МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЧЕРНІВЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ЮРІЯ ФЕДЬКОВИЧА

Факультет математики та інформатики

Кафедра алгебри та інформатики

Барицентричні координати на факультативних заняттях з математики у ЗЗСО

Дипломна робота

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Виконала:
студентка 6 курсу 606 групи
Піндіряк Анастасія Георгіївна

Керівник:
кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Мироник Вадим Ілліч

До захисту допущено
на засіданні кафедри алгебри та інформатики
протокол № 6 від 7 грудня 2022 р.
Зав. кафедрою ____________ доц. Колісник Р.С.

Чернівці – 2022

Анотація

Дипломна робота складається з трьох розділів, які поділяються на підрозділи, всього 38 сторінок тексту. Об'єктом дослідження є процес вивчення окремих тем загального курсу математики у ЗЗСО. Предметом дослідження є особливості застосування методу барицентричних координат до розв'язування геометричних задач. Мета дослідження полягає у розгляді певних особливостей викладення тем геометрії, які стосуються координатно-векторного методу розв'язування геометричних задач. У першому розділі подано деякі педагогічні аспекти факультативних занять. Другий розділ присвячений розгляду поняття центру мас та його застосування до розв'язування геометричних задач. У третьому розділі розглядаються барицентричні координати на площині та в просторі.

Результати роботи впроваджено у власній педагогічній діяльності.

Ключові слова: вектор, центр мас, барицентричні координати.

Annotation

The thesis consists of three chapters, which are divided into subsections, in general 38 pages of text. The object of the study is the process of studying of some particular topics from the general mathematics course in the Institution of general secondary education. The subject of the study is the peculiarities of using the barycentric coordinate method for solving geometric problems. The purpose of the study is examination of certain peculiarities of the presentation of geometry topics that relate to the coordinate-vector method of solving geometric problems. In the first chapter, there are presented some pedagogical aspects of optional classes. The second chapter is dedicated to the consideration of the concept of the center of mass and its use to solving geometric problems. In the third chapter barycentric coordinates on the plane and in space are considered.

The results of the thesis are implemented in author's own pedagogical practice.

Keywords: vector, center of mass, barycentric coordinates.

Дипломна робота містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів наукових досліджень інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

А.Г.Піндіряк

ЗМІСТ

Вступ

Мета організації факультативних занять з математики така як і мета організації математичних класів. Це розширення світогляду учнів, розвиток математичного мислення, формування активного пізнавального інтересу до предмету. Факультативні заняття дають поштовх учням до глибшого вивчення математики, таким чином полегшуючи для них вибір майбутньої спеціальності.

Різниця в діяльності факультативних груп та математичних класів пов’язана з тим, що перші не потребують перебудови системи вивчення математики. Вони працюють на базі загального курсу математики. Організація факультативних занять є простішою ніж математичного класу. Тому факультативні заняття є більш розповсюдженою формою підвищеної математичної підготовки школярів.

Великий давньогрецький мислитель Архімед приблизно 2200 років тому відкрив оригінальний спосіб доведення геометричних теорем, заснований на розгляді центру мас системи матеріальних точок (метод «геометрії мас»). Саме таким способом ним вперше була доведена теорема про перетин медіан трикутника. Метод Архімеда був розвинений видатними математиками, такими як Лагранж, Якобі, Мебіус (наприклад, в 1827 році німецький математик Август Фердинанд Мебіус ввів поняття барицентричних координат, за допомогою яких він зумів викласти проективну геометрію) та ін. Цей метод перетворився на ефективний і строго обґрунтований засіб геометричного дослідження. В останні десятиліття барицентричний метод почали використовувати і в обчислювальній математиці.

Отже, розв’язання багатьох геометричних задач можна отримати, використовуючи властивості мас (або барицентра системи матеріальних точок).«Барицентричне розв'язання» використовує поняття, запозичені з механіки: маса, матеріальна точка, центр мас, правило важеля і спирається на наочні фізичні міркування. Ці міркування «по-перше, дають нам передчуття розв'язання, і, по-друге, підказують правильний хід міркувань»(Пуанкаре, 1854-1912).

Об’єктом дослідження є процес вивчення окремих тем загального курсу математики у ЗЗСО.

Предметом дослідження є особливості застосування методу барицентричних координат до розв’язування геометричних задач.

Мета дослідження полягає у розгляді певних особливостей викладення тем геометрії, які стосуються координатно-векторного методу розв’язування геометричних задач.

Розділ 1. Деякі педагогічні аспекти проведення факультативних занять з математики

У сучасному суспільстві оволодіння будь-якою сучасною професією потребує певних знань з математики. З математикою тісно пов’язана і комп’ютерна грамотність, широке застосування якої стало невід’ємною частиною нашого життя. Математичні знання – необхідна частина загальної культури сучасної людини. У школі математика є опорним предметом, що забезпечує на достатньому рівні як природничі, так і гуманітарні дисципліни. Необхідно зазначити, що математика – це профільний предмет при вступі на більшість природничих спеціальностей. Високий бал з математики важливий для майбутніх математиків, фізиків, хіміків, біологів, архітекторів, економістів та лікарів.

Сучасна школа повинна вирішувати дві задачі: забезпечувати учня чітким мінімальним об’ємом знань та умінь, необхідними кожному члену суспільства, а також створити умови для додаткового вивчення шкільного курсу математики для тих, хто проявляє зацікавленість і схильність до даного предмету. Свій внесок у вирішення цих питань вносять факультативні заняття, котрі за означенням є додатковою, не обов’язковою формою навчання, яку обирає або не обирає кожен учень за власним бажанням та рекомендаціями вчителя.

В теперішній час інтенсивно ведеться розробка та корекція нормативного та навчально-методичного забезпечення математичної освіти в умовах сучасного освітнього середовища, підвищення якості навчання предметів природничо-математичного циклу з урахуванням запитів і потреб суспільства. Частиною цієї розробки є створення методичних матеріалів для організації та проведення факультативних занять.

Основною задачею факультативних занять є створення максимально комфортних умов для інтелектуального розвитку учнів у відповідності з їх інтересами, цілями, здібностями та потребами. На факультативних заняттях учні мають змогу насамперед покращити свої знання, які одержують на основних уроках з математики, набути кращі навики розв’язування математичних задач. Зазвичай для проведення факультативів з математики обирають класи з п’ятого до одинадцятого.

Вивчення потреб практики навчання показало, що найбільшу користь факультативні заняття приносять у тому випадку, коли вони використовуються для доповнення, розширення та корекції знань учнів з основного курсу, для розв’язання задач підвищеної складності, використання різної форми гурткової роботи.

Кожна тема факультативного заняття повинна бути безпосередньо пов’язана з матеріалом загальноосвітнього курсу математики. при цьому передбачається досягнення наступної мети: по-перше, довести матеріал до того рівня, на якому учневі стає зрозумілою його принципова математична важливість; по-друге, показати безпосередній зв’язок шкільної математики з наукою та її застосуваннями.

Освітні цілі факультативних занять з геометрії полягають у наступному: ознайомлення учнів з основними математичними методами у процесі систематичного вивчення геометричних фігур та їх властивостей, систематизації та поглибленні знань про вимірювання геометричних величин, поглибленому вивченні геометричних побудов, перетворень, координат і векторів, здобуття умінь та навичок у розв’язанні задач підвищеної складності.

Розвиваючі цілі факультативних занять:

- розвиток пізнавальної зацікавленості;
- розвиток логічного мислення, спостережливості, уяви, математичної інтуїції, математичної мови;
- розвиток розумових здібностей: критичності та глибини мислення, самостійності і ширини мислення, пам’яті, схильності до повноти сприйняття, генерування ідей, узагальнення інформації і таке інше;
- формування дослідницьких навиків застосування методів наукового пізнання: аналізу та синтезу, абстрагування, узагальнення та конкретизації, індукції та дедукції, аналогії та моделювання;
- розвиток загальних навчальних умінь: постановка навчальної мети, вибір засобів її досягнення, структурування інформації, виділення головного і тому подібне.

Виховні цілі факультативних занять полягають в:

- формування світоглядних уявлень про математику як частину світової науки, про роль математики в суспільному прогресі;
- розвитку та поглибленні пізнавального інтересу до математики, стимулюванні самостійності учнів при вивченні теоретичного матеріалу і розв’язанні задач підвищеної складності, створення успішних ситуацій при подоланні складних ситуацій, виховання працелюбності, вольових якостей особистості;
- стимулювання дослідницької діяльності учнів, активної участі їх у позакласній роботі з математики, в математичних олімпіадах;
- виховання наполегливості, цілеспрямованості, творчої активності та самостійності, критичності мислення, дисциплінованості, здібності до аргументованого обгрунтування своїх поглядів та переконань;

- естетичному вихованні (розкритті краси математичної теорії, досконалості математичного доведення, точності у постановці математичної задачі, раціональності її розв’язання, демонстрація зв’язку математики з іншими галузями науки , культури, мистецтва).

Організація навчально-виховного процесу на факультативних заняттях повинна передбачати

- різні організаційні форми: використання внутрішньої диференціації та індивідуалізації навчання; уроків-лекцій, уроків оглядового викладу теоретичного матеріалу з наступним самостійним його опрацюванням, уроків-практикумів, уроків колективного дослідження, уроків з використанням електронних засобів навчання, різних форм позакласної роботи з математики;
- організацію дидактичного циклу з урахуванням особливостей додаткового навчання;
- урахування особливостей системи математичних задач та вправ, яка в посібниках для факультативних занять є зазвичай надлишковою відносно фронтальної форми роботи. Частина задач, надлишкова відносно фронтальної форми роботи, передбачена для організації самостійної групової та індивідуальної роботи;
- розвиваюче навчання (забезпечення оптимально можливого рівня складності та темпу навчання, доступного для учнів, забезпечення внутрішньої диференціації навчання, поєднання фронтальної, групової та індивідуальної роботи учнів);
- використання проблемних методів навчання, навчання учнів евристичним прийомам розв’язання задач, складання плану розв’язання задач;
- збалансоване виділення часу на вивчення теоретичного матеріалу і розв’язання задач;
- підвищення ролі самостійної роботи учнів з вивчення теоретичного матеріалу та розв’язання задач;
- систематичне розв’язання задач підвищеної складності, використовуючи при цьому різні прийоми;
- використання комп’ютерної технології навчання;
- використання досвіду інших вчителів;
- стимулювання позакласної роботи учнів, тісний її зв’язок з факультативним заняттям.

Розділ 2. Поняття центра мас і деякі його застосування до геометричних задач.

2.1. Означення центра мас.

У фізиці матеріальними точками називають тіла, розмірами яких можна знехтувати у порівнянні з відстанями до інших тіл, які розглядаються в задачі. Для спрощення міркувань вважають, що вся маса такого «малого» тіла зосереджена в одній точці. Символом mA позначатимемо точку A, в якій зосереджена маса m.

Розглянемо в деякій області простору n невеликих кульок з масами m_1, $m_2,\ldots,m_n$. Іншими словами, розглянемо систему n матеріальних точок

$$m_1A_1,\ m_2A_2,\ldots,m_nA_n. \qquad (1)$$

Припустимо, що ці кульки з'єднані «невагомими» стержнями в одну жорстку систему. Якщо вибрати довільну точку одного із стержнів і підвісити всю систему на нитці, закріпленій в цій точці, то дана система, в загальному випадку не буде знаходитись в стані рівноваги. Але можна вибрати таку чудову точкуZ, що якщо ми підвісимо всю систему на вертикальній нитці, прикріпленій до цієї точки, а потім довільним чином повернемо систему навколо точки Z, заспокоїмо і відпустимо, то вона залишиться в стані рівноваги. Таку точку Z називають центром мас, або барицентром системи матеріальних точок (1).

Для використання цього поняття при розв'язуванні геометричних задач використовують наступні властивості центра мас.

1. Довільна система, яка складається із скінченного числа матеріальних точок, має центр мас і до того ж єдиний.
2. Центр мас двох матеріальних точок розташований на відрізку, який з'єднує ці точки; його розташування визначається архімедовим правилом важеля (його ще називають «золотим правилом механіки»): добуток маси матеріальної точки на відстань від неї до барицентра однаковий для обох точок, тобто

$m_1d_1=m_2d_2$,

де m_1,m_2– маси матеріальних точок, а d_1, d_2 – відповідно їх відстані до барицентра.

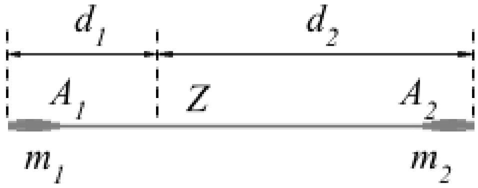


Рис.1

3. Якщо в системі, яка складається із скінченної кількості матеріальних точок, вибрати кілька матеріальних точок і маси вибраних точок перенести в їх центр мас, то від цього положення центра мас всієї системи не зміниться.

2.2. Математичне визначення центра мас

Дамо поняття центра мас, використовуючи математичні поняття. Число mбудемо називати масою матеріальної точки mA, нехай $m> 0$.

Для початку розглянемо дві матеріальні точки m_1A_1таm_2A_2, і нехайZ – їхній центр мас. Рівність $m_1d_1=m_2d_2$ можна записати у вигляді

$m_1| \overrightarrow{ZA_1} | = m_2| \overrightarrow{ZA_2} |$, або $|m_{1\overrightarrow{ZA_1}} |=| m_{2\overrightarrow{ZA_2}} |$.

Враховуючи, що вектори $\overrightarrow{ZA_1}$і $\overrightarrow{ZA_2}$ – протилежно напрямлені, маємо, що

$m_{1\overrightarrow{ZA_1}} = -m_{2\,\overrightarrow{ZA_2}}$, тобто

$$m_{1\overrightarrow{ZA_1}} + m_{2\overrightarrow{ZA_2}}=\vec{0}. \qquad (2)$$

Таким чином, для того, щоб виконувались властивості 1 і 2 центра мас, потрібно, щоб центром двох матеріальних точокm_1A_1таm_2A_2була така точкаZ, для якої виконується рівність (2).

Нехай тепер дано три матеріальні точки m_1A_1,m_2A_2, m_3A_3, і нехай Z – центр мас цієї системи матеріальних точок(такий існує за властивістю1). Позначимо через Cцентр мас системи двох матеріальних точок m_1A_1таm_2A_2. Тоді, згідно з (2),

$$m_{1\overrightarrow{CA_1}} + m_{2\overrightarrow{CA_2}}= \vec{0}. \qquad (3)$$

Але за властивістю 3, центр мас всієї системи m_1A_1, m_2A_2, m_3A_3 співпадає з центром мас сукупності двох матеріальних точок $(m_1+ m_2)C$ і m_3A_3, тобто

$$(m_1+ m_2)\overrightarrow{ZC} + m_{3\overrightarrow{ZA_3}} = \vec{0} \qquad (4)$$

З іншого боку

$$(m_1+ m_2)\overrightarrow{ZC} = m_{1\overrightarrow{ZC}} + m_{2\overrightarrow{ZC}} = m_1(\overrightarrow{ZA_1} - \overrightarrow{CA_1}) +m_2(\overrightarrow{ZA_2} - \overrightarrow{CA_2}) =m_{1\overrightarrow{ZA_1}}+ + m_{2\,\overrightarrow{ZA_2}}-$$
$$(m_{1\overrightarrow{CA_1}} +m_{2\overrightarrow{CA_2}}) = m_{1\overrightarrow{ZA_1}} +m_{2\overrightarrow{ZA_2}},$$

а тому рівність (4) матиме вигляд

$$m_{1\,\overrightarrow{ZA_1}} + m_{2\,\overrightarrow{ZA_2}}+ m_{3\,\overrightarrow{ZA_3}} =\vec{0}. \qquad (5)$$

Отже, для того щоб виконувалась властивість 3, центром мас трьох матеріальних точок має бути така точка Z, для якої виконується (5).

<u>Означення 1</u>. Барицентром(або центром мас) системи матеріальних точок

$$m_1\,A_1,\ m_2\,A_2,\ldots,m_nA_n \qquad (6)$$

називається точка Z, для якої виконується наступна рівність

$$m_{1\overrightarrow{ZA1}}+ m_{2\overrightarrow{ZA2}}+ \ldots + m_{n\overrightarrow{ZA\mathrm{n}}}=\vec{0}. \quad (7)$$

<u>Теорема 1</u>. а) Якщо точка Z є центром мас системи матеріальних точок (6), то для довільної точки O простору виконується рівність

$$\vec{OZ} = \frac{m_1\vec{OA}_1 + m_2\vec{OA}_2 + \dots + m_n\vec{OA}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \qquad (8)$$

б) Навпаки: якщо хоча б в одній точці простору O виконується рівність (8), то точка Z– центр мас системи (6).

Доведення. Розглянемо випадок, коли n= 2 (для інших аналогічно).

а) Виберемо довільну точку O. Рівність

$m_{1\vec{ZA}1} + m_{2\vec{ZA}2} = \vec{0}$

можна записати у вигляді$m_1\,(\vec{OA}_1 - \vec{OZ}) + m_2\,(\vec{OA}_2 - \vec{OZ}) = \vec{0}$.

Звідси і отримаємо потрібну рівність

$$\vec{OZ} = \frac{m_1\vec{OA}_1 + m_2\vec{OA}_2}{m_1 + m_2}\,.$$

Провівши міркування в оберненому порядку, отримаємо твердження б).

<u>Наслідок 1</u>. Будь-яка система, яка складається із скінченного числа матеріальних точок, має центр мас, який визначається однозначно.

<u>Теорема 2.</u>Центр мас двох матеріальних точок розташований на відрізку, який сполучає ці дві точки; його розташування (рис. 1) визначається архімедовим правилом важеля: $m_1d_1 = m_2d_2$.

Доведення. Нехай Z– центр мас двох матеріальних точок m_1A_1, m_2A_2. Тоді m_1

$$_{\vec{ZA}1} + m_{2\vec{ZA}2} = \vec{0},$$

тобто $m_{1\vec{ZA}1} = -m_2\ {}_{\vec{ZA}2}$. З цього бачимо, що вектори$\vec{ZA}_1$ і $\vec{ZA}_2$ протилежно напрямлені, а точка Z лежить всередині відрізка A_1A_2, при цьому $m_1|\,\vec{ZA}_1\,| = m_2|\,\vec{ZA}_2\,|$, тобто $m_1d_1 = m_2d_2$. Це і є «архімедове правило важеля». З нього можна зробити висновок, що центр мас двох матеріальних точок розташований ближче до тієї точки, маса якої більша.

<u>Теорема 3.</u> Нехай в системі (6), яка складається з n матеріальних точок, вибраніk точок $m_1 A_1, \dots, m_k A_k$(рис. 2) і нехай C– центр мас цих k точок. Якщо всю масу вибраних матеріальних точок зосередити в точці C, то від цього положення центра мас всієї системи не зміниться. Іншими словами, система (6) має той самий центр мас, що і система матеріальних точок

$(m_1 + \dots + m_k)C, m_{k+1}A_{k+1}, \dots, m_nA_n$,

Доведення. Нехай Z– центр мас системи (6), тобто

ССССС

$m_1\vec{ZA_1}+\ldots+m_k\vec{ZA_k}+m_{k+1}\vec{ZA_{k+1}}+\ldots+m_n\vec{ZA_n}=\vec{0}.$

Оскільки C – центр мас kматеріальних точок, то за теоремою 1

$$\vec{ZC}=\frac{m_1\vec{ZA_1}+\ldots+m_k\vec{ZA_k}}{m_1+\ldots+m_k}$$

З двох останніх рівностей випливає, що

$$(m_1+\ldots+m_k)\vec{ZC}+m_{k+1}\vec{ZA_1}+\ldots+m_n\vec{ZA_n}=\vec{0},$$

C

m_k

m_{k+1}

Рис. 2

а це означає, що центром мас системи матеріальних точок $(m_1+\ldots+m_k)C$, $m_{k+1}A_{k+1},\ldots,m_nA_n$ є та сама точка Z.

2.3. Розв’язування геометричних задач барицентричним методом.

При розв’язуванні геометричної задачі барицентричним методом ми завантажуємо окремі точки масами. Потім залучаємо властивості центрів мас всіх отриманих матеріальних точок або деякої їх кількості. Основне завдання при розв’язанні задачі барицентричним методом полягає в тому, щоб за умовою задачі здійснити такий вибір точок і розміщених в них мас, при якому задача легко розв’язується.

Три найважливіші властивості центрів мас при розв’язуванні задач:

1) існування і єдиність центра мас в будь-якій системі матеріальних точок;
2) належність центра мас двох точок відрізку, який з’єднує ці точки;
3) можливість перегрупування матеріальних точок системи без зміни центра мас всієї системи.

Розглянемо застосування барицентричного методу при розв’язуванні деяких задач планіметрії.

Приклад 1. На стороні AC трикутника ABC (рис. 3) взята така точка M, що $|AM|=\frac{1}{2}|MC|$, а на продовженні сторони CB – така точкаN, що $|BN|=|CB|$. Пряма MN перетинає сторону AB в точці P. В якому відношенні ділить ця точка сторону AB і відрізокNM ?

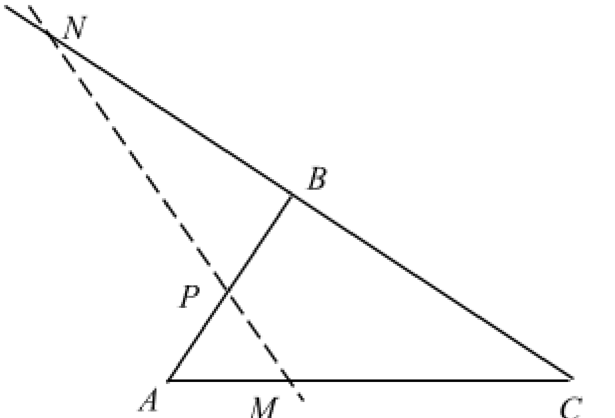


Рис.3

Розв’язання. Ідея розв’язання полягає у розташуванні в точках A, C, N таких мас, щоб центром цих трьох мас виявилась точка P. Зрозуміло, що в точки N і C потрібно помістити рівні маси, таким чином центром мас цих двох матеріальних точок буде точка B і тому, помістивши належну масу в точку A, можна буде домогтися, щоб центром мас всіх трьох матеріальних точок була необхідна нам точка P.

Отже, помістимо в кожну з точок N, C масу 1, тобто візьмемо матеріальні точки $1N$, $1C$. Оскільки $|CM| = 2|AM|$, то за правилом важеля M – центр мас двох матеріальних точок $1C$ і $2A$. Отже, центр мас Zвсіх трьох матеріальних точок $1N$, $1C$, $2A$(лежить на відрізку AB) за теоремою 3 буде водночас центром двох матеріальних точок $1N$ і $3M$, тобто $Z \in [MN]$. Це означає, що Z – точка перетину відрізків MN і AB, тобто $Z = P$. Оскільки Zцентр мас двох матеріальних точок $1N$ і $3M$, а також центр мас двох матеріальних точок $2B$ і $2A$, то за правилом важеля отримаємо$|NP| : |PM| = 3:1$, $|AP| : |PB| = 1:1$.

Приклад 2. Через точку P, яка розташована в середині паралелограма $ABCD$, проведені прямі, паралельні сторонам паралелограма. Вони перетинають сторони AB, BC, CD, DA відповідно в точках K, L, M, N(рис. 5). Нехай Q – точка перетину середніх ліній чотирикутника $KLMN$, а S – центр паралелограма. Довести, що точка Qлежить на відрізкуPS,і визначити, в якому відношенні ділить вона цей відрізок.

Розв'язання. Спочатку навантажимо вершини чотирикутника $KLMN$масами так, щоб центром мас цих чотирьох точок виявилась точка Q.

Для цього достатньо помістити в кожну з точок K, L, M, N масу 1.Оскільки $KBLP$– теж паралелограм, то ми можемо замінити матеріальні точки $1K$ і $1L$на точки $1B$ і $1P$, тобто Q є центром мас матеріальних точок $1B$,$1P$, $1M$,$1N$. Аналогічно точки $1M$ і $1N$ можна замінити на точки $1D$, $1P$.

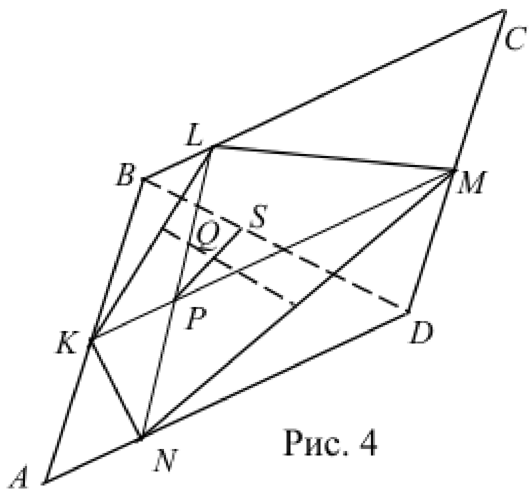


Рис. 4

Точка Q буде центром мас чотирьох матеріальних точок $1B$,$1P$, $1D$, $1P$, а це означає, центром мас двох точок $2S$і $2P$. Але тоді за правилом важеля точка Q розміщена на відрізку PS і ділить його навпіл.

Приклад 3.Навколо кола описаний чотирикутник $ABCD$, який дотикається до кола в точках M, N, P, Q. Відомо, що довжини відрізків дотичних, які проведені із точок A, B, C, D до кола рівні відповідно a, b, c, d. В якому відношенні ділиться кожен з відрізківMP і NQ точкою їх перетину?

Розв'язання. Підберемо маси m_1, m_2у вершинах $A, B,$ так, щоб центром мас матеріальних точок m_1A і m_2B виявилась точка M. за правилом важеля повинна виконуватись рівність $m_1a=m_2b$.Тому достатньо покластиm$m_1=1/a$ $m_2= 1/b$.Очевидно, що якщо у вершинах A, B, C, D помістити маси $1/a, 1/b, 1/c, 1/d$, то M – центр мас матеріальних точок $\frac{1}{a}A, \frac{1}{b}B$, точка N – центр мас матеріальних точок $\frac{1}{b}B,\ \frac{1}{c}C$,точка P – центр мас матеріальних точок $\frac{1}{c}C,\ \frac{1}{d}D$,а точка Q – центр мас матеріальних точок $\frac{1}{d}D,\ \frac{1}{a}A$. Позначимо центр мас отриманої системи із чотирьох матеріальних точок $\frac{1}{a}A, \frac{1}{b}B, \frac{1}{c}C,\ \frac{1}{d}D$ через Z. Розташування центра мас не зміниться, якщо замінити точки $\frac{1}{a}A$ і $\frac{1}{b}B$ матеріальною точкою $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)M$, а точки $\frac{1}{c}C$ і $\frac{1}{d}D$– матеріальною точкою $\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)P$. Отже, точка Z лежить на відрізку *MP.* Аналогічно можна переконатися, що точка Z лежить на відрізку *NQ*. Звідси випливає, що Z – точка перетину відрізків *MP*і *NQ.* За правилом важеля отримаємо

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)|MZ| = \left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)|ZP|,$$

звідси маємо

$$\frac{|MZ|}{|ZP|} = \left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = \frac{(c+d)ab}{(a+b)cd}.$$

Аналогічно,

$$\frac{|NZ|}{|ZQ|} = \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{d}\right):\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Розділ 3. Барицентричні координати

3.1. Барицентричні координати на площині

За теоремою 1 для довільних трьох мас m_1, m_2, m_3, які зіставляються вершинам трикутника $A_1A_2A_3$, однозначно визначена точка M, яка є центром мас отриманих трьох матеріальних точок m_1A_1, m_2A_2, m_3A_3. Справедливе і обернене твердження: для довільної внутрішньої точки M трикутника $A_1A_2A_3$ можна підібрати такі маси m_1, m_2, m_3, що M буде центром мас трьох матеріальних точок m_1A_1, m_2A_2, m_3A_3. На думку німецького математика А. Ф. Мебіуса, це дозволяє ввести нову, дуже цікаву та своєрідну систему координат, яка зіставляє кожній точці M відповідні маси m_1, m_2, m_3. Однак у звичайних прямокутних координатах кожна точка описується двома дійсними числами x,y, а тут є три «координати». Однак ці координати визначені з точністю до числового множника. Надалі ми розглянемо ряд цікавих властивостей барицентричних координат, які допоможуть розв'язати немало геометричних задач.

Отже, якщо M – довільна внутрішня точка трикутника $A_1A_2A_3$, то можна підібрати додатні числа m_1, m_2, m_3, при яких M буде центром мас для матеріальних точок m_1A_1, m_2A_2, m_3A_3. Очевидно, що маси m_1, m_2, m_3, які володіють цією властивістю, не визначені однозначно: якщо k – довільне додатне число, то маси km_1, km_2, km_3 володіють цією ж властивістю: центром мас матеріальних точок (km_1) A_1, (km_2) A_2, (km_3) A_3 буде та ж точка *M*. Цією умовою можна скористатися для того, щоб прирівняти суму мас до одиниці. Насправді, при $k = \frac{1}{m_1+m_2+m_3}$ми отримаємо такі маси

$$\mu_1 = km_1,\ \mu_2 = km_2,\ \mu_3 = km_3,$$

сума яких дорівнює одиниці, при цьому *M* знову ж буде центром мас матеріальних точок μ_1A_1, μ_2A_2, μ_3A_3. Іншими словами, для довільної внутрішньої точки *M* трикутника $A_1A_2A_3$ існують такі додатні числа μ_1, μ_2, μ_3, що

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1 \qquad (9)$$

і при цьому *M* є центром мас матеріальних точок μ_1A_1, μ_2A_2, μ_3A_3, тобто

$$M = \mu_1A_1 + \mu_2A_2 + \mu_3A_3. \qquad (10)$$

Ці числа і називаються барицентричними координатами (Б-координатами) точки *M* відносно базисного трикутника $A_1A_2A_3$; барицентричні координати точкою *M* визначаються однозначно.

Наприклад, оскільки точка перетину медіан *Z* трикутника $A_1A_2A_3$ є центром мас трьох матеріальних точок $1A_1$, $1A_2$, $1A_3$, а тому і центром мас точок $\frac{1}{3}A_1$, $\frac{1}{3}A_2$, $\frac{1}{3}A_3$, то числа $\mu_1 = \frac{1}{3}$, $\mu_2 = \frac{1}{3}$, $\mu_3 = \frac{1}{3}$ є Б-координатами точки *Z*.

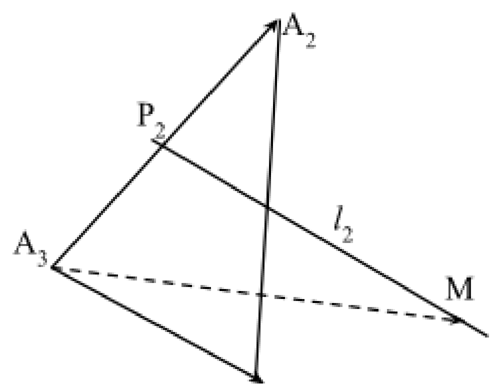
Виявляється, що якщо не обмежуватись тільки додатними масами μ_1, μ_2, μ_3, а допускати для них довільні дійсні значення, то можна визначити барицентричні координати не тільки для внутрішніх точок трикутника $A_1A_2A_3$, а й для будь-яких точок в площині цього трикутника. Справедливою є теорема:

<u>Теорема 4.</u>Нехай $A_1A_2A_3$– заданий трикутник і *M* – довільна точка в його площині. Тоді існують однозначно визначені дійсні числа μ_1, μ_2, μ_3, які задовольняють (9) і (10).

Доведення. Рівність (10), яка означає, що *M* – центр мас системи матеріальних точок μ_1A_1, μ_2A_2, μ_3A_3, рівносильна тому, що для довільної точки *O* справедливе співвідношення$\vec{OM} = \mu_1\vec{OA_1} + \mu_2\vec{OA_2} + \mu_3\vec{OA_3}$. Як відомо, ця рівність виконується для довільної точки *O*, якщо вона виконується для якоїсь одної очки. Запишемоцю рівність у випадку, коли $O = A_3$:

$$\vec{A_3M} = \mu_1\vec{a_1} + \mu_2\vec{a_2}, \qquad (11)$$

де $\vec{a_1} = \vec{A_3A_1}$, $\vec{a_2} = \vec{A_3A_2}$. Рівність (10) рівносильна відношенню (11). Тому потрібно довести, що для довільної точки *M* існують однозначно визначені числа μ_1, μ_2, μ_3, які задовольняють відношення



(9), (11).Алеспіввідношенням (11) однозначно визначаються числа μ_1, μ_2, а після цього число μ_3 однозначно визначається зі співвідношення (9).

Означення 2. Нехай $A_1A_2A_3$ – заданий трикутник і M – довільна точка в його площині. Числа μ_1, μ_2, μ_3, які задовольняють (9) і (10), називаються барицентричними координатами (Б-координатами) точки M.

Зауваження. Рівність (11) і рис. 5 фактично дають спосіб знаходження барицентричних координат довільної точки M. Іншими словами, потрібно через M провести прямі l_1, l_2, паралельні (A_2A_3), (A_1A_3), і тоді

$$\overrightarrow{A_3P_1} = \mu_1\overrightarrow{A_3A_1},\ \overrightarrow{A_3P_2} = \mu_2\overrightarrow{A_3A_2}.$$

Приклад 4. Односторонній дріт вигнутий у вигляді контура трикутника ABC з довжинами сторін a,b,c (рис. 6). Центром контура трикутника ABC називають центр мас Qцього дроту. Визначимо які Б-координати точки Q відносно ΔABC.

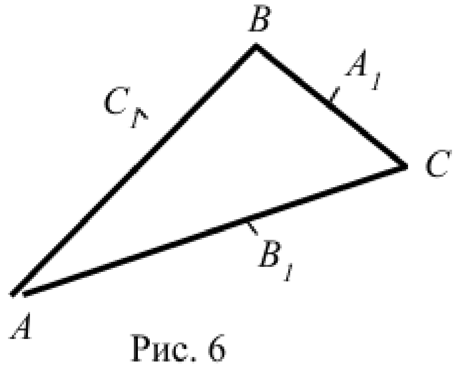


Рис. 6

Розв'язання. Нехай ρ– лінійна щільність дроту (тобто маса шматка дроту довжиною 1). Розташування центра мас усього дроту не зміниться, якщо ми зосередимо всю масу сторони BC в її середині A_1, аналогічно для сторін AC і AB. Отже, Q – центр мас трьох матеріальних точок $(\rho a)A_1$, $(\rho b)B_1$, $(\rho c)C_1$. Розосередимо кожну із трьох мас ρa, ρb, ρcу вершинах A, B, Cтрикутника так, щоб це не впливало на розташування центра мас Q. Ми цього досягнемо, якщо замінимо матеріальну точку $(\rho a)A_1$ двома матеріальними точками: $\left(\frac{1}{2}\rho a\right)B$ і $\left(\frac{1}{2}\rho a\right)C$ і аналогічно для інших матеріальних точок $(\rho b)B_1$, $(\rho c)C_1$. Тоді Q виявиться центром мас трьох матеріальних точок

$$\frac{1}{2}\rho(b + c)A, \frac{1}{2}\rho(c + a)B, \frac{1}{2}\rho(a + b)C.$$

Оскільки сума мас цих матеріальних точок дорівнює $\rho(a + b + c) = 2\rho p$, то точка Q має Б-координати $\frac{b+c}{4p}$, $\frac{c+a}{4p}$, $\frac{a+b}{4p}$.

Приклад 5. Точки P і Q мають відповідно Б-координати (p_1, p_2, p_3) і (q_1, q_2, q_3). Визначимо Б-координати серединиM відрізка PQ.

Розв'язання. Точка M – центр мас двох матеріальних точок $1P$ і $1Q$. Розосередимо їх маси по вершинах базисного трикутника, тобто замінимо точки $1P$ і $1Q$ відповідно на точки p_1A_1, p_2A_2, p_3A_3 і q_1A_1, q_2A_2, q_3A_3; очевидно, що при цьому розташування центра мас системи не зміниться. Але точка M – центр мас трьох матеріальних точок $(p_1 + q_1)A_1$, $(p_2 + q_2)A_2$, $(p_3 + q_3)A_3$. Оскільки сума мас цих матеріальних точок дорівнює 2, то Б-координати точки M дорівнюють

$$\frac{1}{2}(p_1 + q_1),\ \frac{1}{2}(p_2 + q_2),\ \frac{1}{2}(p_3 + q_3).$$

Приклад 6. На сторонах трикутника $A_1A_2A_3$вибрані такі точки M,N, що $\overrightarrow{A_2M} = k\overrightarrow{A_2A_3}$, $\overrightarrow{A_1N} = l\overrightarrow{A_1A_3}$. Обчислимо Б-координати точки Zперетину прямих A_1MіA_2N(рис. 7).

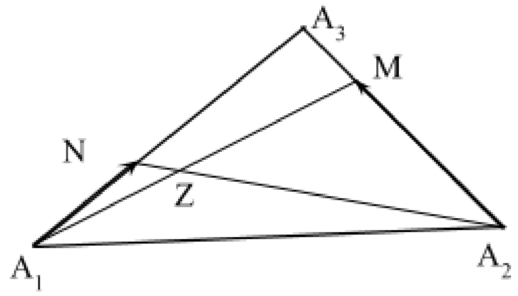


Рис.7

Розв'язання. Нехай μ_1, μ_2, μ_3 – барицентричні координати точки Z, тобто Z – центр мас матеріальних точок$\mu_1 A_1$, $\mu_2 A_2$, $\mu_3 A_3$. Пряма A_1Zперетинає сторону A_2A_3 в точці, яка є центром мас матеріальних точок $\mu_2 A_2$, $\mu_3 A_3$. Іншими словами, $\mu_{2\overrightarrow{MA_2}} + \mu_{3\overrightarrow{MA_3}} = \vec{0}$, тобто - $\mu_{2\overrightarrow{A_2M}} + \mu_{3\overrightarrow{A_2A_3}} - \overrightarrow{A_2M} = \vec{0}$. Перепишемо цю рівність у вигляді

$\overrightarrow{A_2M} = \frac{\mu_3}{\mu_2 + \mu_3}\overrightarrow{A_2A_3}$, отримаємо, що $\frac{\mu_3}{\mu_2 + \mu_3} = k$. Аналогічно, $\frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_3} = l$. Знайшовши звідси μ_1 і μ_2 та підставивши їх у співвідношення $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$, отримаємо

$$\frac{1-l}{l}\mu_3 + \frac{1-k}{k}\mu_3 + \mu_3 = 1,$$

звідси знайдемо μ_3, а потім μ_1 і μ_2:

$$\mu_3 = \frac{kl}{k+l-kl},\ \mu_1 = \frac{k(1-l)}{k+l+kl},\ \mu_2 = \frac{l(1-k)}{k+l-kl}.$$

Зауважимо, що якщо дві точки P і Q мають відносно $\Delta A_1A_2A_3$ барицентричні координати (p_1, p_2, p_3) і (q_1, q_2, q_3), то відстань між ними можна обчислити за формулою

$$|PQ|^2 =- \sum_{1 \le i < j \le 3} \left(p_i - q_i\right)(p_j - q_j)\left|A_iA_j\right|^2. \qquad (12)$$

Приклад 7. Відомі довжини трикутника. Обчислити відстань між точкою M перетину його медіан та центром O вписаного кола.

Розв'язання. Точки M і O мають такі Б-координати:

M (1/3; 1/3; 1/3) і O (a/2p; b/2p; c/2p).

Тому

$$-|MO|^2 = \left(\frac{1}{3} - \frac{b}{2p}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{c}{2p}\right)a^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{a}{2p}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{c}{2p}\right)b^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{a}{2p}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{b}{2p}\right)c^2$$

Приклад 8. Відомі довжини трикутника. Обчислити відстань між вершиною A трикутника ABC і центром вписаного кола, яке дотикається до сторони BC.

Розв'язання. Розглянемо базисний трикутник ABC. Нехай P – центр вписаного кола; Б-координати точки P дорівнюють $\left(-\frac{a}{2(p-a)}; \frac{b}{2(p-a)}; \frac{c}{2(p-a)}\right)$, де $2p = a+b+c$. Оскільки Б-координати точки A дорівнюють (1; 0; 0), то за формулою (12) матимемо

$$|PA|^2 = \frac{bcp}{p-a}.$$

Приклад 9. Відомі радіус R описаного навколо трикутника ABC кола,радіусrвписаного кола в цей трикутник і радіус r_a вписаного зовні кола, яке дотикається до сторони BC і продовжень двох інших сторін. Обчислити відстань між центрами O і O_a двох кіл.

Розв'язання. Нехай a, b, c – довжини сторін трикутника ABC,p –його півпериметр, s – площа. Точки O і O_a мають Б-координати відносно трикутника ABC

$$\left(\frac{a}{2p}; \frac{b}{2p}; \frac{c}{2p}\right) \text{ і} \left(-\frac{a}{2(p-a)}; \frac{b}{2(p-a)}; \frac{c}{2(p-a)}\right).$$

Користуючись формулою (12), отримаємо

$$\left|OO_a\right|^2 = \frac{a^2bc}{p(p-a)} = \frac{4Rsa}{p(p-a)} = 4Rs\left(\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p}\right) = 4R\left(r_a - r\right).$$

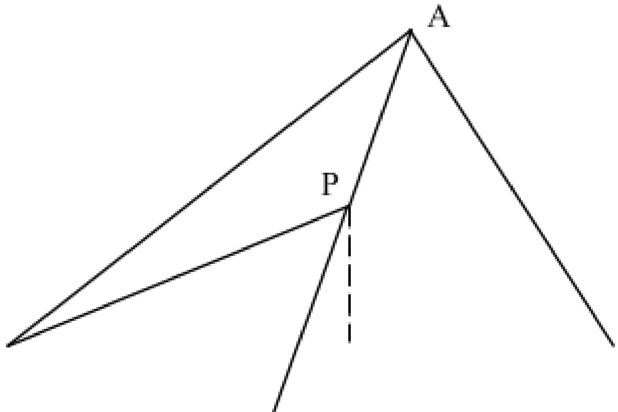
3.2. Барицентричні координати як площі.

В попередньому пункті барицентричні координати були введені, враховуючи поняття центра мас. Є й інший, суто геометричний підхід до барицентричних координат, який дозволяє виразити координати через площі деяких трикутників. Це, по-перше, дає цікаву геометричну інтерпретацію самого поняття центра мас (для випадку трьох матеріальних точок на площині) і, по-друге, відкриває нові можливості застосування барицентричних координат до розв'язання геометричних задач.

Спочатку розглянемо випадок, коли точка M лежить всередині базисного трикутника.

Теорема 5. Нехай точка P (рис. 8) лежить всередині базисного трикутника ABC і нехай S, L, Q, G – площі трикутників ABC, PBC, APC, ABP. Тоді Б-координати точки P дорівнюють$\mu_1 = \frac{L}{S}$, $\mu_2 = \frac{Q}{S}$, $\mu_3 = \frac{G}{S}$.

Іншими словами, якщо розмістити у вершинах A,B,C базисного трикутника маси, чисельно рівні (або пропорційні) площам L, Q, G, то їх центром мас виявиться точка P.



Доведення. Нехай точка P має Б-координати (μ_1; μ_2; μ_3). Позначимо центр мас двох матеріальних точок $\mu_2 B$ і $\mu_3 C$черезB_1. Тоді точки B_1, P, Aлежать на одній прямій. За правилом важеля маємо

$$\frac{|CB_1|}{|B_1B|} = \frac{\mu_2}{\mu_3},$$

а тому

Рис. 8

$$\frac{Q}{G} = \frac{|AP|h_3}{|AP|h_2} = \frac{h_3}{h_2} = \frac{|B_1P|h_3}{|B_1P|h_2} = \frac{S_{PB_1C}}{S_{PB_1B}} = \frac{|CB_1|h_1}{|B_1B|h_1} = \frac{|CB_1|}{|B_1B|} = \frac{\mu_2}{\mu_3}.$$

Звідси маємо, що $\frac{\mu_2}{Q} = \frac{\mu_3}{G}$.Аналогічно, $\frac{\mu_1}{L} = \frac{\mu_2}{Q}$,і тому

$$\frac{\mu_1}{L} = \frac{\mu_2}{Q} = \frac{\mu_3}{G} = \frac{\mu_1+\mu_2+\mu_3}{L+Q+G} = \frac{1}{S},$$

звідки$\mu_1 = \frac{L}{S}$, $\mu_2 = \frac{Q}{S}$, $\mu_3 = \frac{G}{S}$.

Приклад 10. Знайти Б-координати центра Oкола, яке вписане у базисний трикутник ABC зі сторонами a, b, c.

Розв'язання. Позначимо через r радіус вписаного кола. Тоді

$$L = \frac{1}{2}ar,\ Q = \frac{1}{2}br,\ G = \frac{1}{2}cr,\ S = \frac{1}{2}(a + b + c)r.$$

Тому центр O має Б-координати

$$\frac{a}{a+b+c},\ \frac{b}{a+b+c},\ \frac{c}{a+b+c}.$$

Приклад 11. На сторонах трикутника $A_1A_2A_3$вибрані такі точки (рис. 9) B_1, B_2, B_3, що

$$|A_2B_1| = \frac{1}{4}|A_2A_3|,\ |A_3B_2| = \frac{1}{4}|A_3A_1|,\ |A_1B_3| = \frac{1}{4}|A_1A_2|.$$

Знаючи площу S трикутника $A_1A_2A_3$, обчислити площу s трикутника PQR, обмеженого прямими A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3.

Розв'язання.

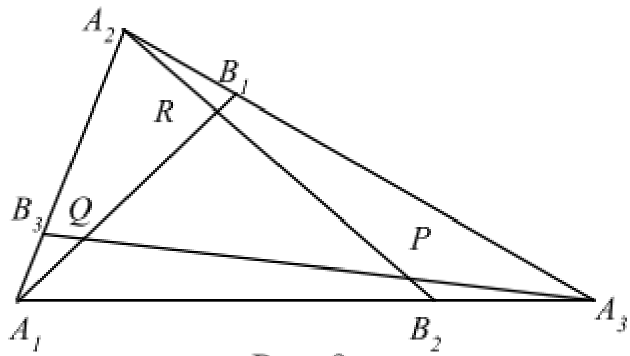


Рис. 9

$S_{PQR} = S_{A_1A_2A_3} - - S_{A_1RA_2} - S_{A_2PA_3} - S_{A_3QA_1}$. Точка R має (див. приклад 7) Б-координати (1/13; 9/13; 3/13). Тому (за теоремою 5)

$$\frac{S_{A_1A_2R}}{S} = \frac{3}{13}.$$

Аналогічно,$\frac{S_{PA_2A_3}}{S} = \frac{3}{13}$, $\frac{S_{A_1QA_3}}{S} = \frac{3}{13}$. Тому s = S – 3·3/13S = 4/13S.

Обчислення барицентричних координат точки можна звести до обчислення площ деяких трикутників і в тому випадку,коли точка лежить зовні базисного трикутника чи на його контурі.

Зауважимо, що розмістивши у відповідному порядку вершини деякого

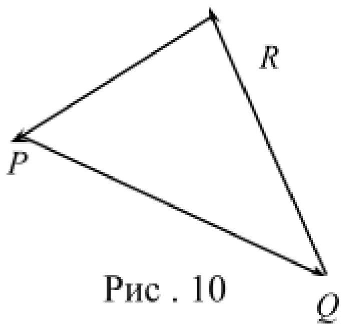


Рис . 10

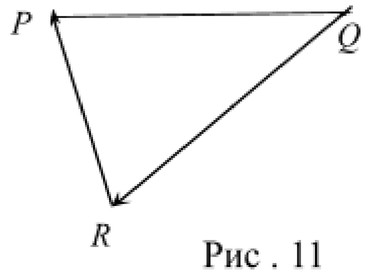


Рис . 11

трикутника*PQR* , ми таким чином задаємо напрямок обходу на його контурі: від *P* до *Q*, від *Q* до *R*, від *R* до *P* (рис. 10). Цей напрямок обходу може здійснюватися або «проти годинникової стрілки», або «за годинниковою стрілкою». У першому випадку будемо вважати, що трикутник орієнтований додатно (рис.10), а в другому випадку (рис.11) – від'ємно.

«Орієнтованою площею» трикутника із заданим на його контурі напрямком обходу домовимось називати: а)площу *S* цього трикутника, якщо від орієнтований додатно, б) – *S*, якщо трикутник орієнтований від'ємно.

Якщо точки *P, Q, R* розташовані на одній прямій, домовимось вважати орієнтовану площу «трикутника» *PQR*рівною нулю.

Наприклад, на рис.12 орієнтовані площі трикутників $A_1A_2A_3$ і A_1A_2P додатні, орієнтована площа трикутника PA_2A_3 від'ємна, а орієнтована площа трикутника A_1PA_3 рівна нулю.

Будемо вважати, що базисний трикутник $A_1A_2A_3$орієнтований додатно, тобто обхід $A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_1$ направлений проти годинникової стрілки. Нехай *P* – довільна точка площини. З'єднавши її з точками A_1, A_2 , A_3, отримаємо трикутники: PA_2A_3, A_1PA_3, A_1A_2P. Зауважимо, що порядок вершин у позначенні кожного з трикутників вибраний так, щоб спільна сторона

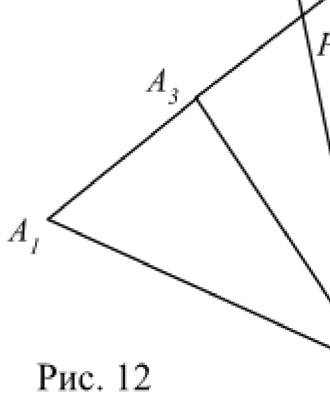


Рис. 12

того трикутника і базисного трикутника була в них обох однаково орієнтована. Наприклад, при обході $A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_1$ трикутника $A_1A_2A_3$ і при обході $P \to A_2 \to A_3 \to P$ трикутника PA_2A_3 їх спільна сторона A_2A_3 проходиться однаково (відA_2 до A_3).

Виявляться, що при довільному виборі точки P на площині твердження теореми 5 залишається справедливим, якщо під S, L, Q, G розуміти площі орієнтованих трикутників $A_1A_2A_3$, PA_2A_3, A_1PA_3, A_1A_2P.

Доведення теореми 5 в загальному випадку можна провести так само, як це було зроблено вище для випадку, коли точка P розташована всередині базисного трикутника. Для цього потрібно зауважити, що три прямі, на яких розташовані сторони трикутника, розбивають площину на сім областей (однією з яких є сам базисний трикутник). Точка P може бути розташована або всередині довільної із цих областей, або на одній із трьох прямих, на яких розташовані сторони трикутника. Іншими словами, є декілька різних випадків розташування точки P. В кожному випадку можна підтвердити справедливість формули (13). Доведення цього виконується аналогічно до того, коли точка розташована всередині базисного трикутника. Але через існування багатьох окремих випадків, воно дуже громіздке.

Натомість, існує інше доведення, основою якого є поняття визначника другого порядку. Цінність цього доведення закладена в тому, що одним міркуванням охоплюються всі можливі випадки. Поняття визначника важливе і саме по собі – воно використовується при розв’язуванні систем лінійних рівнянь і в ряді інших питань.

Дамо означення зовнішнього добутку векторів.

Нехай $\vec{a}(x_1;\ y_1)$ і$\vec{b}(x_2;\ y_2)$ – два вектори, які задані своїми координатами в прямокутній системі координат. Число x_1y_2 - x_2y_1 називається зовнішнім добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ і позначається $\vec{a} \wedge \vec{b}$:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1. \qquad (14)$$

Приклад 12. Обчислити орієнтовану площу трикутника ABC з вершинами $A\ (x_1; y_1)$, $B\ (x_2; y_2)$,$C\ (x_3; y_3)$.

Розв’язання. Орієнтована площа трикутника ABCвдвічі менша орієнтованої площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{AB}$ і $\vec{AC}$. Звідси

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left(\vec{AB} \wedge \vec{AC}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{OB} - \vec{OA}\right) \wedge \left(\vec{OC} - \vec{OA}\right) = \frac{1}{2}\vec{OB} \wedge \vec{OC} - \frac{1}{2}\vec{OB} \wedge \vec{OA} -- \ \frac{1}{2}\vec{OA} \wedge \vec{O}$$

.

Іншими словами,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\,(x_2y_3 - x_3y_2 - x_2y_1 + x_1y_2 - x_1y_3 + x_3y_1).$$

Перейдемо тепер до *доведення теореми 5*. Нехай *ABC* – базисний трикутник і *P* – довільна точка в площині цього трикутника.

Визначимо вектори $\vec{PA}$, $\vec{PB}$, $\vec{PC}$через $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$(рис. 13). Тоді маємо

$$S_{PBC} + S_{APC} + S_{ABP} = S_{PBC} + S_{PCA} + S_{PAB} = \frac{1}{2}\vec{b} \wedge \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{c} \wedge \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{a} \wedge \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{b} \wedge \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} \wedge$$

$$\wedge\ \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b} \wedge \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{a} \wedge \vec{a} = \frac{1}{2}\,(\vec{b} - \vec{a}) \wedge (\vec{c} - \vec{a}) = S_{ABC},$$

Тому є справедливою така рівність $L + Q + G = S$. (15)

Далі, оскільки $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$– три вектори, які лежать в одній площині, то будь-який із них виражається через два інші. Нехай, наприклад, $\vec{a} = k\vec{b} + l\vec{c}$. Тоді

$(\vec{b} \wedge \vec{c})\,\vec{a} + (\vec{c} \wedge \vec{a})\,\vec{b} + (\vec{a} \wedge \vec{b})\,\vec{c} = (\vec{b} \wedge \vec{c})\,(k\vec{b} + l\vec{c}) + (\vec{c} \wedge (k\vec{b} + l\vec{c}))\,\vec{b} + ((k\vec{b} + l\vec{c}) \wedge \vec{b})\vec{c} = k\,(\vec{b} \wedge \vec{c})\,\vec{b} + l(\vec{b} \wedge \vec{c})\,\vec{c} + k\,(\vec{c} \wedge \vec{b})\,\vec{b} + l\,(\vec{c} \wedge \vec{c})\,\vec{b} + k\,(\vec{b} \wedge \vec{b})\,\vec{c} + l\,(\vec{c} \wedge \vec{b})\,\vec{c} = l\,(\vec{b} \wedge \vec{c})\,\vec{b} + l\,(\vec{b} \wedge \vec{c})\,\vec{c} - k\,(\vec{b} \wedge \vec{c})\,\vec{b} + \vec{0} + \vec{0} - l\,(\vec{b} \wedge \vec{c})\,\vec{c} = \vec{0}.$

Доведене співвідношення $(\vec{b} \wedge \vec{c})\,\vec{a} + (\vec{c} \wedge \vec{a})\vec{b} + (\vec{a} \wedge \vec{b})\,\vec{c} = 0$ можна записати у вигляді $S_{PBC\vec{a}} + S_{PCA\vec{b}} + S_{PAB\vec{c}} = \vec{0}$, звідси

$$\frac{S_{PBC}}{S_{ABC}}\vec{a} + \frac{S_{APC}}{S_{ABC}}\vec{b} + \frac{S_{ABP}}{S_{ABC}}\vec{c} = \vec{0}.$$

Іншими словами, числа (13) задовольняють співвідношення

$\mu_{1\vec{a}} + \mu_{2\vec{b}} + \mu_{3\vec{c}} = \vec{0}$і, крім того, відношення $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$.

І саме це означає, що числа (13) є барицентричними координатами точки *P*, чим і завершується доведення теореми 5.

Приклад 13. Дано паралелограм *ABCD*; Трикутник *ABC* взятий в якості базисного. Визначити, які Б-координати має вершина *D*.

Розв'язання. Позначимо площу базисного трикутника *ABC* (рис. 14) буквою *S*, а через S_A, S_B, S_C – площі (орієнтовані) трикутників *DBC*, *ADC*, *ABD*. Всі ці трикутники мають чисельно рівні площі, тобто $|S| = |S_A| = |S_B| = |S_C|$. При цьому трикутники *DBC* і *ABD* орієнтовані так само, як і базисний трикутник *ABC*, а трикутник *ADC* орієнтований

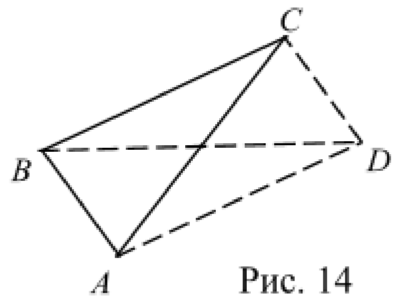


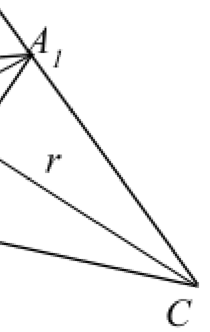
Рис. 14

протилежно, тобто $S_A = S_C = S$, $S_B = -S$. Отже, барицентричні координати точки D дорівнюють

$$\mu_A = \frac{S_A}{S} = 1,\ \mu_B = \frac{S_B}{S} = -1,\ \mu_C = \frac{S_C}{S} = 1.$$

Приклад 14. Через точку M, яка лежить всередині трикутника ABC, і через вершини трикутника проведені прямі, які перетинають протилежні сторони в точках A_1, B_1, C_1. Нехай площі трикутників, які відтинаються прямими B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 від трикутника ABC, рівні відповідно p, q, r. Доведемо теорему Мебіуса: площа x трикутника $A_1B_1C_1$ задовольняє кубічне рівняння

$$x^3 + (p + q + r)x^2 - 4pqr = 0.$$



Розв'язання. Нехай (p_1; p_2; p_3) – барицентричні координати точки M; S_1, S_2, S_3, S – площі трикутників MBC, AMC, AMB, ABC; S_{11}, S_{22}, S_{33} – площі трикутників MB_1C_1, A_1MC_1, A_1B_1M (рис. 15). Тоді

$$x = S_{11} + S_{22} + S_{33};$$

$$\frac{S_{11}}{S_1} = \frac{|MB_1|\bullet|MC_1|}{|MB|\bullet|MC|} = \frac{p_2}{p_1+p_3} \bullet \frac{p_3}{p_1+p_2};$$

$$S_{11} = \frac{S_{11}}{S_1} \bullet \frac{S_1}{S} \cdot S = \frac{p_1p_2p_3}{(p_1+p_3)(p_1+p_2)} \cdot S.$$

Записавши аналогічні формули для S_{22} і S_{33}, отримаємо із співвідношення $x = S_{11} + S_{22} + S_{33}$

$$x = \frac{2p_1p_2p_3}{(p_1+p_2)(p_2+p_3)(p_3+p_1)} S. \qquad (16)$$

З другого боку,

$$p = \frac{p}{S} \cdot S = \frac{|AC_1|\bullet|AB_1|}{|AB|\bullet|AC|} \cdot S,$$

звідки

$$p = \frac{p_2}{p_1+p_3} \bullet \frac{p_3}{p_1+p_2} \cdot S.$$

Записавши аналогічні вирази для q і r, отримаємо

$$pqr = 1/4 \cdot x^2 S,\ S = p + q + r + x.$$

З двох останніх співвідношень випливає, що x задовольняє вказане кубічне рівняння.

<u>Теорема 6</u>. Нехай точки P, Q, R мають відносно базисного трикутника $A_1A_2A_3$ барицентричні координати (p_1; p_2; p_3), (q_1; q_2; q_3), (r_1; r_2; r_3). Тоді для орієнтованих площ справедлива формула

$$S_{PQR} = ((p_1q_2 - p_2q_1)r_3 + (q_1r_2 - q_2r_1)p_3 + (r_1p_2 - r_2p_1)q_3S_{ABC}. \qquad (17)$$

Доведення. Для довільної точки O маємо

$$\vec{OP} = p_1\vec{OA_1} + p_2\vec{OA_2} + p_3\vec{OA_3},\ \vec{OQ} = q_1\vec{OA_1} + q_2\vec{OA_2} + q_3\vec{OA_3},$$

звідки

$$\vec{PQ} = (q_1 - p_1)\,\vec{OA_1} + (q_2 - p_2)\,\vec{OA_2} + (q_3 - p_3)\,\vec{OA_3}.$$

Припустивши, що $O = A_3$, знаходимо

$$\vec{PQ} = (q_1 - p_1)\,\vec{A_3A_1} + (q_2 - p_2)\,\vec{A_3A_2}.$$

Аналогічно,

$$\vec{PR} = (r_1 - p_1)\,\vec{A_3A_1} + (r_2 - p_2)\,\vec{A_3A_2}.$$

Тому для орієнтованої площі трикутника PQR отримаємо

$$S_{PQR} = \frac{1}{2}\vec{PQ} \wedge \vec{PR} = \frac{1}{2}(q_1 - p_1)(r_2 - p_2)\vec{A_3A_1} \wedge \vec{A_3A_2} +$$
$$+\frac{1}{2}(q_2 - p_1)(r_1 - p_1)\vec{A_3A_2} \wedge \vec{A_3A_1}.$$

Оскільки $S_{ABC} = \vec{A_3A_1} \wedge \vec{A_3A_2} = -\vec{A_3A_2} \wedge \vec{A_3A_1}$, то звідси знаходимо

$$S_{PQR} = ((q_1 - p_1)(r_2 - p_2) - (q_2 - p_2)(r_1 - p_1))S_{ABC} =$$
$$= ((p_1q_2 - p_2q_1) + (q_1r_2 - q_2r_1) + (r_1p_2 - r_2p_1)S_{ABC}.$$

Нарешті, помноживши перший доданок на число $r_1 + r_2 + r_3$ (яке рівне одиниці), другий на $p_1 + p_2 + p_3$, а третє на $q_1 + q_2 + q_3$, отримаємо формулу (17).

3.3. Рівняння ліній в барицентричних координатах

В цьому пункті ми розглянемо питання про задання прямих та кіл у вигляді рівнянь в барицентричних координатах. Однак, спочатку обговоримо можливість заміни базисного трикутника.

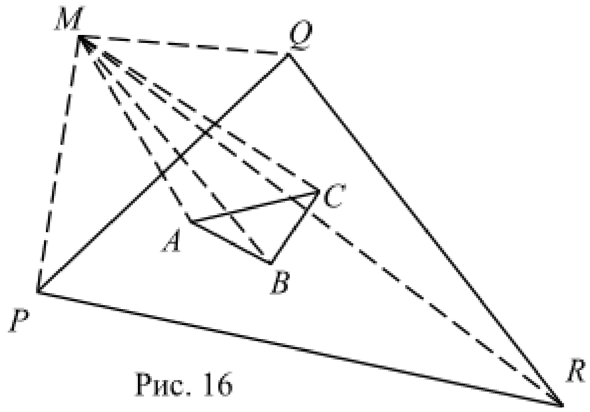


Рис. 16

Нехай відомі Б-координати $(x;\ y;\ z)$ деякої точки M (рис. 16) відносно даного базисного трикутника PQR, який назвемо «старим». Нехай ABC – інший, «новий» базисний трикутник, і нам відомі Б-координати «старих» вершин P, Q, R відносно нового базисного трикутника $(p_1;\ p_2;\ p_3)$, $(q_1;\ q_2;\ q_3)$, $(r_1;\ r_2;\ r_3)$. Як знайти Б-координати $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ точки M відносно нового базисного трикутника?

Рівняння, яке описується цією задачею, можна записати в скорочених позначеннях

$$M = xP + yQ + zR = x\,(p_1A + p_2B + p_3C) + y\,(q_1A + q_2B + q_3C) + z\,(r_1A + r_2B +$$

$+ r_3C) = (p_1x + q_1y + r_1z)\, A + (p_2x + q_2y + r_2z)\, B + (p_3x + q_3y + r_3z)\, C$.

Таким чином,

$$x_1 = p_1x + q_1y + r_1z;\ y_1 = p_2x + q_2y + r_2z;\ z_1 = p_3x + q_3y + r_3z. \qquad (18)$$

Приклад 15. В трикутнику *ABC* вибрані середини сторін *P, Q, R*. Відносно трикутника *PQR* точка *M* має Б-координати $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{6}\right)$. Визначити, які Б-координати має точка *M* відносно трикутника *ABC*.

Розв'язання. «Нові» Б-координати вершин *P, Q, R*, очевидно, такі:

$$P\left(0; \frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right),\ Q\left(\frac{1}{2}; 0;\ \frac{1}{2}\right),\ R\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}; 0\right).$$

«Старі» Б-координати точки *M* відомі: $M\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{6}\right)$. За формулами (18) отримаємо:

$$x^{'} = 0\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{6} = \frac{1}{4};$$

$$y^{'} = \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{6} = \frac{1}{3};$$

$$z^{'} = \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{6} = \frac{5}{12};$$

Отже, «нові» Б-координати точки *M* такі: $\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{3};\ \frac{5}{12}\right)$.

Приклад 16. Довести, що якщо до кола, вписаного в трикутник *ABC*, проведена дотична, яка перетинає сторони *CA* і *CB* трикутника в точках A_1 і B_1, то довжини *v* і *u* відрізків CA_1 і CB_1 зв'язані з довжинами *a*, *b*, *c* сторін трикутника залежністю

$$(a + b + c)\, vu - 2ab\, (u + v) + ab\, (a + b - c) = 0.$$

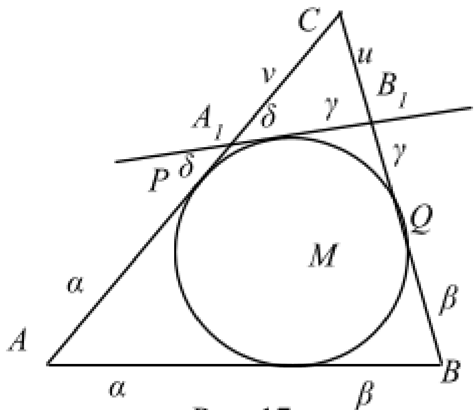


Рис. 17

Розв'язання. Нехай *P* і *Q* – точки дотику сторін *CA* і *CB* з вписаним колом; α, β, γ, δ – довжини відрізків дотичних, проведених до кола із точок *A*, *B*, A_1, B_1 (рис. 17).

Приймемо трикутник A_1B_1C за базисний. Тоді (див. приклад 8) центр *M* кола має Б-координати (ku; kv; $-k(\gamma + \delta)$), де $k = \frac{1}{u+v-\gamma-\delta}$. Легко вказати Б-координати точок A_1, B_1, *C* відносно трикутника *ABC*:

$$A_1\left(\frac{v}{b}; 0;\ \frac{\alpha+\delta}{b}\right),\ B_1\left(0;\ \frac{u}{a};\ \frac{\beta+\gamma}{a}\right),\ C(0; 0; 1).$$

Тому (див. формули 20) точка *M* має відносно трикутника *ABC* такі Б-координати:

$$x = \frac{kuv}{b},\ y = \frac{kuv}{a},\ z = 1 - x - y.$$

З іншого боку, точка M – центр кола, вписаного в трикутник ABC, – має відносно трикутника ABC такі Б-координати: $M(la;\ lb;\ lc)$, де $l = \frac{1}{a+b+c}$. порівнявши перші Б-координати, отримаємо $\frac{kuv}{b} = la$, тобто

$$(a + b + c)\ uv = (u + v - \gamma - \delta)\ ab.$$

Зауваживши, що

$\gamma + \delta = (b - v - \alpha) + (a - u - \beta) = a + b - (u + v) - c = (a + b - c) - (u + v)$,

приходимо до потрібної рівності.

<u>Теорема 7</u>. Нехай заданий базисний трикутник $A_1A_2A_3$. Довільна пряма, яка лежить в площині цього трикутника, задається в барицентричних координатах однорідним рівнянням першого степеня

$$a\mu_1 + b\mu_2 + c\mu_3 = 0, \tag{19}$$

в якому не всі коефіцієнти a, b, c рівні між собою. Навпаки, довільне рівняння (19), в якому не всі коефіцієнти рівні між собою, визначає деяку пряму.

Перш ніж довести цю теорему, пояснимо, чому всі коефіцієнти a, b, c не можуть бути рівні між собою. Насправді, припустимо, що $a = b = c$, тобто ми маємо рівняння

$$a\mu_1 + a\mu_2 + a\mu_3 = 0. \tag{20}$$

При $a \neq 0$ це означає, що $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$, і жодна точка це рівняння не задовольняє (оскільки повинно бути $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$). Якщо ж $a = 0$, то довільна точка площини задовольняє рівняння (20). Таким чином, рівняння (20) (тобто рівняння (19) при $a = b = c$) визначає або порожню множину, або всю площину.

Перейдемо тепер до *доведення теореми*. Нехай l – деяка пряма в площині трикутника $A_1A_2A_3$. Візьмемо дві точки A, B, які лежать на цій прямій, і точку C, яка не лежить на ній. Відносно базисного трикутника ABC можна розглянути «нові» барицентричні координати ν_1, ν_2, ν_3, і в цих координатах пряма l (яка містить сторону AB «нового» базисного трикутника ABC) описується рівнянням $\nu_3 = 0$. Але в силу формул (18) рівняння $\nu_3 = 0$ записується в «старих» барицентричних координатах у вигляді

$$p_3\mu_1 + q_3\mu_2 + r_3\mu_3 = 0,$$

тобто рівнянням вигляду (19) при цьому коефіцієнти p_3, q_3, r_3 не всі рівні між собою.

Навпаки, нехай задано рівняння (19), в якому не всі коефіцієнти a, b, c рівні між собою; нехай, скажімо, $a \neq b$. Нам потрібно знайти множину всіх очок, барицентричні координати яких задовольняють рівняння (19). Ми знаємо, що барицентричні координати довільної точки задовольняють співвідношення

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1 \tag{21}$$

Віднімаючи від цього співвідношення, помноженого на a, рівність (19), отримаємо

$$(a - b)\ \mu_2 + (a - c)\ \mu_3 = a.$$

Тепер неважко знайти точки, барицентричні координати яких задовольняють обидва співвідношення (19), (21). Наприклад, при $\mu_3 = 0$

отримаємо $\mu_2 = \frac{a}{a-b}$,і знаходимо точку$A\left(\frac{-b}{a-b}; \frac{a}{a-b}; 0\right)$, а при $\mu_3 = 1$ отримаємо $\mu_2 = \frac{c}{a-b}$і знаходимо точку $B\left(\frac{-c}{a-b}; \frac{c}{a-b}; 1\right)$.В силу раніше доведеного існують такі числа a_1, b_1, c_1, не всі рівні між собою, що пряма AB описується рівнянням

$$a_1\mu_1 + b_1\mu_2 + c_1\mu_3 = 0. \tag{22}$$

Зокрема, це рівняння задовольняють точки A і B,звідки отримаємо

$$-a_1b + b_1a = 0, -a_1c + b_1c + c_1(a-b) \quad (23)$$

Оскільки $a \neq b$, то хоча б одне із чисел a, b відмінне від нуля; нехай, скажемо, $a \neq 0$. Тоді існує таке числоk, що $a_1 = ka$, і із першого рівняння (23) отримаємо $-kab + b_1a = 0$, звідки (враховуючи, що $a \neq 0$) $b_1 = kb$. Нарешті, підставивши ці значення a_1 і b_1 в друге рівняння (23), отримаємо $-kac + kbc + c_1(a-b) = 0$, звідки (враховуючи, що $a - b \neq 0$) $c_1 = kc$. Отже, $a_1 = ka$, $b_1 = kb$, $c_1 = kc$; при цьому $k \neq 0$. Але тоді зрозуміло, що рівняння (22) (тобто рівняння прямої AB)отримується із (19) множенням на відмінний від нуля множник, і тому (19) також є рівнянням прямої AB.

Зауваження. Коефіцієнтам a, b,c у рівнянні прямої (19) можна надати наочний геометричний зміст. Опустимо із вершин координатного трикутника$A_1A_2A_3$ (рис. 18) перпендикуляри на пряму l, задану рівнянням (19), і нехай A_{11}, A_{22}, A_{33} – основи цих перпендикулярів. Припустимо, що пряма l не проходить через вершини трикутника $A_1A_2A_3$ і не паралельна A_1A_2, тобто перетинає пряму A_1A_2 в деякій точці P, нехай $(x_0; y_0; 0)$ – її Б-координати. Тоді P – центр мас матеріальних точок x_0A_1 і y_0A_2, і тому

$$x_0\vec{PA_1} + y_0\vec{PA_2} = \vec{0}.$$

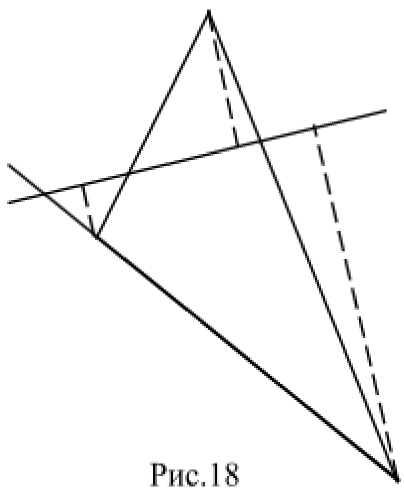


Рис.18

Далі, в силу гомотетичності трикутників PA_1A_{11}і PA_2A_{22}маємо

$$\frac{|\vec{PA_1}|}{|\vec{PA_2}|} = \frac{|\vec{A_1A_{11}}|}{|\vec{A_2A_{22}}|}.$$

Нарешті, оскільки точка P $(x_0; y_0; 0)$ лежить на прямій l, то

$$ax_0 + by_0 = 0, \ \frac{a}{b} = -\frac{y_0}{x_0}.$$

Із записаних співвідношень випливає

$$\frac{a}{b} = \frac{|\vec{A_1A_{11}}|}{|\vec{A_2A_{22}}|}.$$

Легко перевірити, що це співвідношення правильне і тоді, коли пряма l паралельна (A_1A_2) або проходить через деяку вершину трикутника $A_1A_2A_3$. Аналогічними міркуваннями переконаємось, що

$$\frac{b}{c} = \frac{\left|A_2\vec{A}_{22}\right|}{\left|A_3\vec{A}_{33}\right|},$$

і, тому $a : b : c = \left|A_1\vec{A}_{11}\right| : \left|A_2\vec{A}_{22}\right| : \left|A_3\vec{A}_{33}\right|$.

Ми прийшли до цього співвідношення у припущенні, що прямі A_1A_{11}, A_2A_{22}, A_3A_{33} перпендикулярні прямій l, але легко переконатися, що воно правильне і тоді, коли паралельні прямі A_1A_{11}, A_2A_{22}, A_3A_{33} перетинають пряму l під довільним кутом φ.

Приклад 17. Доведемо теорему Гауса: якщо протилежні сторони чотирикутника при продовженні попарно перетинаються, то середина відрізка, який з'єднує точки перетину продовжених протилежних сторін, лежить на одній прямій із серединами діагоналей чотирикутника.

Розв'язання. Нехай S і T – середини діагоналей PQ і CM чотирикутника $CPMQ$ і F – середина відрізка AB (рис. 19). Позначимо через $(m_1;\ m_2;\ m_3)$ барицентричні координати точки M відносно базисного трикутника ABC. Тоді маємо наступні Б-координати точок:

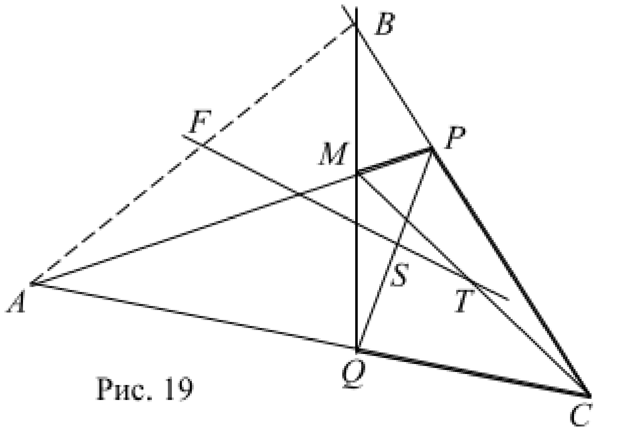


Рис. 19

$$A(1;0;0),\ B(0;1;0),\ C(0;0;1),\ E\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};0\right),$$

$$M\left(m_1;\ m_2;\ m_3\right),\ T\left(\frac{m_1}{2};\ \frac{m_2}{2};\ \frac{m_3+1}{2}\right)$$

$$P\left(0;\ \frac{m_2}{m_2+m_3};\ \frac{m_3}{m_2+m_3}\right),\ Q\left(\frac{m_1}{m_1+m_3};0;\ \frac{m_3}{m_1+m_3}\right),$$

$$S\left(\frac{m_1}{2\left(m_1+m_3\right)};\ \frac{m_2}{2\left(m_2+m_3\right)};\ \frac{m_3\left(1+m_3\right)}{2\left(m_1+m_3\right)\left(m_2+m_3\right)}\right).$$

Нехай рівняння прямої FT має вигляд $a\mu_1 + b\mu_2 + c\mu_3 = 0$. Оскільки точки F і T лежать на цій прямій, то маємо

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = 0,\ \frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2} + \frac{m_3+1}{2} = 0,$$

Звідки $b = -a$, $(m_3 + 1)\ c = (m_2 - m_1)\ a$. Ми можемо вважати, що $a = m_3 + 1$, $b = -(m_3 + 1)$, $c = m_2 - m_1$(оскільки коефіцієнти рівняння прямої визначені лише з точністю до спільного множника), тобто рівняння прямої FT має вигляд

$(m_3 + 1)\ (\mu_1 - \mu_2) + (m_2 - m_1)\ \mu_3 = 0.$

Безпосередньо перевіряється, що при підстановці замість μ_1, μ_2,μ_3 координат точки S це співвідношення виконується, тобто $S\in (FT)$.

За допомогою барицентричних координат можна записувати рівняння не тільки прямих, але й інших ліній. В наступній теоремі описується рівняння кола.

Теорема 8. Нехай a_1, a_2, a_3– довжини сторін базисного трикутника $A_1A_2A_3$, і нехайQ – точка з барицентричними координатами (q_1; q_2; q_3), аr – додатне число. Коло Г, яке має центр Q і радіус r, описується в барицентричних координатах рівнянням

$$a_1^2(\mu_2 - q_2)(\mu_3 - q_3) + a_2^2(\mu_1 - q_1)(\mu_3 - q_3) + a_3^2(\mu_1 - q_1)(\mu_2 - q_2) + r^2 = 0 \quad (24)$$

тобто точка з барицентричними координатами μ_1, μ_2, μ_3 в тоді і тільки тоді належить колу Г, коли справедлива рівність (24).

Доведення. Точка P (μ_1; μ_2; μ_3) тоді і тільки тоді належить колу Г, якщо справедлива рівність $|PQ| = r$, тобто $-|PQ|^2 + r^2 = 0$. Враховуючи співвідношення (12), ми отримуємо написане вище рівняння кола.

3.4. Барицентричні координати в просторі

Виберемо в просторі деякий тетраедр $A_1A_2A_3A_4$, який надалі будемо називати базисним (або координатним). При довільномунавантаженні чотирьох вершин тетраедра дійсними масами m_1, m_2, m_3, m_4 з ненульовою сумою однозначно визначена в просторі точка, яке є центром цих матеріальних точок, і навпаки, для довільної точки M можна підібрати для вершин тетраедра такі дійсні маси m_1, m_2, m_3, m_4 із сумою 1, щоб центром цих мас виявилась точка M. це доводиться так як і на площині (теорема 4). Такі числа m_1, m_2, m_3, m_4 і будемо називати барицентричними координатами точки M.

Схоже до того як барицентричні координати відносно трикутника можуть бути виражені через орієнтовані площі деяких трикутників, так і в просторі барицентричні координати точки M відносно тетраедра $A_1A_2A_3A_4$ можуть бути виражені через деякі об'єми. Нехай спочатку точка M лежить всередині базисного тетраедра $A_1A_2A_3A_4$. Позначимо через v об'єм цього тетраедра, а через v_1, v_2, v_3, v_4– об'єми тетраедрів $MA_2A_3A_4$, $A_1MA_3A_4$, $A_1A_2MA_4$, $A_1A_2A_3M$. Тоді, як буде доведено нижче, Б-координатами точки M будуть числа

$$m_1 = \frac{v_1}{v},\quad m_2 = \frac{v_2}{v},\quad m_3 = \frac{v_3}{v},\quad m_4 = \frac{v_4}{v}. \quad (25)$$

Якщо ж M – довільна точка простору, то формули (25)залишаться справедливими, якщо під v_1, v_2, v_3, v_4 розуміти орієнтовані об'єми відповідних тетраедрів, тобто їх об'єми, взяті з деякими знаками. Це в даному випадку можна пояснити так: орієнтований об'єм v базисного тетраедра вважатимемо додатним; орієнтований об'єм v_1 тетраедра $MA_2A_3A_4$ будемо вважати додатним, якщо тетраедр$MA_2A_3A_4$ розташований з того ж боку площини $A_2A_3A_4$, що і базисний тетраедр $A_1A_2A_3A_4$, і від'ємним, якщо тетраедр $MA_2A_3A_4$ і базисний тетраедр розташовані по різні боки від площини $A_2A_3A_4$. Аналогічно визначаються орієнтовані об'єми v_2, v_3, v_4 тетраедрів $A_1MA_3A_4$, $A_1A_2MA_4$, $A_1A_2A_3M$.

Доведення формул (25) зручно провести за допомогою поняття внутрішнього (або змішаного) добутку трьох векторів у просторі. Нехай $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – три вектори в просторі, задані своїми координатами в деякій прямокутній системі:

$$\vec{a}(a_1; a_2; a_3),\ \vec{b}\,(b_1; b_2; b_3), \vec{c}\,(c_1; c_2; c_3).$$

Визначник, складений із координат цих векторів, назвемо зовнішнім добутком векторів, які розглядаються, і позначимо його через $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Із властивостей визначників безпосередньо випливає, що справедливі наступні рівності (їх можна називати аксіомами зовнішнього добутку трьох векторів):

1) $((\vec{a}_1 + \vec{a}_2),\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c}) + (\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})$;

2) $((k\vec{a}),\vec{b},\vec{c}) = k\,(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$;

3) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b},\vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$

(зокрема, при перестановці довільних двох векторів зовнішній добуток змінює знак);

4) $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3) = 1$, де $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ – одиничні вектори, які мають напрямки осей прямокутної системи, яка розглядається.

Із перших трьох властивостей випливає, що властивості, аналогічні 1) і 2), справедливі по відношенню не тільки до першого співмножника, але і до інших; наприклад

$(\vec{a}, (\vec{b}_1 + \vec{b}_2),\vec{c}) = (\vec{a},\vec{b}_1,\vec{c}) + (\vec{a},\vec{b}_2,\vec{c})$.

Далі, якщо два співмножники співпадають, то зовнішній добуток рівний нулю; наприклад, $(\vec{a},\vec{b},\vec{b}) = 0$.

Виявляється, що в просторі справедлива формула, аналогічна (16). А саме, говоритимемо, що трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ орієнтованадодатно, якщо $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) > 0$, і від'ємно, якщо $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) < 0$. (При застосуванні на практиці, наприклад, у фізиці однакову чи протилежну орієнтацію двох трійок векторів визначають за допомогою правила правої руки). Якщо тепер P – паралелепіпед, побудований на трійці векторів$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (рис. 20), то ми домовимося брати його об’єм зі знаком плюс, якщо трійка$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$орієнтовано додатно, й зі знаком мінус, якщо ця трійка орієнтована від'ємно; це і дає орієнтований об’єм паралелепіпеда, який розглядається. Можна записати формулу

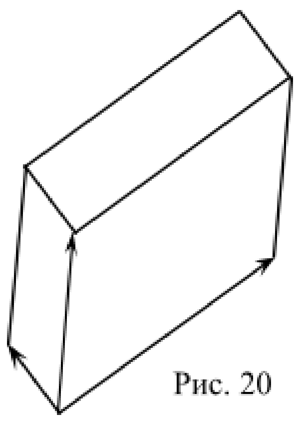


Рис. 20

$$v = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}), \qquad (26)$$

де, v – орієнтований об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Нехай тепер $ABCD$ – довільний тетраедр, вершини якого задані саме в такому порядку: A, B, C, D. Об’єм цього тетраедра дорівнює $1/6\,|v|$, де v – об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ (рис. 21). Дійсно, об’єм цього тетраедра дорівнює $1/3sh$, де s – площа трикутника ABC і h – відповідна висота, а об’єм паралелепіпеда дорівнює $(2s)\,h$, оскільки у цього паралелепіпеда та ж висота, а основа має вдвічі більшу площу. Таким чином, об’єм тетраедра до[illegible]

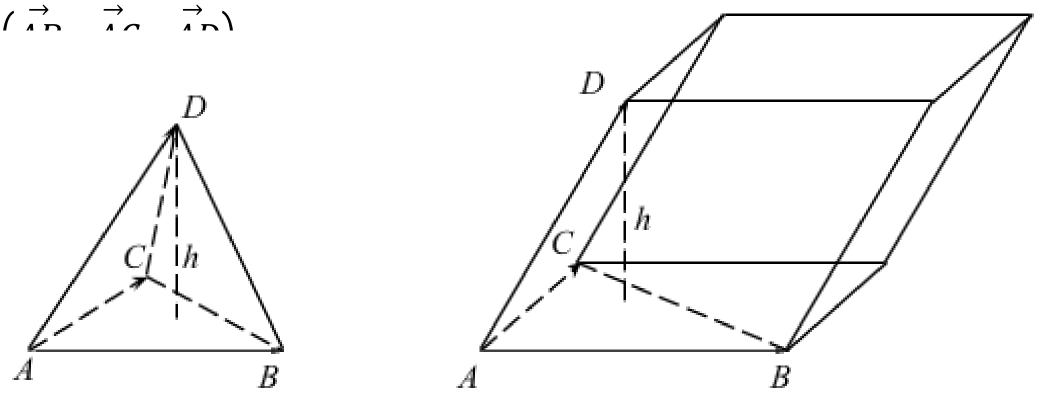


Рис. 21

Будемо називати число $\frac{1}{6}\left(\vec{AB},\ \vec{AC},\ \vec{AD}\right)$ орієнтованим об’ємом тетраедра $ABCD$ і домовимося позначати його через v_{ABCD}.

Зауважимо, що при перестановці довільних двох вершин орієнтований об’єм тетраедра змінює знак, наприклад, $v_{ABCD} = -v_{BACD}$. Дійсно,

$v_{BACD} = (\vec{BA},\ \vec{BC},\ \vec{BD}) = -(\vec{AB}, (\vec{AC} - \vec{AB}),\ (\vec{AD} - \vec{AB}))$;

розкриваючи дужки і враховуючи, що зовнішній добуток з двома однаковими співмножниками дорівнює нулю. Отримаємо

$v_{BACD} = -(\vec{AB},\ \vec{AC},\ \vec{AD}) = -\,v_{ABCD}$.

Тепер доведення формул (27) одержується приблизно так, як і на площині. Нехай $ABCD$ – базисний тетраедр і M – довільна точка простору. Позначимо вектори $\vec{MA}$, $\vec{MB}$, $\vec{MC}$, $\vec{MD}$ через $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$. Тоді для орієнтованих об’ємів справедливі співвідношення

$$v_{MBCD} + v_{AMCD} + v_{ABMD} + v_{ABCM} = v_{MBCD} - v_{MACD} + v_{MABD} - v_{MABC} =$$
$$= \frac{1}{6}\left(\vec{b}, \vec{c},\ \vec{d}\right) - \frac{1}{6}\left(\vec{a},\ \vec{c}, \vec{d}\right) + \frac{1}{6}\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\right) - \frac{1}{6}\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right);$$
$$v_{ABCD} = \frac{1}{6}\left(\vec{AB},\ \vec{AC},\ \vec{AD}\right) = \frac{1}{6}\left(\left(\vec{b} - \vec{a}\right), \left(\vec{c} - \vec{a}\right), \left(\vec{d} - \vec{a}\right)\right).$$

Розкриваючи дужки в останньому виразі, переконуємось, що праві частини в обох рівностях співпадають, тобто

$$v_{ABCD} = v_{MBCD} + v_{AMCD} + v_{ABMD} + v_{ABCM}. \qquad (27)$$

Далі, оскільки $\vec{a}$, $\vec{b}, \vec{c}$, $\vec{d}$ – чотири вектори простору, то будь-який із них виражається через три інші. Нехай, наприклад, $\vec{a} = k\vec{b} + l\vec{c} + m\vec{d}$. Тоді

$$(\vec{b},\vec{c},\vec{d})\,\vec{a} - (\vec{a},\vec{c},\vec{d})\,\vec{b} + (\vec{a},\vec{b},\vec{d})\,\vec{c} - (\vec{a},\vec{b},\vec{c})\,\vec{d} =$$
$$=(\vec{b},\vec{c},\vec{d})\,(k\vec{b} + l\vec{c} + m\vec{d}) - ((k\vec{b} + l\vec{c} + m\vec{d})\,\vec{c},\vec{d})\,\vec{b} +$$
$$+ ((k\vec{b} + l\vec{c} + m\vec{d})\,\vec{b},\vec{d})\,\vec{c} - ((k\vec{b} + l\vec{c} + m\vec{d}),\vec{b},\vec{c})\,\vec{d}.$$

Розкриваючи дужки в правій частині, отримуємо $\vec{0}$. Доведене таким чином співвідношення

$$(\vec{b},\vec{c}, \vec{d})\,\vec{a} - (\vec{a},\vec{c},\vec{d})\,\vec{b} + (\vec{a},\vec{b},\vec{d})\,\vec{c} - (\vec{a},\vec{b},\vec{c})\,\vec{d} = \vec{0}$$

можна (помноживши його на $1/\ 6v_{ABCD}$) переписати у вигляді

$$\frac{v_{MBCD}}{v_{ABCD}}\vec{a} + \frac{v_{AMCD}}{v_{ABCD}}\vec{b} + \frac{v_{ABMD}}{v_{ABCD}}\vec{c} + \frac{v_{ABCM}}{v_{ABCD}}\vec{d} = \vec{0}.$$

Іншими словами, числа (25) задовольняють співвідношення

$$\mu_1\vec{a} + \mu_2\vec{b} + \mu_3\vec{c} + \mu_4\vec{d} = \vec{0}$$

і, крім того (в силу рівності (27)), співвідношення $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 1$.

Але це і означає, що числа (25) є барицентричними координатами точки M.

Приклад 18. Знайдемо барицентричні координати центра O кулі, вписаної в базисний тетраедр $A_1A_2A_3A_4$.

Розв'язання. Нехай r – радіус вписаної кулі; s_1, s_2, s_3, s_4– площі граней, протилежних вершинам A_1, A_2, A_3, A_4. Точка O лежить, очевидно, всередині базисного тетраедра. Об'єми v_1, v_2, v_3, v_4, v тетраедрів $OA_2A_3A_4$, $A_1OA_3A_4$, $A_1A_2OA_4$, $A_1A_2A_3O$, $A_1A_2A_3A_4$ мають наступні значення:

$v_1 = 1/3s_1r$, $v_2 = 1/3s_2r$, $v_3 = 1/3s_3r$, $v_4 = 1/3s_4r$, $v = 1/3sr$,

(s – повна поверхня тетраедра). Тепер барицентричні координати точки O знаходимо за формулами (25)

$$O\left(\frac{s_1}{s};\ \frac{s_2}{s};\ \frac{s_3}{s};\frac{s_4}{s}\right).$$

Зауважимо, що користуючись формулою Лагранжа, можна, міркуючи аналогічно тому, як це було зроблено в плоскому випадку (див. (12)), отримати формули для відстані між двома точками P і Q в просторі, якщо відомі їх Б-координати (p_1, p_2, p_3, p_4) і (q_1, q_2, q_3, q_4):

$$|PQ|^2 =- \sum_{1\le i<j\le 4}\left(p_i - q_i\right)(p_j - q_j)\left|A_iA_j\right|^2. \qquad (28)$$

Приклад 19. Відомі довжини всіх ребер тетраедра $A_1A_2A_3A_4$.Обчислимо довжину відрізка, який з'єднує вершину A_4 з центроїдом трикутника $A_1A_2A_3$.

Розв'язання. Приймемо $A_1A_2A_3A_4$ за базисний тетраедр. В даному випадку P = (0; 0; 0; 1), $Q = A_{44}$(1/3; 1/3; 1/3; 0). За формулою (28) знаходимо

$$\left|A_4A_{44}\right|^2 = \frac{1}{9}\left(3(\left|A_4A_1\right|^2 + \left|A_4A_2\right|^2 + \left|A_4A_3\right|^2\right) -$$
$$-\ \left(\left|A_1A_2\right|^2 + \left|A_1A_3\right|^2 + \left|A_2A_3\right|^2\right)).$$

3.5. Барицентричні координати в багатовимірних просторах

При розв’язуванні системи двох рівнянь першого степеня з двома невідомими вище був використаний зовнішній добуток двох векторів на площині. У випаду трьох рівнянь з трьома невідомими вже потрібно розглядати вектори в тривимірному просторі. При розв’язанні системи n лінійних рівнянь з n невідомими потрібно буде для отримання геометричної інтерпретації використовувати n-вимірний простір. Так потреби алгебри диктують необхідність розширення наших геометричних уявлень, необхідність розглядання просторів, які мають розмірність більше ніж три.

В цьому пункті ми розглянемо найпростіші факти геометрії n-вимірного простору і розглянемо барицентричні координати в n-вимірному просторі.

Якщо на площині задана прямокутна система координат, то кожен вектор задається двома координатами: $\vec{a} = (x;\ y)$. В тривимірному просторі вектор кожен вектор задається трьома координатами: $\vec{a}= (x;\ y;\ z)$. Аналогічно з цим будемо говорити, що в n-вимірному просторі вектор задається у вигляді кортежу (скінченної послідовності) $(x_1;\ x_2;\ \dots\ ;\ x_n)$, який складається із n дійсних чисел, які називаються координатами цього вектора. Запис $\vec{a}=(\ x_1;\ x_2;\ \dots\ ;\ x_n)$ означає, що череза позначений вектор з координатами $x_1;\ x_2;\ \dots\ ;\ x_n$. Множина всіх векторів$(x_1;\ x_2;\ \dots\ ;\ x_n)$ (які отримуються, коли приймають довільні значення) позначається через $\mathbf{R}^n$ і називається n-вимірним простором (а іноді n-вимірним арифметичним простором).

При вивченні геометрії на площині і в тривимірному просторі сума векторів визначалась геометрично, а потім доводилось, що при додаванні векторів їх відповідні координати додаються. Так, на площині, якщо $\vec{a} = (x_1; x_2)$, $\vec{b} = (y_1; y_2)$, то $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2)$. В просторі, якщо $\vec{a}= (x_1; x_2; x_3)$, $\vec{b} = (y_1; y_2; y_3)$, то $\vec{a} +\ \ +\vec{b} = (x_1 + y_1;\ x_2 + y_2;\ x_3 + y_3)$. В n-вимірному просторі $\mathbf{R}^n$(при $n> 3$) у нас немає безпосередніх «геометричних» уявлень, тобто «бачити» фігуру в такому просторі (в буквальному розумінні) не може ніхто. Але аналогічно з площиною і тривимірним простором ми можемо визначити суму векторів у $\mathbf{R}^n$ за допомогою додавання однойменних координат. Іншими словами, сумою векторів

$$\vec{a} = (x_1; x_2; \dots ; x_n), \vec{b} = (y_1; y_2; \dots ; y_n)$$

простору $\mathbf{R}^n$ називається вектор, який має координати

$$(x_1 + y_1; x_2 + y_2; \dots ; x_n + y_n);$$

цей векторпозначається $\vec{a}+ \vec{b}$.

Далі, на площині і в просторі вектор $\vec{a}$ визначається геометрично: довжина вектора$k\vec{a}$ дорівнює $|k|\ |\vec{a}|$, причому вектор $k\vec{a}$ паралельний вектору $\vec{a}$, а напрям його однаковий з напрямом вектора $\vec{a}$при $k> 0$ і протилежний йому при$k< 0$.

Алгебраїчно ж (в координатах) множення вектора$\vec{a}$ на k зводиться до множення всіх координат вектора$\vec{a}$ на k. Іншими словами, на площині: якщо $\vec{a}$= $(x; y)$, то $k\vec{a}$ = $(kx; ky)$ (і аналогічно в просторі: якщо $\vec{a}$ = $(x; y; z)$, то $k\vec{a}$ = $(kx; ky; kz)$. В $\mathbf{R}^n$ поки ми не знаємо, що таке «довжина» вектора і його «напрям», неможна геометрично визначити вектор $k\vec{a}$. Однак, аналогічно до площини і тривимірного простору, ми можемо ввести наступне означення: якщо $\vec{a}$ = $(x_1; x_2; \dots ; x_n)$ – довільний вектор простору $\mathbf{R}^n$ і k – дійсне число,то $k\vec{a}$ є вектором з координатами $(kx_1; kx_2; \dots ; kx_n)$.

Згадаємо тепер, що на площині ми часто розглядаємо одиничні вектори, напрямлені по осях координат. Якщо ці вектори позначити через $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$, то для довільного вектора$\vec{a}$ = $(x; y)$ справедливе співвідношення $\vec{a}$ = $x\vec{e}_1+y\vec{e}_2$. Іншими словами, довільний вектор $\vec{a}$ можна розкласти за векторами $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ і коефіцієнти x, y цього розкладу є координатами вектора$\vec{a}$. Аналогічно і в просторі: якщо $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ – одиничні вектори, які мають напрями осей координат, то для довільного вектора$\vec{a}$ = $(x; y; z)$ справедливе співвідношення $\vec{a}$ = $x\vec{e}_1$ + $y\vec{e}_2$ + +$z\vec{e}_3$.Неважко тепер довести, що в $\mathbf{R}^n$ справедливе аналогічне співвідношення. З цією метою зауважимо, що на площині ми маємо $\vec{e}_1$ = (1; 0), $\vec{e}_2$ = (0; 1) і, аналогічно, в тривимірному просторі $\vec{e}_1$ = (1; 0; 0), $\vec{e}_2$ = (0; 1; 0),$\vec{e}_3$ = (0; 0; 1). Ми можемо ввести в $\mathbf{R}^n$ аналогічні вектори:

$$\vec{e}_1 = (1; 0; \dots ; 0),\ \vec{e}_2 = (0; 1; \dots : 0),\ \dots ,\ \vec{e}_n = (0; 0; \dots ; 1)$$

(тобто у вектора$\vec{e}_i$ на i-му місці стоїть 1, а інші координати рівні нулю); вони називаються одиничними базисними векторами в $\mathbf{R}^n$. Тепер не важко перевірити, що для довільного вектора$\vec{a}$ = $(x_1; x_2; \dots ; x_n)$ в $\mathbf{R}^n$ справедливе співвідношення

$$\vec{a} = x_{1\vec{e}1} + x_{2\vec{e}2} + \dots + x_{n\vec{e}n}\ ,$$

тобто довільний вектор$\vec{a}$ $\in\mathbf{R}^n$ виражається (до того ж однозначно) через базисні вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, … ,$\vec{e}_{\mathrm{n}}$.

Нагадаємо тепер, що на площині (чи в тривимірному просторі) кожним двом точкам A, B зіставляється вектор $\vec{AB}$. Аналогічно з цим і в n-вимірнійгеометрії розглядають точки і вважають, що кожним двом точкам A, B зіставляється деякий вектор $\vec{AB}$, причому виконуються наступні умови:

1) $\vec{AB}$ + $\vec{BC}$ = $\vec{AC}$, для довільних точок A, B, C;

2) для довільної точки A і довільного вектора$\vec{a}$ існує (і при цьому тільки одна) точкаB, для якої $\vec{AB}$ = $\vec{a}$.

Фіксуємо тепер деяку точку O (початок координат). Для довільної точки ми Aможемо розглянути вектор $\vec{OA}$; його координати приймаються за координати точки A, тобто якщо $\vec{OA} = (x_1; x_2; \ldots ;x_n)$, то пишуть також A $(x_1; x_2; \ldots ; x_n)$. Якщо тепер A і B – дві точки з координатами $(x_1; x_2; \ldots ; x_n)$ і $(y_1; y_2; \ldots ; y_n)$, тобто $\vec{OA} = (x_1; x_2; \ldots ; x_n)$, $\vec{OB} = (y_1; y_2; \ldots ; y_n)$, то із рівності$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$ випливає, що вектор $\vec{AB}$ має координати $(y_1 - x_1; y_2 - x_2; \ldots ; y_n - x_n)$.

Визначення цих понять можна дослівно перенести із звичайного двовимірного чи тривимірного простору: матеріальна точка mA в просторі $\mathbf{R}^n$ – це пара, складена із точки A і дійсного числа m (маси цієї матеріальної точки).

Центром мас системи матеріальних точок

$$m_1A_1,\ m_2A_2,\ \ldots\ ,m_pA_p \tag{29}$$

з нульовою сумарною масою$m_1 + m_2 + \ldots + m_p$ називається точкаZ $(z_1; z_2; \ldots ; z_n)$ простору $\mathbf{R}^n$, яка задовольняє умову

$m_1\vec{ZA_1} + m_2\vec{ZA_2} + \ldots + m_p\vec{ZA_p} = \vec{0}$,

або (що рівносильно)

$$\vec{OZ} = \frac{m_1\vec{OA_1} + m_2\vec{OA_2} + \ldots + m_p\vec{OA_p}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_p}.$$

Цю рівність можна записати в скорочених позначеннях:

$$Z = \frac{m_1A_1 + m_2A_2 + \ldots + m_pA_p}{m_1 + m_2 + \ldots + m_p}$$

Звідси видно, що кожна система матеріальних точок у $\mathbf{R}^n$з ненульовою сумарною масою має, і до того ж єдиний, центр мас.

За допомогою поняття центра мас можна визначити у $\mathbf{R}^n$поняття відрізка $[AB]$: це – множина таких точок простору $\mathbf{R}^n$, які можуть служити центрами невід'ємних мас з ненульовою сумою, розміщених у точках A і B. Це можна записати так:

$$[AB] = \left\{Z \in R^n: Z = \frac{m_1A + m_2B}{m_1 + m_2};\ m_1 \geq 0,\ m_2 \geq 0,\ m_1 + m_2 > 0\right\}.$$

Аналогічним визначенням можна ввести поняття прямої (AB):

$$(AB) = \left\{Z \in R^n: Z = \frac{m_1A + m_2B}{m_1 + m_2};\ m_1 + m_2 \neq 0\right\}.$$

Зауважимо, що якщо Z – центр мас системи матеріальних точок (29), то при $k \neq 0$ Zбуде центром мас і системи матеріальних точок $(km_1)\,A_1, (km_2)A_2, \ldots , (km_p)A_p$. Тому ми завжди можемо вважати суму мас рівною одиниці, тобто у визначенні відрізка і прямої можна вважати, що $m_1 + m_2 = 1$. Наприклад,

$[AB] = \{Z \in R^n: Z = m_1A + m_2B;\ m_1 \geq 0, m_2 \geq 0,\ m_1 + m_2 = 1\}$.

Нехай в просторі $\mathbf{R}^n$вибрані декілька точок A_1, A_2, … A_k. Множина всіх точок, які можуть виявитись центрами невід'ємних мас з ненульовою сумою, розміщених в цих точках, будемо називати оболонкою цих точок. Наприклад, оболонка однієї точки співпадає з цією точкою; оболонка двох точок – це відрізок, який їх з’єднує.

Кожну множину точок в $\mathbf{R}^n$ домовимося називати фігурою. Фігура $M \subset \mathbf{R}^n$ називається опеклою, якщо для довільних двох точок $A \in M$ і $B \in M$ весь відрізок $[AB]$ міститься у фігурі M.

<u>Теорема 9</u>. Оболонка декількох точок в $\mathbf{R}^n$ є опуклою.

Доведення. Нехай M– оболонка точок $P_1, \dots, P_k$. Нехай A і B – дві точки фігури M, і нехай C – будь-яка точка відрізка $[AB]$. Тоді можна точки A і B навантажити такими невід'ємними масами m_1 і m_2, $m_1 + m_2 = 1$, що C буде їх центром: $C = m_1A + m_2B$. Оскільки $A \in M$, а M – оболонка точок $P_1, \dots, P_k$, то A – центр невід'ємних мас $\alpha_1, \dots \alpha_k$, $(\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1)$, розміщених відповідно в точках $P_1, \dots, P_k$, тобто $A = \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_k P_k$. Аналогічно можна навантажити точки $P_1, \dots, P_k$ такими масами $\beta_1, \dots, \beta_k$ $(\beta_1 + \dots + \beta_k = 1)$, що їх центром виявиться точка Q, тобто $Q = \beta_1 P_1 + \dots + \beta_k P_k$. Але тоді

$$C = m_1 (\alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_k P_k) + m_2 (\beta_1 P_1 + \dots + \beta_k P_k) = (m_1 \alpha_1 + m_2 \beta_1) P_1 + (m_1 \alpha_2 + m_2 \beta_2) P_2 + \dots + (m_1 \alpha_k + m_2 \beta_k) P_k,$$

причому $(m_1 \alpha_1 + m_2 \beta_1) + \dots + (m_1 \alpha_k + m_2 \beta_k) = m_1 (\alpha_1 + \dots + \alpha_k) + m_2 (\beta_1 + \dots + \beta_k) = m_1 + m_2 = 1$. Таким чином, C – центр деяких невід'ємних мас з ненульовою сумою, розміщених в точках $P_1, \dots, P_k$. Тому, $C \in M$. Отже, із $C \in [AB]$ випливає $C \in M$; значить, M – опукла фігура.

Зауважимо, що в силу цієї теореми замість терміну «оболонка» часто використовують термін «опукла оболонка».

Будемо говорити, що n векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ в просторі $\mathbf{R}^n$ лінійно незалежні, якщо жоден із них не виражається через інші $n - 1$ векторів; наприклад, лінійно незалежними є базисні вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$. Далі, $n + 1$ точку $A_0, A_1, \dots, A_n$ в просторі $\mathbf{R}^n$ будемо називати незалежними, якщо лінійно незалежними є вектори $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}$. Наприклад, якщо $A_1, A_2, \dots, A_n$ – такі точки, що $\overrightarrow{OA_1} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OA_2} = \vec{e}_2$, …, $\overrightarrow{OA_n} = \vec{e}_n$, то точки $O, A_1, A_2, \dots, A_n$ незалежні.

Якщо точки $A_0, A_1, \dots, A_n$ в $\mathbf{R}^n$ незалежні, то їх опукла оболонка називається n-вимірним симплексом, а самі точки $A_0, A_1, \dots, A_n$ називаються вершинами цього симплекса. Наприклад, при $n = 2$ (тобто на площині) симплекс є опуклою оболонкою трьох точок, які не лежать на одній прямій, тобто є трикутником. В тривимірному просторі ($n = 3$) симплекс є випуклою оболонкою чотирьох точок, які не лежать в одній площині, тобто тетраедром. Таким чином, симплекс є багатовимірним узагальненням трикутника і тетраедра.

Позначимо через S симплекс з вершинами $A_0, A_1, \dots, A_n$ в просторі $\mathbf{R}^n$. Оскільки S – опукла оболонка точок $A_0, A_1, \dots, A_n$, то кожна точка P цього симплекса є центром якихось невід'ємних мас (з ненульовою сумою), розміщених у вершинах $A_0, A_1, \dots, A_n$. Ми можемо при цьому вважати (помноживши, якщо потрібно, всі маси на деяке число $k > 0$), що сума мас рівна 1. Позначивши ці невід'ємні маси через $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$, ми отримуємо

$$P = \mu_0 A_0 + \mu_1 A_1 + \dots + \mu_n A_n; \quad \mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_n = 1. \tag{30}$$

Ці числа $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$називається барицентричними координатами точки P відносно базисного симплекса S. Виявляється, що і довільна точка$P \in \mathbf{R}^n$ записується однозначно у вигляді (30) (але тільки коли $P \notin S$, то деякі із чисел $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ будуть від'ємними); доводиться це аналогічно тому, як це було зроблено для площини (див. теорема 4) або для тривимірного простору. Отже, довільна точка $P \in \mathbf{R}^n$ однозначно задається своїми Б-координатами $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ (див. (30)) відносно заданого базисного симплекса $S = [A_0 A_1 \ldots A_n]$.

Так само, як у випадку площини і тривимірного простору, барицентричні координати точки виражаються через зовнішній добуток векторів. Вкажемо, як це робиться.

<u>Теорема 10.</u> В просторі $\mathbf{R}^n$ кожним n векторам $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ (заданим у визначеному порядку) можна зіставити деяке число $\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 \wedge \ldots \wedge \vec{a}_n$(яке називається зовнішнім добутком цих векторів), яке задовольняє наступні чотири аксіоми:

1) $(\vec{a}_1 + \vec{a}'_1) \wedge \vec{a}_2 \wedge \ldots \wedge \vec{a}_n = \vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 \wedge \ldots \wedge \vec{a}_n + \vec{a}'_1 \wedge \vec{a}_2 \wedge \ldots \wedge \vec{a}_n$;

2) $(k\vec{a}_1) \wedge \vec{a}_2 \wedge \ldots \wedge \vec{a}_n = k\,(\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 \wedge \ldots \wedge \vec{a}_n)$;

3) при перестановці довільних двох співмножників зовнішній добуток змінює знак;

4) $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \ldots \wedge \vec{e}_n = 1$.

Вказаними чотирма аксіомами зовнішній добуток векторів в $\mathbf{R}^n$ визначається однозначно.

Доведення. Доведемо спочатку єдиність, тобто припустимо, що операція, яка описується, існує, і покажемо, що вона визначена однозначно. Насправді, запишемо розклад векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ за векторами базису:

$$\{\vec{a}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + \ldots + a_{1n}\vec{e}_n,\ \vec{a}_2 = a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \ldots + a_{2n}\vec{e}_n,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Тут другий індекс у числа a_{ij} відповідає номеру вектора$\vec{a}_j$, а перший індекс – номер координати цього вектора. Таким чином,

$$\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 \wedge \ldots \wedge \vec{a}_n = (a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + \ldots + x_{1n}\vec{e}_n) \wedge (a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \ldots + a_{2n}\vec{e}_n) \wedge \ldots \wedge (a_{n1}\vec{e}_1 + a_{n2}\vec{e}_2 + \ldots + a_{nn}\vec{e}_n).$$

Якщо в правій частині розкрити дужки, то отримаємо суму можливих добутків

$$(a_{i_1 1}\vec{e}_{i_1}) \wedge (a_{i_2 2}\vec{e}_{i_2}) \ \ldots \wedge (a_{i_n n}\vec{e}_{i_n}),$$

де кожен із індексів $i_1, i_2, \ldots, i_n$ може приймати довільні значення $1, 2, \ldots, n$ (тобто із кожної дужки можна взяти довільний із n доданків, які знаходяться в ній). Іншими словами,

$$\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 \wedge \ldots \wedge \vec{a}_n = \sum \left(a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n} \right) \vec{e}_{i_1} \wedge \vec{e}_{i_2} \wedge \ldots \wedge \vec{e}_{i_n}. \tag{31}$$

Але зовнішній добуток з двома однаковими співмножниками дорівнює нулю (це випливає із аксіом). Тому в сумі (31) треба взяти лише такі доданки, в яких всі числа i_1, i_2, … , i_n різні. Але якщо числаi_1, i_2, … , i_n різні, то зовнішній добуток $\vec{e}_{i_1} \wedge \vec{e}_{i_2} \wedge \ldots \wedge \vec{e}_{i_n}$ дорівнює ± 1 (в силу аксіом 3 і 4), причому він повинен дорівнювати + 1, якщо кортеж індексів i_1, i_2, … , i_n може бути зведений до основного кортежу 1, 2, …, n за допомогою парного числа транспозицій (транспозицією називається зміна місцями двох довільних індексів), і повинен дорівнювати – 1 у випадку непарного числа транспозицій). Таким чином,

$$\vec{a}_{1} \wedge \vec{a}_{2} \wedge \ldots \wedge \vec{a}_{n} = \sum \pm a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n}, \quad (32)$$

де сумування поширене на всеможливі кортежі i_1, i_2, … , i_n, які складені із чисел 1, 2, …, n, і знак плюс відповідає парним кортежам (які отримуються із основного кортежу 1, 2, …, n парним числом транспозицій), а знак мінус – непарним. Оскільки число, яке стоїть у правій частині співвідношення (32), однозначно визначене, то звідси і випливає єдиність зовнішнього добутку векторів.

Формула (32) підказує і шлях доведення існування: треба визначити зовнішній добуток $\vec{a}_{1} \wedge \vec{a}_{2} \wedge \ldots \wedge \vec{a}_{n}$ формулою (32) і перевірити, що при такому визначенні він задовольняє аксіоми 1) – 4). Така перевірка не важка. Наприклад, для перевірки аксіоми 2) зауважимо, що в кожному доданку в сумі (32) є рівно один множник вигляду a_{i1}(тобто множник з другим індексом 1). Але множник a_{i1}є i-ю координатою вектора$\vec{a}_1$. При множенні вектора$\vec{a}_1$ на числоk всі його координати помножаться на k, тобто в кожному доданку суми (32) рівно один множник множиться на k, а потім і вся сума множиться на k.

Рівність (32), яка використовується в доведеній теоремі, можна подати за допомогою визначника. Тоді рівність (32) перепишеться у вигляді

$$\vec{a}_{1} \wedge \vec{a}_{2} \wedge \ldots \wedge \vec{a}_{n} =$$

$$\left| a_{11}\, a_{12} \ \ldots \ a_{1n}\, a_{21}\, a_{22} \ \ldots \ a_{2n} \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ a_{n1}\, a_{n2} \ \ldots \ a_{nn} \right| = \sum \pm a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n}.$$

Таким чином, визначник (32) представляє собою «координатний» запис зовнішнього добутку $\vec{a}_{1} \wedge \vec{a}_{2} \wedge \ldots \wedge \vec{a}_{n}$.

Аксіоми 1) – 4) зовнішнього добутку можуть бути переписані за допомогою визначників і виражають основні їх властивості. Так, аксіоми 1) і 2) матимуть вигляд

$$\left| a_{11} + a'_{11}\, a_{12} \ \ldots \ a_{1n}\, a_{21} + a'_{21}\, a_{22} \ \ldots \ a_{2n} \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ a_{n1} + a'_{n1}\, a_{n2} \ \ldots \ a_{nn} \right| = \left| a \right.$$

$$\left| ka_{11}\, a_{12} \ \ldots \ a_{1n}\, ka_{21}\, a_{22} \ \ldots \ a_{2n} \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ ka_{n1}\, a_{n2} \ \ldots \ a_{nn} \right| = k \left| a_{11}\, a_{12} \ \ldots \ a_{1n} \right.$$

а аксіома 3) означає, що при перестановці будь-яких двох стовпців визначник змінює знак. Додамо до цих властивостей ще дві властивості, які легко доводяться: а) при заміні рядків стовпцями (тобто при «симетричному відображенні визначника відносно головної діагоналі») визначник не змінюється; б) якщо всі елементи, які стоять нижче головної діагоналі, рівні нулю, то визначник дорівнює добутку чисел, які стоять на головній діагоналі (і те ж справедливо, якщо всі його елементи вище головної діагоналі рівні нулю).

ВИСНОВКИ

Барицентричні координати введені А. Мебіусом у 1827 році як відповідь на запитання про те, які маси потрібно помістити у вершинах заданого трикутника, щоб деяка наперед задана точка була центром мас цього трикутника. Барицентричні координати є частковим випадком загальних однорідних координат; вони афінно інваріантні.

Використовуючи метод барицентричних координат можна легко й елегантно розв'язувати певні геометричні задачі, для яких класичне розв'язання є досить громіздким. Даний метод можна ілюструвати на факультативних заняттях із геометрії в загальноосвітніх навчальних закладах.

Список використаної літератури

1. http://physics.zfftt.kpi.ua/mod/book/view.php?id=272&chapterid=752
2. https://physics.ed-era.com/vstup_do_dinamiki_ruhu_tila_po_kolu/tsentr_tyazhinnya_ta_tsentr_mas
3. https://www.mathros.net.ua/zadacha-pro-centr-mas-odnoridnogo-trykutnyka.html
4. https://strojsoc.ptu.org.ua/wp-content/uploads/2020/04/07.04-%D0%A1-11-%D0%A4%D1%96%D0%B7%D0%B8%D0%BA%D0%B0-%D0%9B%D0%A0.pdf
5. http://www.zhu.edu.ua/mk_school/mod/resource/view.php?id=9660
6. https://physics.ed-era.com/vstup_do_dinamiki_ruhu_tila_po_kolu/tsentr_tyazhinnya_ta_tsentr_mas
7. https://school.home-task.com/vidi-rivnovagi-centr-mas/
8. https://vseosvita.ua/library/prosti-doslidy-z-fizyky-v-domashnikh-umovakh-doslid-vyznachennia-tsentra-mas-ploskykh-fihur-602271.html