МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЧЕРНІВЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ЮРІЯ ФЕДЬКОВИЧА

Факультет математики та інформатики

Кафедра алгебри та інформатики

Методичні особливості підготовки та проведення шкільних олімпіад з математики в ЗЗСО

Дипломна робота

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Виконала:
студентка 6 курсу 606 групи
Щербань Ангеліна Василівна

Керівник:
кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Боднарук Світлана Богданівна

До захисту допущено
на засіданні кафедри алгебри та інформатики
протокол № 6 від 7 грудня 2022 р.
Зав. кафедрою _______________ доц. Колісник Р.С.

Чернівці – 2022

АНОТАЦІЯ

Дипломна робота викладена на 68 сторінках, містить 2 розділи, 11 підрозділів та 1 додаток. Об’єктом розгляду є процес запровадження та розвитку шкільних олімпіад з математики. Предметом роботи є методика підготовки та проведення учнівських математичних олімпіад в закладах загальної середньої освіти. Метою роботи є обґрунтувати методичні особливості організації шкільних олімпіад з математики в ЗЗСО, розглянути основні типи завдань для учнів 6-11 класів та методи їх розв’язування, розробити матеріали для самостійної підготовки учнів до математичних олімпіад. У першому розділі представлено теоретичні основи проведення шкільних олімпіад в ЗЗСО та проаналізовано результативність Всеукраїнських олімпіад із математики. У другому розділі досліджено методику розв'язування олімпіадних завдань з математики відповідно до їх типів.

За результатами роботи зроблено висновки щодо методичних особливостей підготовки та проведення шкільних олімпіад з математики в ЗЗСО, а також опубліковано тези на науковій конференції.

Ключові слова: шкільна олімпіада, задача, завдання, методика розв'язування.

ANNOTATION

The graduate work is presented on 68 pages, contains 2 chapters, 11 subsections and 1 appendix. The object of consideration is the process of introduction and development of school mathematics olympiads. The subject of the work is the method of preparing and conducting student mathematics Olympiads in general secondary education institutions. The purpose of the work is to justify the methodological features of the organization of school mathematics olympiads in IGSE, to consider the main types of tasks for students of grades 6-11 and methods of solving them, to develop materials for independent preparation of students for mathematics olympiads. The first chapter presents the theoretical foundations of conducting school olympiads in IGSE and analyzed the effectiveness of the All-Ukrainian mathematics olympiads. In the second chapter, the method of solving olympiad problems in mathematics according to their types is investigated.

Based on the results of the work, conclusions were made regarding the methodical features of the preparation and conducting of school mathematics Olympiads in IGSE, also were published at the scientific conference.

Key words: school olympiad, problem, task, solving method.

Дипломна робота містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів наукових досліджень інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_________________________ А.В. Щербань

ЗМІСТ

ВСТУП…………………………………………………………………...4

РОЗДІЛ І ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПІДГОТОВКИ ТА ПРОВЕДЕННЯ ШКІЛЬНИХ ОЛІМПІАД В ЗЗСО.

1.1 Етапи та специфіка проведення Всеукраїнських учнівських олімпіад……………………………………………………………………….…6

1.2 Функції та завдання сучасних математичних олімпіад в ЗЗСО……….10

Висновки до 1-го розділу……………………………………………14

РОЗДІЛ ІІ МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОЛІМПІАДНИХ ЗАВДАНЬ З МАТЕМАТИКИ.

2.1 Типи завдань та деякі методи розв'язування математичних задач олімпіадного характеру………………………………………………….16

2.1.1 Задачі на подільність………………………………………..17

2.1.2 Діофантові рівняння……………………………………….....21

2.1.3 Доведення нерівностей…………………………………….....25

2.1.4 Принцип Діріхле…………………………………………….…28

2.1.5 Задачі на розфарбування…...……………………………….31

2.1.6 Комбінаторика в олімпіадних задачах…………..………………..37

2.2 Завдання шкільного етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики ………………………………………..……………………42

2.3 Розв'язки завдань шкільного етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики…………………………………………………….48

Висновки до 2-го розділу………………………………………………63

ВИСНОВОК…………………………………………………………..65

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ……………………………...67

ДОДАТКИ……………………………………………………………...69

ВСТУП

Актуальність дослідження: розвиток математики є необхідною складовою для науково-технічного прогресу, адже математичні ідеї та методи є фундаментальними в чисельних сферах людської діяльності. Саме тому, одним із найголовніших завдань середньої та вищої освіти є постійний розвиток математичної дисципліни. Проте, в закладах загальної середньої освіти частіше приділяється увага засвоєнню учнями узагальнених навчальних знань та розв'язку типових завдань, що є недостатнім при вивченні математики та розвитку математичних здібностей.

На сьогодні, шкільна олімпіада є найефективнішим способом перевірки ступеня розвитку мислення учнів, а також дуже важливою складовою позакласної роботи вчителя та дитини, яка, в свою чергу, розкриває учнівські здібності, розвиває розумовий потенціал та зацікавленість до предмету.

Учнівська олімпіада, як спосіб навчання для юних математиків є чудовою нагодою покращити свій рівень знань, розширити свій математичний світогляд, опанувати навички розв'язання неординарних завдань, які розвивають логічне мислення, кмітливість, вміння аналізувати. В свою чергу педагог повинен знати методичні особливості підготовки учнів до Всеукраїнських олімпіад, адже від цього буде залежати результат його вихованців. Саме тому, олімпіада – це потужна складова професійного зростання вчителя. Адже сучасні педагоги запроваджують у роботі з своїми вихованцями новітні освітні технології, а також, що не менш важливо, використовують різні форми роботи, чим формують нові знання та вміння у різних сферах людської діяльності.

Досвід проведення та організації шкільних олімпіад з математики в загальному свідчить про їх підготовку на високому рівні. Проте, треба зізнатись, що деякі методичні питання, які пов'язані з відбором та розробкою олімпіадних завдань, підготовкою учнів до предметних олімпіад дослідженні не повністю та потребують дослідження та вивчення.

Об'єкт дослідження: процес запровадження та розвитку шкільних олімпіад з математики.

Предмет дослідження: методика підготовки та проведення учнівських математичних олімпіад в закладах загальної середньої освіти.

Мета дослідження: обґрунтувати методичні особливості організації шкільних олімпіад з математики в ЗЗСО, розглянути основні типи завдань для учнів 6-11 класів та деякі методи їх розв’язування, розробити матеріали для самостійної підготовки учнів до математичних олімпіад.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити наступні завдання:

- опрацювати та узагальнити нормативну базу Всеукраїнських учнівських олімпіад з навчальних предметів;
- сформувати основні принципи, функції і завдання шкільних олімпіад в ЗЗСО;
- розглянути основні типи завдань та деякі методи розв’язування шкільних математичних олімпіад;
- розробити декілька варіантів олімпіадних завдань для 6-11 класів, різної складності з наведеними детальними розв’язками;
- виявити дієві методи та форми підготовки учнів математичних олімпіад;
- розробити веб-сайт, на якому опублікувати розроблені варіанти завдань для самостійної підготовки учнів до шкільних олімпіад.

У процесі написання дипломної роботи використовувались такі методи наукового дослідження: опрацювання різноманітної літератури, синтез та аналіз.

РОЗДІЛ І ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПІДГОТОВКИ ТА ПРОВЕДЕННЯ ШКІЛЬНИХ ОЛІМПІАД В ЗЗСО

1.1 Етапи та специфіка проведення Всеукраїнських учнівських олімпіад

На сьогоднішній день особливо важливим є питання розвитку інтелектуальних, розумових та творчих обдарувань дитини. Не менш важливо впроваджувати нові стандарти математичної освіти та спрямовувати їх на математичний розвиток особистості та її здібностей. Креативні здібності зосереджуються у вмінні аналізувати, спостерігати, мислити, зіставляти.

Всеукраїнська учнівська олімпіада з математики є дієвим засобом, що формує інтелектуально розвинену творчу особистість, творчі математичні здібності учнів, розвиває креативне мислення, підтримує і стимулює обдаровану учнівську молодь.

Також проведення такої форми навчальної роботи дозволяє проаналізувати ефективність роботи з обдарованими учнями та зрозуміти як її покращити.

Проводяться Всеукраїнські учнівські олімпіади відповідно до наказу Міністерства освіти і науки України під патронатом профільного міністерства. Варто зазначити, що вони стали наступниками Республіканської олімпіади УРСР з навчальних предметів. Організація проведення Всеукраїнських учнівських олімпіад регулюється Положенням затвердженим наказом Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України від 22.09.2011 № 1099. Це Положення визначає порядок організації та проведення Всеукраїнських інтелектуальних та професійних змагань, їх організаційне, методичне і фінансове забезпечення, порядок участі в змаганнях і визначення переможців [24].

Згідно з положенням учнівські олімпіади з різних предметів проходять у 4 етапи, які позначають римськими цифрами, а саме шкільні – перший етап, районні – другий етап, обласні – третій етап олімпіади, і останній четвертий фінальний Всеукраїнський етап.

Дуже часто коли говорять «Всеукраїнська олімпіада» уявляється що йдеться про фінальний етап. Проте до цього визначення входять всі етапи учнівських олімпіад, а заключний IV етап також має назву «республіканська олімпіада», адже відповідну назву він мав за радянських часів. Варто зазначити, що фінальні етапи проводяться не з усіх навчальних предметів.

І етап олімпіади проводять у жовтні у кожному закладі освіти за завданнями, які складають та затверджують спеціальні методичні комісії.

Дати та час проведення, склад журі І етапу олімпіад затверджує директор школи. В цьому етапі беруть участь всі учні школи, які мають бажання спробувати свої сили.

Після проведення шкільного етапу олімпіад відповідальні особи подають звіт у визначені терміни до оргкомітетів ІІ етапу своєї територіальної громади.

ІІ етап проходить в листопаді або ж грудні, керівниками якого є районні (міські управління) відділів освіти за сприяння обласних державних адміністрацій. Під час цього етапу відбувається відбір учасників серед усіх шкіл в межах району, ОТГ. Участь в ІІ етапі беруть переможці І етапу. Відповідно, після проведення районних олімпіад з навчальних предметів звіти подаються до оргкомітетів ІІІ етапів у зазначені терміни.

Важливо, що журі та оргкомітети ІІ етапу Всеукраїнських учнівських олімпіад з математики не можуть змінювати завдання або ж оприлюднювати їх раніше, ніж це заплановано умовами олімпіади.

Організатори олімпіади перед її початком повинні проінструктувати учасників щодо оформлення та вимог роботи, правил поведінки учасників та часу її проведення. В правилах вказано про заборону використання цифрових пристроїв, заборону спілкування учасників між собою.

Для виконання завдань ІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики кожен учень повинен мати ручку, олівець, лінійку, гумку, циркуль. Час виконання роботи в 6 класі – 3 астрономічні години, у 7-11 класах – 4 астрономічні години. Комплект завдань для 6 класу складається з 5 завдань, для 7-11 класів – 6 завдань. Максимальна оцінка за виконання одного завдання – 7 балів. Максимально можлива кількість набраних балів у 6 класі – 35 балів, у 7-11 класах – 42 бали [20].

III етап олімпіад проводиться на обласному рівні у січні-лютому серед переможців II етапу. Завдання III етапу розробляють спеціалісти області відповідно до предметів.

Переможці III етапу в подальшому готуються до IV (фінального) етапу олімпіади. Для окремих предметів в деяких областях цей етап проходить у два тури. Учні, які перемагають нагороджуються грамотами та дипломами перших, других та третіх ступенів.

IV етап є останнім і проходить кожного року в березні в зазначеній області. У цьому етапі учні беруть участь у складі команд. Особовий склад оргкомітетів, комісій та членів журі, експертів та консультантів кожної олімпіади та результати фінальних етапів затверджуються кожного року наказом Міністерства освіти і науки України.

Ті учні, які перемогли у IV етапі нагороджуються грамотами та дипломами перших, других та третіх ступенів. Відповідно до результатів IV етапу олімпіад з навчальних предметів проводиться відбір учасників на Міжнародні олімпіади, якщо вони проводяться. Для того, щоб підготувати команди учнів до участі у Міжнародних олімпіадах проводяться настановчі та тренувальні збори.

На сьогоднішній день Всеукраїнські учнівські олімпіади проводяться з 26 навчальних предметів: українська мова і література, іноземні мови (англійська, іспанська, французька, німецька), правознавство, історія, економіка, математика, біологія, географія, астрономія, фізика, хімія, екологія, інформатика, інформаційні технології, трудове навчання (технології), мови та літератури національних меншин [17].

Кожного року, учасники олімпіад, які зайняли призові місця отримують Президентську академічну стипендію, а також стипендію Кабінету міністрів України, управлінь освіти і науки обласних державних адміністрацій.

Проведення олімпіад з математики має свою специфіку. Найважливішим етапом підготовки до участі в олімпіаді є доолімпіадний етап. Він розпочинається на початку навчального року. У цей час учні готуються не тільки на уроках, а й під час занять на гуртках, факультативах. Здобувачі освіти повторюють задачі та завдання з попереднього олімпіадного сезону. На цьому етапі вчитель застосовує індивідуальні та диференційовані форми роботи, роботу у групах. Після повторення вчитель може проводити міні-олімпіади, щоб налаштувати учнів психологічно. Варто зазначити, що психологічне налаштування є надзвичайно важливим у підготовці до олімпіади, адже I етап проводиться у тому навчальному закладі, де учні здобувають освіту, а II, III та IV етапи проводяться у інших навчальних закладах.

Саме тому, новий навчальний заклад може викликати в учнів страх та дискомфорт, та вплинути на якість виконання завдань. Також, III та IV етапи зазвичай проходять у два етапи, тому навантаження на учнів буде більшим. Це важливі нюанси, які вчитель повинен врахувати під час підготовки учнів до II етапу олімпіад.

Під час підготовки до Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики необхідно школярів ознайомити із:

- найпоширенішими прийомами та методами розв’язування олімпіадних задач (метод доведення нерівностей, задачі на подільність, принцип Діріхле, задачі на розфарбування, комбінаторика і т.д.);
- із типовими задачами підвищеної складності, які безумовно пов’язані із змістом шкільної навчальної програми;
- спеціальними підходами, що допомагають розв’язувати цікаві нестандартні задачі;

- новими теоретичними знаннями, які допоможуть розширити знання учнів з математики.

У процесі підготовки до олімпіади рекомендується цілеспрямовано та систематично розв'язувати:

- задачі комбінаторно-логічного змісту (клітчасті дошки, таблиці, графи, допоміжні «розфарбування», числові набори, математичні ігри);
- теоретико-числові задачі;
- задачі на доведення нерівностей, функціональних співвідношень;
- задачі на властивості функцій;
- задачі на властивості цілої та дробової частини числа;
- різнопланові геометричні задачі [9, с. 11].

1.2 Функції та завдання сучасних математичних олімпіад в ЗЗСО

В процесі розвитку учнівських олімпіад створено чималу історію, засновані традиції та опрацьований важливий досвід, адже олімпіади проводились ще у шістдесятих роках, спочатку на державному рівні, а пізніше і на Міжнародному. Звичайно що організація олімпіадного руху відрізнялась від теперішньої, проте проведення шкільних, районних, обласних та республіканських олімпіад відбувалось в Україні регулярно.

Важливим етапом в історії розвитку олімпіад в Україні було створення та підготовка республіканської команди для участі у Всесоюзних змаганнях. Саме з 1993 року учні українських шкіл почали брати участь в складі команди на міжнародних математичних олімпіадах та з низки інших предметів, таких як хімія, фізика, біологія і т.д.

Сьогодні українські учні успішно виступають на міжнародних олімпіадах з різних предметів. Учасники команд виборюють призові місця та здобувають для своєї країни дипломи та медалі першого ступеня. Так, у 2021 році на Міжнародній олімпіаді з програмування (інформатика) Збірна України виборола 2 срібні та 1 золоту медаль, а також зайняла серед 107 країн почесне шосте місце на Міжнародній олімпіаді з математики серед учнів старших класів. Наші школярі здобули 1 бронзову медаль, 2 срібних та 3 золоті медалі.

Цього року Україна здобула 6 медалей на міжнародній математичній олімпіаді у Норвегії - золоту, срібну і чотири бронзових.

Завданням та основними цілями предметних олімпіад є:

1. розвиток в учнів цікавості до науки та пропагування наукових знань;
2. організація роботи гуртків, факультативів тощо;
3. виявлення обдарованих дітей та підтримка їх розвитку;
4. заохочення учнів до пошукової діяльності;
5. привчання школярів до організованості, відповідальності, самостійності;
6. виховування волі до перемоги.

Важливою ціллю олімпіад є залучення учнів до позаурочної діяльності, стимулювання самоосвіти та самоаналізу. Важливо, щоб учні хотіли перевірити свої знання, сили, вміли вирішувати нетипові завдання. Також потрібно, щоб їх приваблювала добровільна участь та нестандартна обстановка.

Варто зазначити, що участь у олімпіаді, призове місце – дають можливість здобути авторитет серед однокласників, отримати похвалу від батьків та вчителів. Тому, можна зробити висновок, що успіхи на Всеукраїнських олімпіадах справді дуже важливі для самооцінки учня.

Здобувачі освіти, які розв’язують нетипові завдання, можуть зробити перший крок до науки. Саме тому математичні олімпіади сприяють не тільки розвитку математичних здібностей учня, а й розвитку науки в цілому.

Сформулюємо декілька порад, які допоможуть у підготовці до олімпіади:

1. підготовка до олімпіад повинна відбуватися в позаурочний час, щоб не перешкоджати навчальному процесу;

2. вивчати нові теми необхідно поступово, щоб дати дитині час на закріплення набутих знань;
3. з метою заохочення учнів в участі до олімпіади потрібно нормувати час занять, не перевантажувати учня завданнями, адже саме зацікавленість в олімпіаді є ще одним важливим фактором для успішного виступу;
4. надавати дитині більше часу для самостійного опрацювання не тільки вдома, а й на факультативних чи індивідуальних заняттях;
5. закріпити в учнів розуміння того, що можливість брати участь в олімпіаді є пріоритетом, а результат – наслідком, адже страх за отриманий результат може привести школяра в стан тривоги під час змагань, яка зашкодить учню використати всі набуті знання при розв’язуванні задач;
6. пам’ятати, що брати участь в олімпіаді може кожен учень, незважаючи на його успішність з навчальної дисципліни.

Якщо говорити про проведення олімпіад, то в цьому питанні необхідно і дуже важливо враховувати вікові особливості школярів. Тому тривалість олімпіади та завдання потрібно детально відкоригувати для кожного класу індивідуально. Нижче наведено пропонований час олімпіад для всіх класів:

– $5-6$-і класи – 2 уроки;
– $7-8$-і класи – 3 уроки;
– $9-11$-і класи – 3 або 4 уроки.

Завдання шкільного етапу мають свої вимоги:

- це не мають бути завдання з контрольної роботи з різних розділів математики, не допускається складання стандартних завдань;
- виконання завдань повинне передбачати наявність знань, яка учні здобувають в межах шкільної програми з математики, які вони вже вивчили до моменту проведення олімпіади;

- завдання повинні мати різну складність, щоб кожен учасник мав змогу виконати найпростіші, а також показати найсильнішого учасника;
- завдання мають мати цікаву, привабливу форму, бути чіткими та зрозумілими;
- у кожному варіанті для кожного класу повинно бути $4 - 6$ завдань різної тематики з різних розділів математики (алгебри та геометрії);
- завдання потрібно складати з різних джерел, для того, щоб мінімізувати ризик ознайомлення з ними учнів до початку написання.

Проведення Всеукраїнських учнівських математичних олімпіад має на меті:

1. розвивати творче самовдосконалення дітей та учнівської молоді;
2. виявляти обдарованих учнів та сприяти їх творчому та інтелектуальному розвитку;
3. підвищувати зацікавленість до поглибленого вивчення предмету математики та розвивати дослідницькі навички.

Математична олімпіада розвиває в учнів самостійність, відповідальність, організованість, жагу до перемоги, наполегливість та працелюбство, вчить самостійно знаходити вихід з проблемних ситуацій, шукати нестандартні ідеї під час розв'язання задач різних типів.

Проводячи олімпіади, ми надаємо дітям можливість реалізувати свій талант, адже кожна дитина має здібність до чогось, наприклад до творчості, до науки тощо. Не всі учні можуть займатися академічною підготовкою, однак вони можуть бути обдарованими з практичних та творчих напрямків, зокрема дизайну, малювання, проектування, архітектури і т.д.

Також олімпіади сприяють професійному росту педагога. Адже, готуючи учнів, вчителі освоюють та згодом використовують нові методи, технології, форми роботи в своїй педагогічній діяльності.

Важливою перевагою Всеукраїнських учнівських олімпіад є те, що учасники демонструють не тільки свої набуті знання, а показують наскільки вони готові застосовувати їх на практиці, вчаться розраховувати час, представляти свої власні напрацювання. Адже недостатньо тільки добре засвоїти теоретичний та практичний матеріал, потрібно вміти користуватись своїми знаннями під час розв'язування олімпіадних задач.

Важливо й те, що олімпіада розширює коло здібних дітей, які згодом проявлятимуть себе у майбутньому.

Олімпіада – це дуже потужний та цікавий захід, який люблять українські школярі. Вже багато років проводяться змагання олімпіадного руху і, звичайно, за цей час вже багато учасників стали відомими та пишаються своїми здобутками. Це хороший життєвий досвід, це взаємодія між учителем та школярами, це обмін теоретичними знаннями та практичними вміннями.

Виокремимо ще деякі завдання Всеукраїнських учнівських олімпіад з математики:

- розвиток у дітей самопізнання та самовдосконалення;
- допомога учаснику олімпіад у виборі професії;
- підвищення інтересу до поглибленого вивчення математики;
- формування покоління юних науковців;
- прищеплювання учням навичок дослідницької роботи;
- активізація форми позаурочної роботи;
- поширювання та застосування на практиці сучасних прийомів та методів навчання;
- знаходження учасників для участі в командних міжнародних олімпіадах.

Висновки до 1-го розділу

Проаналізувавши основні методи підготовки та проведення шкільних учнівських олімпіад в закладах загальної середньої освіти можна зробити висновок, що шкільна олімпіада є важливим та дієвим фактором освітнього процесу, який допомагає виявити обдарованих дітей, підвищує інтерес до вивчення математики, розвиває математичні та творчі здібності учнів.

Також олімпіада є потужним та водночас необхідним елементом професійного становлення та зростання педагога. Тому вчителі повинні бути кваліфікованими в цьому питанні, постійно підвищувати рівень обізнаності, навчитися правильно організовувати етапи підготовки до олімпіад, адже від цього залежить успіх їхніх вихованців.

На сьогоднішній день питання підготовки до Всеукраїнських учнівських олімпіад потребує детальнішого вивчення та аналізу. Варто зазначити, що сформувавши основні функції та завдання шкільних олімпіад педагог зможе краще зрозуміти та пізнати специфіку цієї форми позакласної роботи.

Отже, у першому розділі було досягнуто таких результатів:

1. опрацьовано нормативну базу Всеукраїнських учнівських олімпіад з навчальних предметів;
2. сформовано основні функції і завдання шкільних олімпіад в ЗЗСО;
3. розглянуто основні принципи та методи підготовки до математичних олімпіад;
4. з власного педагогічного досвіду сформовано деякі поради для вчителів, які допоможуть під час підготовки до олімпіад з математики;
5. досліджено основні проблеми під час підготовки до олімпіади, з якими зустрічаються учні та вчителі;
6. проаналізовані основні етапи Всеукраїнських учнівських олімпіад та специфіку їх проведення.

РОЗДІЛ ІІ МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОЛІМПІАДНИХ ЗАВДАНЬ З МАТЕМАТИКИ

2.1 Типи завдань та методи розв'язування математичних задач олімпіадного характеру

Звичайно, олімпіадні завдання відрізняються від завдань шкільної програми, нижче виокремимо кілька особливостей задач математичних олімпіад:

- специфічні та нестандартні умови;
- несподіваний результат;
- спеціальні методи розв'язування, які не передбачені шкільною програмою.

Олімпіадні завдання вимагають від учасника творчого та логічного мислення, наполегливості, самостійного пошуку результатів, оригінальності та креативності.

Розв'язуванню нестандартних математичних задач учні навчаються на факультативних заняттях, в математичних гуртках та шляхом наполегливої самостійної роботи, а перевіряються їх знання і вміння на математичних олімпіадах різних рівнів.

Зазвичай, для того щоб розв'язати олімпіадну задачу необхідна деяка несподівана ідея і чим вона буде оригінальніша, тим цікавішою є задача, як вважає журі, яке й складає олімпіадні завдання. Проте дуже оригінальні задачі трапляються не так часто в завданнях математичних олімпіад, частіше наведені завдання можна розв'язати за допомогою поширених методів, які ми розглядатимемо нижче. Але, якби ж відразу було так легко здогадатися, який же метод застосовувати в тих чи інших задачах. Тому при підготовці до олімпіад вважається необхідним ознайомити учнів із найуживанішими із них.

Зрозуміло, що шкільна програма з математики не включає в себе деякі методи, наприклад принцип Діріхле, інваріант, задачі на розфарбування, які часто зустрічаються в олімпіадах.

В даному розділі ми дослідимо найпоширеніші типи олімпіадних завдань та деякі методи їх розв’язування.

2.1.1 Задачі на подільність

Під час підготовки до олімпіад, на факультативних заняттях, математичних гуртках учні навчаються розв’язувати задачі за допомогою різноманітних методів. Одним із цих методів є задачі на подільність, які займають величезне місце в олімпіадних завданнях. Майже в усіх олімпіадах, особливо 6-9 класів є такого типу задачі. Розв’язуючи їх учні повинні пам’ятати також і шкільну програму та теоретичний матеріал цієї теми. Наведемо нижче деякі теоретичні відомості даної теми.

Ознаки подільності

1. Якщо остання цифра числа ділиться на 2 (парна), то число ділиться на 2.
2. Якщо остання цифра числа 0 або 5, то число ділиться на 5.
3. Якщо число закінчується на k нулів, то воно ділиться на 10^k .
4. Якщо число, виражене двома останніми цифрами даного числа a, ділиться на 4 то і число a ділиться на 4.
5. Якщо число, виражене трьома останніми цифрами даного числа a, ділиться на 8 то і число a ділиться на 8.
6. Якщо сума цифр числа a ділиться на 3, то число a ділиться на 3.
7. Якщо сума цифр числа a ділиться на 9, то число a ділиться на 9.
8. Якщо різниця між сумою цифр, що стоять на непарних місцях числа a (рахуючи справа наліво), і сумою цифр, що стоять на парних місцях, ділиться на 11, то число a ділиться на 11.

9. Якщо число, виражене двома останніми цифрами даного числа a, ділиться на 25 то і число a ділиться на 25.
10. Якщо число, виражене трьома останніми цифрами даного числа a, ділиться на 125 то і число a ділиться на 125.
11. Щоб дізнатися, чи ділиться число a на 7, 11, 13 треба розбити його справа наліво на трицифрові грані, знайти суму Р граней, що стоять на парних місцях, і суму А граней, що стоять на непарних місцях, і якщо (Р-А) ділиться на 7, 11, 13, то і число a ділиться на 7, 11, 13 [1, с. 5].

Властивості подільності цілих чисел

1. Якщо $a \vdots b$ $і$ k - будь-яке число, то $ka \vdots b$.
2. Якщо $a \vdots b$ $і$ $b \vdots c$, то $a \vdots c$.
3. Якщо $a \vdots k$ $і$ $b \vdots p$, то $ab \vdots kp$.
4. Якщо $a \vdots k$ $і$ $b \vdots k$, то $(a \pm b) \vdots k$.
5. Якщо $a \vdots k$, $b \vdots k$ $і$ c та p - будь-які числа, то $(ac \pm bp) \vdots k$.
6. Якщо $a \vdots k$ $і$ $a \vdots p$, причому k $і$ p - взаємно прості, то $a \vdots k$ [1, с. 6].

Приклад 1. Нехай $x, y \in Z$ та $(3x + 7y) \vdots 19$. Довести, що $(43x + 75y) \vdots 19$.

Розв'язання. Виконаємо наступні перетворення $43x + 75y = 8(3x + 7y) + 19x + 19y$. Звідси, вираз $8(3x + 7y) \vdots 19$ з умови задачі, $19x$ і $19y$ ділиться на 19, а це означає, що і $(43x + 75y) \vdots 19$.

Приклад 2. Довести, що $3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{100}$ буде ділитися на 120 без остачі.

Розв'язання. $3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{100} = (3^1 + 3^2) + (3^3 + 3^4) + \cdots + (3^{97} + 3^{98}) + (3^{99} + 3^{100}) = 3(1 + 3) + 3^3(1 + 3) + \cdots + 3^{97}(1 + 3) + 3^{90}(1 + 3) = 4(3 + 3^3 + 3^5 + \cdots + 3^{97} + 3^{99}) = 4\big(3(1 + 3^2) + 3^5(1 + 3^2) + \cdots + 3^{93}(1 + 3^2) + 3^{97}(1 + 3^2)\big) = 4 \cdot 10 \cdot (3 + 3^5 + \cdots + 3^{93} + 3^{97}) = 120(1 + 3^4 + \cdots + 3^{92} + 3^{96})$.

Тобто $3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{100}$ ділиться на 120 без остачі.

Приклад 3. Дано шестицифрове число, у якого 1 –ша цифра співпадає з $4, 2$ – з 5, а 3 – з 6. Довести, що дане число кратне $7, 11$ і 13.

Розв'язання. Позначимо дане число через y. З умови задачі 1 –ша цифра співпадає з $4, 2$ – з 5, а 3 – з 6, то число y можна подати у вигляді:

$$y = abcabc = a \cdot 100000 + b \cdot 10000 + c \cdot 1000 + a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = a \cdot (100000 + 100) + b \cdot (10000 + 10) + c \cdot (1000 + 1) = a \cdot 100 \cdot 1001 + b \cdot 10 \cdot 1001 + c \cdot 1001 = 1001 \cdot (a \cdot 100 + b \cdot 10 + c) = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot (100a + 10b + c).$$

Тобто, оскільки дане число $y = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot (100a + 10b + c)$, то воно і буде кратне числам $7, 11$ і 13.

Приклад 4. Натуральні числа n та m такі, що $(4m - n)(n + m) = 6m^2$. Довести, що n ділиться на m.

Розв'язання. Перетворивши задану рівність, отримаємо $(4m - n)(n + m) = 6m^2$ або ж $4mn + 4m^2 - n^2 - mn - 6m^2 = 0$, звідки $3mn - n^2 - 2m^2 = 0$.

Наступним кроком є розклад многочлена на множники.

$$3mn - n^2 - 2m^2 = 2mn + mn - n^2 - 2m^2 = (2mn - 2m^2) + (mn - n^2) = 2m(n - m) - n(n - m) = (2m - n)(n - m).$$

Оскільки, $(2m - n)(n - m) = 0$, то або $n = 2m$, або ж $n = m$. А це й означає, що n ділиться на m [25, с. 91].

Приклад 5. Знайти таке двоцифрове число, щоб квадрат цього числа був записаний цифрами $0, 2, 3, 5$.

Розв'язання. Позначимо через m – шукане число. Квадрат цього числа не може закінчуватися на 2 або 3, тому остання цифра 0 або 5. А це означає, що $x^2 \vdots 5$, отже й $x^2 \vdots 25$. Скористаємось ознакою подільності на 25, тобто двома останніми цифрами числа x^2 будуть числа 25 або 50. Але за умовою число 50 не підходить, бо тоді $x^2 \vdots 10$, отже й $x^2 \vdots 100$, тобто останніми двома цифрами числа x^2 будуть 00, а це умову задачі не задовольняє.

Виходячи з цього, робимо висновок, що цифри числа x^2 можуть бути записані як 3025, отже, число, яке задовольняє умову задачі – 55 [1, с. 10].

Алгоритм Евкліда

Щоб знайти НСД пари чисел $(a; b)$, які є натуральними виконуватимемо наступні дії:

- Ділитимемо a на b, в результаті отримаємо остачу $r;$
- Ділитимемо b на r, в результаті отримаємо остачу r_1;
- Поділимо r на r_1, в результаті чого отримаємо остачу r_2 і так будемо робити до тих пір, поки деяке число r_n не буде ділитися на r_{n+1}. Число r_{n+1} – називатимемо НСД.

Тобто: $\text{НСД}(a; b) = \text{НСД}(b; r) = \text{НСД}(r; r_1) = \cdots = \text{НСД}(r_n; r_{n+1}) = r_{n+1}$.

Теорема. Якщо $a > b,$ то $\text{НСД}(a; b) = \text{НСД}(a - b; b)$ [1, с. 16].

Приклад 6. Довести, що при деякому натуральному значенні x дріб $\frac{12x+1}{30x+2}$ буде нескоротним.

Розв'язання. Використаємо теорему, за якою якщо $a > b,$ то

$$\text{НСД}(a; b) = \text{НСД}(a - b; b).$$

Звідси:

$$\text{НСД}(30x + 2; 12x + 1) = \text{НСД}(18x + 1; 12x + 1) = \text{НСД}(12x + 1; 6x) = \text{НСД}(6x + 1; 6x) = \text{НСД}(6x; 1) = 1,$$

а це означає, що даний дріб нескоротний, адже НСД чисельника та знаменника цього дробу $= 1$, тобто числа $12x + 1$ і $30x + 2$ є взаємно простими.

2.1.2 Діофантові рівняння

У шкільній програмі з математики теми діофантових рівнянь не має, проте вони дуже часто зустрічаються в олімпіадних завданнях з математики. Тому при підготовці до олімпіади доцільно звернути увагу на вивчення даної теми.

Діофантовим рівнянням називають рівняння із раціональними коефіцієнтами, у якому необхідно знайти розв'язки у цілих чи раціональних числах. Прийнято називати такі рівняння ще невизначеними, так як воно має декілька змінних.

Для того, щоб знайти корені такого рівняння, що має дві змінні, потрібно знайти всі пари цілих чисел, що є розв'язками даного рівняння, або ж, якщо таких розв'язків не існує, довести це.

Означення. Лінійним діофантовим рівнянням із двома невідомими називається рівняння виду $ax + by = c$, де $a, b, c -$ цілі числа, $(a, b) = 1$.

Дане рівняння має безліч розв'язків, які можна подати у вигляді:

$$\begin{cases} x = x_0 - bt, \\ y = y_0 + at, \end{cases}$$

де $(x_0, y_0) -$ будь-який розв'язок, $t \in Z$.

Приклад 7. Розв'язати рівняння у натуральних числах.

$$2x^2 + 5xy - 12y^2 = 28.$$

Розв'язання. Розкладаємо ліву частину рівняння на множники:

$$2x^2 - 3xy + 8xy - 12y^2 = 28,$$

$$x(2x - 3y) + 4y(2x - 3y) = 28,$$

$$(2x - 3y)(x + 4y) = 2 \cdot 2 \cdot 7.$$

Отже, бачимо що, $x + 4y$ і $2x - 3y$ можуть набувати таких значень:

$$\begin{cases} x + 4y = 7, \\ 2x - 3y = 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 - 4y, \\ 2(7 - 4y) - 3y = 4; \end{cases}$$

з 2 $-$го рівняння системи маємо, що $y = \frac{10}{11}$, тобто розв'язок не є натуральним числом.

$$\begin{cases} x + 4y = 14, \\ 2x - 3y = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 14 - 4y, \\ 2(14 - 4y) - 3y = 2; \end{cases}$$

знову маємо, що $y = \frac{26}{11}$, що не задовольняє умову задачі.

$$\begin{cases} x + 4y = 28, \\ 2x - 3y = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 28 - 4y, \\ 2(28 - 4y) - 3y = 1; \end{cases}$$

знаходячи із 2-го рівняння системи значення $y = 5$, отримаємо $x = 8$.

Відповідь: (8;5).

Приклад 8. Із квадратного аркуша паперу в клітинку, який містить ціле число клітинок, вирізали квадрат, у якому також виявилося ціле число клітинок. На частині аркуша, що залишилась, рівно 124 клітинки. Скільки клітинок має аркуш паперу?

Розв'язання. Нехай початковий аркуш паперу мав довжину однієї сторони x клітинок, а довжина тієї частини, що вирізали – y клітинок, де $x; y \in N$. Очевидно, що $x > 11$, адже якщо залишилося 124 клітинки, то на початку не могла б бути 121 клітинка при $x = 11$. Із умови задачі отримуємо наступне рівняння:

$$x^2 - y^2 = 124,$$

$$(x - y)(x + y) = 2 \cdot 2 \cdot 31.$$

Маємо на увазі, що $x + y > x - y, \quad x + y > 12$.

Отже отримаємо, що значення виразів $x + y$ і $x - y$ можуть набирати наступних значень:

$$1) \begin{cases} x + y = 31, \\ x - y = 4. \end{cases}$$

Додавши два рівняння, одержуємо $2x = 35$, $x = \frac{35}{2}$, тобто натуральних розв'язків немає.

$$2)\ \begin{cases} x + y = 62, \\ x - y = 2; \end{cases}$$

Додаємо два рівняння, отримуємо, що $2x = 64$, $x = 32$, тоді $y = 30$.

$$3)\ \begin{cases} x + y = 124, \\ x - y = 1; \end{cases}$$

Знову додавши два рівняння, маємо, що $2x = 125$, $x = \frac{125}{2}$ – не є натуральним числом.

Отже, легко порахувати, що аркуш паперу мав $32 \cdot 32 = 1024$ клітинок.

Відповідь: 1024 [1, с. 30].

Наведемо приклади знаходження коренів лінійного рівняння із двома змінними. Для розв'язання подібних рівнянь необхідно розглянути теорему.

Теорема. Якщо a і b взаємно прості числа, тобто НСД$(a; b) = 1$, і $(x_0; y_0)$ – один із розв'язків рівняння $ax + by = c$, тоді усі розв'язки цього рівняння знаходимо за формулами $x = x_0 - bn$; $y = y_0 - an$, де $n \in Z$ [1, с. 30].

Приклад 9. Чи зможе Оленка в магазині оплатити покупку вартістю 1000 гривень 40 купюрами вартістю $1, 10, 100$ гривень?

Розв'язання. Позначимо через $x -$ купюри по 1 гривні, $y -$ купюри по 10 гривень та $z -$ купюри по 100 гривень, причому $x, y, z > 0$ і x, y, z – цілі числа. Складаємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y + z = 40, \\ x + 10y + 100z = 1000. \end{cases}$$

Помноживши перше рівняння на -1 та додаючи до нього друге рівняння, одержимо:

$$9y + 99z = 960.$$

Отже, ми одержали, що ліва частина даного рівняння на 9 ділиться націло, проте права націло не ділиться на число 9, а це означає, що рівняння в цілих числах розв'язків не має. Тобто, Оленка не зможе оплатити товар вартістю 1000 грн 40 купюрами вартістю $1, 10, 100$ гривень.

Приклад 10. Розв'язати рівняння у цілих числах $y^2 - 2xy + 2x = 6$.

Розв'язання. Знайдемо з даного рівняння вираз $2x$:

$$y^2 - 6 = 2xy - 2x,$$

$$y^2 - 6 = 2x(y - 1),$$

$$2x = \frac{y^2 - 6}{y - 1},$$

якщо $y = 1$, то розв'язуючи початкове рівняння x не буде цілим числом, тому $y \neq 1$. Виділивши цілу та дробову частину в поданій рівності, отримаємо:

$$2x = \frac{y^2 - 6}{y - 1} = \frac{y^2 - 1 - 6}{y - 1} = y + 1 - \frac{5}{y - 1}.$$

Із умови задачі вираз $\frac{5}{y-1}$ має набирати цілі значення, а це буде можливим тільки тоді, коли $y - 1 = \pm 1$, або $y - 1 = \pm 5$.

Отже, знаходимо пари цілих розв'язків: $(-1; 2), (3; 0), (3; 6), (-1; -4)$.

Відповідь: $(-1; 2), (3; 0), (3; 6), (-1; -4)$.

Приклад 11. Розв'язати рівняння $(2x^2 - 8x + 11)(y^2 + 2y + 8) = 21$ на множині цілих чисел.

Розв'язання. У дужках для кожного множника виділимо повні квадрати:

$$(2x^2 - 8x + 8 + 3)(y^2 + 2y + 1 + 7) = 21,$$

$$(2(x - 2)^2 + 3)((y + 1)^2 + 7) = 21,$$

$$(x - 2)^2 \geq 0,$$

$$(y + 1)^2 \geq 0.$$

Тоді $2(x - 2)^2 + 3 \geq 3$, і $(y + 1)^2 + 7 \geq 7$,

тобто, добуток обох множників $=\ 21$, коли:

$$\begin{cases} 2(x - 2)^2 + 3 = 3, \\ (y + 1)^2 + 7 = 7, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - 2)^2 = 0, \\ (y + 1)^2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = -1. \end{cases}$$

Відповідь: $(-2; -1)$.

2.1.3 Доведення нерівностей

Завдання на доведення нерівностей в математичних олімпіадах зустрічаються досить часто. Нижче наведемо приклад, у якому для доведення нерівностей виділятимуть повний квадрат.

Приклад 12. Довести, що $x^2 + 5y^2 + 4xy - 4y + 4 \geq 0$ при всіх дійсних значеннях x і y.

Розв'язання. У лівій частині нерівності $x^2 + 5y^2 + 4xy - 4y + 4 \geq 0$ виділимо повні квадрати, одержимо:

$$(x^2 + 4xy + 4y^2) + (y^2 - 4y + 4) = (x + 2y)^2 + (y - 2)^2,$$

очевидно, що $(x + 2y)^2 \geq 0,\ (y - 2)^2 \geq 0.$ Задачу доведено.

Нижче розглянемо деякі приклади, для розв'язання яких застосовується метод математичної індукції.

Приклад 13. Довести, що $2^n > 2n + 1,$ якщо $n \geq 3$, при будь-якому $n \in N$.

Розв'язання. Скористаємось методом математичної індукції.

1. Якщо $n = 3,$ очевидно, що нерівність буде виконуватись:

$$2^3 > 2 \cdot 3 + 1,$$

$$8 > 7.$$

2. Припустимо, що нерівність буде виконуватись і при $n = k,$ де $k \geq 3,$ тобто:

$$2^k > 2k + 1 \Rightarrow\ 2^k - 2k - 1 > 0. \qquad (1)$$

3. Доведемо, що нерівність справедлива і при $n = k + 1$, маємо:

$$2^{k+1} > 2(k + 1) + 1.$$

Розглянемо різницю:

$$2^{k+1} - 2(k + 1) - 1 = 2^k \cdot 2 - 2k - 3 = 2(2^k - 2k - 1) + 2k - 1 > 0.$$

Враховуючи те, що вираз у дужках є додатний за нерівністю (1) і при $k \geq 3,$ то вираз $2k - 1$ теж буде додатний. Доведено.

Наведемо нижче завдання на доведення нерівностей, для розв'язання яких використовувались різні методи.

Приклад 14. Довести нерівність $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{2012^2}<1.$

Розв'язання. Порівняємо наступні дроби:

$$\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1\cdot 2},\quad \frac{1}{3^2}<\frac{1}{2\cdot 3},\quad \frac{1}{4^2}<\frac{1}{3\cdot 4},\quad \cdots,\frac{1}{2012^2}<\frac{1}{2011\cdot 2012}.$$

Додамо нерівності, маємо:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{2012^2}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{2011\cdot 2012},$$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{2012^2}$$
$$<\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2011}-\frac{1}{2012}\right),$$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{2012^2}<1-\frac{1}{2012}.$$

Звідси маємо:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{2012^2}<1 \text{ [1, с. 50].}$$

Приклад 15. Дано два довільні числа a та b, які є невід'ємними. Довести, що:

$$a^2b^2+a^2b+ab^2\leq a^4b+a+b^4.$$

Розв'язання. Якщо $a=0$ або $b=0$, то доведення нерівності очевидне. Нехай $a,\, b>0$. Поділивши на ab ліву та праву частини нерівності $a^2b^2+a^2b+ab^2\leq a^4b+a+b^4$, одержимо:

$$ab+a+b\ \leq a^3+\frac{1}{b}+\frac{b^3}{a}.$$

Використаємо нерівність, яка є наслідком із нерівності Коші-Шварца:

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\geq\frac{\left(a_{1+}a_2+\cdots+a_n\right)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n},$$

матимемо:

$$a^3+\frac{1}{b}+\frac{b^3}{a}\geq\frac{\left(a^2\right)^2}{a}+\frac{1^2}{b}+\frac{\left(b^2\right)^2}{ab}\geq\frac{\left(a^2+1+b^2\right)^2}{a+b+ab}\geq\frac{(a+b+ab)^2}{a+b+ab}=ab+a+b.$$

Що й завершує доведення.

Приклад 16. Дано, що $x^2 + y^2 + \frac{1}{2} \leq x + y$. Довести, що $x + y = 1$.

Розв'язання. I спосіб.

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{2} \leq x + y \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - 2y\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2} = 0, \\ y - \frac{1}{2} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = \frac{1}{2}, \end{cases} \Rightarrow \quad x + y = 1.$$

II спосіб.

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{2} \leq x + y \Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 + 2 \leq$$

$$\leq 4x + 4y \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 + 4y^2 - 4y + 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x - 1 = 0, \\ 2y - 1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \mathrm{x} + \mathrm{y} = 1.$$

III спосіб.

Нехай $y = a$, тоді нерівність $x^2 + y^2 + \frac{1}{2} \leq x + y$ можна подати у вигляді $x^2 - x + a^2 - a + \frac{1}{2} \leq 0$.

Будемо розглядати ліву частину нерівності як квадратний тричлен відносно змінної x і розв'яжемо її при всіх значеннях параметра a.

$$D = 1^2 - 4\left(a^2 - a + \frac{1}{2}\right) = -4a^2 + 4a - 1 = -(4a^2 - 4a + 1) = -(2a - 1)^2.$$

Якщо $a \neq \frac{1}{2}$, то дискримінант $D < 0$. Виходячи із того, що гілки параболи $y = x^2 - x + a^2 - a + \frac{1}{2}$ напрямлені вгору, то при $a \neq \frac{1}{2}$ нерівність не матиме жодного розв'язку.

Якщо $a = \frac{1}{2}$, то $D = 0$. Отримуємо, що нерівність $x^2 - x + a^2 - a + \frac{1}{2} \leq 0$ при $a = \frac{1}{2}$ має матимемо розв'язок $x = \frac{1}{2}$, який є єдиним.

Отже, нерівність $x^2 + y^2 + \frac{1}{2} \leq x + y$ має єдиний розв'язок $x = \frac{1}{2}$ при $y = \frac{1}{2} = a$. Звідси $\mathrm{x} + \mathrm{y} = 1$ [2, с. 34].

2.1.4 Принцип Діріхле

Німецький математик Петер Лежен Діріхле у своїх наукових працях часто користувався міркуваннями, які зараз називають принципом Діріхле.

Знайомство із цим принципом можна розпочати із задачі: «Чи можна розмістити 5 зайців у чотирьох клітках так, щоб у жодній з кліток не містилося більше одного зайця?» Розв'язати задачу можна завдяки таким міркуванням: якби у кожній клітці сиділо не більше одного зайця, то у чотирьох клітках помістилося б не більше чотирьох зайців. А тому п'ять зайців таким способом не можна розмістити [19].

Є декілька формулювань принципу Діріхле, ознайомимось із найважливішими з них:

1. Якщо в k клітках сидять m зайців, причому $m > k$, то хоча б в одній клітці сидять, принаймні, два зайці.

2. Нехай в n клітках сидять m зайців, причому $n > m$. Тоді знайдеться хоча б одна порожня клітка.

3. Припустимо, зайці розсаджені в n клітках. Тоді, якщо $m > n$, то хоча б в одній клітці міститься не менше $\frac{m}{n}$ зайців, а так само хоча б в одній іншій клітці міститься не більше $\frac{m}{n}$ зайців.

4. Якщо в n клітках сидять m зайців і $m \geq kn + 1$, то в якійсь із кліток сидять, по крайній мірі, $k + 1$ заєць (узагальнений принцип Діріхле) [18].

З першого погляду принцип Діріхле виглядає простим, проте за допомогою нього можна розв'язати досить складні задачі, як із алгебри так із геометрії.

Під час підготовки учнів до олімпіади з математики вчитель обов'язково має ознайомити школярів з даним принципом і головним завданням педагога являється не тільки ознайомити із теоретичним та практичним матеріалом, а й навчити розрізняти дітей, кого із умови задачі призначати на роль «зайця», а кого відповідно на роль «клітки».

Приклад 17. У 8 класі навчається 30 учнів. Дмитрик пишучи диктант допустив 13 помилок, проте інші учні допустили менше помилок. Довести, що хоча б 3 учні в класі зробили однакову кількість помилок.

Розв'язання. Із умови задачі зрозуміло, що можливою кількістю помилок є числа:

$$0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10;\ 11;\ 12;\ 13$$

- тобто, ми отримали 14 варіантів, будемо вважати що це «клітки». Нехай не було $3-$х учнів у класі, які зробили під час диктанту однакову кількість помилок. Тоді максимум по 2 людини помилилися однакове число раз. Отже, маємо, що таких учнів є 28, бо $14 \cdot 2 = 28$. Аза умовою задачі в класі навчається 30 чоловік, тобто очевидно, що 2 учня або зовсім не зробили помилок, або з кимось з учнів помилилися однакову кількість раз.

Отже, обов'язково знайдуться хоча б 3 учня, які зробили однакове число помилок [18].

Приклад 18. Довести, що серед деяких шести цілих чисел знайдуться два числа, різниця яких буде кратна 5 [19].

Розв'язання. Якщо поділити деяке число на 5, отримаємо п'ять різних остач: $0, 1, 2, 3, 4$. Якщо поділити шість деяких чисел, то відповідно ми отримаємо шість остач і серед цих остач може бути максимум 5 різних. Враховуючи те, що $6 > 5$, матимемо, що серед даних остач знайдуться обов’язково 2 однакові. Різниця тих чисел, які дають при діленні на 5 однакові остачі буде кратною 5. Задачу доведено.

Приклад 19. У Оксанки є шахова дошка розміром 8×8, на якій відмічено центри усіх полів. З’ясувати, чи зможе Оксанка 13-ма лініями розбити шахову дошку на частини, в яких всередині чи на межі лежатиме не більше одної точки.

Розв’язання. Візьмемо таких 28 відрізків, які сполучатимуть центри крайніх сусідніх полів на дошці. Зрозуміло, що кожна лінія може перетинати всередині не більше, ніж 2 такі відрізки. Отже, існуватиме відрізок, який не перетинається ні однією прямою, а його кінці належатимуть одній частині, що й доводить необхідне.

Приклад 20. В коробці лежать 10 пар білих носків та 10 пар чорних носків, які мають однаковий розмір. З’ясувати, скільки носків необхідно витягнути з коробки навмання, щоб витягнути хоча б 2 носки однакового кольору.

Розв’язання. Візьмемо за «клітки» кольори носків, а за «зайців» - носки. Тоді, якщо взяти 3 довільні носки, одержуємо, що в одній із «кліток» знаходяться два «зайці» - носки, до й потрібно було довести.

Приклад 21. У місті налічується 10000 телефонів, номери яких записуються 4-ма цифрами. У центрі міста налічується найбільше телефонів, а саме більше ніж половина від усіх. Необхідно довести, що хоча б один номер телефону, який встановлено у центральній частині міста дорівнює сумі 2-ох інших номерів телефонів, що знаходяться в цім же районі.

Розв'язання. Згідно з умовою задачі в центрі міста налічується більше половини телефонів, тобто більше ніж 5001. Розглянемо спочатку номера тих телефонів, сума довільних двох не дорівнює чотиризначному числу. Враховуючи те, що ми повинні розглядати не менше ніж 5001 номер, то в найгіршому випадку серед даних номерів будуть всі номери від 4999 до 9999. Проте з даної умови ми отримали два номери - 4999 і 5000, при додаванні яких одержуємо номер 9999, що належить цій множині. Отже, робимо висновок, що при будь-якому іншому наборі ми знайдемо не менше, ніж один набір з 2-ох номерів, сума яких дорівнює третьому номеру [15].

Приклад 22. На протязі одного року кожного дня Віталік розв’язував не менше ніж одну задачу, але кожного тижня хлопчик вирішував не більше, ніж 12 задач. Потрібно довести, що можна знайти декілька послідовних днів, за які школяр розв’язав рівно 20 задач.

Розв'язання. Нехай, x_1 – кількість задач, які розв’язав хлопчик за перший день, $x_2 -$ кількість задач, які розв’язав Віталік за перших 2 дні, тоді x_{77} – кількість розв’язаних задач за перші 77 днів. Розглянемо числа $x_1, x_2, \ldots, x_{77}, x_1 + 20, x_2 + 20, \ldots, x_{77} + 20$. Таких чисел всього є 154. Число x_{77} не перевищує $12 \cdot 11 = 132$.

Звідси отримуємо, що кожне з даних чисел не перевищує 152, а це означає, що серед них є принаймні 2 однакових. Із умови задачі дано, що учень кожного дня розв’язував хоча б одну задачу, тому числа $x_1, x_2, \ldots, x_{77}$ всі різні. А це означає, що числа $x_1 + 20, x_2 + 20, \ldots, x_{77} + 20$ також будуть різними.

Тепер припускаємо, що деяке число із 1-го рядка рівне деякому числу із $2 -$го рядка, маємо, що для деяких i та j: $x_i = x_j + 20$ і $x_i - x_j = 20$, що й доводить умову задачі.

2.1.5 Задачі на розфарбування

Задачі на розфарбування в олімпіадних задачах займають особливе місце, адже вони відрізняються від інших завдань не тільки своєю специфікою, а й методом розв’язування. В умові подібних задач зазвичай основне місце приділяється розфарбування певних фігур, точок і т.д. у різні кольори. Тобто, це означає необхідність розбиття множин даних фігур на підмножини. Звичайно, такі задачі характеризуються своєю наочністю і учаснику олімпіад розфарбування допомагає легше зрозуміти умову та знайти правильне рішення.

Задачі на розфарбування дозволяють знаходити важливі закономірності, проте вони потребують від школяра більше логічного та творчого математичного мислення, тому часто саме з таким типом олімпіадних завдань виникають труднощі під час підготовки.

Проаналізуємо, як такі задачі розв'язувати на практиці, та визначимо основні правила розв'язування подібного типу завдань.

Приклад 23. На дошці, яка має розмір 5×5 у кожній клітинці знаходиться мурашка. За сигналом кожна мурашка переповзає в одну із клітинок, які є сусідніми по діагоналі. З'ясувати, якою буде найменша кількість незайнятих клітинок, якщо враховувати, що в деяких клітинках можуть одночасно знаходитися кілька мурашок.

Розв'язання. Зафарбуємо вертикалі шахової дошки у два кольори – чорний та білий. Виконаємо цю дію так, щоб сусідні вертикалі були зафарбовані у різні кольори. Якщо першою зліва вертикаллю буде чорна, то у нас є 15 чорних і 10 білих клітинок. Кожна мурашка, коли вона переповзатиме з клітинки на клітинку, змінюватиме колір, на якій вона знаходиться.

Тобто на чорні клітинки будуть переповзати тільки ті мурашки, які знаходяться на білих клітинках. Тому вільними стануть мінімум 5 чорних клітинок.

Приклад 24. Дано опуклий $n-$кутник, який розбитий своїми діагоналями на трикутники, що не перетинаються, причому у кожній вершині даного $n-$кутника сходиться непарна кількість трикутників. Довести, що n буде ділитися на 3 [5, с. 70].

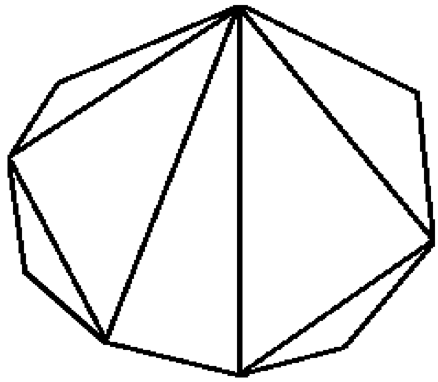

Рисунок 1.5.1

Розв’язання. Розфарбуємо розбиті діагоналями частини многокутника у два кольори – білий і чорний так, щоб частини, які мають спільну сторону були зафарбовані у різний колір. Для доведення необхідного, вважатимемо для початку, що весь многокутний білого кольору, а після проведення кожної із діагоналей будемо змінювати кольори усіх частин по один бік від неї, а по $2-$ий – зберігатимемо розфарбування. Із умови задачі маємо, що в кожній вершині $n-$кутника буде сходитися непарна кількість трикутників, тобто усі сторони даного многокутника належатимуть трикутникам, що мають однаковий колір, до прикладу чорний. Проте, кожна із проведених діагоналей буде стороною і білого і чорного трикутників одночасно. Звідси, n – різниця кількості чорних та білих трикутників. Зрозуміло, що разом ці кількості ділитимуться на 3, отже очевидно, що й n ділиться на 3.

Приклад 25. Дано папір в клітинку, який має n клітинок. Необхідно довести, що з цих клітинок можна обрати не менше, ніж $\frac{n}{4}$ клітинки, які не матимуть спільних точок [5, с. 71].

Розв’язання. Зафарбуємо дані клітинки у чотири кольори (рисунок 1.5.2) Серед цих n клітинок можна знайти не менше, ніж $\frac{n}{4}$ одного кольору, а такі клітинки не будуть перетинатися. Задачу доведено.

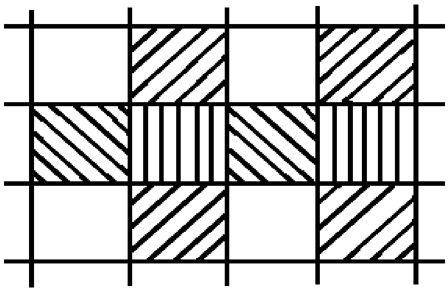

Рисунок 1.5.2

Приклад 26. Дано прямокутник розміром 5×6, у якому зафарбовано 19 клітинок. Необхідно довести, що в даному прямокутнику можна вибрати квадрат розміром 2×2, в якому розфарбовано мінімум 3 клітинки.

Розв'язання. 1) Розріжемо прямокутник, розміром 5×6 на 6 фігур, які є одинакові (рисунок 1.5.3).

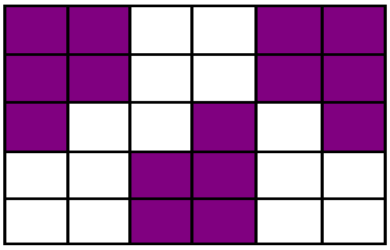

Рисунок 1.5.3

2) Використовуючи принцип Діріхле, отримаємо, що із шести таких п'ятиклітинкових фігур існує хоча б одна така фігура K_1, в якій зафарбовано мінімум 4 клітинки, адже $19 = 6 \cdot 3 + 1$);

3) Якщо зафарбувати чотири клітинки всередині фігури K_1 довільно, то очевидно, що квадрат розміром 2×2 буде містити мінімум 3 розфарбовані клітинки.

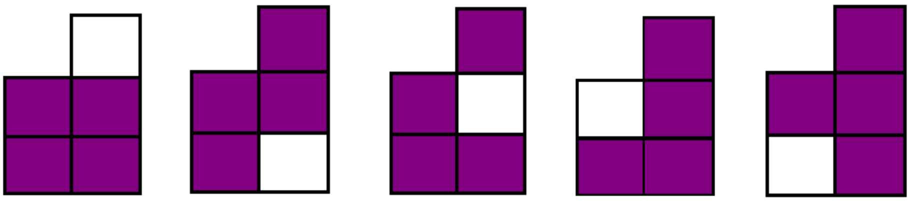

Рисунок 1.5.4

Приклад 27. Два хлопчики Максим та Назар грали в гру не пропускаючи ходів, яка мала певні правила: на білому папері в клітинку, що має розмір

10x10 кожного разу, коли хтось із хлопчиків робитиме хід необхідно зафарбувати у чорний колір лише 1 квадрат з цілими клітинками що має розмір 2x2. Відповідно, програє той хлопчик, якому не вийде зафарбувати на білому аркуші квадрат розміром 2x2. Яка максимальна кількість ходів у цій грі?

Розв'язання. Поділимо квадрат розміром 10x10 на квадрати, які матимуть розмір 2x2 та зафарбуємо в ньому жовтим кольором ліву верхню клітинку. А квадрат розміром 2x2, який може бути розфарбований сорни кольором вміщатиме лише 1 зафарбовану жовту клітинку. Тобто, очевидно, що максимальною кількістю зафарбованих квадратів хлопчиками є кількість жовтих клітинок, а їх є 25. А це означає, що виграти зможе той учасник гри, який її розпочинатиме, за умови, що на першому ході він зафарбує центр симетрії. Звідси, максимальна кількість ходів до 25.

Приклад 28. У трикутнику вершини розфарбовано червоними та зеленими кольорами. Всередині даного трикутника розфарбували ще 3 точки червоними та зеленими кольорами. З'ясувати, чи можливо на вершинах цих трикутників утворити: а) 3 трикутники з зеленими вершинами; б) 2 трикутники з вершинами одного кольору;

Розв'язання. Проаналізуємо можливі значення за допомогою таблиці.

Таблиця 1.5.1

Кількість червоних вершин	Кількість зелених вершин	а)	б)
2	4	так	так
3	3	ні	так
4	2	ні	так
Відповідь:		*ні*	*так*

Відповідь: а) не завжди; б) так.

Приклад 29. На політичній карті трикутної форми, що має розмір $7 \times 7 \times 7$ є 49 трикутних держав з однаковою площею. Кожного року будь-яка держава континенту направлятиме свою делегацію лише в одну із держав, з якою вона має неперервну ділянку кордону. З'ясувати, чи усі держави даної політичної карти будуть приймати делегацію щороку [13].

Розв'язання. Зафарбуємо у жовтий та синій колір 49 рівносторонніх трикутників даної політичної карти, та зробимо це так, щоб з кожної сторони будь-якого трикутника були різні кольори. Припустимо, що синіх кольорів після зафарбовування буде більше, якщо ж припущення не вірне, тоді перефарбуємо їх у протилежні кольори. Звідси маємо, що синіх держав більше, ніж жовтих. Враховуючи те, що кожна держава щороку надсилає свою делегацію у державу, протилежну за кольором, отримуємо, що хоча б одній синій державі не вистачить делегації з жовтої держави. Отже, не всі держави щороку прийматимуть делегацію.

Приклад 30. Усі точки, які належать прямій зафарбовані у 4 кольори. З'ясуйте, чи можна серед 11 одиничних відрізків знайти такі 2 відрізки, у яких співпадають кольори кінців при накладанні.

Розв'язання. На даній прямій, яка зафарбована чотирьома кольорами можна задати максимум десять одиничних відрізків, у яких кольори кінців не будуть співпадати. Позначимо кольори кінців числами $1, 2, 3, 4,$ тоді можемо записати наступні кольори кінців одиничних відрізків:

$$(1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 3), (2; 4), (3; 4).$$

Використовуючи принцип Діріхле, серед 11 одиничних відрізків обов'язково знайдуться мінімум 2 такі одиничні відрізки, у яких співпадатимуть кольори кінців при накладанні [23].

Приклад 31. Скількома способами можна розфарбувати всі 13 частин у 3 кольори так, щоб жодні 2 частини, що пофарбовані однаково, не мали спільної межі? 2 розфарбування вважатимемо різними, якщо хоча б одна з 13 частин зафарбована по-різному.

Розв'язання. Центральна частина може бути пофарбованою в один із трьох кольорів. Отже, всі 12 секторів будуть розфарбованими в інші 2 кольори, бо кожен сектор межує із центральною частиною.

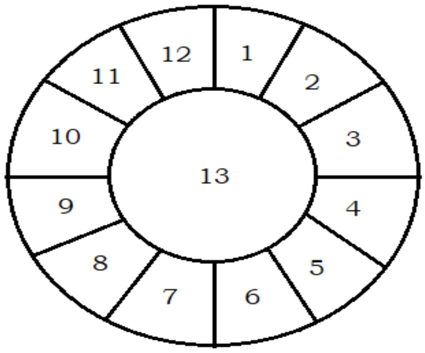

Рисунок 1.5.5

Сектор 1 може бути пофарбованим у будь-який із 2 кольорів. Центральна частина може бути пофарбованою в один із 3 кольорів. Тоді всі 12 секторів потрібно пофарбувати в інші 2 кольори, адже кожен сектор межує із центральною частиною. Сектор 1 може бути пофарбованим у будь-який із 2 кольорів, а кольори секторів що залишилися будуть автоматично встановлюватись після цього, отже сектор 2 повинен бути пофарбований в колір, який буде відрізнятися від кольору центральної частити та сектора 1, а сектор 3 має бути пофарбований у колір, що відрізняється від кольору центральної частини та сектора 2 і т. д.

Можна побачити, що так розфарбувавши сектори ми виконаємо умову нашої задачі, адже сектори 12 і 1 також будуть розфарбовані по-різному. Звідси, маємо $3 \cdot 2 = 6$ варіантів розфарбування [25, с. 92].

2.1.6 Комбінаторика в олімпіадних задачах

Розв'язуючи олімпіадні завдання інколи потрібно підрахувати кількість різноманітних комбінацій чисел, геометричних фігур або ж предметів.

Комбінаторика – це один з розділів математики, який вивчає теорію скінченних множин. В олімпіадних завданнях дуже часто зустрічаються задачі такого типу, тому виникає необхідність учаснику олімпіад познайомитись із цією темою детальніше. Звичайно, задачі які пропонуються на математичних олімпіадах відрізняються від задач шкільного курсу математики специфічною умовою, нестандартною ідеєю та неможливістю одразу знайти рішення. Проте якщо добре дослідити та проаналізувати комбінаторику в олімпіадах можна досягти значних успіхів.

Надзвичайно багато задач розв'язуються з використанням правил добутку та суму, розглянемо узагальнені теоретичні відомості.

Правило добутку: Якщо об'єкт А можна вибрати n способами і при кожному з цих виборів об'єкт В можна вибрати m способами, то вибір пари (А,В) можна здійснити $n \times m$ способами.

Правило добутку можна узагальнити.

Узагальнене правило добутку: Нехай об'єкт A_1 можна вибрати m_1 способами, об'єкт A_2 $- m_2$ способами,…, об'єкт A_k $- m_k$ способами. Тоді послідовний вибір об'єктів $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ можна здійснити $m_1 \times m_2 \times \dots m_k$ способами. Розглянемо комбінаторне правило додавання.

Правило суми: Якщо деякий об'єкт А можна вибрати n способами, а об'єкт В – m способами, причому ніякий вибір А не збігається з жодним з виборів В, то один з об'єктів А або В можна вибрати $n + m$ способами.

Правило суми, як і правило добутку, також можна узагальнити для k об'єктів [14].

Приклад 32. З Івано-Франківська до Києва можна дістатись поїздом, літаком або автобусом; з Києва до Чернігова – поїздом або автобусом. Скільки способів існує для здійснення подорожі маршрутом Івано-Франківськ – Київ – Чернігів?

Розв'язання. З Івано-Франківська до Києва можна дістатись трьома способами, з Києва до Чернігова – двома. Використовуючи правило множення отримаємо $3 \times 2 = 6$ способів. Розв'язати цю задачу можна було б іншим способом, просто перерахувавши всі можливі варіанти.

Приклад 33. а) У Данила є шахова дошка, яка має розмір 8×8. Скількома способами хлопчик може розставити на ній 8 однакових тур так, щоб вони не могли бити одна одну.

Розв’язання. а) На даній дошці на кожній із вертикалей повинна стояти одна тура. Зрозуміло, що на першу вертикаль у будь-яке із 8 положень можна поставити туру. Тоді, для тури, що знаходиться на другій вертикалі залишиться вже 7 положень, для тури на третій вертикалі – 6 і т.д. Виходячи з цього, одержуємо $8!$ способів [5, с. 81].

Приклад 34. У Аліни є 5 книг з казками, а у Віки – 6 книг з поезіями, трьома з яких вони хочуть обмінятися. З’ясувати, скількома способами дівчата можуть це зробити.

Розв’язання. Алінка зможе C_5^3 способами вибрати для обміну 3 з 5 своїх книг, а Віка –C_6^3 способами 3 з 6 своїх. Тобто, для даного обміну у дівчат існує $C_5^3 \cdot C_6^3 = \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3} = 200$ різноманітних варіантів.

Приклад 35. Трамвайний квиток, у якого номер складається із шести цифр і в його записі є дві сусідні цифри, які будуть відрізнятися на 5 називатимемо «чарівним». З’ясувати, скільки «чарівних» номерів є серед квитків, що мають номери від 000000 до 999999.

Розв’язання. Очевидно, що квитків із поданими номерами є 1000000. Порахуємо, скільки серед цих квитків є «чарівних», а значить таких, перша цифра яких буде довільною із 10 можливих, а друга цифра не буде відрізнятися від неї на 5. Тобто ми отримали вибір з 9 варіантів. Такий же вибір ми одержимо для цифр, що залишилися. Враховуючи це, маємо, що $10 \cdot 9^5$ квитків не будуть «чарівними». Звідси, легко знайти, що $10^6 - 10 \cdot 9^5$ є «чарівних» квитків.

Приклад 36. Дано правильний дев’ятикутник, у якого всі вершини розфарбовано у білий та чорний кольори. Довести, що існуватимуть таких 2 однакових трикутники, у яких вершини будуть розфарбовані однаковим кольором.

Розв'язання. Серед 9 вершин можна знайти таких 5, які будуть розфарбовані одним і тим же кольором, припустимо білим. Даних 5 вершин утворюватимуть $C_5^3 = 10$ трикутників, які будуть різними. Здійснюючи повороти відносно центра даної фігури на кути $\frac{K}{9} \cdot 360°$, $0 \leq K \leq 8$ ми отримаємо 90 трикутників. Серед цих трикутників точно будуть однакові, адже всього 9 вершин можуть утворити $C_9^3 = 84$ трикутників. Тобто, деякі 2 білі трикутники попадатимуть на один трикутник при даних поворотах, а це означає, що вони задовольнятиму умову нашої задачі [5, с. 82].

Приклад 37. З'ясувати, скільки «слів» можна буде одержати, якщо переставляти в слові ЛІНІЯ літери?

Розв'язання. У слові ЛІНІЯ є 2 однакові літери І. Вважатимемо, що вони різні, нехай І1 та І2. Отже, ми можемо скласти $5! = 120$ слів. Причому їх в декілька разів більше, ніж нам треба. Визначимо у скільки. Очевидно, що слова, які відрізняються лише перестановкою букв І1 та І2 на однакових місцях будуть однаковими. Враховуючи те, що на однакових місцях можна розставити дані букви двома способами $(2!)$, маємо, що замість 1 слова ми отримуватимемо два різних. Отже, ми отримаємо $120:2 = 60$ різних слів [22].

Приклад 38. В сенаті знаходяться 30 сенаторів. Кожних 2 сенатори будуть або друзями, або ворогами, причому кожний сенатор буде мати не менше 6 ворогів, а кожних 3 сенатори утворюватимуть комісію. З'ясувати, яким буде загальне число комісій, у яких три сенатори попарно дружитимуть, або попарно ворогуватимуть.

Розв'язання. Розглянемо множину із n елементів. Розглянемо для цієї множини кілька різних підмножин, причому вважатимемо, що порожня множина це підмножина. Спершу дослідимо множину з 2-ох елементів $\{0,1\}$. Для даної множини подібних підмножин буде 4: $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}$. Методом математичної індукції легко довести, що в n-елементної множини буде 2^n підмножин. Очевидно, що при $n = 0$ або $n = 1$ матиме місце база індукції. Доведемо наше твердження для $n + 1$, враховуючи те, що воно справджується для деякого n. Стає зрозуміло, що серед підмножин даної множини $\{1, 2, \dots, n+1\}$ буде 2^n підмножин, які ще будуть підмножинами множини $\{1, 2, \dots, n\}$. Виходячи з цього, існують такі 2^n підмножини, у яких точно є $n + 1$, адже, відкидаючи цей елемент, ми отримаємо якусь підмножину даної множини $\{1, 2, \dots, n\}$. Отже, ми отримали 2^{n+1} підмножин.

Приклад 39. Оленка дуже любить математику та хоче відвідувати додаткові уроки з цього предмету. Проте дівчинка має ще одне улюблене заняття, вона дуже любить стрибати по сходах у школі. Школярка за один стрибок може перестрибнути через 1 сходинку вгору, або стрибнути на 1 сходинку вверх. Педагог з математики дав обіцянку Оленці, що якщо дівчинка простибає по шкільних сходах усіма можливими різними способами та зможе правильно порахувати кількість даних способів то він погодиться займатися з нею додатково. Як довго потрібно чекати учениці щоб почати відвідувати заняття, якщо вона кожного дня стрибає тільки одним способом, враховуючи те, що шкільні сходи мають 13 сходинок.

Розв'язання. Зрозуміло, що стрибнути на першу сходинку можна тільки з підлоги. Щоб потрапити на 2-гу сходинку є два способи – з підлоги та відповідно з першої сходинки. Тоді на третю – з $1-$ої або з $2-$ої. Тобто загальною кількістю способів опинитися на $3-$ій сходинці є сума кількості способів потрапляння на 1-у та на 2-у сходинки, отже $1 + 2 = 3$.

Таким же чином виконуємо аналогічні дії для 4-ої сходинки. тобто $2 + 3 = 5$, і т.д. Тобто, якщо A_n, A_{n+1} та A_{n+2} – це кількість способів, за допомогою яких можна потрапити на n-ну, $(n + 1) - $у та $(n + 2) - $у сходинки, тоді, отримуємо, що $A_{n+2} = A_n + A_{n+1}$.

Звідси, використовуючи формулу, яку ми одержали, можна знайти: $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $A_3 = 3$, $A_4 = 5$, $A_5 = 8$, $A_6 = 13$, $A_7 = 21$, $A_8 = 34$, $A_9 = 55$, $A_{10} = 89$, $A_{11} = 144$, $A_{12} = 233$, $A_{13} = 377$. Тобто, Оленці щоб почати відвідувати заняття з математики довелося б чекати більше, ніж один рік.

2.2 Завдання шкільного етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

Умови задач

6 клас

1. (7 балів) Дано два числа. Яке число буде більшим і на скільки, якщо 4% 1-го числа дорівнюють 16, а 9% другого числа дорівнюють 63.
2. (7 балів) Зранку, о 8 годині, з Чернівців до Одеси вирушив пасажирський автобус, Пізніше, о 10 годині, з цієї ж зупинки вирушив легковий автомобіль, що рухався в тому ж напрямку. На якій відстані від автобусної зупинки автомобіль наздожене автобус, якщо швидкість автобуса 51 км/год, а швидкість автомобіля – 68 км/год.
3. (7 балів) Бабуся Уляна дуже любить своїх онуків, тому кожного Нового року вона дарує їм солодкі подарунки. Цього разу вона купила 160 цукерок, 120 кексів і 100 мандаринок. Скільки найбільше однакових подарунків може скласти бабуся своїм внукам? Скільки кексів, цукерок та мандаринок буде в кожному подарунку.
4. (7 балів) Миколка задумав правило, за яким у рядок записував числа. Першим числом в цьому ряді є число 7, далі хлопчик записав числа 16, 34, 61,…. З'ясувати, якими мають бути два наступні числа.
5. (7 балів) Дано пряму, на якій позначено три точки K, M та P, де $KM = 16$ см, $MP = 8$ см. Якою буде відстань між серединами відрізків KM та KP.

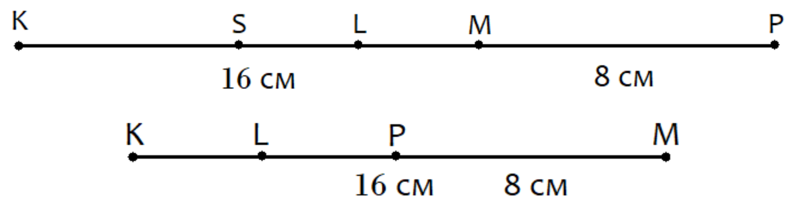

Рисунок 2.2.1

7 клас

1. (7 балів) Розв’язати рівняння:

$$(2x-2)^4 + (x^2 - 7x + 6)^4 = 0.$$

2. (7 балів) Даринка дуже любить книги і саме сьогодні розпочала читати нову книгу про подорожі в часі, в якій 310 сторінок. Дівчинка читає щодня 6 сторінок, окрім суботи, адже в суботу вихідний і вона прочитує за день 30 сторінок. Визначити, скільки днів потрібно Даринці, щоб прочитати нову книгу, враховуючи що сьогодні субота.
3. (7 балів) Один з суміжних кутів в 5 разів менший за їхню суму. Знайти ці кути.
4. (7 балів) У трикутнику KLM периметр дорівнює 54 см. Позначили точку P на стороні KM. Знайти довжину відрізка LP, якщо периметр трикутника KLP дорівнює 44 см, а периметр трикутника LMP дорівнює 47 см.

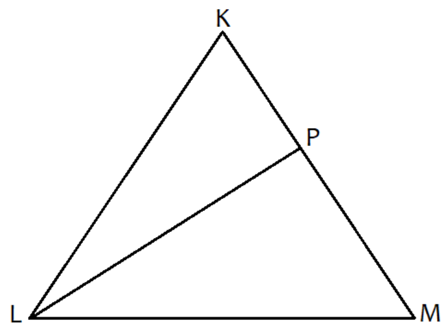

Рисунок 2.2.2

5. (7 балів) Дано два прямокутники $PSAD$ і $BLQN$, сторони яких мають довжини $PS = 6$ см, $SA = 10$ см, $BL = 8$ см, $LQ = 12$ см. Площа синьої частини у прямокутнику $PSAD$ дорівнює 35см^2. Знайти площу жовтої частини прямокутника $BLQN$.

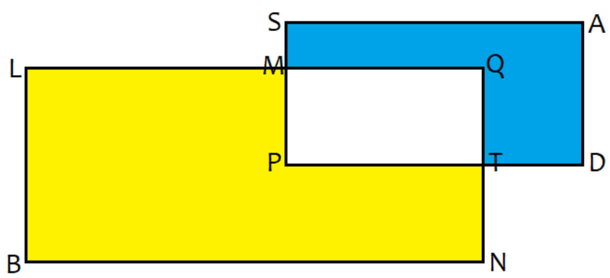

Рисунок 2.2.3

8 клас

1. (7 балів) У корзині є 65 кубиків жовтого, зеленого та чорного кольорів. Жовтих кубиків в 15 разів більше, ніж зелених, а чорних менше ніж жовтих, але більше ніж зелених. З’ясувати, на скільки чорних кубиків у корзині менше, ніж жовтих.
2. (7 балів) Перший копірайтер редагує 120 сторінок на 3 години швидше, ніж другий. З’ясуйте, скільки годин потрібно другому копірайтеру, щоб редагувати 180 сторінок, якщо редагуючи разом вони відформатують за 1 годину 60 сторінок.
3. (7 балів) Дано трикутник KLM у якому проведено бісектрису LP, причому вона ділить цей трикутник на два рівнобедрені та $KL = LP = PM$. Знайти кути трикутника KLM.

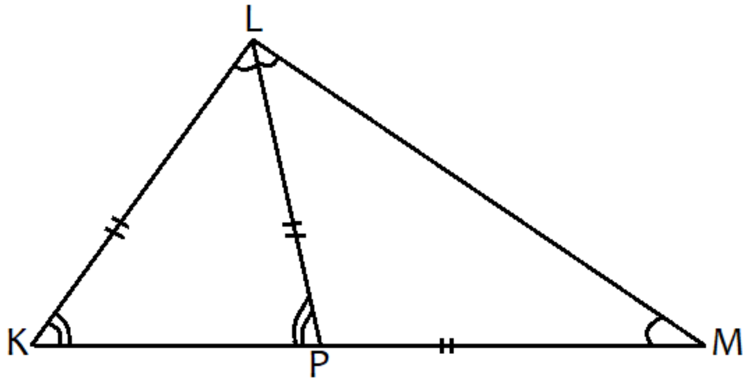

Рисунок 2.2.4

4. (7 балів) У цирку є 101 кролик. Всі кролики виступають групами і кожні двоє виступали рівно по одному разу, проте всі кролики виступати за один раз не ходили. Довести, що один із кроликів виступав не менше 11 разів.
5. (7 балів) Довести рівність:

$$\sqrt{7+\sqrt{40}} = \sqrt{2} + \sqrt{5}.$$

9 клас

1. (7 балів) Дано трикутник зі сторонами 3 см, 4 см та 5 см. До найбільшої сторони цього трикутника проведено медіану. Знайти її довжину.

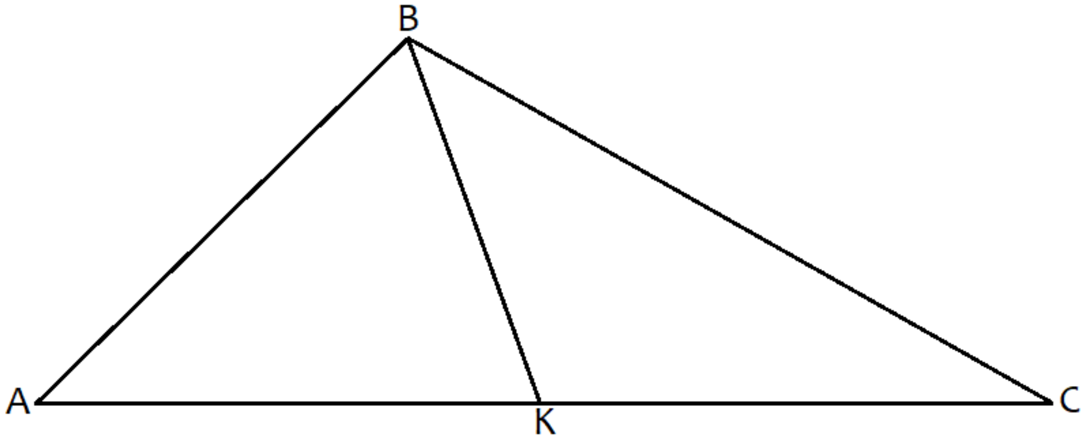

Рисунок 2.2.5

2. (7 балів) У Андрійка є 24 картки, на кожній з яких записано або число 8, або число 9. Сума всіх чисел, які записані на картках, ділиться на 23. З'ясувати, скільки карток, на яких записано число 8, є у Андрійка.
3. (7 балів) На день народження Марійки мама подарувала їй 82 кубики, кожен з яких розфарбовано певним кольором. Довести, що серед цих кубиків існує 10 різного кольору, або ж 10 кубиків одного кольору.
4. (7 балів) Знайти такі значення для параметрів a та b, для яких система рівнянь

$$\begin{cases} (4a + 2b) \cdot x + 16y = 32 \\ 2x + (8a - 12b)y = 8 \end{cases}$$

має безліч розв'язків.

5. (7 балів) Знайти значення виразу:

$$\sqrt{1 + 2021^2 + \frac{2021^2}{2022^2}} + \left(\frac{2022}{2021}\right)^{-1}.$$

10 клас

1. (7 балів) Знайти область визначення функції:

$$y = \sqrt{3x^2 - 10x + 3} + \frac{1}{\sqrt{16x - x^2}}.$$

2. (7 балів) Дано чотирикутник з відомими послідовними сторонами: 15см, 17см та 20 см. В даний чотирикутник вписали коло з радіусом 8 см. Визначити площу даного чотирикутника.

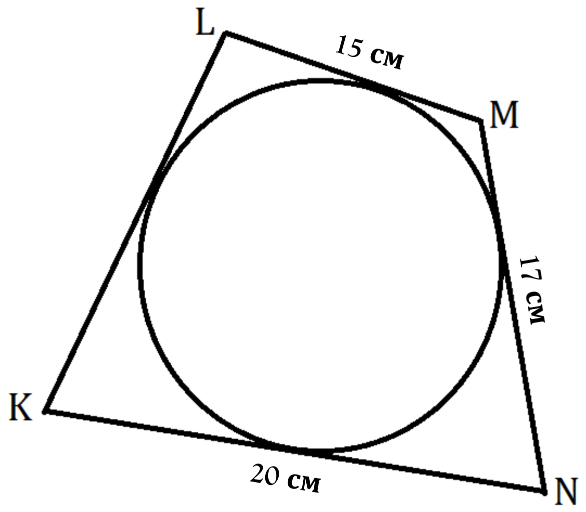

Рисунок 2.2.6

3. (7 балів) З'ясувати останню цифру числа $37^{37} - 23^{23}$.
4. (7 балів) Побудувати графік функції: $y = |2x - 2| + |2x - 6|$.
5. (7 балів) На новорічний шкільний вечір завітали учні $8, 9, 10, 11$ класів. Всього було 60 дітей. Учнів 9 та 11 класів разом на святі було у 2 рази менше, ніж учнів 8 класу, а 9 та 10 класів у 2 рази більше ніж одинадцятикласників. Скільки на святі було восьмикласників, якщо в кожному класі навчається різна кількість дітей.

11 клас

1. (7 балів) Розв'язати рівняння:

$$5x^2 + 3x = 4x\sqrt{x^2 + 3x} + 16.$$

2. (7 балів) Знайти значення наступного виразу: $\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1}$, де m_1 і m_2 – корені рівняння:

$$3m^2 + 7m - 23 = 0.$$

3. (7 балів) Побудувати графік функції:

$$y = \sqrt{1 - sin^2 x} \cdot \sqrt{tg^2 x + 1} \cdot \sqrt{16x^2 + 8x + 1}.$$

4. (7 балів) Після завершення навчального року, учні 11 класу отримали такі річні оцінки з математики: середній бал оцінок всіх хлопців становить 7,9, а всіх дівчаток – 9,1, З'ясувати, яку частину всіх учнів у класі складають хлопці, якщо середній бал хлопців та дівчат разом складає 8,2.

5. (7 балів) Дано ромб $K, L, M, N, -$ діагоналі якого перетинаються в т. O. Знайти площу ромба, якщо відомо довжину однієї діагоналі – 30 см, та дано довжину вписаного кола - 24π см.

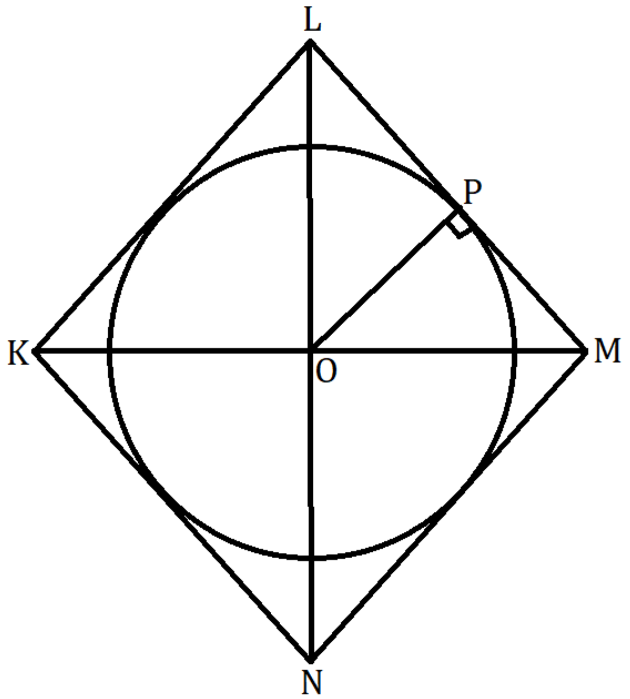

Рисунок 2.2.7

2.3 Розв’язки завдань шкільного етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

Розв’язання задач

6 клас

Завдання 1

Нехай x – перше число, y – відповідно друге число. Так як, 4% від першого числа дорівнюють 16, то $\frac{4}{100}x = 16$. Звідси, $x = 400$. Тепер знайдемо друге число. Так як, 9% від 2-го числа дорівнюють 63, то $\frac{9}{100}y = 63, y = 700$. Отже, $y - x = 700 - 400 = 300$, тобто перше число більше від другого на 300.

Відповідь: на 300.

Завдання 2

Позначимо через t – час руху автобуса, поки легкий автомобіль його наздожене. Тоді, легковий автомобіль, до вказаної події, їхав $t - 2$ години. Оскільки, на той час, коли автомобіль наздогнав автобус вони проїхали однакову відстань, має місце рівність:

$$51 \cdot t = 68 \cdot (t - 2).$$

Розв’яжемо це рівняння:

$$51 \cdot t = 68 \cdot (t - 2)$$

$$51t = 68t - 136$$

$$68t - 51t = 136$$

$$17t = 136$$

$$t = 8.$$

Отже, легковий автомобіль наздожене автобус через 8 годин з моменту руху з Чернівців о 8 годині ранку. Звідси, маючи час та швидкість легко знайти відстань:

$$S = 51 \cdot 8 = 408 \text{ (км)}.$$

Таким чином, на відстані 408 км від Чернівців автомобіль наздожене автобус.

Відповідь: 408 км.

Завдання 3

Нехай y – максимальна кількість однакових подарунків, яку бабуся може скласти з 160 цукерок, 120 кексів і 100 мандаринок так, щоб не залишилося жодної цукерки, мандаринки або кекса. Тобто, кожне із цих чисел має націло ділитися на число y, яке є натуральним. А це означає, що y є спільним дільником чисел 160, 120 і 100.

Так як, y – максимальна кількість подарунків, яку складено за вказаним способом, то число y має бути НСД для чисел 160, 120 і 100. Отже $y =$ НСД$(160, 120, 100)$. Розкладемо на прості множники ці числа.

$$160 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5,$$

$$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5,$$

$$100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5.$$

Отже, $y =$ НСД$(160, 120, 100) = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$.

Тобто, максимальна кількість однакових подарунків, яку бабуся Уляна може скласти з 160 цукерок, 120 кексів і 100 мандаринок – 20. Знайдемо, скільки кексів, цукерок та мандаринок буде в кожному подарунку:

$$\frac{160}{20} = 8 \text{ цукерок}, \ \frac{120}{20} = 6 \text{ кексів}, \ \frac{100}{20} = 5 \text{ мандаринок}.$$

Відповідь: 20 подарунків, 8 цукерок, 6 кексів, 5 мандаринок.

Завдання 4

Із поданого ряду чисел очевидна закономірність:

1. перше число: $7 + 9 \cdot 0 = 7$;
2. друге число: $7 + 9 \cdot 1 = 16$;
3. третє число: $16 + 9 \cdot 2 = 34$;
4. четверте число: $34 + 9 \cdot 3 = 61$;
5. п'яте число: $61 + 9 \cdot 4 = 97$;
6. шосте число: $97 + 9 \cdot 5 = 142$.

Тобто, наступними у даній послідовності мають бути числа 97 та 142.

Відповідь: 97 та 142.

Завдання 5

За умовою задачі, можливі два випадки розташування точок:

1) точка M лежить між точками K і P.
2) точка P лежить між точками K і M.

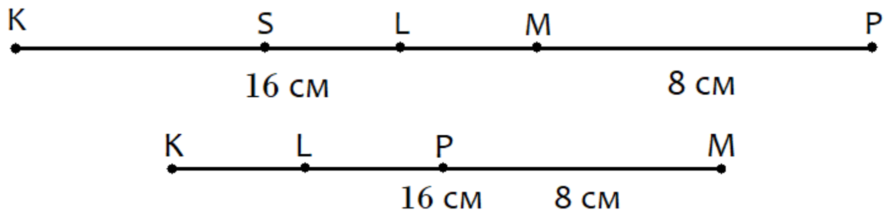

Рисунок 2.3.1

Розглянемо кожен випадок:

1) Нехай точка S – середина відрізка KM, точка L – середина відрізка KP.

Звідси маємо, що $KS = MS = 8$ см, $KL = KP : 2 = (KM + MP) : 2 = 24 : 2 = 12$ см. Отже, $SL = KL - KS = 12 - 8 = 4$ см.

2) Нехай точка P – середина відрізка KM, точка L – середина відрізка KP.

Отже маємо, що: $KP = 8$ см, $KL = 8 : 2 = 4$ см. Звідси, $LP = KP - KL = 8 - 4 = 4$ см.

Відповідь: 4 см.

7 клас

Завдання 1

При піднесенні будь-якого числа до парного степеня воно буде невід'ємним, отже всі доданки у рівнянні будуть невід'ємними. Пам'ятаючи правило, яке стверджує що сума невід'ємних чисел дорівнює 0 тоді і тільки тоді, коли кожний доданок дорівнює нулю, зможемо записати дане рівняння у вигляді системи:

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0, \\ x^2 - 7x + 6 = 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = 1, \\ \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 6, \end{array} \right. \end{cases} \quad \text{або } x = 1.$$

Відповідь: $x = 1$.

Завдання 2

На протязі тижня Даринка прочитає $30 + 6 \cdot 6 = 66$ сторінок. Порахуємо: $310: 66 = 4\,(\text{ост.}\,46)$. Тобто, щоб дівчинка прочитала книгу їй треба 4 повні тижні.

За суботу Даринка прочитає 30 сторінок, залишається ще 16. Отже їй знадобиться ще 3 дні. Таким чином, Даринці на прочитання всієї книги потрібно 4 тижні і 4 дні, тобто 32 дні.

Відповідь: 32 дні.

Завдання 3

Нехай, той суміжний кут, який є меншим дорівнює y градусів, тоді більший кут дорівнює $(180° - y)°$.

З умови задачі випливає, що $5y = 180°$, звідси $y = 36°$. Якщо менший кут дорівнює $36°$, то інший суміжний кут дорівнює $180° - 36° = 144°$.

Відповідь: $144°$.

Завдання 4

Дано, що $P_{KLP} = 44$ см, $P_{LMP} = 47$ см, $P_{KLM} = 54$ см.

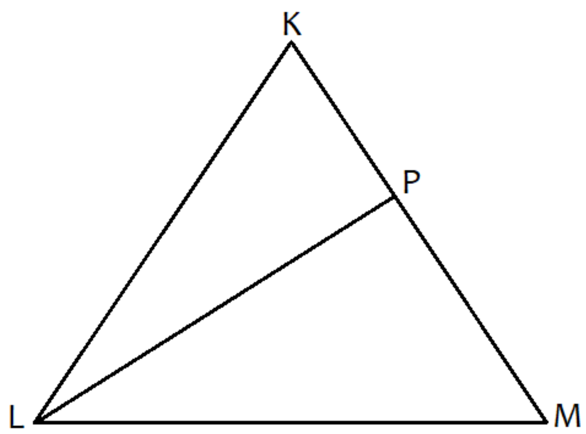

Рисунок 2.3.2

Виконаємо перетворення:

$$P_{KLP} + P_{LMP} = KL + LP + KP + LM + MP + LP = (KL + KP + LM + MP) + 2LP = (KL + KM + LM) + 2LP = P_{KLM} + 2LP = 54 + 2LP.$$

Тобто, маємо що:

$$44 + 47 = 54 + 2LP.$$

Звідси легко знайти, що $LP = 18{,}5$ см.

Відповідь: 18,5 см.

Завдання 5

Дано $PSAD, BLQN$ – прямокутники. $PS = 6$ см, $SA = 10$ см, $BL = 8$ см, $LQ = 12$ см.

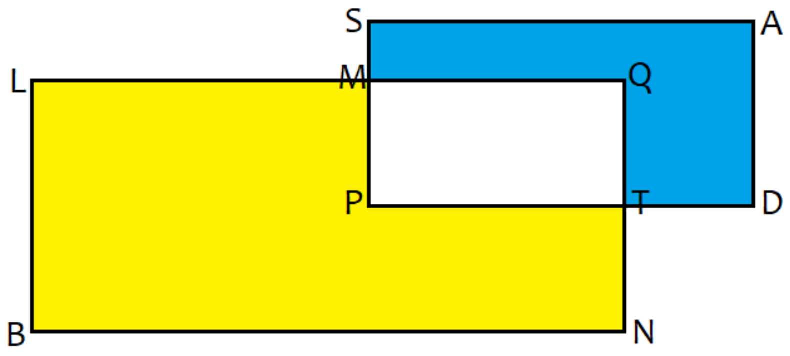

Рисунок 2.3.3

Так як, $S_{PSAD} = PS \cdot SA = 6 \cdot 10 = 60$ см^2, тоді $S_{PMQT} = 60 - 35 = 25$ см^2.

Знайдемо $S_{BLQN} = BL \cdot LQ = 8 \cdot 12 = 96$ см^2.

Звідси, легко знайти площу жовтої частини прямокутника $BLQN$:

$$S = S_{BLQN} - S_{PMQT} = 96 - 25 = 71 \text{ см}^2.$$

Відповідь: 71 см^2.

8 клас

Завдання 1

Нехай, x – кількість у корзині зелених кубиків, тоді жовтих - $15x$. Позначимо y – кількість чорних кубиків. Із умови задачі, $x < y < 15x$. Із рівності $x + y + 15x = 65$ можемо знайти, що $y = 65 - 16x$.

Отже:

– Якщо $x = 1$, то $y = 49$, що не задовольняє нерівність $x < y < 15x$.

– Якщо $x = 2$, то $y = 33$, що також не задовольняє дану нерівність.

– Якщо $x = 3$, то $y = 17$ – умова задачі задовольняється.

– Якщо $x = 4$, то $y = 1$, що за умовою задачі нам не підходить.

Тобто, для того, щоб нерівність $x < y < 15x$ була правильною, потрібно, щоб $x = 3$, а $y = 17$. Тоді $15x - y = 28$ кубиків.

Відповідь: на 28 кубиків.

Завдання 2

Нехай $x -$ сторінок редагує за 1 годину перший копірайтер. Тоді 120 сторінок він редагуватиме $\frac{120}{x}$ год. Тоді другий копірайтер редагуватиме за 1 годину $(60 - x)$ сторінок, а 120 сторінок – за $\frac{120}{60-x}$ год.

За умовою задачі, перший копірайтер витрачає на форматування 120 сторінок на 3 години менше, ніж другий. Складемо та розв'яжемо наступне рівняння:

$$\frac{120}{60 - x} - \frac{120}{x} = 3,$$

звідки

$$\frac{120x - 7200 + 120x - 180x + 3x^2}{x(60 - x)} = 0,$$

або

$$\begin{cases} 3x^2 + 60x - 7200 = 0 \\ \quad x \neq 0; x \neq 60. \end{cases}$$

Розв'язуючи рівняння $3x^2 + 60x - 7200 = 0$ отримуємо 2 розв'язки $x = -60,\ x = 40$. Отже, перший копірайтер редагує за 1 годину 40 сторінок, адже $x = -60$ не задовольняє умову задачі. Таким чином, другий копірайтер редагує за 1 годину $60 - x = 60 - 40 = 20$ сторінок, а 180 сторінок він відредагує за 9 годин.

Відповідь: 9 годин.

Завдання 3

Дано трикутник KLM, LP – бісектриса, $KL = LP = PM$, трикутники LPM і LPK – рівнобедрені.

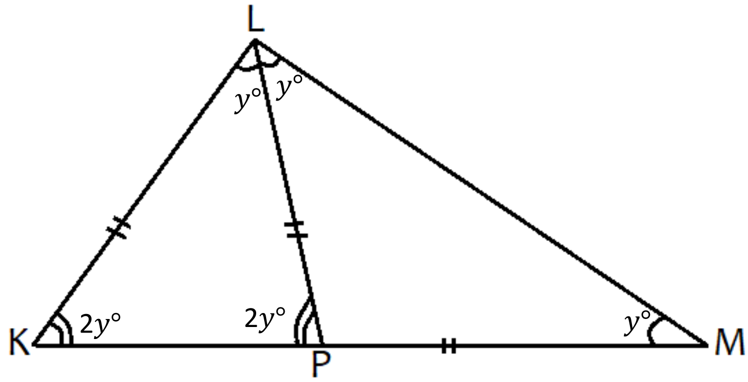

Рисунок 2.3.4

Так як, $LP -$ бісектриса трикутника KLM, то вона поділить кут L на два рівні кути. Позначимо їх через $y°$. За умовою задачі трикутник LPM рівнобедрений, а тому $\angle y° = \angle M$. $\angle LPK = 2y° -$ як зовнішній кут трикутника LPM. Так як трикутник KLP – рівнобедрений, то $\angle LPK = \angle LKP = 2y°$.

Звідси, із трикутника KLM матимемо, що $2y + 2y + y = 180°$, тобто $y = 36°$. Тому $\angle KML = 36°$, $\angle KLM = 2 \cdot 36° = 72°$, $\angle MKL = 2 \cdot 36° = 72°$.

Відповідь: $36°, 72°, 72°$.

Завдання 4

Нехай одночасно у одному номері виступають 11 кроликів. Маємо, що будь-який кролик, що не виступав у цьому номері, буде виступати з кожним учасником не менше, ніж 11 разів. Якщо у кожному виступі брало участь не більше 10 кроликів, то будь-який кролик виступав не менше, ніж у 11 номерах, адже він має виступати разом із кожним зі ста кроликів. Отже, ми довели, що один із кроликів виступав не менше 11 разів.

Завдання 5

Доведемо рівність:

$$\sqrt{7+\sqrt{40}} = \sqrt{2} + \sqrt{5} \Leftrightarrow \left(\sqrt{7+\sqrt{40}}\right)^2 = \left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 7+\sqrt{40} = 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{5} + 5 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 7+\sqrt{40} = 7 + 2\sqrt{10} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{40}\right)^2 = \left(2\sqrt{10}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 40 = 4 \cdot 10 \quad \Leftrightarrow \quad 40=40.$$

9 клас

Завдання 1

Дано трикутник $ABC, AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $AC = 5$ см, BK – медіана трикутника ABC.

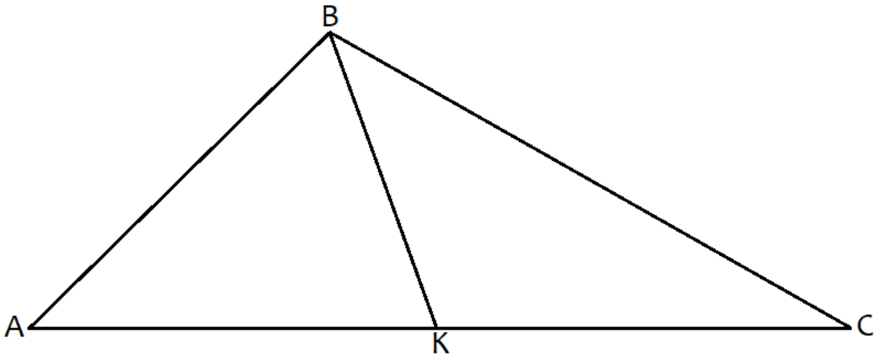

Рисунок 2.3.5

Щоб знайти довжину медіани використаємо наступну формулу:

$$BK = \frac{1}{2}\sqrt{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 4^2 - 5^2} = \frac{1}{2}\sqrt{18 + 32 - 25} = \frac{1}{2}\sqrt{25} = 2{,}5 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 2,5 см.

Завдання 2

Позначимо через x – кількість карток, на яких записане число 8, відповідно через $y -$ кількість карток, на яких записане число 9. За умовою задачі, матимемо:

$$\begin{cases} x + y = 24 \\ (8x + 9y) \vdots 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 - y \\ (8(24 - y) + 9y) \vdots 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 - y \\ (192 - 8y + 9y) \vdots 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 - y \\ (192 + y) \vdots 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 24 - y \\ (8 + y) \vdots 23 \end{cases}$$

Так як, $1 \leq y \leq 24$, то із того, що $(8 + y) \vdots 23$ випливає, що $y = 15$, тоді $x = 9$.

Відповідь: 9.

Завдання 3

Для доведення цієї задачі скористаємось методом Діріхле.

Доведення. Якщо для розфарбовування 82 кубиків використали не менше десяти кольорів, то очевидно, що у Марійки буде 10 кубиків різного кольору.

Якщо ж для розфарбовування 82 кубиків використано не більше ніж 9 різноманітних кольорів, то, використовуючи принцип Діріхле одержуємо, що знайдеться хоча б 10 кубиків одного кольору.

В даній задачі у ролі «зайців» виступають кубики, а в ролі «кліток» - кольори.

Завдання 4

Система лінійних рівнянь матиме безліч розв'язків тоді і тільки тоді, коли буде виконуватись наступна умова:

$$\frac{4a+2b}{2}=\frac{16}{8a-12b}=\frac{32}{8}.$$

Знайдемо розв'язки даної системи рівнянь:

$$\begin{cases}\dfrac{4a+2b}{2}=\dfrac{16}{8a-12b},\\ \dfrac{16}{8a-12b}=4,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{4a+2b}{2}=\dfrac{16}{8a-12b},\\ 8a-12b=4,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{4a+2b}{2}=\dfrac{16}{4},\\ 8a-12b=4,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8a+4b=16,\\ 8a-12b=4,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}-8a-4b=-16,\\ 8a-12b=4,\end{cases} \Rightarrow \quad -16b=-12, \quad \Rightarrow \quad b=\frac{3}{4}.$$

Одержимо:

$$8a+4\cdot\frac{3}{4}=16,$$

звідси

$$a=1\frac{5}{8}.$$

Відповідь: $a=1\frac{5}{8},\ b=\frac{3}{4}$.

Завдання 5

Спочатку розглянемо вираз: $1+2021^2+\frac{2021^2}{2022^2}$. Позначимо $x=2021$. Отримаємо:

$$\frac{(x+1)^2+x^2(x+1)^2+x^2}{(x+1)^2}=\frac{x^4+x^2+1+2x^3+2x^2+2x}{(x+1)^2}$$
$$=\left(\frac{x^2+x+1}{x+1}\right)^2.$$

Отже:

$$\sqrt{1+2021^2+\frac{2021^2}{2022^2}+\left(\frac{2022}{2021}\right)^{-1}}=\sqrt{\left(\frac{x^2+x+1}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x+1}{x}\right)^{-1}}$$
$$=\frac{x^2+x+1}{x+1}+\frac{x}{x+1}=\frac{x^2+2x+1}{x+1}=\frac{(x+1)^2}{x+1}=x+1$$
$$=2021+1=2022.$$

Відповідь: 2022.

10 клас

Завдання 1

Знайдемо область визначення функції $y=\sqrt{3x^2-10x+3}+\frac{1}{\sqrt{16x-x^2}}$ із наступної системи нерівностей:

$$\begin{cases}3x^2-10x+3\geq 0,\\ 16x-x^2>0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right]\cup[3;+\infty),\\ x\in(0;16);\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(0;\frac{1}{3}\right]\cup[3;16).$$

Відповідь: $x\in\left(0;\frac{1}{3}\right]\cup[3;16)$.

Завдання 2

Шукати площу чотирикутника $KLMN$ будемо за формулою $S=p\cdot r$, де p – напівпериметр чотирикутника, а $r-$ радіус вписаного кола. За умовою задачі у чотирикутник $KLMN$ вписане коло, а це означає, що сума протилежних сторін одинакова, тобто $15+20=17+y$, де $y-$четверта сторона чотирикутника. Звідси, $y = 18$. Тоді $p = \frac{1}{2}(15 + 17 + 20 + 18) = 35$ см.

Отже, маючи довжини напівпериметра та радіуса можемо знайти площу чотирикутника $KLMN$.

$$S = p \cdot r = 35 \cdot 8 = 280 \text{ см}^2.$$

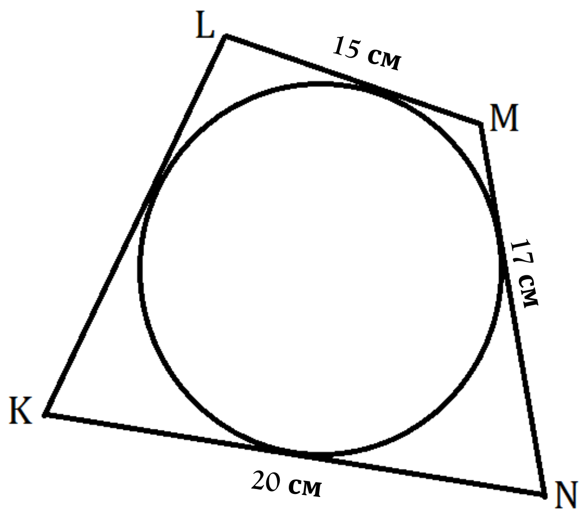

Рисунок 2.3.6

Завдання 3

37^1 – закінчується цифрою 7,

37^2 – закінчується цифрою 9,

37^3 – закінчується цифрою 3,

37^4 – закінчується цифрою 1.

Період 4

23^1 – закінчується цифрою 3,

23^2 – закінчується цифрою 9,

23^3 – закінчується цифрою 7,

23^4 – закінчується цифрою 1.

Період 4

$37^{37} - 23^{23} = 37^{4 \cdot 9+1} - 23^{4 \cdot 5+3}$=…0

закінч. 7 закінч. 7

Відповідь: 0.

Завдання 4

Точки $x = 1$ та $x = 3$ розбивають числову вісь на 3 проміжки, для кожного з яких запишемо функцію:

1) якщо $x \leq 1$, то $y = 8 - 4x$;
2) якщо $1 < x \leq 3$, то $y = 4$;
3) якщо $x > 3$, то $y = 4x - 8$.

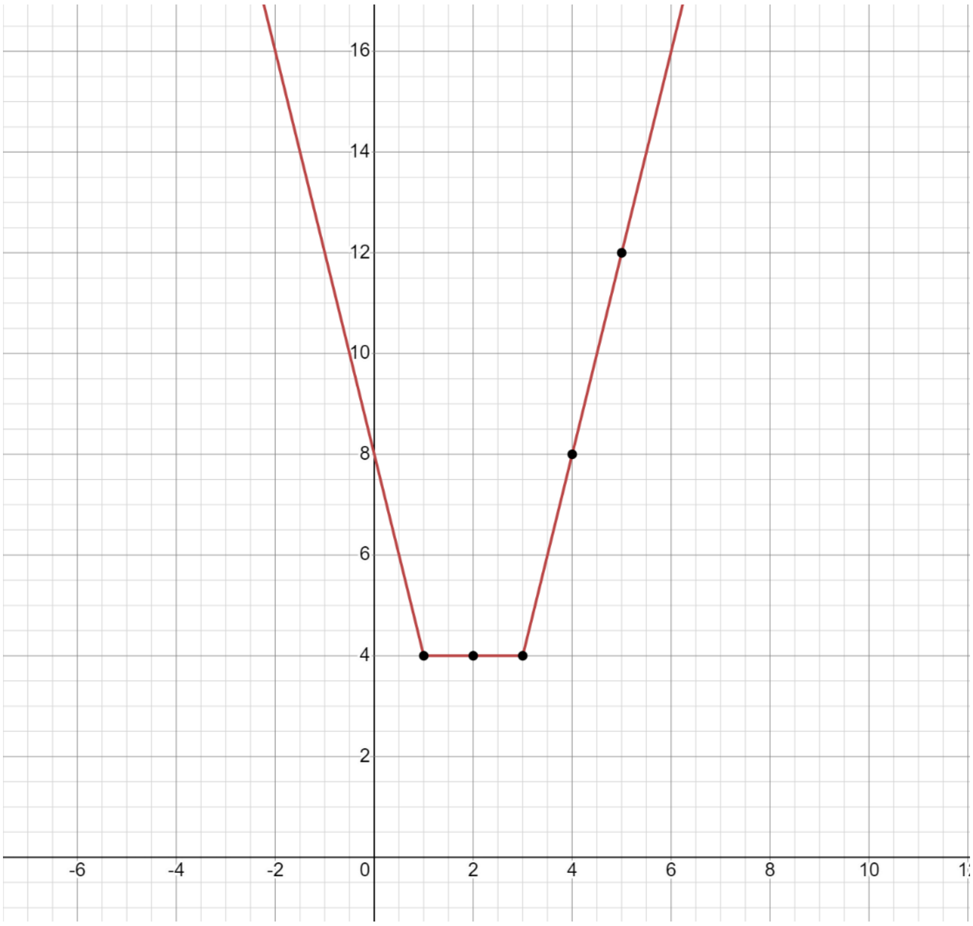

Рисунок 2.3.7

Завдання 5

Нехай a – кількість учнів 8 класу, b – кількість учнів 9 класу, c та d – кількість учнів відповідно 10 та 11 класів. Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 60, \\ b + d = \dfrac{1}{2}a, \\ b + c = 2d. \end{cases}$$

Із другого та із третього рівнянь отримаємо:

$$a = 2b + 2d \text{ та } c = 2d - b.$$

Підставимо дані рівності у перше рівнянні:

$$2b + 5d = 60.$$

Виходячи з того, що $a, b, c, d -$ це цілі та невід'ємні числа, стає зрозумілим, що d – це парне число від 0 до 12. Перевіримо всі варіанти:

$$d = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 30 \quad \Rightarrow \quad a = 60 \quad \Rightarrow \quad c = -30,$$

$$d = 2 \quad \Rightarrow \quad b = 25 \quad \Rightarrow \quad a = 54 \quad \Rightarrow \quad c = -21,$$

$$d = 4 \quad \Rightarrow \quad b = 20 \quad \Rightarrow \quad a = 48 \quad \Rightarrow \quad c = -12,$$

$$d = 6 \quad \Rightarrow \quad b = 15 \quad \Rightarrow \quad a = 42 \quad \Rightarrow \quad c = -3,$$

$$d = 8 \quad \Rightarrow \quad b = 10 \quad \Rightarrow \quad a = 36 \quad \Rightarrow \quad c = 6,$$

$$d = 10 \quad \Rightarrow \quad b = 5 \quad \Rightarrow \quad a = 30 \quad \Rightarrow \quad c = 15,$$

$$d = 12 \quad \Rightarrow \quad b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 24 \quad \Rightarrow \quad c = 24.$$

З умови задачі, зрозуміло, що можливі два варіанти, коли $d = 8$, та коли $d = 10$. Тобто, восьмикласників може бути або 30 або 36.

11 клас

Завдання 1

Розв'яжемо дане рівняння:

$$5x^2 + 3x = 4x\sqrt{x^2 + 3x} + 16,$$

$$5x^2 + 3x - 4x\sqrt{x^2 + 3x} = 16,$$

$$4x^2 - 4x\sqrt{x^2 + 3x} + x^2 + 3x = 16,$$

$$\left(2x - \sqrt{x^2 + 3x}\right)^2 = 16,$$

$$2x - \sqrt{x^2 + 3x} = 4, \qquad \text{або} \qquad 2x - \sqrt{x^2 + 3x} = -4,$$

$$\text{ОДЗ: } x^2 + 3x \geq 0,$$

$2x - 4 = \sqrt{x^2 + 3x},$	$2x + 4 = \sqrt{x^2 + 3x},$
$4x^2 - 16x + 16 = x^2 + 3x,$	$4x^2 + 16x + 16 = x^2 + 3x,$
$3x^2 - 19x + 16 = 0,$	$3x^2 + 13x + 16 = 0,$
$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{16}{3},$	Рівняння розв'язків немає.

Відповідь: $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{16}{3}$.

Завдання 2

Із рівняння $3m^2 + 7m - 23 = 0$, використовуючи теорему Вієта, матимемо:

$$m_1 + m_2 = -\frac{7}{3},$$

$$m_1 \cdot m_2 = -\frac{23}{3}.$$

Отже, матимемо:

$$\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1} = \frac{m_1^2 + m_2^2}{m_1 \cdot m_2} = \frac{m_1^2 + 2m_1m_2 + m_2^2 - 2m_1m_2}{m_1 \cdot m_2} = \frac{(m_1 + m_2)^2 - 2m_1m_2}{m_1 \cdot m_2}$$

$$= \frac{\left(-\frac{7}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{23}{3}\right)}{-\frac{23}{3}} = \frac{\frac{49}{9} + \frac{46}{3}}{-\frac{23}{3}} = \frac{\frac{49 + 138}{9}}{-\frac{23}{3}} = \frac{\frac{187}{9}}{-\frac{23}{3}} = -\frac{187}{69}$$

$$= -2\frac{49}{69}.$$

Завдання 3

Для того, щоб побудувати графік функції $y = \sqrt{1 - sin^2x} \cdot \sqrt{tg^2x + 1} \cdot \sqrt{16x^2 + 8x + 1}$ виконаємо наступні перетворення:

$$y = \sqrt{1 - sin^2x} \cdot \sqrt{tg^2x + 1} \cdot \sqrt{16x^2 + 8x + 1}$$

$$= \sqrt{cos^2x} \cdot \sqrt{\frac{1}{cos^2x}} \cdot \sqrt{(4x + 1)^2} = |\cos x| \cdot \left|\frac{1}{cosx}\right| \cdot |4x + 1|$$

$$= |4x + 1|, \text{при } x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

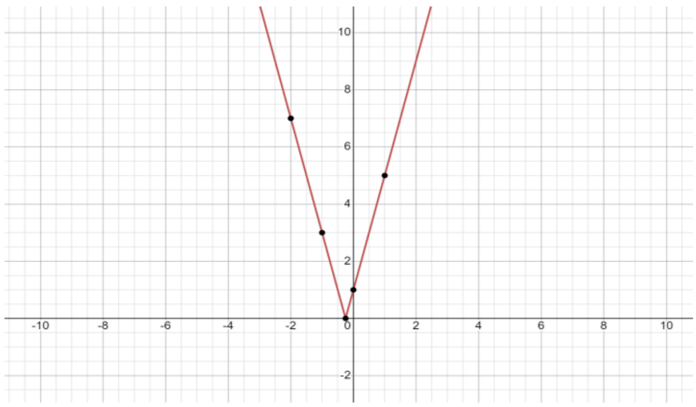

Рисунок 2.3.8

Завдання 4

Позначимо через a – суму всіх річних оцінок хлопців, b – сума річних оцінок дівчат, m – кількість всіх хлопчиків у 11 класі, n – кількість всіх дівчаток у 11 класі. Отже, виходячи із умови задачі ми повинні знайти значення $\frac{m}{m+n}$. Складаємо та розв'яжемо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{m} = 7{,}9\,, \\ \dfrac{b}{n} = 9{,}1\,, \\ \dfrac{a+b}{m+n} = 8{,}2\,, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 7{,}9m\,, \\ b = 9{,}1\,n, \\ a+b = 8{,}2(m+n), \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$7{,}9m + 9{,}1n = 8{,}2(m+n) \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}9n - 0{,}3m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 3n.$$

Отже, можемо знайти шукане значення:

$$\frac{m}{m+n} = \frac{3n}{3n+n} = \frac{3n}{4n} = \frac{3}{4}.$$

Відповідь: $\frac{3}{4}$.

Завдання 5

Дано $KLMN$ – ромб, LN та KM – діагоналі ромба, $LN = 30$ см. Точка O – центр вписаного кола. Позначимо точку P на стороні LM, яка буде точкою дотику кола, яке вписане в ромб, з його стороною.

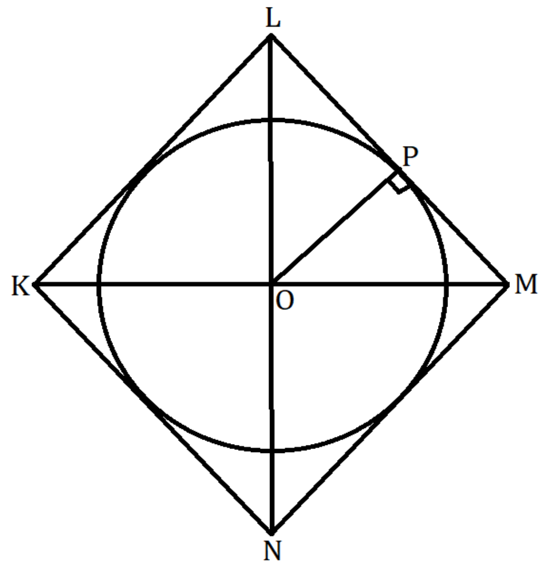

Рисунок 2.3.9

За умовою задачі, $l = 24\pi,$ тоді радіус $OP = 12$ см. Далі розглядатимемо трикутник OPL, в якому $\angle P = 90°,\ OP = 12$ см, а $LO = 15$ см.

Використовуючи теорему Піфагора знайдемо LP:

$$LP = \sqrt{LO^2 - OP^2} = \sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 9 \text{ см.}$$

Варто відзначити, що трикутник MOL і трикутник OPL є подібними трикутниками за двома кутами, адже $\angle L -$ є спільним кутом, а $\angle MOL$ та $\angle OPL$ – прямі ($= 90°$). Звідси, отримуємо рівність:

$$\frac{OP}{MO} = \frac{PL}{OL}.$$

Знайдемо MO:

$$MO = \frac{OP \cdot OL}{PL} = \frac{12 \cdot 15}{9} = 20 \text{ см.}$$

Звідси, можемо знайти площу:

$$S = 2 \cdot MO \cdot OL = 2 \cdot 20 \cdot 15 = 600 \text{ см}^2.$$

Відповідь: 600 см^2.

Висновки до 2-го розділу

Проаналізувавши основні типи завдань шкільних олімпіад можна зробити висновок, що олімпіадні задачі відрізняються від шкільних своєю специфікою. Для того, щоб розв’язати олімпіадне завдання на І етапі зазвичай недостатньо добре знати шкільний курс математики, адже задачі, що пропонуються учаснику олімпіад потребують від нього логічного мислення, оригінальних ідей та математичних здібностей.

Під час підготовки до олімпіад вчитель повинен ознайомити учня з типовими завдання та деякими методами їх розв’язування. Зрозуміло, що таких методів є дуже багато і не завжди легко здогадатися, який саме метод застосовувати у поданому завданні. Тому опрацьовувати необхідно найбільш поширені методи, які найчастіше зустрічаються на шкільних олімпіадах.

Зазвичай, учні готуються до Всеукраїнських олімпіад на факультативних та індивідуальних заняттях разом зі своїм вчителем. Проте самостійна підготовка є необхідною та дуже важливою складовою для хорошого результату.

Саме тому, у другому розділі була створена база шкільних олімпіадних завдань для учнів 6-11 класів з детальними розв’язками, яка допоможе учням ознайомитись із типовими завданнями та проаналізувати методику розв’язування подібних завдань.

Провівши аналіз другого (практичного) розділу даної роботи, досягнуто таких результатів:

1. розглянуто основні типи завдань, що зустрічаються на Всеукраїнських учнівських олімпіадах з математики;
2. проаналізовано найпоширеніші методи розв’язування олімпіадних завдань;
3. опрацьовано теоретичний та практичний матеріал задач на подільність;
4. наведено основні принципи розв’язування діофантових рівнянь в олімпіадних задачах;
5. розглянуто основні завдання на доведення нерівностей;
6. проаналізовано принцип Діріхле та його практичне застосування в шкільних олімпіадах;
7. досліджено методику розв’язування задач на розфарбування;
8. розглянуто основні типи комбінаторних задач в олімпіадних завданнях з математики;
9. створено базу олімпіадних завдань для учнів 6-11 класів з детальними розв’язками.

ВИСНОВКИ

Проаналізувавши проведене дослідження можна зробити висновок, що шкільні олімпіади в закладах загальної середньої освіти є дуже важливою формою позакласної роботи, яка не тільки виявляє приховані таланти дітей, створює умови для розвитку математичних здібностей учнів, а й прививає цікавість, захоплення та любов у дітей до даного предмету.

Підготовка школярів до Всеукраїнських учнівських олімпіад вимагає клопіткої праці, обізнаності з боку педагога, чітких правил та необхідності їх дотримання. Власним прикладом вчитель повинен заохотити учнів до участі в олімпіадах, розвинути цікавість до предмету та змотивувати дитину. Адже задачі олімпіадного характеру відрізняються від задач шкільної програми методами розв'язування, нестандартними ідеями та специфічною умовою. Тому дуже важливо під час підготовки ознайомитися із найпоширенішими типами олімпіадних завдань, виокремивши основні методи, специфіку знаходження їх розв'язків.

Дослідивши дану дипломну роботу, сформулюємо основні висновки та одержані результати:

- ✓ досліджено нормативну базу Всеукраїнських учнівських олімпіад з навчальних предметів;
- ✓ проаналізовано мету, цілі та завдання шкільних учнівських олімпіад;
- ✓ аналізуючи власний педагогічний досвід сформовано деякі поради для вчителів щодо підготовки до олімпіад різних етапів;
- ✓ розглянуто найпоширеніші проблеми, які виникають як в учнів так і педагогів на етапі підготовки;
- ✓ виділено основні методичні особливості олімпіад в ЗЗСО;
- ✓ виокремлено специфіку та функції кожного із етапів Всеукраїнських учнівських олімпіад;
- ✓ досліджено основні типи олімпіадних завдань для учнів 6-11 класів;

- ✓ розглянуто теоретичний та практичний матеріал найпоширеніших методів розв'язування математичних олімпіад;
- ✓ проаналізовано основні типи задач на подільність та специфіку знаходження їх розв'язків;
- ✓ сформовано основні принципи розв'язування діофантових рівнянь в олімпіадних задачах;
- ✓ виокремлено найпоширеніші методи знаходження розв'язків завдань на доведення нерівностей;
- ✓ розглянуто основні теоретичні відомості принципу Діріхле та досліджено основні типи завдань даної теми;
- ✓ опрацьовано методику розв'язування задач на розфарбування;
- ✓ сформовано деякі функції завдань з комбінаторики та розглянуто типові завдання, які зустрічаються в олімпіадах з математики;
- ✓ створено варіанти олімпіадних завдань для учнів 6-11 класів;
- ✓ наведено детальні розв'язки даних олімпіадних завдань для можливості самостійної підготовки учнів до математичних олімпіад;
- ✓ опубліковано тези на III Всеукраїнській науково-методичній інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ плюс-2022 Форум молодих дослідників»;
- ✓ впроваджено результати досліджень даної дипломної роботи у власній педагогічній практиці протягом 2021/2022 та 2022/2023 навчальних років;
- ✓ розроблено та опубліковано веб-сайт, на якому розміщено власно розроблену базу олімпіадних завдань для учнів 6-11 класів з наведеними детальними розв'язками.

Цілеспрямоване дослідження в процесі написання дипломної роботи свідчить про досягнення поставлених цілей.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Барвінок Р.Л., Козлова О.М. Готуємося до математичних олімпіад та конкурсів разом, навч.посібник, Черкаси. - 2013р. – 96с.
2. Беседін Б.Б., Кадубовський О.А., Кадубовська В.М., Сьомкін В.С., Труш Н.І., Чуйко О.В. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: Розв’язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2010 (ВИПУСК 8, СЕРІЯ: Викладачі СДПУ – учням, студентам, вчителям...): навчальний посібник – Слов’янськ - 2011 р. – 80 с.
3. Вороний О.М. Готуємось до олімпіади з математики, Книга 1.- 2008 р. – 116 с.
4. Коваль Т.В.400 задач із математичних олімпіад, 8-11 класи, Тернопіль, Мандрівець.- 1998 р. – 80 с.
5. Колет І.М., Панькові В.Г., Радченко В.М., Теплінський Ю.В. Деякі методи розв'язування олімпіадних задач: навчальний посібник / Кам’янець-Подільський: Абетка, 2005. – 344 с.
6. Постова С. Підготовка учнів до участі в олімпіадах з інформатики та інформаційних технологій з використанням інтернет-ресурсів. - Наукові записки, Випуск 8 (II) - 2008 р. – 67с.
7. Рего В. Л Курс. Практикум з розв’язування олімпіадних та конкурсних задач». - 2014 р. – 13с.
8. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: навчальний посібник, друге видання, доповнене. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан. - 2011 р. — 400 с.
9. Свєтлова Т.В. Організація, проведення, результати ІІ, ІІІ, IV етапів Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики (2019-2020 н.р., Сумська область): інформаційно-аналітичний бюлетень / укл. Т.В. Свєтлова; за ред. І.В. Удовиченко. Суми: НВВ КЗ СОІППО. - 2020 р. – 68 с.

10. Федак І. В. Обласні олімпіади з математики 1987 – 2005 рр. – Івано-Франківськ: ОІППО. - 2005 р. – 164 с.
11. Федак І.В. Готуємось до олімпіади з математики. - Івано-Франківськ: ОІППО, 2003 р. – 111с.
12. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. - Тернопіль, Богдан. - 2005 р. – 208с.
13. http://olimpmath.blogspot.com/2014/10/blog-post.html/
14. http://svitschool.at.ua/ZAVDANNIA/11_kombinatorni_zadachi.pdf/
15. https://gannamath.blogspot.com/
16. https://imzo.gov.ua/
17. https://mon.gov.ua/ua/tag/olimpiadi/
18. https://naurok.com.ua/navchalno---metodichniy-posibnik-princip-dirihle-v-olimpiadnih-zadachah-253882.html/
19. https://naurok.com.ua/vikoristannya-principu-dirihle-v-olimpiadnih-zavdannyah-z-matematiki-20883.htm/
20. https://popivka.school.org.ua/news/11-38-56-25-10-2019/
21. https://sites.google.com/site/mijkursas/
22. https://sites.google.com/site/mijkursas/home/tipi-olimpiadnih-zadac-z-matematiki/
23. https://www.uzhnu.edu.ua/en/infocentre/get/30236/
24. https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z1318-11#Text/
25. Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2022 Форум молодих дослідників»: матеріали ІІІ Всеукраїнської науково-методичної інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених (18 листопада 2022 р., м. Суми) – Суми: [СумДПУ імені А.С.Макаренка], 2022. – 152 с.

Додаток

План-конспект заняття для учнів 6-го класу з теми «Задачі на подільність в олімпіадних завданнях з математики»

Тема. Задачі на подільність в олімпіадних завданнях з математики.

Мета: закріпити вміння розв’язувати задачі на подільність; розглянути нестандартні прийоми розв’язання задач подібного типу; пригадати теоретичний матеріал, необхідний для розв’язання задач з даної теми; пробудити і розвинути стійкий інтерес до математики; розвивати математичні здібності та логічне мислення; заохочувати до пошукової діяльності; виховувати організованість, відповідальність, самостійність та волю до перемоги.

Хід заняття

1. Організаційний момент.

Привітання, перевірка готовності учнів до заняття. Оголошення теми та мети заняття.

2. Актуалізація опорних знань.

В олімпіадних завданнях з математики задачі на подільність займають особливе місце, адже майже в усіх олімпіадах, особливо 6-9 класів зустрічаються такого типу завдання. Розв’язування задач на подільність передбачає застосування відомих ознак подільності та властивостей подільності чисел. Тому, давайте пригадаємо основний теоретичний матеріал даної теми.

Означення. Ціле число a ділиться на ціле число $b \neq 0$, якщо існує таке ціле число c, що $a = bc$. Якщо натуральне число a ділиться націло на натуральне число b, то число a називають кратним числа b, число b — дільником числа a.

Ознаки подільності

1. Число ділиться на 2 тоді і тільки тоді, коли його остання цифра ділиться на 2, тобто є парною.
2. Число ділиться на 5 тоді, коли його остання цифра дорівнює 0 або 5.
3. Число ділиться на 10 тоді і тільки тоді, коли воно закінчується на нуль.
4. Число ділиться на 3 тоді і тільки тоді, коли сума його цифр ділиться на 3.
5. Число ділиться на 9 тоді і тільки тоді, коли сума його цифр ділиться на 9.
6. Число ділиться на 4, якщо дві останні цифри запису числа – нулі, або складають число, що ділиться на 4.
7. Число ділиться на 7, якщо потроєна сума десятків разом з одиницями ділиться на 7.
8. Число ділиться на 11 якщо сума цифр, що стоять на парних місцях, дорівнює сумі цифр, що стоять на непарних місцях або відрізняється від неї на число кратне 11.
9. Число ділиться на 13, якщо сума числа десятків з кількістю одиниць, помноженою на 4, ділиться на 13.

Властивості подільності чисел:

1. Кожен множник розкладу деякого числа є дільником цього числа.
2. Якщо один з множників ділиться на деяке число, то й добуток ділиться на це число.
3. Якщо один множник ділиться на x, а другий множник ділиться на число y, то добуток ділиться на xy.
4. Якщо натуральне число n ділиться на число m, то воно ділиться і на дільники числа m.
5. Якщо два числа дають при діленні на третє число однакову остачу, то їх різниця кратна третьому числу.

Означення 1. Найбільший спільний дільник (НСД) – найбільше натуральне число, на яке без остачі ділиться кожне з даних чисел.

Щоб знайти НСД двох або кількох чисел, необхідно:

- розкласти дані числа на прості множники;
- скласти добуток усіх спільних простих множників;
- обчислити складений добуток.

Означення 2. Найменше спільне кратне (НСК) – найменше натуральне число, яке ділиться на кожне з даних чисел.

Щоб знайти НСК двох чисел, необхідно:

- розкласти дані числа на прості множники;
- скласти добуток усіх простих множників;
- обчислити складений добуток.

3. Засвоєння нових знань.

Задача 1. Не перемножуючи, встановіть чи ділиться добуток $148 \cdot 75$ на $2,$ на 5, на 10.

Розв'язання. Оскільки 148 ділиться на 2, то добуток ділиться на 2. Оскільки 75 ділиться на 5, то добуток ділиться на 5. Оскільки 148 ділиться на 2, а 75 ділиться на 5, то $148 \cdot 75$ ділиться на $2 \cdot 5 = 10$.

Задача 2. Число складається із семи цифр 8, дев'яти цифр 1 і цифри 5. З'ясувати, чи буде ділитися дане число на 9?

Розв'язання. Обчислимо суму цифр даного числа: $7 \cdot 8 + 9 \cdot 1 + 5 = 70$. Оскільки 70 не ділиться на 9, то й саме число не ділиться на 9.

Задача 3. Знайти число, яке при діленні на 2 дає в остачі 1, при діленні на 3 – остачу 2, при діленні на 4 – остачу 3, при діленні на 5 – остачу 4.

Розв'язання. Знайдемо число, яке на 1 більше від шуканого. Це нове число поділиться без остачі на $2, 3, 4, 5$, тобто буде НСК цих чисел, що становить 60, а шукане число 59.

Задача 4. Яку цифру треба дописати справа до числа $1\,994$, щоб отримане число ділилось на 9 і на 4?

Розв'язання. На 9 діляться ті числа, сума цифр яких ділиться на 9. Оскільки $1 + 9 + 9 + 4 = 23$, то наступна цифра повинна бути 4, бо $23 + 4 = 27 \vdots 9$. Число $19\,944$ ділиться також на 4, бо останні дві цифри утворюють 44, яке ділиться на 4. Отже, справа потрібно дописати цифру 4.

Задача 5. В корзині лежить менше 100 яблук. Їх можна поділити порівну між $2, 3$ або 5 дітьми, але не можна поділити порівну між 4 дітьми. Скільки яблук в корзині?

Розв'язання. Шукане число повинно ділитися на $2, 3$ і 5, тобто на 30. Серед чисел, які менші за 100, таких три – $30, 60$ і 90. Але 60 ділиться на 4, а 30 і 90 – ні. Отже, в корзині лежить або 30, або 90 яблук.

Відповідь: 30 або 90 яблук.

Задача 6. Бабуся Уляна дуже любить своїх онуків, тому кожного Нового року вона дарує їм солодкі подарунки. Цього разу вона купила 160 цукерок, 120 кексів і 100 мандаринок. Скільки найбільше однакових подарунків може скласти бабуся своїм внукам? Скільки кексів, цукерок та мандаринок буде в кожному подарунку.

Розв'язання. Нехай y – максимальна кількість однакових подарунків, яку бабуся може скласти з 160 цукерок, 120 кексів і 100 мандаринок так, щоб не зал2ишилося жодної цукерки, мандаринки або кекса. Тобто, кожне із цих чисел має націло ділитися на число y, яке є натуральним. А це означає, що y є спільним дільником чисел 160, 120 і 100.

Так як, y – максимальна кількість подарунків, яку складено за вказаним способом, то число y має бути НСД для чисел 160, 120 і 100. Отже $y =$ НСД$(160, 120, 100)$. Розкладемо на прості множники ці числа.

$$160 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5,$$

$$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5,$$

$$100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5.$$

Отже, $y = \text{НСД}(160, 120, 100) = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20.$

Тобто, максимальна кількість однакових подарунків, яку бабуся Уляна може скласти з 160 цукерок, 120 кексів і 100 мандаринок – 20. Знайдемо, скільки кексів, цукерок та мандаринок буде в кожному подарунку:

$$\frac{160}{20} = 8 \text{ цукерок}, \ \frac{120}{20} = 6 \text{ кексів}, \ \frac{100}{20} = 5 \text{ мандаринок}.$$

Відповідь: 20 подарунків, 8 цукерок, 6 кексів, 5 мандаринок.

Задача 7. Довести, що коли сума цифр трицифрового числа ділиться на 9, то і дане число ділиться на 9.

Доведення. Нехай x – дане трицифрове число, тобто $x = 100a + 10b + c$.

За умовою $(a + b + c) \vdots 9$. Доведемо, що $x \vdots 9$.

$$x = 100a + 10b + c = 99a + 9b + (a + b + c).$$

Кожний доданок ділиться на 9, отже, число $x \vdots 9$.

Задачу доведено.

4. Застосування знань та вмінь.

Завдання для самостійного опрацювання.

1. Дано п’ятицифрове число 25 762. Яку цифру і на якому місці слід записати, щоб дістати число, яке ділиться на 36?
2. Із чисел від 1 до 252 викинули всі числа, які діляться на 2, але не діляться на 5, і всі числа, які діляться на 5, але не діляться на 2. Скільки залишилося чисел?
3. Знайдіть найменше число, яке при діленні на 2 дає в остачі 1, при діленні на 3 – остачу 2, при діленні на 4 – остачу 3, при діленні на 5 – остачу 4, при діленні на 6 дає в остачі 5, при діленні на 7 – остачу 6, при діленні на 8 – остачу 7, при діленні на 9 – остачу 8, при діленні на 10 – остачу 9.
4. Корзина наповнена яблуками. Якщо їх виймати по 2, по 3, по 4, по 5 і по 6, то в корзині залишиться по одному яблуку, а якщо виймати по

7, то остачі не буде. Скільки яблук в корзині, якщо вона може вмістити не більше 500 штук?

5. Найменше спільне кратне двох чисел, які не діляться одне на одного, дорівнює 630, а найбільший спільний дільник їх дорівнює 18. Знайдіть ці числа.

5. Підсумок заняття.

На сьогоднішньому занятті ми повторили основні теоретичні відомості та закріпили практичні вміння з теми «Подільність в олімпіадних завданнях», а також навчилися розв’язувати нестандартні задачі даної теми, використовуючи найпоширеніші методи.