементів у останній рівності дорівнюють нулю, тобто маємо систему рівностей

$$\begin{cases}1-x-t=0,\\ t-y=0,\\ x-y-t=0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{2}{3},\\ y=\frac{1}{3},\\ t=\frac{1}{3}.\end{cases}$$

Отже, $\overrightarrow{MH}=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{CA_1}$, звідки отримуємо, що $MH:CA_1=1:3$ — шукане відношення відрізків.▶

Розглянемо кілька наступних задач, в яких можна ефективно використовувати скалярне множення векторів. Зазначимо, що використання скалярного добутку векторів потребує знання кутів між цими векторами або їх координат. Тому його не варто використовувати у випадку довільних многогранників (наприклад, похилого паралелепіпеда), для якого кутів між ребрами та гранями ми не знаємо.

Задача 2.16. *Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб з ребром 6. Знайти в ньому віддаль від вершини A_1 до площини BC_1D та кут між діагоналлю BA_1 грані AA_1B_1B й площиною BC_1D.*

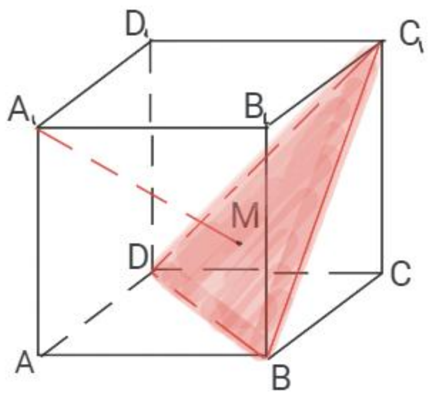


Рис. 2.9.

Розв'язання. Нагадуємо з учнями, що віддаль від точки до площини – це довжина перпендикуляра, опущеного з цієї точки на площину, то побудуємо перпендикуляр A_1M з точки A_1 на площину BC_1D (рис. 2.9). Для чисто геометрричного способу розв'язування цієї задачі обов'язково потрібно обґрунтувати розташування точки M, а от координатно-векторний метод цього не потребує – досить знати про те, що точка M належить площині BC_1D. Отже, шукаємо довжину відрізка A_1M .

Для цього позначимо $\overrightarrow{BD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC_1}=\vec{b}$ — базис на площині BC_1D та позначимо $\overrightarrow{BA_1}=\vec{p}$ — вектор, який не лежить в площині BC_1D. Враховуючи, що $\overrightarrow{A_1M}=\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA_1}$, виразимо вектори $\overrightarrow{BM}$ та $\overrightarrow{A_1M}$ через вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{p}$ вибраного базису. Оскільки вектор $\overrightarrow{BM}$ компланарний з векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, то існують такі дійсні числа x, y, що $\overrightarrow{BM}=x\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}$. Тоді $\overrightarrow{A_1M}=x\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}-\vec{p}$.

Оскільки відрізок A_1M перпендикулярний до площини BC_1D, то він перпендикулярний і до прямих BC_1 та BD, котрі лежать в цій площині. Тому $\overrightarrow{A_1M}\perp\overrightarrow{BC_1}$ та $\overrightarrow{A_1M}\perp\overrightarrow{BD}$, тобто $\overrightarrow{A_1M}\perp\vec{b}$ та $\overrightarrow{A_1M}\perp\vec{a}$. Отже, коефіцієнти x, y в розкладі $\overrightarrow{A_1M}=x\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}-\vec{p}$ можна знайти з умови:

$$\begin{cases}\overrightarrow{A_1M}\perp\vec{a},\\ \overrightarrow{A_1M}\perp\vec{b},\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{A_1M}\cdot\vec{a}=0,\\ \overrightarrow{A_1M}\cdot\vec{b}=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}-\vec{p}\right)\cdot\vec{a}=0,\\ \left(x\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}-\vec{p}\right)\cdot\vec{b}=0.\end{cases}\qquad(2.2)$$

Оскільки $\vec{a}\cdot\vec{a}=\left(\vec{a}\right)^2=\left|\vec{a}\right|^2$, $\vec{b}\cdot\vec{b}=\left(\vec{b}\right)^2=\left|\vec{b}\right|^2$, $\vec{p}\cdot\vec{p}=\left(\vec{p}\right)^2=\left|\vec{p}\right|^2$ та вразовуючи, що трикутники $\triangle BC_1D$, $\triangle A_1BC_1$ та $\triangle A_1BD$ — рівносторонні, то $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{p}\right|=6\sqrt{2}$ та $\angle(\vec{a},\vec{b})=\angle(\vec{a},\vec{p})=\angle(\vec{p},\vec{b})=60^\circ$. Отже,

$$\left|\vec{a}\right|^2=6\sqrt{2}=\left|\vec{b}\right|^2=\left|\vec{p}\right|^2,\qquad(2.3)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{p}=\vec{b}\cdot\vec{p}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 60^\circ=6\sqrt{2}\cdot6\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}=36.\qquad(2.4)$$

Підставляємо отримані величини (2.3) та (2.4) в систему (2.2). Матимемо:

$$\begin{cases}\left(x\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}-\vec{p}\right)\cdot\vec{a}=0,\\ \left(x\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}-\vec{p}\right)\cdot\vec{b}=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\cdot\vec{a}\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{p}\cdot\vec{a}=0,\\ x\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+y\cdot\vec{b}\cdot\vec{b}-\vec{p}\cdot\vec{b}=0,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}72x+36y-36=0,\\ 36x+72y-36=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=1,\\ x+2y=1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{3},\\ y=\frac{1}{3}.\end{cases}$$

Отже, $\overrightarrow{A_1M} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{p}$. Тоді

$$|AM_1| = \left|\overrightarrow{A_1M}\right| = \sqrt{\overrightarrow{A_1M} \cdot \overrightarrow{A_1M}} = \sqrt{\left(\tfrac{1}{3}\vec{a} + \tfrac{1}{3}\vec{b} - \vec{p}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{9}\vec{a}^2 + \tfrac{1}{9}\vec{b}^2 + \vec{p}^2 + 2\cdot\tfrac{1}{3}\vec{a}\cdot\tfrac{1}{3}\vec{b} - 2\cdot\vec{p}\cdot\tfrac{1}{3}\vec{a} - 2\cdot\tfrac{1}{3}\vec{b}\cdot\vec{p}} =$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{9}\cdot 72 + \tfrac{1}{9}\cdot 72 + \cdot 72 + 2\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot 36 - 2\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot 36 - 2\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot 36} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}.$$

Отже, шукана віддаль від вершини A_1 до площини BC_1D дорівнює $\underline{4\sqrt{3}}$.

Для знаходження кута φ між діагоналлю BA_1 грані AA_1B_1B та площиною BC_1D нагадаємо, що відрізок A_1M перпендикулярний до площини BC_1D, тому відрізок ВМ є ортогональною проекцією BC_1 на площину BC_1D. Тому

$$\varphi = \angle\left(BA_1, BC_1D\right) = \angle\left(BA_1, BM\right) = \angle\left(\overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{BM}\right) = \angle A_1BM.$$

Звідси, використовуючи співвідношення (2.3) та (2.4) та те, що вектор $\overrightarrow{BM} = x\cdot\vec{a} + y\cdot\vec{b}$ при $x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{3}$ має вигляд $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$, отримуємо:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BM}}{\left|\overrightarrow{BA_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BM}\right|} = \frac{\vec{p}\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right)}{|\vec{p}|\cdot\left|\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right|} = \frac{\frac{1}{3}\vec{p}\cdot\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{p}\cdot\vec{b}}{|\vec{p}|\cdot\sqrt{\frac{1}{9}\vec{a}^2 + 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{1}{9}\vec{b}^2}} =$$

$$= \frac{24}{6\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad\Rightarrow\quad \underline{\varphi = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}}.\blacktriangleright$$

Задача 2.17. *Навколо правильної чотирикутної піраміди, всі ребра якої дорівнюють по 10, описано циліндр так, що всі вершини піраміди знаходяться на колах основ циліндра. Знайти об'єм та площу бічної поверхні такого циліндра.*

Розв'язання. Нехай $PABCD$ – задана в умові задачі піраміда. Найскладніше для учнів виявляється зрозуміти розташування піраміди й циліндра. Тому обов'язково аналізуємо умову та приходимо до висновку, що якщо вершина Р цієї піраміди лежить на колі нижньої основи циліндра, описаного біля цієї піраміди (рис.2.10). Крім того, оскільки кожне ребро піраміди дорівнює 10, то радіус *R* кола основи циліндра є радіусом кола, описаного навколо правильного трикутника PAB зі стороною 10, а тому цей радіус дорівнює $R = \frac{10\sqrt{3}}{3}$.

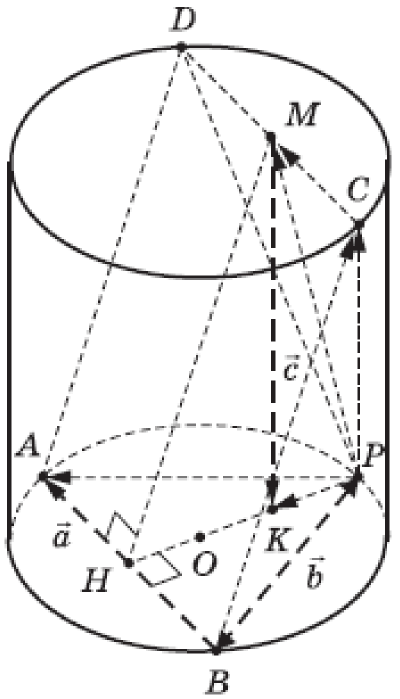


Рис. 2.10.

Позначимо середину ребра CD через M та МK — перпендикуляр, опущений з точки M на площину PAB основи циліндра, $K \in (PAB)$. Тоді $MK \perp$ ВА, $MK \perp$ ВР (згідно з означенням прямої, перпендикулярної до площині), при цьому висота h циліндра дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{MK}$. Для знаходження об'єму циліндра потрібне значення цієї висоти.

Отже, знову розглянемо трійку ненульових некомпланарних векторів зі спільною вершиною $\vec{a} = \overrightarrow{BA}, \vec{b} = \overrightarrow{BP}$ та $\vec{c} = \overrightarrow{BC}$, розкладемо вектор $\overrightarrow{MK}$ в цьому базисі та знайдемо знайдемо довжину вектора $\overrightarrow{MK} = \sqrt{\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{MK}} = h$.

Оскільки вектори $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PK}$ – лежать в одній площині, то існують такі дійсні числа x, y, що

$$\overrightarrow{PK} = x \cdot \overrightarrow{PA} + y \cdot \overrightarrow{PB} = x \cdot \left(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BP}\right) + y \cdot \overrightarrow{PB} =$$

$$= x \cdot \left(\vec{a} - \vec{b}\right) + y \cdot (-\vec{b}) = x\vec{a} - (x+y)\vec{b}.$$

Отже, $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \vec{c} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$. Тоді:

$$\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{PK} - \overrightarrow{PM} = x\vec{a} - (x+y)\vec{b} - \vec{c} + \vec{b} - \tfrac{1}{2}\vec{a} = (x - \tfrac{1}{2})\vec{a} + (1 - x - y)\vec{b} - \vec{c}$$

Значення для дійсних чисел x, y знаходимо з умов, що

$$\begin{cases} \overrightarrow{MK} \perp \overrightarrow{BA}, \\ \overrightarrow{MK} \perp \overrightarrow{BP}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{BA} = 0, \\ \overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{BP} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left((x - \tfrac{1}{2})\vec{a} + (1 - x - y)\vec{b} - \vec{c}\right) \cdot \vec{a} = 0, \\ \left((x - \tfrac{1}{2})\vec{a} + (1 - x - y)\vec{b} - \vec{c}\right) \cdot \vec{b} = 0. \end{cases} \qquad (2.5)$$

Для спрощення записів в системі (2.5), обчислимо окремо значення потрібних скалярних добутків векторів. Для цього звертаємо увагу учнів на те, що трикутники ABP та PBC — рівносторонні й рівні, а довжини їх сторін рівні довжині ребер піраміди, тобто 10. Крім того, $ABCD$ — квадрат зі стороною 10. Отже, $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=10$, $\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\angle\left(\vec{b},\vec{c}\right)=60^\circ$ та $\angle\left(\vec{a},\vec{c}\right)=90^\circ$.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos 60^\circ=10\cdot 10\cdot\frac{1}{2}=50=\vec{a}\cdot\vec{p}=\vec{b}\cdot\vec{c} \text{ та}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cdot\cos 90^\circ=0.$$

Підставимо отримані значення у (2.5). Будемо мати:

$$\begin{cases}(x-\frac{1}{2})\vec{a}\cdot\vec{a}+(1-x-y)\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{c}\cdot\vec{a}=0,\\(x-\frac{1}{2})\vec{a}\cdot\vec{b}+(1-x-y)\vec{b}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{b}=0,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-\frac{1}{2})\cdot 100+(1-x-y)\cdot 50-0=0,\\(x-\frac{1}{2})\cdot 50+(1-x-y)\cdot 100-50=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=0,\\x+2y=\frac{1}{2},\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2},\\y=\frac{1}{6}.\end{cases}$$

Отже, $\overrightarrow{MK}=(\frac{1}{6}-\frac{1}{2})\vec{a}+(1-\frac{1}{6}-\frac{1}{6})\vec{b}-\vec{c}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}-\vec{c}$. Тоді:

$$h=\overrightarrow{MK}=\sqrt{\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{MK}}=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}-\vec{c}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{9}\vec{a}^2+\frac{4}{9}\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\cdot\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\frac{2}{3}\vec{b}-2\cdot\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{c}-2\cdot\frac{2}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{9}\cdot 100+\frac{4}{9}\cdot 100+\cdot 100+2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot 50-2\cdot\frac{1}{3}\cdot 0-2\cdot\frac{2}{3}\cdot 50}=\frac{10\sqrt{6}}{3}.$$

Нарешті, площу бічної поверхні та об’єм циліндра обчислюємо наступним чином: $S_б=2\pi Rh=2\pi\cdot\frac{10\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{10\sqrt{6}}{3}=\frac{200\pi\sqrt{2}}{3}$,

$$V_{цил.}=\pi R^2 h=\pi\cdot\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2\cdot\frac{10\sqrt{6}}{3}=\frac{1000\pi\sqrt{6}}{9}.$$

В окремих завданнях, де мова йде про комбінацію трикутної піраміди з кулею, можна теж використовувати скалярний добуток. Це зручно робити в задачах, де задано довжини трьох ребер, котрі виходять зі спільної вершини, а також відомі величини всіз трьох плоских кутів при цій вершині – тоді за допомогою векторів ми можемо знайти радіус кулі, а отже і площу сфери чи об'єм кулі, описаної навколо цієї трикутної піраміди. Розглянемо задачі такого характеру.

Задача 2.18. Нехай в заданій трикутній піраміді PABC всі плоскі кути біля вершині P — прямі. Знайти площу сфери, описаної навколо цієї піраміди, якщо відомо, що $PA = 2, PB = 3, PC = 4$.

Розв'язання. Аналізуючи з учнями умову цієї задачі, варто обговорити рисунок до неї. Звісно, можна виконати зображення «класично» — основа ABC будується в горизонтальній площині, а точка P —поза цією площиною вгорі. Проте такий рисунок не візуалізуватиме ситуацію з плоскими кутами – їх складно зобразити так, щоб вони виглядали прямими.

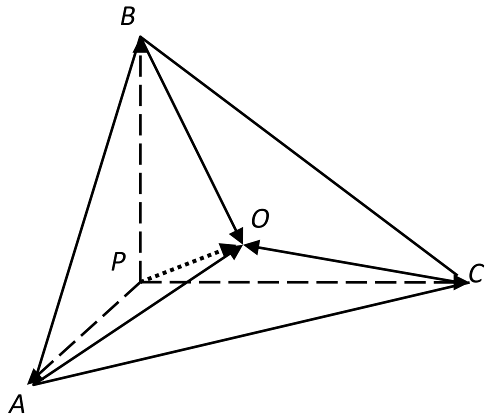


Рис.2.11

Тому ми радимо виконати зображення так, як будуть прямокутну декартову систему координат в просторі: точка P – початок цієї системи координат, а попарно перпендикулярні ребра піраміди збігаються з осями координат (див. рис. 2.11). Для учнів таке зображення часто є новим, проте інтуїтивно зрозумілим.

Позначимо центр сфери, описаної навколо тетраедра PABC, через O, Нехай R — радіус цієї сфери. Тоді $OA = OB = OC = OP = R$ та в ролі базисних векторів виберемо некомпланарні вектори $\overrightarrow{PA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{PB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{PC} = \vec{c}$.

Тоді існують дійсні числа x, y, z такі, що $\overrightarrow{PO} = \vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. При цьому $\left|\overrightarrow{PO}\right| = R$. Знайдемо значення для коефіцієнтів x, y, z в цьому розкладі вектора $\overrightarrow{PO}$. Для цього використаємо правило трикутника:

$$\overrightarrow{PO} = \vec{p} = \vec{a} + \overrightarrow{AO} = \vec{b} + \overrightarrow{BO} = \vec{c} + \overrightarrow{CO},$$

звідки $\overrightarrow{AO} = \vec{p} - \vec{a}$, $\overrightarrow{BO} = \vec{p} - \vec{b}$, $\overrightarrow{CO} = \vec{p} - \vec{c}$. Оскільки $OA = OB = OC =$

OP $= R$, то $\left|\overrightarrow{PO}\right| = \left|\overrightarrow{AO}\right| = \left|\overrightarrow{BO}\right| = \left|\overrightarrow{CO}\right|$. А тому

$$\left|\overrightarrow{AO}\right|^2 = \left|\overrightarrow{BO}\right|^2 = \left|\overrightarrow{CO}\right|^2 = \left|\overrightarrow{PO}\right|^2 = \left|\vec{p}\right|^2.$$

Звідси маємо: $\begin{cases} \vec{p}^{\,2} - \overrightarrow{AO}^2 = 0, \\ \vec{p}^{\,2} - \overrightarrow{BO}^2 = 0, \\ \vec{p}^{\,2} - \overrightarrow{CO}^2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\vec{p} - \overrightarrow{AO}\right)\left(\vec{p} + \overrightarrow{AO}\right) = 0, \\ \left(\vec{p} - \overrightarrow{BO}\right)\left(\vec{p} + \overrightarrow{BO}\right) = 0, \\ \left(\vec{p} - \overrightarrow{CO}\right)\left(\vec{p} + \overrightarrow{CO}\right) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\vec{p} - \left(\vec{p} - \vec{a}\right)\right)\left(\vec{p} + \left(\vec{p} - \vec{a}\right)\right) = 0, \\ \left(\vec{p} - \left(\vec{p} - \vec{b}\right)\right)\left(\vec{p} + \left(\vec{p} - \vec{b}\right)\right) = 0, \\ \left(\vec{p} - \left(\vec{p} - \vec{c}\right)\right)\left(\vec{p} + \left(\vec{p} - \vec{c}\right)\right) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \cdot \left(2\vec{p} - \vec{a}\right) = 0, \\ \vec{b} \cdot \left(2\vec{p} - \vec{b}\right) = 0, \\ \vec{c} \cdot \left(2\vec{p} - \vec{c}\right) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{p} = \tfrac{1}{2}\vec{a}^{\,2}, \\ \vec{b} \cdot \vec{p} = \tfrac{1}{2}\vec{b}^{\,2}, \\ \vec{c} \cdot \vec{p} = \tfrac{1}{2}\vec{c}^{\,2}. \end{cases} \quad (2.6)$$

Оскільки базисні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ попарно перпендикулярні та їх довжини дорівнюють відповідно 2, 3 та 4, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$, $\vec{a}^{\,2} = 4$, $\vec{b}^{\,2} = 9$, $\vec{c}^{\,2} = 16$. Тоді остання система (2.6) набуде вигляду:

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \left(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}\right) = \tfrac{1}{2}\vec{a}^{\,2}, \\ \vec{b} \cdot \left(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}\right) = \tfrac{1}{2}\vec{b}^{\,2}, \\ \vec{c} \cdot \left(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}\right) = \tfrac{1}{2}\vec{c}^{\,2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\vec{a}^{\,2} = \tfrac{1}{2}\vec{a}^{\,2}, \\ y\vec{b}^{\,2} = \tfrac{1}{2}\vec{b}^{\,2}, \\ z\vec{c}^{\,2} = \tfrac{1}{2}\vec{c}^{\,2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tfrac{1}{2}, \\ y = \tfrac{1}{2}, \\ z = \tfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Тоді $\overrightarrow{PO} = \tfrac{1}{2}\vec{a} + \tfrac{1}{2}\vec{b} + \tfrac{1}{2}\vec{c}$ та

$$R = \left|\overrightarrow{PO}\right| = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\vec{a} + \tfrac{1}{2}\vec{b} + \tfrac{1}{2}\vec{c}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4}\vec{a}^{\,2} + \tfrac{1}{4}\vec{b}^{\,2} + \tfrac{1}{4}\vec{c}^{\,2}} = \sqrt{\tfrac{1}{4}\left(4 + 9 + 16\right)} = \frac{\sqrt{29}}{2}.$$

Отже, $S_{сфери} = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\dfrac{\sqrt{29}}{2}\right)^2 = 29\pi$.▶

Розглянемо ще один цікавий випадок застосування векторно-координатного методу до знаходження об’єктів, пов’язаних із вписаною в тригранний кут сферою або сферою, котра дотикається всіх ребер. Зокрема, це задачі, в яких відомі величини плоских кутів при одній з вершин піраміди і задано або потрібно знайти відстань від цієї вершини до центра вписаної в цей кут сфери. Тоді координатно-векторний спосіб дозволить швидко знайти потрібні співвідношення, звідки, за потреби, знаходимо площу сфери чи об'єм цієї вписаної кулі. Отже, розглянемо приклад.

Задача 2.19. Нехай $PABC$ – тригранний кут, у якому задано величини плоских кутів при вершині P: $\angle APB = \angle BPC = \angle APC = 60^\circ$. Знайти радіус сфери, котра дотикається до всіх ребер цього кута, а її центр віддалений від вершини P на відстань $3\sqrt{6}$.

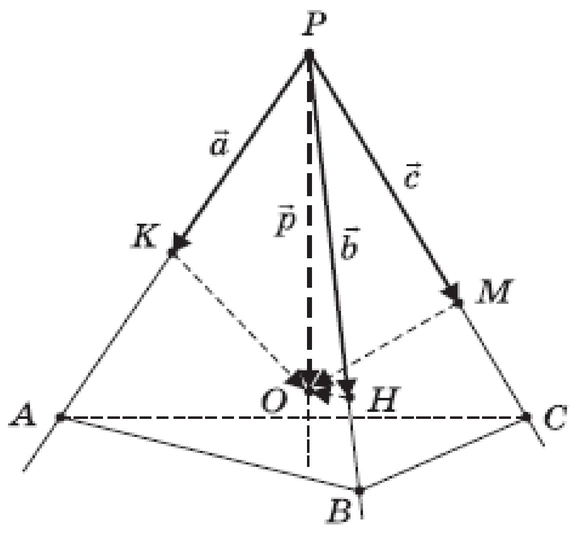


Рис.2.12.

Розв'язання. Нехай сфера дотикається ребер PA, PB і PC в точках K, H і M відповідно. Тоді $PK = PH = PM$ як відрізки дотичних, проведених до сфери з точки P. При цьому, якщо O– центр сфери, то $OK = OH = OM = R$ – радіус сфери. Отже, $OK \perp PA$, $OH \perp PB$, $OM \perp PC$ як радіуси сфери, проведені до точок її дотику з ребрами кута.

Розглянемо в якості базису три некомпланарні вектори $\overrightarrow{PA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{PB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{PC} = \vec{c}$. Тоді можна знайти такі дійсні числа x, y, z, що $\overrightarrow{PO} = \vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, та $\left|\overrightarrow{PO}\right| = 3\sqrt{6}$. Знайдемо значення для коефіцієнтів x, y, z у цьому розкладі вектора $\overrightarrow{PO}$, враховуючи, що $PK = PH = PM$, тобто $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right| = m$ (позначимо) та те, що $OK \perp PA, OH \perp PB, OM \perp PC$, тобто маємо вектори $\overrightarrow{KO} \perp \vec{a}$, $\overrightarrow{KO} \perp \vec{b}$, $\overrightarrow{MO} \perp \vec{c}$, причому $\overrightarrow{KO} = \vec{p} - \vec{a}$, $\overrightarrow{HO} = \vec{p} - \vec{b}$, $\overrightarrow{MO} = \vec{p} - \vec{c}$. Отже,

$$\begin{cases} \overrightarrow{KO} \perp \vec{a}, \\ \overrightarrow{HO} \perp \vec{b}, \\ \overrightarrow{MO} \perp \vec{c}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{KO} \cdot \vec{a} = 0, \\ \overrightarrow{HO} \cdot \vec{b} = 0, \\ \overrightarrow{MO} \cdot \vec{c} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\vec{p} - \vec{a}\right) \cdot \vec{a} = 0, \\ \left(\vec{p} - \vec{b}\right) \cdot \vec{b} = 0, \\ \left(\vec{p} - \vec{c}\right) \cdot \vec{c} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{p} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2, \\ \vec{p} \cdot \vec{b} = \vec{b}^2, \\ \vec{p} \cdot \vec{c} = \vec{c}^2, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=\vec{a}^2, \\ \left(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}\right)\cdot\vec{b}=\vec{b}^2, \\ \left(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}\right)\cdot\vec{c}=\vec{c}^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\vec{a}^2+y\vec{b}\cdot\vec{a}+z\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2, \\ x\vec{a}\cdot\vec{b}+y\vec{b}^2+z\vec{c}\cdot\vec{b}=\vec{b}^2, \\ x\vec{a}\cdot\vec{c}+y\vec{b}\cdot\vec{c}+z\vec{c}^2=\vec{c}^2. \end{cases} \quad (2.7)$$

Залишається обчислити скалярні добутки. Для цього враховуємо, що ∠APB = ∠BPC = ∠APC = 60° та $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=m$. Тоді, $\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|^2=m^2=\vec{b}^2=\vec{c}^2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}m^2$. Підставляючи отримані величини в останню систему (2.7), та скоротивши обидві частини кожного з рівнянь на $m^2 \neq 0$, отримуємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=1, \\ \frac{1}{2}x+y+\frac{1}{2}z=1, \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+z=1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=\frac{1}{2}, \\ z=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Отже, $\overrightarrow{PO}=\vec{p}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$.

Зауважимо, що після отримання останнього співвідношення варто проаналізувати з учнями можливість розташування центра O сфери, котра дотикається всіх ребер тригранного кута з плоскими кутами 60° при вершинах. В результаті міркувань приходимо до висновку, що точка O, належить прямій перетину трьох бісектральних площин двогранних кутів при кожному з ребер цього тригранного кута.

Нарешті, обчислюємо довжини базисних векторів, враховуючи умову та отримані значення, що $\overrightarrow{PO}=\vec{p}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$:

$$\left|\overrightarrow{PO}\right|=\sqrt{\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PO}}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)^2}=\frac{m\sqrt{6}}{2}$$

Оскільки, згідно з умовою, $\left|\overrightarrow{PO}\right|=3\sqrt{6}=\frac{m\sqrt{6}}{2}$, то звідси випливає, що $m=6$. Нарешті, обчислюємо радіус *R* сфери, враховуючи, що

$$R=\left|\overrightarrow{KO}\right|,\ \overrightarrow{KO}=\vec{p}-\vec{a}=\tfrac{1}{2}\vec{a}+\tfrac{1}{2}\vec{b}+\tfrac{1}{2}\vec{c}-\vec{a}=-\tfrac{1}{2}\vec{a}+\tfrac{1}{2}\vec{b}+\tfrac{1}{2}\vec{c},$$

$$\vec{a}^{\,2}=\vec{b}^{\,2}=\vec{c}^{\,2}=m^2=36,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\tfrac{1}{2}m^2=18,$$

$$R=\left|\overrightarrow{KO}\right|=\sqrt{\overrightarrow{KO}\cdot\overrightarrow{KO}}=\sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}\vec{a}+\tfrac{1}{2}\vec{b}+\tfrac{1}{2}\vec{c}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\tfrac{1}{4}\vec{a}^{\,2}+\tfrac{1}{4}\vec{b}^{\,2}+\tfrac{1}{4}\vec{c}^{\,2}-2\cdot\tfrac{1}{2}\vec{a}\cdot\tfrac{1}{2}\vec{b}-2\cdot\tfrac{1}{2}\vec{a}\cdot\tfrac{1}{2}\vec{c}+2\cdot\tfrac{1}{2}\vec{b}\cdot\tfrac{1}{2}\vec{c}}=3\sqrt{2}\ ►$$

Задача 2.20. *Нехай задано трикутну піраміду $ABCD$, у якої всі плоскі кути при вершині D — прямі. Нехай $DA=a$, $DB=b$, $DC=c$ — ребра піраміди, а $DH=h$ – висота піраміди. Довести, що* $\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$.

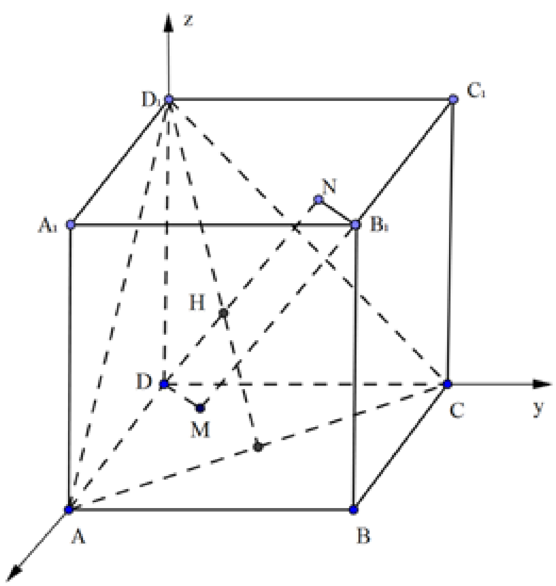


Рис.2.13.

Розв'язання. Для розв'язування цієї задачі скористаємося координатним методом. Для цього виберемо точку D в якості початкової точки, а напрямлені прямі DA, DB, DC – за осі прямокутної декартової системи координат. Тоді вершини піраміди матимуть координати: $D(0;0;0)$, $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ та $C(0;0;c)$. А тому рівняння основи ABC піраміди як рівняння площини у відрізках: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Для знаходження висоти піраміди скористаємося формулою віддалі від точки до площини: $h=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}$, звідки отримуємо потрібне співвідношення: $\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$. ►

Задача 2.21. *Нехай в прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ величини $AD=a$, $AB=b$, $AA_1=c$. Через вершину B_1 проведено пряму l перпенди-*

кулярно до площини ACD_1. *Довести, що за умови* $a > b > c$ *пряма* l *перетинає грань* $ABCD$ *у деякій точці* М. *Знайти довжину відрізка* B_1M .

Розв'язання. Для цієї задачі розглянемо координатний метод — введемо прямокутну систему координат з початком в точці D. Тоді вершини паралелепіпеда будуть мати координати: $D(0;0;0)$, $A(a;0;0)$, $C(0;b;0)$, $D_1(0;0;c)$, $B_1(a;b;c)$. Запишемо рівняння площини ACD_1 у відрізках: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Тоді вектор $\vec{n}=\left\{\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right\}$ — перпендикулярний до площини ACD_1 та є напрямним вектором прямої l. А тому ця пряма може бути записана в параметричному вигляді наступним чином:

$$\begin{cases} x = a+\frac{1}{a}t, \\ y = b+\frac{1}{b}t, \\ z = c+\frac{1}{c}t, \end{cases} \quad \text{для довільного } t\in\mathbb{R}$$

Знайдемо тепер координати $M(x_1,y_1,z_1)$ точки перетину прямої l з площиною xOy. Нехай $z_1=0$, тоді $t=-c^2$. Отже, $x_1=\frac{a^2-c^2}{a}$, $y_1=\frac{b^2-c^2}{b}$.

Оскільки, згідно з умовою, $a>b>c$, то $0<x_1<a$, $0<y_1<b$, то точка М лежить всередині прямокутника ABCD.

Нарешті, користуючись формулою віддалі між двома точками знаходимо $B_1M=c^2\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=\frac{c^2}{h}$, де h — віддаль від точки D до площини ACD_1.

Зауваження. Після розв'язування останньої задачі координатним методом, аналізуємо з учнями отриману формулу та обговорюємо з ними чисто геометричний розв'язок задачі. Для цього помічаємо, що перпендикуляр DH до площини ACD_1 перетинає площину $A_1B_1C_1$ в точці N. Тоді помічаємо, що

$MDNB_1$ — це паралелограм, а із трикутника DND_1 отримуємо, що $DN = \dfrac{DD_1^2}{DH}$, тому $B_1M = \dfrac{c^2}{h}$.▶

Задача 2.22. *Розглянемо прямокутний паралелепіпед* $ABCDA_1B_1C_1D_1$. *З'ясувати, якого найбільшого значення може набувати кут нахилу діагоналі* BD_1 *до площини* ACD_1*?*

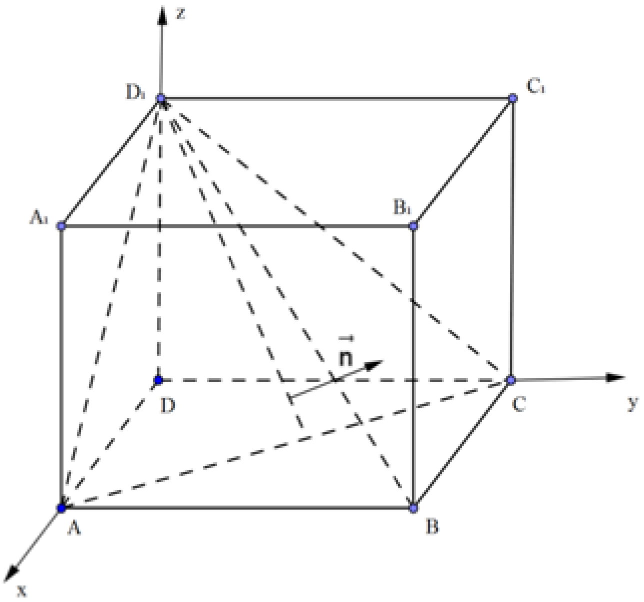


Рис.2.14.

Розв'язання. Виберемо у просторі прямокутну декартову систему координат з початком в точці *D* (аналогічно до того як ми це робили в задачі 2.20) Тоді рівняння площини ACD_1 має вигляд:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Тоді вектор $\vec{n} = \left\{ \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \right\}$ перпендикулярний до площини ACD_1.

Позначимо шуканий кут кут нахилу діагоналі BD_1 до площини ACD_1 через φ. Тоді

$$\sin\varphi = \cos(90^\circ - \varphi) = \frac{\left|\overrightarrow{D_1B} \cdot \vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{D_1B}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|}.$$

Отже, координати вектора $\overrightarrow{D_1B} = \{a, b, -c\}$, тоді $\overrightarrow{D_1B} \cdot \vec{n} = 1$. А тому $\sin\varphi = \dfrac{1}{k}$ де $k^2 = \left(a^2 + b^2 + c^2\right) \cdot \left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} \right)$.

Із очевидної нерівності $\left(\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a} \right)^2 \geq 0$ випливає, що $\dfrac{a^2}{b^2} - \dfrac{b^2}{a^2} \geq 2$, звідки отримуємо, що $k^2 = 3 + \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) + \left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) + \left(\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2}\right) \geq 9$. Тобто $k \geq 3$. При цьому $k = 3$ тоді й лише тоді, коли $a = b = c$.

Отже, $\sin\varphi \leq \frac{1}{3}$ та найбільше значення кут φ набуває лише за умови, що паралелепіпед є кубом і це найбільше значення дорівнює $\arcsin\frac{1}{3}$.►

Зауваження. Після розв'язування цієї задачі звертаємо увагу учнів на можливість знаходження кута між прямої та площини. Тобто, якщо $\vec{a}$ — напрямний вектор деякої прямої та $\vec{n}$ — вектор, перпендикулярний до площини α, то кут φ між цими прямою і площиною зручно шукати за формулою:

$$\sin\varphi = \cos(90^\circ - \varphi) = \frac{\left|\vec{a} \cdot \vec{n}\right|}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|}.$$

Крім того варто звернути увагу учнів на той факт, що величина кута φ між двома площинами (як і кута між прямою та площиною або кута між двома прямими) вибирається в межах від 0° до 90° – наприклад, у випадку площин – це менший з двох кутів, котрі утворюють головні вектори $\overrightarrow{n_1}$ та $\overrightarrow{n_2}$ даних площин α та β відповідно ($\overrightarrow{n_1} \perp \alpha, \overrightarrow{n_2} \perp \beta$) та його косинус можна обчислити за формулою: $\cos\varphi = \left|\cos\angle(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})\right| = \frac{\left|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|}$ [14].

Розглянемо задачу про знаходження кута між площинами, яку ми пропонуємо учням 11 класу під час вивчення координтно-векторного методу на факультативному занятті з математики.

Задача 2.23. *В кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ знайти величину кута між площинами ABD_1 та BCD_1.*

Розв'язання. Під час розв'язуванні задач на знаходження кута між площинами чисто геометричним методом потрібно чітко обґрунтовувати росташування площин та прямої їх перетину, будувати площину, перпендикулярну до такої прямої та знаходити прямокутний трикутник, у якому цей кут знаходиться (тобто знаходимо лінійний кут двогранного кута). З учнями ми проговорюємо кожен крок, аналізуємо складність їх виконання. І після цього міркуємо, чи не можна було би розв’язати цю задачу дещо простіше. Учні, які вже виконували завдання на застосування векторно-координатного методу, помічають, що в цій задачі корисно вибрати прямокутну декартову систему координат так, щоб початок цієї системи збігався би з однією з вершин куба, а осі – з ребрами, що виходять з цих вершин. Наприклад, як це зроблено на рисунку 2.15. При цьому, без обмеження загальності, можна ввважати, що ребро

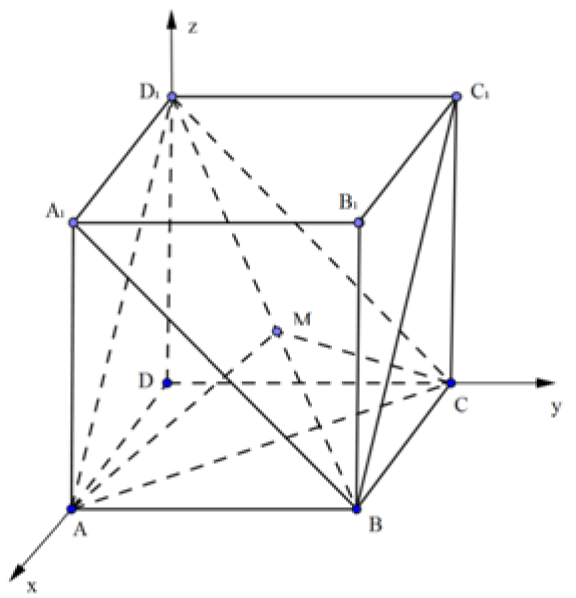


Рис.2.15.

куба дорівнює 1. Тоді в цій системі координат координати вершин куба знайти досить легко:

$D(0;0;0)$, $A(1;0;0)$, $B(1;1;0)$, $C(0;1;0)$,

$A_1(1;0;1)$, $B_1(1;1;1)$, $C_1(0;1;1)$, $D_1(0;0;1)$.

Оскільки $DA_1 \perp AD_1$ та $AD_1 \perp AB$, то вектор $\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{DA_1} \perp (ABD_1)$ та $\overrightarrow{n_1} = \{1;0;1\}$. Аналогічно, вектор $\overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{DC_1} \perp (BCD_1)$, причому $\overrightarrow{n_2} = \{0;1;1\}$. Тоді шуканий кут між площинами — це кут між векторами $\overrightarrow{n_1}$ та $\overrightarrow{n_2}$ та

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{0+0+1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \quad \text{тобто} \quad \varphi = 60^\circ. \blacktriangleright$$

Зауваження. Звертаємо увагу учнів на те, що лінійний кут CMA двогранного кута з ребром D_1B є тупим та дорівнює 120°. При цьому класичне геометричне розв’язування задачі 2.23 полягає в побудові лінійного кута CMA двогранного кута з ребром D_1B, обчислення сторін трикутника CMA і тільки потім знаходження кута CMA.

Проте аналітичне розв’язання задачі підштовхує учнів до ще одного нескладного способу розв’язування. Для цього з дітьми помічаємо, що трикутник A_1C_1D – рівносторонній, оскільки кожна його сторона є діагоналлю квадрата. Це означає, що кут між векторами $\overrightarrow{DA_1}$ та $\overrightarrow{DC_1}$ дорівнює 60°.►

ВИСНОВКИ

Дану дипломну роботу присвячено вивченню координатно-векторного методу в ЗЗСО, описано окремі методичні щодо вивчення в ЗЗСО прямокутної декартової системи координат на площині та в просторі; способи знаходження та задання координат точки на площині та в просторі; поняття вектора та пов'язані з ним визначення, теореми та властивості; показано як, об'єднавши координатний та векторний методи, можна виводити необхідні формули й знаходити зручний спосіб розв'язування певних типів геометричних задач.

Оскільки координатний та векторний методи розв'язування задач на сьогоднішній день – це дуже потужний апарат для використання в геометрії, а при правильному підході дозволяє розв'язувати фактично всі види математичних, фізичних, астрономічних чи технічних задач, та зважаючи на той факт, що в рамках шкільної програми з математики старших класів ця інформація вивчається досить обмежено й неповно, у даній дипломній роботі наведено добірку окремих видів алгебраїчних, тригонометричних та стереометричних задач, на які варто поглянути з іншого боку — розглянути задачу в дво- чи тривимірній системі координат або ввести вектори. При цьому наведені розв'язки містять методичні поради вчителю, на що саме потрібно звернути увагу в кожному конкретному випадку та як варто підводити учнів до завдань такого типу.

Враховуючи проблему інтеграції математичних знань, формування в учнів ЗЗСО цілісних уявлень про математику як про науку та її зв'язок з іншими науками, очевидно, що інтеграцію алгебри й геометрії доцільно виконувати щодо їх методів. Зокрема, використання векторно-координатного методу дає можливість алгебризувати чисто геометричні представлення і закони, які відображають властивості геометричних фігур. Цей метод є одним з найбільш потужних математичних методів та, при правильному підході, дозволяє розв'язувати майже всі типи математичних, фізичних, астрономічних та технічних задач.

Крім того, завдання на вектори й координати включено до програми ЗНО з математики (яке у 2022-23 році, швидше за все, відбудеться у форматі НМТ). А тому з цими темами учнів потрібно ознайомити досить детально. Крім того, дуже часто вміння використовувати знання про вектори та координати дозволяють швидко розв'язувати складні завдання на ЗНО, в результаті чого діти отримують хороші результати на цих іспитах.

Проте кількість годин аудиторного часу, котрі виділено на вивчення векторів та координат у 9-10 класах (не більше ніж по 14 годин у класах з вивчення математики на рівні стандарт) вимагає від вчителя більш уважної до додаткової роботи з учнями. Саме тому, на наш погляд, з такими завданнями варто знайомити школярів хоча би на факультативних заняттях або заняттях гуртка з математики, для поглиблення знань учнів про координатно-векторний метод. При цьому вчителю радимо під час розв'язування задач із використанням векторів та координат звертати увагу на переваги координатно-векторного методу над тими методами, котрі вимагають знання великої кількості означень, ознак і формул.

Координатно-векторний метод поєднує в собі два методи розв'язування задач: векторний та координатний. Порівнюючи цей метод з іншими методами розв'язування математичних задач ми з'ясували, що досить часто він дозволяє уникнути штучних побудов, спрощує розв'язування багатьох задач та доведення теорем. Він зручний також тим, що потребує використання великої кількості формул, ознак та властивостей фігур.

Координатно-векторний метод в шкільному курсі геометрії застосовується дуже мало, хоч і є досить зручним. При цьому радимо звертати увагу на такі моменти:

- при розв'язуванні різних геометричних задач на обчислення довжин відрізків, знаходження величин кутів та доведення геометричних чи тригонометричних нерівностей досить ефективним засобом є використання скалярного множення векторів;
- радимо щоразу, коли це можливо та доцільно, після розв'язування конкретної задачі векторно-координатним методом, аналізувати з учнями отримані формули й співвідношення, проговорити з ними чисто геометричний розв'язок задачі, а за наявності часу й можливості – розв'язати.

Отже, наведена в дипломній роботі добірка задач та конспект факультативного заняття з математики для учнів 10-11 класу може використовуватися вчителем математики при роботі з учнями 9-11 класів з метою розширення їх знань, удосконалення вмінь та надання їм можливостей до застосування векторів та координат під час розв'язування як суто геометричних так і алгебраїчних та тригонометричних задач.

Як показує наш досвід роботи, сильні учні сприймають ці задачі досить добре, їм подобається застосовувати традиційні знання у дещо незвичному форматі. Наприклад, особливу цікавість для 10-класників викликали задачі на використання векторів до розв'язування тригонометричних задач.

ЛІТЕРАТУРА

1. Аналітична геометрія — Вікіпедія (wikipedia.org)
2. П'єр Ферма — Вікіпедія (wikipedia.org)
3. Геометрія (Декарт) — Вікіпедія (wikipedia.org)
4. Державний стандарт базової середньої освіти | Міністерство освіти і науки України (mon.gov.ua)
5. Лов’янова І. В. Методика навчання математики у запитаннях і відповідях. Навчальний посібник для підготовки студентів до атестації здобувачів вищої освіти / І. В. Лов’янова. – Кривий Ріг: Криворізький державний педагогічний університет. – 2016. – 78 с.
6. Бевз Г. П. Методика викладання математики: Навчальний посібник / Г.П. Бевз – К.: Вища школа, 1989. – 367 с.
7. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів / З. І. Слєпкань – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.
8. Освітні програми | Міністерство освіти і науки України (mon.gov.ua)
9. Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. 5-7 класи. (Програма затверджена Наказом Міністерства освіти і науки України від 07.06.2017 № 804) 5-programa-z-matematiki.docx (live.com)
10. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень // matematika-profilnij-rivenfinal.docx (live.com)
11. Навчальна програма з математики (Алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту // matematika.-riven-standartu.docx (live.com)
12. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) загальноосвітніх навчальних закладі // matematika-poglibl-rivenfinal.docx (live.com)

13. Перелік навчальних програм, підручників та навчально-методичних посібників, рекомендованих МОН України для використання в 5-11 класах закладів загальної середньої освіти з навчанням українською мовою https://goo.gl/93BNko
14. Основи аналітичної геометрії в теоремах і задачах. Навч. посіб. // В.В. Городецький, С.Б. Боднарук, Ж.І. Довгей, В.С. Лучко. – Чернівці: – Чернівецький нац. ун-т ім. Ю.Федьковича, 2021. – 408 с.
15. Боровик В.Н. Курс вищої геометрії: Навчальний посібник. / В.Н. Боровик, В.П. Яковець. – Суми: ВТД «Універсальна книга», 2004. – 464 с.
16. Координати та вектори на площині. Геометричні переміщення – тести ЗНО/НМТ – завдання з математики – сайт ЗНО.Освіта.UA (osvita.ua)
17. Координати та вектори у просторі – тести ЗНО/НМТ – завдання з математики – сайт ЗНО.Освіта.UA (osvita.ua)
18. Збірник задач з математики для вступників до втузів / Під редакцією М.І. Сканаві. – К.: Наука, 1996. – 528 с.
19. Вишенський В.А. Вибрані математичні задачі / В.А. Вишенський М.Й. Ядренко. – К.: Вища шк., 1974. – 458 с.
20. Кушнір І.А. Векторні методи розв'язування задач. / І.А.Кушнір – К.: Оберіг, 1994 р. – 208 с.

ДОДАТОК

Конспект факультативного заняття для учнів 10 класу з використанням координатно-векторного методу розв'язування стереометричних задач

Тема заняття: *«Координатно-векторний метод та його застосування»*

Мета заняття:

- сформувати уявлення про координатно-векторний метод розв'язування задач, показати його переваги;
- розвивати навички критичного мислення, рефлексії;
- виховати працелюбність, вольові якості.

Хід заняття

I. Організаційний момент

Перевірка готовності учнів до заняття.

Сьогодні на ми продовжуємо розв'язувати стереометричні задачі та, враховуючи відомі нам факти з уроків геометрії, розглянемо цікавий, дещо новий для вас метод розв'язування задач. Кожного учня під час заняття буде оцінено. Для цього за кожен етап ви самі собі виставляєте бали у табличку

Оцінювальна табличка:

Вид роботи	*Оцінка*
Бліц опитування	
Самостійна робота	
Розв'язування задач	
Кінцева оцінка	

Виставлені вами бали я порівняю зі своїми та виставлю в журнал.

II. Перевірка домашнього завдання.

Оскільки під час факультативних занять домашні завдання не є обов'язковими, тому ми перевіряємо їх з точки зору наявності та потреби відповіді на питання тих учнів, котрі працювали вдома над заданими на попередньому занятті завданнями.

III. Актуалізація опорних знань.

Бліц - опитування

Завдання: Записати першу букву слова, яке відповіддю на запитання.

1. Положення точки на координатній площині (*координати*).
2. Перша цифра (*одиниця*).
3. Інша назва перпендикулярних прямих (*ортогональні прямі*).
4. Відрізок CD для піраміди (*ребро*).
5. Математик, в честь якого назвали прямокутну систему координат (*Декарт*).
6. Восьма буква в слові «математика» (*«и»*).
7. Числа, що використовуються при лічбі (*натуральні числа*).
8. Перша буква алфавіту (*«а»*).
9. Три точки, що не лежать на одній прямій та три відрізки, що послідовно їх сполучають (*трикутник*).
10. Що позначає стрілка у вектора? (*напрям*)
11. Точка, якою позначають початок координат (*«О»*).
12. Направлений відрізок (*вектор*).
13. Четверта буква в слові «математика» (*«е»*).
14. Вектори, що лежать на паралельних прямих (*колінеарні вектори*).
15. Правильний многогранник, що складається з чотирьох правильних трикутників (*тетраедр*).
16. Одиничний вектор (*орт*).
17. Сторона грані многогранника (*ребро*).
18. Довжина вектора $\overrightarrow{AA}$ (нуль).
19. Третя з кінця літера в слові «математика» (*«и»*).
20. Який молочний продукт найчастіше рекламують? (*йогурт*)
21. Відрізок, що сполучає вершину трикутника з серединою протилежної сторони (*медіана*).
22. Давньогрецький математик, творець геометрії (*Евклід*).
23. Твердження, яке потребує доведення (*теорема*).
24. (На моделі піраміди) Дайте назву вказаної грані (*основа*).

25.Кут, утворений двома півплощинами зі спільним ребром (*двогранний кут*).

IV. Повідомлення теми, мети і завдань заняття.

Отже, тема сьогоднішнього заняття — «Координатно-векторний метод розв'язування задач та його застосування». На ньому ми дізнаємось як можна використовувати цей метод до розв'язування стереометричних задач, з'ясуємо його переваги та недоліки над іншими методами.

Для нагадування потрібної нам інформації, прошу виконати невеличку самостійну роботу.

Самостійна робота *(5 хв)*

Варіант 1

1. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед. Спростити вираз:

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{D_1B}+\overrightarrow{B_1D_1}+\overrightarrow{DC}=$$

2. Знайти довжину відрізка AB, якщо точки задано їх координатами: $A(1,2,0)$, $B(5,3,1)$.

Варіант 2

1. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед. Спростити вираз:

$$\overrightarrow{B_1D_1}+\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{C_1B}+\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{A_1D_1}=$$

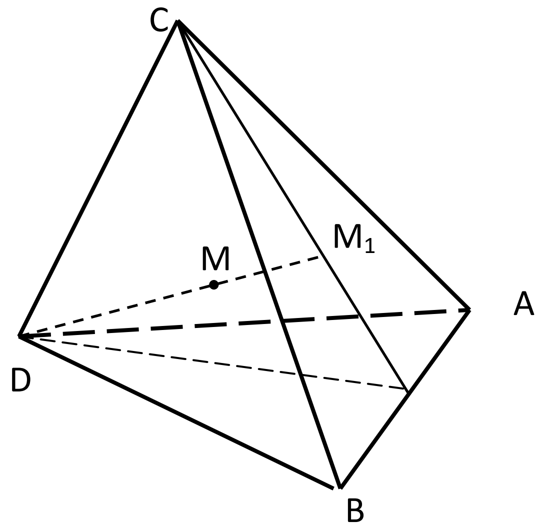
2. Знайти довжину відрізка AB, якщо точки задано їх координатами: $A(0,2,0)$, $B(3,3,1)$.

Після завершення, учні виконують взаємоперевірку завдань самостійної роботи, виставляють отримані бали в оцінювальну таблицю.

V. Розв'язування задач

Задача 1. Довести*, що медіани тетраедра перетинаються в одній точці та діляться цією точкою у відношенні 3:1, починаючи від вершини*.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — тетраедр, DM_1 – його медіана. Виберемо на цій медіані DM_1 точку M таку, що $\frac{DM}{DM_1}=3$. За формулою поділу відрізка



в даному відношенні, маємо:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OD}+3\overrightarrow{OM_1}\right),$$

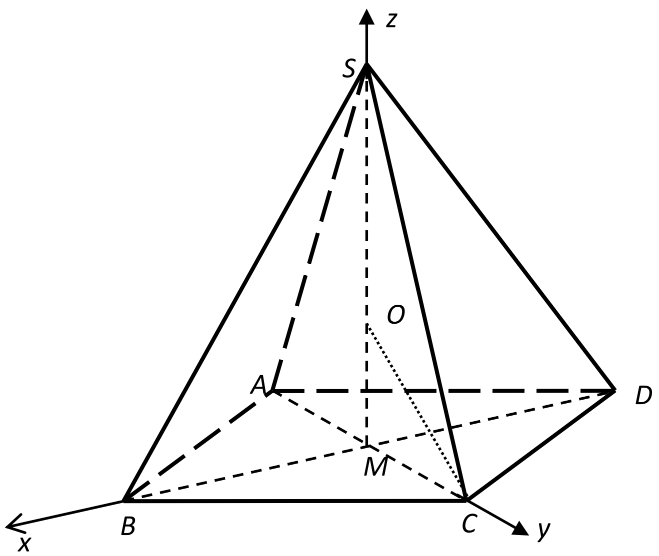
де O — довільна точка простору.

Враховуючи, що точка M_1 задовольняє рівність $\overrightarrow{OM_1}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$, отримаємо:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right).$$

Тоді для точки M', котра ділить будь-яку з трьох інших медіан тетраедра $ABCD$ у відношенні 3:1 (починаючи від вершини) отримаємо аналогічний вираз, симетричний відносно векторів $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}$. Отже, $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OM}$ та всі чотири медіани тетраедра перетинаються в одній точці M, а кожна з них ділиться цією точкою у відношенні 1:3, починаючи від вершини тетраедра, що й потрібно було довести.

Точку M називають *центроїдою тетраедра*.►



Задача 2. *Нехай в сферу вписано правильну чотирикутну піраміду з двогранним кутом α при основі. Нехай відомо, що площа сфери дорівнює S. Знайти площу основи піраміди.*

Розв'язання. Вибиремо систему координат з початком в точці M — центрі основи. Нехай додатні напрямки вісей координат збігаються з напрямками променів MB, MC, MS, на яких лежать діагоналі основи та висота піраміди. Позначимо довжину сторону основи піраміди через a. Тоді у вибраній системі координат матимемо координати точок $B\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$ та $O(0;0;z)$. Далі, аплікату точки S визначено з прямокутного трикутника SMK, у якому $MK=\frac{a}{2}$, $\angle SKM=\alpha$, тому $SM=\frac{a}{2}tg\,\alpha$, звідки отримуємо, що $S\left(0;0;\frac{a}{2}tg\,\alpha\right)$. Аплікату z центра O сфери знаходимо зі співвідношення $OM^2+MB^2=OB^2$, враховуючи, що $OB=OS$ та $MB=\frac{MK}{\sin 45^\circ}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Отже, маємо квадратне рівняння: $z^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{a\cdot tg\,\alpha}{2}-z$, звідки $z=\frac{a\left(tg^2\alpha-2\right)}{4tg\,\alpha}$.

Далі, радіус описаного навколо піраміди кола

$$R^2=OB^2=z^2+\frac{a^2}{2}=\frac{a^2\left(tg^2\alpha-2\right)^2}{16tg^2\,\alpha}+\frac{a^2}{2}=\frac{a^2\left(tg^2\alpha+2\right)^2}{16tg^2\,\alpha}.$$

Тому з формули $S=4\pi R^2=\frac{\pi a^2\left(tg^2\alpha+2\right)^2}{4tg^2\,\alpha}$ знаходимо площу основи даної чотирикутної піраміди $SABCD$: $Q=a^2=\frac{4S\cdot tg^2\,\alpha}{\pi\left(tg^2\alpha+2\right)^2}$.►

VII. Повідомлення домашнього завдання.

Задача. *Нехай бічні грані правильної шестикутної призми – квадрати. Знайти величину кута між мимобіжними діагоналями суміжних граней призми.*

Розв’язання. Нехай $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильна шестикутна призма, у якій потрібно знайти кут між прямими AB_1 і BC_1. Розкладемо вектори $\overrightarrow{AB_1}$ і $\overrightarrow{BC_1}$ за некомпланарними векторами $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ і $\vec{c}=\overrightarrow{BB_1}$.

Отримаємо: $\overrightarrow{AB_1} = \vec{a} + \vec{c}$, $\overrightarrow{BC_1} = \vec{b} + \vec{c}$. Оскільки довжини векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ рівні, то їх можна вважати рівними 1. Тоді $AB_1 = BC_1 = \sqrt{2}$.

Оскільки кут між векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ рівний 60°, та $\vec{a} \perp \vec{c}$, $\vec{b} \perp \vec{c}$, то звідси отримуємо, що $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = \left(\vec{a} + \vec{c}\right) \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.

Нехай φ — шуканий кут між прямими AB_1 і BC_1. Тоді

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}}{\left|\overrightarrow{AB_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC_1}\right|} = \frac{3}{4},$$

Отже, $\varphi = \arccos\frac{3}{4}$.

Висновок. Розв’язування наведених та подбних задач векторним способом набагато простіше й ефективніше, аніж звичайними способами.

VIII. Підведення підсумків уроку.

Виставлення балів за таблицями оцінювання.