УДК 517.9
ББК 22.161.61
Д 50

Друкується за ухвалою вченої ради факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича
(протокол № 5 від 16 грудня 2020 року)

Д 50 Диференціальні рівняння та елементи математичної фізики: навчально-методичний посібник / укл. : С.Г. Блажевський, О.М. Ленюк. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2021. – 248 с.

Рецензенти:

Конет І.М., доктор фізико-математичних наук, професор, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка;

Шинкарик М.І., кандидат фізико-математичних наук, доцент, Західноукраїнський національний університет.

Посібник містить довідковий матеріал, приклади розв'язання типових задач, підбірки задач для практичних занять і самостійної роботи з диференціальних рівнянь та рівнянь математичної фізики відповідно до навчальної програми з цієї дисципліни.

Для студентів спеціальностей "Прикладна математика" й "Інформатика".

УДК 517.9
ББК 22.161.61

Тема 1. РІВНЯННЯ З ВІДОКРЕМЛЮВАНИМИ ЗМІННИМИ ТА ЗВІДНІ ДО НИХ

Процеси, які відбуваються в оточуючому нас середовищі, описуються диференціальними рівняннями. Якщо ми при моделюванні процесу виділяємо один параметр, то одержуємо звичайні диференціальні рівняння. Виділення двох або більше параметрів при описанні природничих процесів приводить до диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Диференціальним рівнянням першого порядку (розв'язаним відносно похідної) називається рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

де f — задана функція змінних $(x, y) \in D$ (D — область в R^2), x — незалежна змінна, $y = y(x)$ — невідома функція. Розв'язати рівняння (1) означає знайти таку диференційовну на інтервалі $x \in (\alpha, \beta)$ функцію $y = \varphi(x)$, що $(x, \varphi(x)) \in D$ при $x \in (\alpha, \beta)$ і

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} \equiv f(x, \varphi(x)) \quad \forall\, x \in (\alpha, \beta).$$

Нехай точка (x_0, y_0) належить D. Задача відшукання розв'язку $y = \varphi(x)$ рівняння (1), який задовольняє умову $\varphi(x_0) = y_0$, називається задачею Коші. Відповідь на питання про існування та єдиність розв'язку задачі Коші дає наступна теорема.

Теорема Пікара. *Нехай: 1) $f(x, y)$ визначена і неперервна в прямокутнику $\Pi = \{(x, y) : |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\}$; 2) існує таке число $L > 0$, що для будь-якої пари точок (x, y_1) і (x, y_2) прямокутника Π справджується нерівність*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|.$$

Тоді на відрізку $[x_0 - h, x_0 + h]$, *де* $h = \min\left\{a; \dfrac{b}{M}\right\}$, $\Big(M = \max\limits_{\Pi} |f(x,y)|\Big)$ *існує єдиний неперервно диференційовний розв'язок* $y = \varphi(x)$ *рівняння (1), який задовольняє початкову умову* $\varphi(x_0) = y_0$.

Задача практичного відшукання всіх розв'язків рівняння (1) часто буває дуже складною. Проте в деяких частинних випадках вдається вказати досить прості методи побудови розв'язків. У першу чергу це стосується диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y) \tag{2}$$

з неперервними при $x \in (\alpha, \beta)$ і $y \in (\alpha_1, \beta_1)$ функціями $f_1(x)$ і $f_2(y)$. Рівняння (2) називається рівнянням з відокремлюваними змінними. Якщо $f_2(y) \neq 0 \;\; \forall\, y \in (\alpha_1, \beta_1)$, то (2) еквівалентне рівнянню

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx,$$

інтегрування якого веде до рівності

$$F_2(y) = F_1(x) + C. \tag{3}$$

Тут $F_1(x)$ і $F_2(y)$ — первісні функцій $f_1(x)$ і $\dfrac{1}{f_2(y)}$, C — довільна стала. Співвідношення (3) задає всі розв'язки рівняння (2) в неявному вигляді і його називають загальним інтегралом рівняння (2). Зазначимо, що коли $f_2(y)$ перетворюється на нуль у деяких точках $y_k \in (\alpha_1, \beta_1)$, $k = \overline{1,n}$, то (2) має також розв'язки $y = y_k, k = \overline{1,n}$.

До рівняння з відокремлюваними змінними зводиться рівняння вигляду $y' = f(a_1x + b_1y + c_1)$, де a_1, b_1, c_1 — сталі. Для цього досить замість невідомої функції $y(x)$ ввести нову невідому функцію $z(x) = a_1x + b_1y + c_1$, внаслідок чого одержимо рівняння $z' = b_1 f(z) + a_1$.

Рівняння (1) називається однорідним, якщо $f(x,y)$ — однорідна функція нульового степеня, тобто $f(tx,ty) = f(x,y)$ для всіх $t > 0$. Однорідне рівняння легко звести до рівняння з відокремлюваними змінними шляхом заміни $y = xz$, де $z = z(x)$ — нова невідома функція. У свою чергу до однорідного рівняння зводиться рівняння вигляду

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{4}$$

при умові, що $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Для цього досить припустити в (4) $x = \xi + x_0, y = \eta + y_0$, де x_0, y_0 — розв'язок системи алгебраїчних рівнянь

$$a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0, \quad a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0.$$

Якщо ж $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, то (4) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою заміни $z = a_1x + b_1y$ (або $z = a_1x + b_1y + c_1$).

Рівняння (1) можна перетворити в рівняння з відокремлюваними змінними і в тому випадку, коли існує таке дійсне число σ, що

$$f(tx, t^\sigma y) = t^{\sigma-1}f(x,y) \quad \forall\, t > 0. \tag{5}$$

При цьому (1) називають квазіоднорідним рівнянням, а відповідна заміна має вигляд $y = x^\sigma z$ при $x > 0$ і $y = (-x)^\sigma z$ при $x < 0$.

Приклад 1. Розв'язати задачу Коші

$$xy' + y = y^2, \quad y(1) = 2.$$

Розв'язання. Рівняння $xy' = y^2 - y$ є рівнянням з відокремлюваними змінними, тому

$$x\frac{dy}{dx} = y^2 - y, \quad \frac{dy}{y^2 - y} = \frac{dx}{x}$$

при $y \neq 0$ і $y \neq 1$. Інтегруючи останню рівність, знаходимо

$$\int \frac{dy}{y^2 - y} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln|x| + \ln|c| \qquad y = \frac{1}{1-cx},$$

де $c \neq 0$ — довільна стала. Безпосередньо перевіркою легко переконатись, що $y = 0$ і $y = 1$ також розв'язки даного рівняння. Але $y = 1$ міститься у формулі $y = \dfrac{1}{1-cx}$ при $c = 0$. Тому, вважаючи, що $c \in R$ — довільна стала, всі розв'язки рівняння можна подати у вигляді $y = \dfrac{1}{1-cx}$, $y = 0$. Задовольнимо тепер початкову умову $y(1) = 2$:

$$2 = \frac{1}{1-c}, \quad c = \frac{1}{2}.$$

Отже, $y = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}x}$ — шуканий розв'язок задачі Коші.

Приклад 2. Знайти всі розв'язки рівняння $y' - y = 2x - 1$.

Розв'язання. Замінимо $y + 2x - 1$ на $z(x)$. Тоді $y' = z' - 2$ і дане рівняння рівносильне рівнянню з відокремлюваними змінними $z' - 2 = z$. Розв'язавши його, маємо $z = -2 + ce^x$, де c — довільна стала. Оскільки $y = z - 2x + 1$, то формула $y = -1 - 2x + ce^x$ визначає загальний розв'язок рівняння.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$.

Розв'язання. Права частина рівняння

$$y' = \frac{y}{x} - e^{\frac{y}{x}}$$

є однорідною функцією нульовго степеня, тому рівняння однорідне. Заміна змінної $y = xz$ $(y' = z + xz')$ зводить його до рівняння $z' = -e^z$ або $-e^{-z}dz = dx$. Інтегруючи останню рівність, маємо $e^{-z} = x + c, c \in R$. Отже, співвідношення $e^{-\frac{y}{x}} = x + c$ є загальним інтегралом даного в умові задачі рівняння.

Приклад 4. Проінтегрувати рівняння $y' = -1 + \dfrac{\dfrac{y+x}{x+3}}{\ln\dfrac{y+x}{x+3}}$.

Розв'язання. Дане рівняння має вигляд (4). Оскільки система

$$y_0 + x_0 = 0, \quad x_0 + 3 = 0$$

має розв'язок $x_0 = -3, y_0 = 3$, то запровадимо заміну $x = \xi - 3$, $y = \eta + 3$. Одержимо однорідне рівняння

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -1 + \frac{\dfrac{\eta+\xi}{\xi}}{\ln\dfrac{\eta+\xi}{\xi}},$$

яке за допомогою заміни $\eta = \xi z(\xi)$ зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\xi\frac{dz}{d\xi} = \frac{z+1}{\ln(z+1)} - (z+1), \quad \int\frac{\ln(z+1)d\ln(z+1)}{1-\ln(z+1)} = \int\frac{d\xi}{\xi},$$

$$\ln(z+1) + \ln|1-\ln(z+1)| = -\ln|\xi| + \ln|c|,$$

$$\ln(z+1) = 1 + \frac{c}{\xi(z+1)},$$

$c \in R$. Таким чином, $\ln\dfrac{y+x}{x+3} = 1 + \dfrac{c}{y+x}$ — загальний інтеграл рівняння.

Приклад 5. Довести, що рівняння $2x^2y' = y^3 + xy$ квазіоднорідне, і розв'язати його.

Розв'язання. Для функції $f(x,y) = \dfrac{y^3+xy}{2x^2}$ перевіримо виконання умови (5). Маємо:

$$f(tx, t^\sigma y) = \frac{t^{3\sigma-2}y^3 + t^{\sigma-1}xy}{2x^2}, t^{\sigma-1}f(x,y) = t^{\sigma-1}\frac{y^3+xy}{2x^2} \quad \forall\, t > 0.$$

Для виконання (5) потрібно, щоб $3\sigma - 2 = \sigma - 1$, тобто $\sigma = \dfrac{1}{2}$. Звідси випливає, що дане рівняння квазіоднорідне, тому слід виконати підстановку $y = |x|^{\frac{1}{2}} z$:

$$2x^2 \left(z \frac{1}{2} |x|^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sign} x + z' |x|^{\frac{1}{2}} \right) = |x|^{\frac{3}{2}} z^3 + x|x|^{\frac{1}{2}} z,$$

$$2z'|x| = z^3.$$

Відокремивши змінні, одержимо

$$2\frac{dz}{z^3} = \frac{dx}{|x|}, \quad \frac{1}{z^2} = -\operatorname{sign} x \ln |x| + c, \quad z = 0.$$

Отже,

$$\frac{|x|}{y^2} = -\operatorname{sign} x \ln |x| + c, \quad y = 0 \quad (c \in R).$$

Завдання для самостійної роботи

1. Розв'язати задачі Коші:

а) $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$, $\quad y(0) = 1$; б) $(x + 2y)y' = 1$, $\quad y(0) = -1$;

в) $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$, $\quad y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

2. Розв'язати рівняння:

а) $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$, $\qquad xy' = y \cos \ln \dfrac{y}{x}$,

$$x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0, \qquad y' = \frac{2x - y - 1}{x - 2y - 1};$$

б) $y' = \cos(y - x)$, $\qquad (y + \sqrt{xy})dx = xdy$,

$$(2x + y + 1)dx = (4x + 2y - 3)dy,$$

$$y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2.$$

3. Переконатись, що наступні рівняння квазіоднорідні, та розв'язати їх:

а) $ydx + (y^2 - 2x)dy = 0$; б) $y' = \dfrac{4x^6 - y^4}{2x^4 y}$;

в) $y' = \dfrac{x + y^3}{3y^2 x - 3y^5}$.

Завдання для домашньої роботи

Розв'язати рівняння

1. $(x + 2y)dx - xdy = 0$.
2. $(x - y)dx + (x + y)dy{=}0$.
3. $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$
4. $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2)$.
5. $y^2 + x^2 y' = xyy'$.
6. $(x^2 + y^2)y' = 2xy$.
7. $xy' - y = x \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}$.
8. $xy' = y - xe^{y/x}$.
9. $xy' - y = (x + y) \ln \dfrac{x+y}{x}$.
10. $xy' = y \cos \ln \dfrac{y}{x}$.
11. $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$.
12. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.
13. $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$.
14. $(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0$.
15. $x - y - 1 + (y - z + 2)y' = 0$.
16. $(x + 4y)y' = 2x + 3y - 5$.
17. $(y + 2)dx = (2x + y - 4)dy$. **18.** $y' = 2\Big(\dfrac{y+2}{x+y-1}\Big)^2$.

19. $(y'+1)\ln\dfrac{y+x}{x+3}=\dfrac{y+x}{x+3}$. **20.** $y'=\dfrac{y+2}{x+1}+\operatorname{tg}\dfrac{y-2x}{x+1}$.
21. $x^3(y'-x)=y^2$. **22.** $2x^2y'=y^3+xy$.
23. $2xdy+(x^2y^4+1)ydx=0$. **24.** $ydx+x(2xy+1)dy=0$.
25. $2y'+x=4\sqrt{y}$. **26.** $y'=y^2-\dfrac{2}{x^2}$.
27. $2xy'+y=y^2\sqrt{x-x^2y^2}$. **28.** $\dfrac{2}{3}xyy'=\sqrt{x^5-y^4}+y^2$.
29. $2y+(x^2y+1)xy'=0$.

Відповіді

1. $x+y=Cx^2$; $x=0$. **2.** $\ln(x^2+y^2)=C-2\operatorname{arctg}(y/x)$. **3.** $x(y-x)=Cy$; $y=0$. **4.** $x=\pm y\sqrt{\ln Cx}$; $y=0$. **5.** $y=Ce^{y/x}$. **6.** $y^2-x^2=Cy$; $y=0$. **7.** $\sin\dfrac{y}{x}=Cx$. **8.** $y=-x\ln\ln Cx$. **9.** $\ln\dfrac{x+y}{x}=Cx$. **10.** $\ln Cx=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{y}{x}\right)$; $y=xe^{2\pi k}$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$. **11.** $2\sqrt{xy}=x\ln Cx$; $y=0$; $x=0$. **12.** $\arcsin\dfrac{y}{x}=\ln Cx\cdot\operatorname{sgn}x$; $y=\pm x$. **13.** $(y-2x)^3=C(y-x-1)^2$; $y=x+1$. **14.** $2x+y-1=Ce^{2y-z}$. **15.** $(y-x+2)^2+2x=C$. **16.** $(y-x+5)^2(x+2y-2)=C$. **17.** $(y+2)^2=C(x+y-1)$; $y=1-x$. **18.** $y+2=Ce^{-2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}}$. **19.** $\ln\dfrac{y+x}{x+3}=1+\dfrac{C}{x+y}$. **20.** $\sin\dfrac{y-2x}{x+1}=C(x+1)$. **21.** $x^2=(x^2-y)\ln Cx$; $y=x^2$. **22.** $x=-y^2\ln Cx$; $y=0$. **23.** $x^2y^4\ln Cx^2=1$; $y=0$; $x=0$. **24.** $y^2e^{-1/xy}=C$; $y=0$; $x=0$. **25.** $(2\sqrt{y}-x)\ln C(2\sqrt{y}-x)=x$; $2\sqrt{y}=x$. **26.** $1-xy=Cx^3(2+xy)$; $xy=-2$. **27.** $2\sqrt{(1/xy^2)-1}=-\ln Cx$; $y=0$; $xy^2=1$. **28.** $\arcsin\dfrac{y^2}{|x^3|}=\ln Cx^3$; $|x^3|=y^2$. **29.** $x^2y\ln Cy=1$; $y=0$.

Література: [1], с.15—18, 20—22; [2], с.11—16; [3], с.23—26; [4], с.23—30; [5], с.44—48; [6], с.27—63; [7], с.7—9, 14—17.

Тема 2. МЕТОД ІЗОКЛІН. ЗАДАЧІ, ЩО ПРИВОДЯТЬ ДО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Нехай задано диференціальне рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y). \tag{1}$$

Якщо аналітично не вдається розв'язати це рівняння, то використовують різні наближені методи. Найбільш простим із них є графічний. Коротко опишемо його суть. У кожній точці (x, y) області визначення функції $f(x, y)$ розв'язок рівняння (1) повинен мати похідну y', яка дорівнює $f(x, y)$, тобто він повинен дотикатись у цій точці прямої, нахиленої під кутом α ($\operatorname{tg}\alpha = y' = f(x, y)$) до осі OX. Сім'я одержаних прямих називається полем напрямків рівняння (1), а крива, яка в кожній своїй точці дотикається поля напрямків, називається інтегральною кривою. Очевидно, що інтегральна крива є графіком розв'язку рівняння (1).

Для спрощення побудови поля напрямків використовують ізокліни. Ізокліна — це крива, в кожній точці якої напрямок поля однаковий. Рівняння ізокліни має вигляд $f(x, y) = k = \mathrm{const}$.

Приклад 1. За допомогою ізоклін наближено побудувати інтегральні криві рівняння $y' = x^2 + y^2$.

Розв'язання. Рівняння ізоклін — $x^2 + y^2 = k$ $(k \geq 0)$, тобто ізокліна — це сім'я кіл радіуса $\sqrt{k}$ з центром у початку координат. Якщо $k = 0$, то ізокліна вироджується в точку $x = y = 0$ і для неї $\alpha = 0$, оскільки $\operatorname{tg}\alpha = k = 0$. Якщо $k = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, то у всіх точках ізокліни $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ поле утворює кут $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$ з віссю OX. При $k = 1$ ізокліну $x^2 + y^2 = 1$

інтегральні криві перетинають під кутом $\alpha = \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$ і т.д. Очевидно, що при $k \to \infty$ інтегральні криві перетинають ізокліну $x^2 + y^2 = k$ під кутом $\alpha = \operatorname{arctg} k \to \dfrac{\pi}{2}$. Маючи поле напрямків, можна наближено нарисувати інтегральні криві даного рівняння:

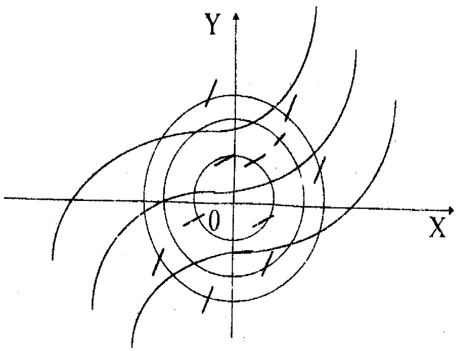


Рис. 1

Розглянемо далі кілька задач геометричного та фізичного змісту, розв'язання яких приводить до диференціальних рівнянь. У задачах геометричного змісту в прямокутній системі координат вибирають довільну точку $M(x, y)$ і проводять через неї довільну гладку криву $y = y(x)$. Після цього виражають всі задані в умові задачі величини через x, y та y'. Одержане співвідношення задає диференціальне рівняння, розв'язавши яке знаходимо шукану функцію $y = y(x)$.

Приклад 2. Знайти криві, в яких точка перетину кожної дотичної з віссю OX має абсцису вдвічі меншу, ніж абсциса точки дотику.

Розв'язання. Нехай на рис. 2 зображена шукана крива $y = y(x)$ і довільна точка на ній $M(x, y)$. Проведемо в M дотичну до кривої і позначимо через A точку перетину дотичної з віссю OX, а через B — проекцію точки M на вісь абсцис.

За умовою задачі $OA = AB = \frac{1}{2}OB$, $OB = x$. Із прямокутого трикутника ABM маємо

$$AB = \frac{MB}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{y}{y'}, \quad \frac{1}{2}x = \frac{y}{y'}, \quad y' = \frac{2y}{x}.$$

Одержане диференціальне рівняння шуканої сім'ї ліній є рівнянням з відокремлюваними змінними, і його загальний розв'язок задається формулою $y = cx^2$. Отже, шукані криві — параболи $y = cx^2 (c \neq 0)$.

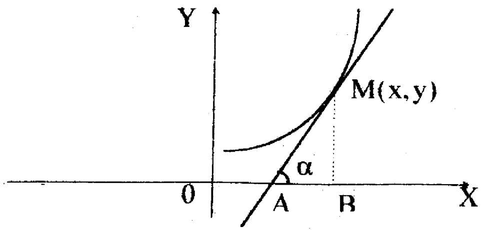


Рис. 2

У задачах фізичного змісту для складання диференціальних рівнянь часто використовують фізичні закони чи експериментальні факти. Відзначимо також інший підхід у таких задачах. Щоб скласти диференціальне рівняння, розв'язком якого є функція $y = y(x)$, потрібно виразити приріст функції $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$ через приріст Δx незалежної змінної та інші параметри задачі. Поділивши Δy на Δx і перейшовши до границі при $\Delta x \to 0$, одержимо залежність між y', y та x, тобто диференціальне рівняння.

Приклад 3. Експериментально встановлено, що швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла й середовища. Тіло охолодилось за 10 хв. від $100°$ до $60°$. Температура середовища $20°$. Знайти залежність температури тіла від часу. Через який час тіло охолодиться до $25°$?

Розв'язання. Позначимо через $T(t)$ температуру тіла (в градусах) у момент часу t (у хвилинах). Згідно з умовою задачі, $\dfrac{dT}{dt} = -k(T-20)$, де $\dfrac{dT}{dt}$ — швидкість зміни температури тіла, $k > 0$ — коефіцієнт пропорційності. Знак мінус у правій частині означає, що $\dfrac{dT}{dt} < 0$, бо температура тіла зменшується. Розв'язавши дане рівняння з відокремлюваними змінними, знаходимо $T(t) = 20 + ce^{-kt}$. Оскільки за умовою задачі $T(0) = 100, T(10) = 60$, то $100 = 20 + c$, $60 = 20 + ce^{-10k}$, тобто $c = 80, e^{-10k} = \dfrac{1}{2}$. Таким чином, $T(t) = 20 + 80\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}}$ — залежність температури тіла від часу. Якщо $T = 25$, то із рівності $25 = 20 + 80\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}}$ знаходимо $t = 40$ хв.

Приклад 4. Човен сповільнює свій рух під дією опору води, який пропорційний швидкості човна. Початкова швидкість човна дорівнює 1,5 м/с, а через 4 с його швидкість дорівнює 1 м/с. Через який час швидкість човна зменшиться до $\dfrac{4}{9}$ м/с? Який шлях може пройти човен до зупинки?

Розв'язання. За другим законом Ньютона

$$ma(t) = -kv(t),$$

де m — маса човна, $v(t)$ і $a(t) = \dfrac{dv}{dt}$ — його швидкість і прискорення, $k > 0$ — коефіцієнт пропорційності. Загальний розв'язок рівняння $m\dfrac{dv}{dt} = -kv$ має вигляд $v(t) = ce^{-\frac{k}{m}t}$. За умовою задачі $v(0) = 1,5$, $v(4) = 1$, тому

$$1,5 = c, \quad 1 = ce^{-4\frac{k}{m}} \qquad c = 1,5, \quad e^{-4\frac{k}{m}} = \frac{2}{3}.$$

Звідси випливає, що $v(t) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{t}{4}-1}$ — залежність швидкості човна від часу. При $v = \dfrac{4}{9}$ маємо:

$$\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{4}-1}; \quad \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{4}-1}; \quad \frac{t}{4} - 1 = 2; \quad t = 12.$$

Таким чином, через 12 с після початку руху човен матиме швидкість $\dfrac{4}{9}$ м/с. Шлях, пройдений човном за час T, обчислюємо за формулою

$$S(T) = \int\limits_0^T v(t)dt = \int\limits_0^T \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{4}-1} dt = \frac{6}{\ln\frac{3}{2}}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^T\right).$$

Тому човен може пройти до зупинки шлях, не більший від $\dfrac{6}{\ln\frac{3}{2}} \simeq 14,798$ м.

Приклад 5. Згідно із законом Торічелі, швидкість витікання води з посудини дорівнює $0,6\sqrt{2gh}$, де $g = 9,8$ м/с^2 — прискорення вільного падіння, h — висота рівня води над отвором. За який час витече вся вода з циліндричного бака з діаметром $2R = 1,8$ м і висотою $H = 2,45$ м через отвір у дні діаметром $2r = 0,06$ м? Вісь циліндра вертикальна.

Розв'язання. Нехай $h(t)$ — висота рівня води в посудині в момент часу t. Тоді об'єм води, яка виллється із циліндра за час Δt, дорівнює $\Delta V = 0,6\sqrt{2gh(t)}\pi r^2 \Delta t$. З іншого боку, внаслідок витікання рідини її висота зміниться на величину $h(t) - h(t + \Delta t)$, тому $\Delta V = \pi R^2(h(t) - h(t + \Delta t))$. Прирівнюючи обидва вирази для ΔV, одержимо

$$0,6\sqrt{2gh(t)}\pi r^2 \Delta t = \pi R^2(h(t) - h(t + \Delta)),$$

$$\frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} = -0,6\frac{r^2}{R^2}\sqrt{2gh(t)}.$$

Граничний перехід при $\Delta t \to 0$ веде до диференціального рівняння

$$h'(t) = -0,6\frac{r^2}{R^2}\sqrt{2g}\sqrt{h(t)}$$

і початкової умови $h(0) = H$. Розв'язавши цю задачу Коші, матимемо

$$h(t) = \left(\sqrt{H} - 0,3\frac{r^2}{R^2}\sqrt{2g}t\right)^2.$$

Час T, за який витече вся вода з циліндра, знаходимо з останньої нерівності при $h = 0$:

$$T = \frac{\sqrt{H}R^2}{0,3r^2\sqrt{2g}} = \frac{\sqrt{2,45}\cdot 0,9^2}{0,3\cdot(0,03)^2\cdot\sqrt{2\cdot 9,8}} \simeq 1050 \ c = 17,5\ .$$

Завдання для самостійної роботи

1. Побудувати поле напрямків і наближено нарисувати інтегральні криві таких диференціальних рівнянь:

а) $y' = y - x^2$, б) $y' = x - y^2$, в) $y' = y - e^x$,

$y' = xy - 1$; $y' = x + e^y$; $y' = x + y$.

2. У прямокутний бак розміром 60 см×75 см і висотою 80 см поступає 1,8 л води за секунду. У дні є отвір площею 2,5 см^2. За який час заповниться бак? Порівняти результат із часом заповнення цього бака без отвору в дні.

3. У посудині знаходиться 100 л розчину, який містить 10 кг солі. До посудини неперервно подається вода зі швидкістю 5 л за хвилину, яка розмішується з розчином. Суміш витікає з такою ж швидкістю. Скільки солі залишиться в посудині через годину?

4. Знайти криві, для яких сума катетів трикутника, утвореного дотичною, ординатою точки дотику і віссю абсцис, є величина стала, яка дорівнює a^2.

5. Знайти криві, в яких точка перетину довільної дотичної з віссю абсцис однаково віддалена від точки дотику й початку координат.

Література: [1], с.47—51; [3], с.12—23; [4], с.43—45; [5], с.11—17; [6], с.3—15, 25—27, 35—50; [7], с.9—13.

Тема 3. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ ТА ЗВІДНІ ДО НИХ

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{1}$$

де p і q — неперервні функції на інтервалі $(a,b) \subset R$. Якщо $q(x) \equiv 0$, то (1) називається лінійним однорідним рівнянням, у решті випадків (1) — лінійне неоднорідне рівняння.

Для розв'язання (1) використовують метод варіації сталої. Суть його полягає в тому, що спочатку знаходять загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$y' + p(x)y = 0. \tag{2}$$

Загальний розв'язок рівняння (2) задається формулою $y = c\varphi(x)$, де $\varphi(x) = e^{\psi(x)}$, а $\psi(x)$ — одна із первісних функції $-p(x)$. Після цього розв'язок неоднорідного рівняння (1) шукають у вигляді $y = c(x)\varphi(x)$, а невідому функцію $c(x)$ визначають шляхом підстановки $y = c(x)\varphi(x)$ в (1). Для $c(x)$ — одержується рівняння з відокремлюваними змінними.

Потрібно зазначити, що загальний розв'язок неоднорідного рівняння (1) дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (2) і довільного частинного розв'язку неоднорідного рівняння (1).

До лінійного рівняння зводиться рівняння Бернуллі

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \quad \alpha = \text{const}, \quad \alpha \neq 0, \quad \alpha \neq 1, \tag{3}$$

шляхом ділення (3) на y^{α} і введення заміни $y^{1-\alpha} = z$. При цьому слід пам'ятати, що при $\alpha > 0$ рівняння (3) має також розв'язок $y \equiv 0$.

Рівняння вигляду

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x) \tag{4}$$

з неперервними на (a, b) функціями p, q і r називається рівнянням Ріккаті. На відміну від рівнянь (1), (3), рівняння Ріккаті в загальному випадку не розв'язується у квадратурах. Проте, коли відомий частинний розв'язок $y_1(x)$ рівняння (4), то заміна $y = y_1(x) + z$ зводить його до рівняння Бернуллі.

До лінійного рівняння за допомогою заміни $f(y) = z$ зводиться також рівняння

$$f'(y)\frac{dy}{dx} + p(x)f(y) = q(x). \tag{5}$$

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y' + y\cos x = \sin x \cos x. \tag{6}$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y' + y\cos x = 0$:

$$\frac{dy}{y} = -\cos x dx, \quad \ln|y| = -\sin x + \ln|c|, \quad y = ce^{-\sin x}, \quad c \in R.$$

Розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y = c(x)e^{-\sin x}$. Після підстановки в (6) одержимо

$$c'(x)e^{-\sin x} + c(x)e^{-\sin x}(-\cos x) + c(x)e^{-\sin x}\cos x = \sin x \cos x,$$

$$c'(x) = e^{\sin x}\sin x \cos x,$$

$$c(x) = \int e^{\sin x}\sin x \cos x dx =$$

$$= \int e^{\sin x}\sin x d(\sin x) = e^{\sin x}(\sin x - 1) + c_1, \quad c_1 \in R.$$

Тоді

$$y(x) = [c_1 + e^{\sin x}(\sin x - 1)]e^{-\sin x} = c_1 e^{-\sin x} + \sin x - 1$$

— загальний розв'язок рівняння (6).

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$.

Розв'язання. Дане рівняння є рівнянням Бернуллі. Оскільки $\alpha = 4 > 0$, то воно має розв'язок $y \equiv 0$. Для знаходження інших розв'язків поділимо рівняння на y^4 і зробимо заміну $z = y^{1-\alpha} = y^{-3}$. Враховуючи, що $\dfrac{dz}{dx} = -3y^{-4}\dfrac{dy}{dx}$, одержимо лінійне неоднорідне рівняння

$$z' + 3z \operatorname{tg} x = -3 \cos x. \tag{7}$$

Відповідне однорідне рівняння $z' + 3z \operatorname{tg} x = 0$ має загальний розв'язок $z = c \cdot \cos^3 x$. Після підстановки $z = c(x) \cdot \cos^3 x$ в (7) матимемо

$$c'(x) = -\frac{3}{\cos^2 x}, \quad c(x) = \int -\frac{3}{\cos^2 x} dx = -3 \operatorname{tg} x + c_1, \quad c_1 \in R.$$

Отже, $z = c_1 \cos^3 x - 3 \cos^2 x \sin x$ — загальний розв'язок рівняння (7). Повертаючись назад до змінної y $\left(y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{z}}\right)$, одержимо всі розв'язки рівняння Бернуллі:

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{c_1 \cos^3 x - 3 \cos^2 x \sin x}}, \quad y \equiv 0.$$

Приклад 3. Знайти частинний розв'язок рівняння Ріккаті

$$x^2 y' - x^2 y^2 + 5xy - 3 = 0 \tag{8}$$

і розв'язати його.

Розв'язання. Не існує загального методу відшукання частинного розв'язку рівняння Ріккаті. Проте в деяких випадках, аналізуючи коефіцієнти рівняння, вдається вказати вигляд частинного розв'язку. У нашому прикладі припустимо, що $y_1(x) = \dfrac{a}{x}$, де a — поки що невідома стала. Після підстановки $y_1(x) = \dfrac{a}{x}$ у (8) одержимо рівняння $a^2 - 4a + 3 = 0$, коренями якого є $a_1 = 1$ і $a_2 = 3$. Покладемо $y_1(x) = \dfrac{1}{x}$ і виконаємо у (8) заміну $y = z + \dfrac{1}{x}$:

$$x^2\left(z' - \frac{1}{x^2}\right) - x^2\left(z + \frac{1}{x}\right)^2 + 5x\left(z + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0,$$

$$z' + \frac{3}{x}z = z^2.$$

Останнє рівняння є рівнянням Бернуллі. Поділивши його на z^2 і ввівши нову змінну $u = z^{-1}$, одержимо лінійне неоднорідне рівняння

$$u' - \frac{3}{x}u = -1.$$

Його загальний розв'язок має вигляд $u = cx^3 + \dfrac{1}{2}x$. Оскільки $u = z^{-1}$ і $y = z + \frac{1}{x}$, то формула

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{cx^3 + \dfrac{1}{2}x} = \frac{cx^2 + \dfrac{3}{2}}{cx^3 + \dfrac{1}{2}x}, \quad c \in R,$$

визначає всі розв'язки рівняння (8).

Приклад 4. Шляхом диференціювання звести інтегральне рівняння

$$\int_0^x (x-t)y(t)dt = 2x + \int_0^x y(t)dt \tag{9}$$

до диференціального і розв'язати його.

Розв'язання. Подамо рівняння (9) у вигляді

$$x\int_0^x y(t)dt - \int_0^x ty(t)dt = 2x + \int_0^x y(t)dt$$

і продиференціюємо його ліву й праву частини двічі за x:

$$\int_0^x y(t)dt + xy(x) - xy(x) = 2 + y(x),$$

$$y(x) = y'(x).$$

Очевидно, що $y = ce^x$ — загальний розв'язок останнього рівняння. Підставимо цей розв'язок у (9) і визначимо c:

$$x\int_0^x ce^t dt - \int_0^x tce^t dt = 2x + \int_0^x ce^t dt,$$

$$cx(e^x - 1) - c(xe^x - e^x + 1) = 2x + c(e^x - 1),$$

$$-cx = 2x.$$

Отже, $c = -2$, тому $y = -2e^x$ — розв'язок інтегрального рівняння (9).

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$\frac{1}{\cos^2 y}\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}\operatorname{tg} y = -1. \tag{10}$$

Розв'язання. Дане рівняння є рівнянням вигляду (5). Припустимо, що $\operatorname{tg} y = u(x)$, і одержимо рівняння $u' - \dfrac{3}{x}u = -1$, яке розв'язане в прикладі 3: $u = cx^3 + \dfrac{1}{2}x$. Тоді $\operatorname{tg} y = cx^3 + \dfrac{1}{2}x$ — загальний інтеграл рівняння (9).

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати рівняння:

а) $y = x(y' - x\cos x)$, $\quad y' - \dfrac{x}{y} = \dfrac{xy}{x^2 - 1}$,

$y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$, $\quad \displaystyle\int\limits_0^x y(t)dt + x + 1 = y(x)$,

$e^{-x}y' - e^{-x} = e^y$, $\quad (x^2y^3 + xy)y' = 1$;

б) $y' - y\operatorname{ctg} x = 2x - x^2\operatorname{ctg} x$, $\quad y'\cos x - y\sin x = y^4$,

$(2e^y - x)y' = 1$, $\quad 4\displaystyle\int\limits_1^x y(t)dt + y(x) = 3x - 2$,

$xy' - (2x + 1)y + y^2 = -x^2$, $\quad \dfrac{1}{y}y' + (2 - x)\ln y = x(e^{2x} - e^{-\frac{x^2}{2}})$;

в) $y' + y = \sin x + \cos x$, $\quad y' + \dfrac{y}{x} = y^4(1 - x^2)$,

$3y' + y^2 + \dfrac{2}{x^2} = 0$, $\quad y(x) - 2\displaystyle\int\limits_2^x y(t)dt = -4x + 10$,

$y' = \dfrac{y}{3x - y^2}$, $\quad \dfrac{1}{\sqrt{y+1}}y' - \dfrac{2\sqrt{1+y}}{x} = 2(x + 5)$.

Завдання для домашньої роботи

Розв'язати рівняння

1. $xy' - 2y = 2x^4$. **2.** $(2x + 1)y' = 4x + 2y$.
3. $y' + y\operatorname{tg} x = \sec x$. **4.** $(xy + e^x)dx - xdy = 0$.
5. $x^2y' + xy + 1 = 0$. **6.** $y = x(y' - x\cos x)$.
7. $2x(x^2 + y)dx = dy$. **8.** $(xy' - 1)\ln x = 2y$.
9. $xy' + (x + 1)y = 3x^2e^{-x}$. **10.** $(x + y^2)dy = ydx$.
11. $(2e^y - x)y' = 1$. **12.** $(\sin^2 y + x\operatorname{ctg} y)y' = 1$.
13. $(2x + y)dy = ydx + 4\ln y dy$. **14.** $y' = \dfrac{y}{3x - y^2}$.
15. $(1 - 2xy)y' = y(y - 1)$. **16.** $y' + 2y = y^2e^x$.

17. $(x+1)(y'+y^2)=-y$. **18.** $y'=y^4\cos x+y\,\mathrm{tg}\,x$.
19. $xy^2y'=x^2+y^3$. **20.** $xydy=(y^2+x)dx$.
21. $xy'-2x^2\sqrt{y}=4y$. **22.** $xy'+2y+x^5y^3e^x=0$.
23. $2y'-\dfrac{x}{y}=\dfrac{xy}{x^2-1}$. **24.** $y'x^3\sin y=xy'-2y$.
25. $(2x^2y\ln y-x)y'=y$.

Використовуючи заміну змінних або диференціюючи, звести рівняння до лінійних та розв'язати їх

26. $xdx=(x^2-2y+1)dy$. **27.** $(x+1)(yy'-1)=y^2$.
28. $x(e^y-y')=2$. **29.** $(x^2-1)y'\sin y+2x\cos y=2x-2x^3$.

30. $y(x)=\displaystyle\int_0^x y(t)dt+x+1$.

31. $\displaystyle\int_0^x (x-t)y(t)dt=2x+\int_0^x y(t)dt$.

Знайшовши методом підбору частковий розв'язок, звести данні рівняння Рікатті до рівнянь Бернуллі та розв'язати їх

32. $x^2y'+xy+x^2y^2=4$.
33. $3y'+y^2=\dfrac{2}{x^2}=0$.
34. $xy'-(2x+1)y+y^2=-x^2$.
35. $y'-2xy+y^2=5-x^2$.
36. $y'+2ye^x-y^2=e^{2x}+e^x$.

37. Знайти траєкторії, що ортогональні до ліній сім'ї $y^2=Ce^x+x+1$.

Відповіді

1. $y=Cx^2+x^4$. **2.** $y=(2x+1)(C+\ln|2x+1|)+1$. **3.** $y=\sin x+C\cos x$. **4.** $y=e^x(\ln|x|+C)$; $x=0$. **5.** $xy=C-\ln|x|$. **6.** $y=x(C+\sin x)$. **7.** $y=Ce^{x^2}-x^2-1$. **8.** $y=C\ln^2 x-\ln x$. **9.** $xy=(x^3+C)e^{-x}$. **10.** $x=y^2+Cy$; $y=0$. **11.** $x=e^y+Ce^{-y}$.

12. $x = (C - \cos y)\sin y$. **13.** $x = 2\ln y - y + 1 + Cy^2$. **14.** $Cy^3 + y^2$; $y = 0$. **15.** $(y-1)^2 x = y - \ln Cy$; $y = 0$; $y = 1$. **16.** $y(e^x + Ce^{2x}) = 1$; $y = 0$. **17.** $y(x+1)(\ln|x+1| + C) = 1$; $y = 0$. **18.** $y^{-3} = C\cos^3 x - 3\sin x\cos^2 x$; $y = 0$. **19.** $y^3 = Cx^3 - 3x^2$. **20.** $y^2 = Cx^2 - 2x$; $x = 0$. **21.** $y = x^4 \ln^2 Cx$; $y = 0$. **22.** $y^{-2} = x^4(2e^x + C)$; $y = 0$. **23.** $y^2 = x^2 - 1 + C\sqrt{|x^2-1|}$. **24.** $x^2(C - \cos y) = y$; $y = 0$. **25.** $xy(C - \ln^2 y) = 1$. **26.** $x^2 = Ce^{2y} + 2y$. **27.** $y^2 = C(x+1)^2 - 2(x+1)$. **28.** $e^{-y} = Cx^2 + x$. **29.** $\cos y = (x^2-1)\ln C(x^2-1)$. **30.** $y = 2e^x - 1$. **31.** $y = -2e^x$. **32.** $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{Cx^5 - x}$; $y = \dfrac{2}{x}$. **33.** $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{Cx^{2/3} + x}$; $y = \dfrac{1}{x}$. **34.** $y = x + \dfrac{x}{x+C}$; $y = x$. **35.** $y = x + 2 + \dfrac{4}{Ce^{4x} - 1}$; $y = x + 2$. **36.** $y = e^x - \dfrac{1}{x+C}$; $y = e^x$. **37.** $3x = C\sqrt{|y|} - y^2$; $y = 0$.

Література: [1], с.18—21; [2], с.14—15; [3], с.26—29; [4], с.31—35; [5], с.48—55; [6], с.63—80; [7], с.17—20.

Тема 4. РІВНЯННЯ В ПОВНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛАХ. ІНТЕГРУВАЛЬНИЙ МНОЖНИК

Якщо ліва частина диференціального рівняння

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \quad (x,y) \in D \subset R^2 \tag{1}$$

є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, тобто

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \tag{2}$$

то (1) називається рівнянням у повних диференціалах. Відомо, що коли $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ неперервні в області D разом із своїми частинними похідними першого порядку, то (1) буде рівнянням у повних диференціалах тоді й тільки тоді, коли $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ $\forall\,(x,y) \in D$. Якщо ця умова виконана, то, згідно з (1) і (2), $u(x,y) = c = \mathrm{const}$ — загальний інтеграл рівняння (1). Із (2) випливає, що функцію $u(x,y)$ потрібно визначати із рівнянь

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y). \tag{3}$$

У тому випадку, коли (1) не є рівнянням у повних диференціалах, часто вдається знайти функцію $\mu(x,y) \neq 0$, після множення на яку (1) перетворюється на рівняння в повних диференціалах. При цьому $\mu(x,y)$ називають інтегрувальним множником рівняння (1). Інтегрувальний множник $\mu(x,y)$ задовольняє рівняння з частинними похідними

$$\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y}. \tag{4}$$

У деяких частинних випадках рівняння (4) розв'язується просто. Розглянемо їх.

1) Нехай для (1) існує інтегрувальний множник, який є функцією тільки від x, тобто $\mu(x,y) \equiv \mu(x)$. Тоді з (4) маємо

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}.$$

Ліва частина (5) залежить лише від x, тому і права частина повинна бути функцією тільки від x. Таким чином, $\mu = \mu(x)$ існує тоді й тільки тоді, коли права частина (5) залежить тільки від x.

2) Аналогічно встановлюється, що рівняння (1) має інтегральний множник $\mu = \mu(y)$, якщо права частина рівняння

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = -\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \tag{6}$$

залежить тільки від y.

3) Якщо для рівняння (1) існує інтегрувальний множник $\mu = \mu(\omega)$, який є функцією від заданої функції $\omega = \omega(x,y)$, то

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{d\omega} = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q\dfrac{\partial \omega}{\partial x} - P\dfrac{\partial \omega}{\partial y}}. \tag{7}$$

При цьому права частина (7) повинна бути функцією від ω. Інший спосіб відшукання інтегрувального множника базується на такій властивості: якщо $\mu(Pdx + Qdy) = du$, то $\mu f(u)$, де f — довільна неперервна функція, яка не перетворюється на нуль, теж буде інтегрувальним множником для (1). Подамо рівняння (1) у вигляді

$$P_1(x,y)dx + Q_1(x,y)dy + P_2(x,y)dx + Q_2(x,y)dy = 0 \tag{8}$$

і припустимо, що легко знайти інтегрувальні множники $\mu_1(x,y)$ і $\mu_2(x,y)$ та загальні інтеграли $u_1(x,y)=c$ і $u_2(x,y)=c$ відповідно до рівнянь

$$P_1(x,y)dx+Q_1(x,y)dy=0,\quad P_2(x,y)dx+Q_2(x,y)dy=0.$$

На підставі вказаної вище властивості для знаходження інтегрувального множника рівняння (8) досить підібрати функції f_1 і f_2 так, щоб $\mu_1 f_1(u_1)=\mu_2 f_2(u_2)$. Якщо такі функції будуть знайдені, то інтегрувальним множником рівняння (8) буде функція

$$\mu=\mu_1 f_1(u_1)=\mu_2 f_2(u_2).$$

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$(3x-9x^2y^2)dx+(5y^4-6x^3y)dy=0.$$

Розв'язання. Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x-9x^2y^2)=-18x^2y=\frac{\partial}{\partial x}(5y^4-6x^3y),$$

то дане рівняння в повних диференціалах і його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$. Знайдемо $\mu(x,y)$ із рівностей (3):

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x-9x^2y^2,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=5y^4-6x^3y.$$

З першого рівняння маємо:

$$u(x,y)=\int(3x-9x^2y^2)dx=\frac{3}{2}x^2-3x^3y^2+\varphi(y).$$

Підставляючи знайдене значення u в друге рівняння, одержимо:

$$-6x^3y+\varphi'(y)=5y^4-6x^3y,$$

$$\varphi'(y) = 5y^4, \quad \varphi(y) = y^5 + c_1, \quad c_1 \in R.$$

Тому $u(x, y) = \dfrac{3}{2}x^2 - 3x^3y^2 + y^5 + c_1$, і загальний інтеграл даного рівняння має вигляд $\dfrac{3}{2}x^2 - 3x^3y^2 + y^5 = c$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0, \tag{9}$$

коли відомо, що воно має інтегрувальний множник як функцію однієї змінної x або y.

Розв'язання. Маємо:

$$P(x, y) = 2xy^2 - y, \quad Q(x, y) = y^2 + x + y,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4xy - 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

Оскільки $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то (9) не є рівнянням у повних диференціалах. Перевіримо, чи існує для (9) $\mu = \mu(x)$. Згідно з (5) обчислимо

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{4xy - 2}{y^2 + x + y} \neq \varphi(x),$$

тому $\mu = \mu(x)$ не існує. Розглянемо тепер праву частину (6):

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{-P} = \frac{4xy - 2}{-(2xy^2 - y)} = -\frac{2}{y} = \psi(y).$$

Отже, $\mu = \mu(y)$ існує і його визначаємо з (6):

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy} = -\frac{2}{y}, \quad \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2}{y}dy, \quad \mu = \frac{1}{y^2}.$$

Домноживши (9) на $\mu = \dfrac{1}{y^2}$, одержимо рівняння в повних диференціалах

$$\left(2x - \frac{1}{y}\right) dx + \left(1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}\right) dy = 0.$$

Розв'яжемо його:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y};$$

$$u(x, y) = \int \left(2x - \frac{1}{y}\right) dx = x^2 - \frac{x}{y} + \varphi(y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - \frac{x}{y} + \varphi(y)\right) = 1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y},$$

$$\varphi'(y) = 1 + \frac{1}{y}, \quad \varphi(y) = y + \ln|y| + c_1.$$

Отже, $u(x, y) = x^2 - \dfrac{x}{y} + y + \ln|y| = c$. Зазначимо, що при діленні на y^2 був втрачений розв'язок даного рівняння $y \equiv 0$.

Приклад 3. Розв'язати диференціальне рівняння

$$(x^2 + y^2 + y)dx - xdy = 0, \tag{10}$$

яке має інтегрувальний множник $\mu = \mu(\omega)$, де $\omega = xy$, або $\omega = x^2 + y^2$, або ж $\omega = x^2 - y^2$.

Розв'язання. У нашому випадку

$$P(x, y) = x^2 + y^2 + y, \quad Q(x, y) = -x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2y + 1 \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = -1.$$

Припустимо, що $\omega = xy$, і обчислимо праву частину рівняння (7):

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q\dfrac{\partial \omega}{\partial y} - P\dfrac{\partial \omega}{\partial x}} = \frac{2(y + 1)}{-xy - (x^2 + y^2 + y)x} =$$

$$= \frac{2(y+1)}{-x(x^2+y^2+2y)} \neq \varphi(xy).$$

Звідси робимо висновок, що $\mu = \mu(xy)$ для (10) не існує. Нехай тепер $\omega = x^2 + y^2$:

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q\dfrac{\partial \omega}{\partial y} - P\dfrac{\partial \omega}{\partial x}} = \frac{2(y+1)}{-2x^2 - (x^2+y^2+y)2y} = -\frac{1}{x^2+y^2} = -\frac{1}{\omega}.$$

Отже, при $\omega = x^2 + y^2$ інтегрувальний множник $\mu = \mu(\omega)$ існує. Знайдемо його із (7):

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{d\omega} = -\frac{1}{\omega}, \quad \mu = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{x^2+y^2}.$$

Після множення (10) на $\mu = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ одержимо рівняння

$$\left(1 + \frac{y}{x^2+y^2}\right)dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy = 0$$

у повних диференціалах. Маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + \frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2};$$

$$u = \int\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy = -\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \varphi(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \varphi(x)\right) = 1 + \frac{y}{x^2+y^2}, \quad \varphi'(x) = 1, \quad \varphi(x) = x + c_1.$$

Таким чином, $-\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + x = c$ — загальний інтеграл рівняння (10).

Приклад 4. Знайти інтегрувальний множник рівняння

$$(x^3 + xy^2 - y)dx + (y^3 + x^2y + x)dy = 0. \qquad (11)$$

Розв'язання. Легко переконатись, що (11) не є рівнянням у повних диференціалах. Подамо (11) у вигляді

$$[x(x^2 + y^2)dx + y(x^2 + y^2)dy] + [xdy - ydx] = 0.$$

Очевидно, що рівняння

$$x(x^2 + y^2)dx + y(x^2 + y^2)dy = 0$$

має інтегрувальний множник $\mu_1 = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$, а загальним інтегралом рівняння $xdy + ydx = 0$ є $u_1(x, y) = x^2 + y^2 = c$. Тому кожний інтегрувальний множник цього рівняння має вигляд $\mu_1 f_1(u_1) = \dfrac{1}{x^2 + y^2} f_1(x^2 + y^2)$, де f_1 — довільна неперервна функція.

Для рівняння $xdy - ydx = 0$ інтегрувальним множником є $\mu_2 = \dfrac{1}{xy}$, а співвідношення $u_2(x, y) = \frac{y}{x} = c$ визначає його загальний інтеграл. Отже, всі інтегрувальні множники цього рівняння містяться у формулі $\mu = \mu_2 f_2(u_2) = \dfrac{1}{xy} f_2\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Використовуючи довільний вибір функцій f_1 і f_2, підберемо їх так, щоб

$$\frac{1}{x^2 + y^2} f_1(x^2 + y^2) = \frac{1}{xy} f_2\left(\frac{y}{x}\right).$$

Якщо припустити, що $f_1(z) = 1$, $f_2(z) = \dfrac{z}{1 + z^2}$, то остання рівність буде виконуватись. Таким чином, $\mu = \mu_1 f_1(u_1) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ — інтегрувальний множник рівняння (11).

Завдання для самостійної роботи

1. Розв'язати рівняння:

а) $(2xy+3y^2)dx+(x^2+6xy-3y^2)dy=0$,

$(y^3+\ln x)dy=-\dfrac{y}{x}dx$;

б) $(3y^2+2xy+2x)dx+(6xy+x^2+3)dy=0$,

$(2y+xe^{-y})dy=e^{-y}dx$;

в) $\sqrt{x^2-y}\,dx+2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dy=0$,

$3x^2(1+\ln y)dx=\left(2y-\dfrac{x^3}{y}\right)dy$.

2. Розв'язати рівняння методом інтегрувального множника, знаючи, що вони мають $\mu=\mu(x)$ або $\mu=\mu(y)$:

а) $\left(1+\dfrac{y}{x^2}\right)dx+\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2y}{x^2}\right)dy=0$;

б) $\left(\dfrac{y}{x}-3x\right)dx=\left(\dfrac{4y}{x}-1\right)dy=0$;

в) $\left(\dfrac{y^3}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}\right)dy=\dfrac{y}{x^3}dx$.

3. Розв'язати рівняння методом інтегрувального множника, знаючи, що вони мають $\mu=\mu(\omega)$, де $\omega=xy$ або $\omega=x^2+y^2$, або ж $\omega=x^2-y^2$:

а) $(x+x^2+y^2)dy-ydx=0$,

$(2x^2y+x)dy+(y+2xy^2-x^2y^3)dx=0$;

б) $(x^3+xy^2-y)dx+(y^3+x^2y+x)dy=0$,

$y^2dx-(1-xy)dy=0$;

в) $(x^2y^3+y)dx+(x^3y^2-x)dy=0$,

$(x^2+y)dy+(1-y)xdx=0$.

Завдання для домашньої роботи

Перевірити, що рівняння є рівняннями в повних диференціалах та розв'язати їх

1. $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0.$

2. $(2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0.$

3. $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0.$

4. $\dfrac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0.$

5. $\dfrac{3x^2 + y^2}{y^2}dx - \dfrac{2x^3 + 5y}{y^3}dy = 0.$

6. $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0.$

7. $(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y\cos^2 xdy = 0.$

8. $3x^2(1 + \ln y)dx = \left(2y - \dfrac{x^3}{y}\right)dy.$

9. $\left(\dfrac{x}{\sin t} + 2\right)dx + \dfrac{(x^2 + 1)\cos y}{\cos 2y - 1}dy = 0.$

Розв'язати рівняння або знайшовши інтегруючий множник будь-яким способом або зробивши заміну змінних

10. $(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0.$

11. $(x^2 + y^2 + y)dx - xdy = 0.$

12. $ydy = (xdy + ydx)\sqrt{1 + y^2}.$

13. $xy^2(xy' + y) = 1.$

14. $y^2dx - (xy + x^3)dy = 0.$

15. $\left(y - \dfrac{1}{x}\right)dx + \dfrac{dy}{y} = 0.$

16. $(x^2 + 3\ln y)ydx = xdy.$

17. $y^2dx + (xy + \operatorname{tg} xy)dy = 0.$

18. $y(x + y)dx + (xy + 1)dy = 0$

19. $y(y^2 + 1)dx + x(y^2 - x + 1)dy = 0.$

20. $(x^2 + 2x + y)dx = (x - 3x^2y)dy.$

21. $ydx - xdy = 2x^3 \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}dx.$

22. $y^2dx + (e^x - y)dy = 0.$
23. $xydx = (y^3 + x^2y + x^2)dy.$
24. $x^2y(ydx + xdy) = 2ydx + xdy.$
25. $(x^2 - y^2 + y)dx + x(2y - 1)dy = 0.$
26. $(2x^2y^2 + y)dx + (x^3y - x)dy = 0.$
27. $(2x^2y^3 - 1)ydx + (4x^2y^3 - 1)xdy = 0$.
28. $y(x + y^2)dx + x^2(y - 1)dy = 0.$
29. $(x^2 - \sin^2 y)dx + x\sin 2ydy = 0.$
30. $x(\ln y + 2\ln x - 1)dy = 2ydx.$
31. $(x^2 + 1)(2xdx + \cos ydy) = 2x\sin ydx.$
32. $(2x^3y^2 - y)dx + (2x^2y^3 - x)dy = 0.$
33. $x^2y^3 + y + (x^3y^2 - x)y' = 0.$
34. $(x^2 - y)dx + x(y + 1)dy = 0.$
35. $y^2(ydx - 2xdy) = x^3(xdy - 2ydx).$

Відповіді

1. $3x^2y - y^3 = X$. **2.** $x^2 - 3x^3y^2 + y^4 = C$. **3.** $xe^{-y} - y^2 = C$. **4.** $4y\ln x + y^4 = C$. **5.** $x + \dfrac{x^3}{y^2} + \dfrac{5}{y} = C$. **6.** $x^2 + \dfrac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2} = C$. **7.** $x - y^2\cos^2 x = C$. **8.** $x^3 + x^3\ln y - y^2 = C$. **9.** $x^2 + 1 = 2(C - 2x)\sin y$. **10.** $2x + \ln(x^2 + y^2) = C$. **11.** $x + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} = C$. **12.** $xy + C = \sqrt{1 + y^2}$. **13.** $2x^3y^3 - 3x^2 = C$. **14.** $y^2 = x^2(C - 2y)$; $x = 0$. **15.** $(x^2 - C)y = 2x$. **16.** $x^2 + \ln y = Cx^3$; $x = 0$. **17.** $y\sin xy = C$. **18.** $\dfrac{x^2}{2} + xy + \ln|y = C$; $y = 0$. **19.** $-x + 1 = xy(\operatorname{arctg} y + C)$; $x = 0$; $y = 0$. **20.** $x + 2\ln|x| + \dfrac{3}{2}y^2 - \dfrac{y}{x} = C$; $x = 0$. **21.** $\sin\dfrac{y}{x} = Ce^{-x^2}$. **22.** $\ln|y| - ye^{-z} = C$; $y = 0$. **23.** $\ln\left(\dfrac{x^2}{y^2} + 1 = 2y + C\right)$; $y = 0$. **24.** $x^2y\ln Cxy = -1$; $x = 0$; $y = 0$. **25.** $x^2 + y^2 = y + Cx$; $x = 0$. **26.** $x^2y + \ln|x/y| = C$;

$x = 0$; $y = 0$. **27.** $2xy^2 + (1/xy) = C$; $x = 0$; $y = 0$. **28.** $\ln\left|\dfrac{x+y}{y}\right| + \dfrac{y(1+x)}{x+y} = C$; $y = 0$; $y = -x$. **29.** $\sin^2 y = Cx - x^2$; $x = 0$. **30.** $y = C\ln x^2 y$. **31.** $\sin y = -(x^2+1)\ln C(x^2+1)$. **32.** $xy(C - x^2 - y^2) = -1$; $x = 0$; $y = 0$. **33.** $y^2 = Cx^2 e^{x^2y^2}$. **34.** $x\sqrt{1+(y^2/x^2)} + \ln(y/x + \sqrt{1+(y^2/x^2)}) = C$; $x = 0$. **35.** $x^3 - 4y^2 = Cy\sqrt[3]{xy}$; $x = 0$; $y = 0$.

Література: [1], с. 53–60; [2], с. 32–35; [4], с. 35–43; [5], с. 26–40; [6], с. 81–91; [7], с. 20–23.

Тема 5. РІВНЯННЯ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНІ ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ

Диференціальне рівняння першого порядку, не розв'язане відносно похідної, має вигляд

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Нижче розглянемо часткові типи рівнянь (1), для яких можна вказати способи знаходження розв'язків.

1) Важливим випадком таких рівнянь є той, коли F — многочлен степеня n відносно похідної:

$$(y')^n + a_1(x, y)(y')^{n-1} + ... + a_{n-1}(x, y)y' + a_n(x, y) = 0. \tag{2}$$

Рівняння типу (2) називають рівнянням першого порядку n-го степеня. Згідно з основною теоремою алгебри, для кожної пари (x, y) рівняння (2) має n коренів. Обмежуючись лише дійсними коренями, одержимо $s \le n$ рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідної:

$$y' = f_k(x, y), \quad k = \overline{1, s}.$$

Якщо кожне з цих рівнянь має загальний інтеграл $\Phi_k(x, y) = C$, то сукупність рівностей

$$\Phi_k(x, y) = C, \quad k = \overline{1, s}$$

називається загальним інтегралом рівняння (2).

2) Розглянемо рівняння вигляду

$$F(x, y') = 0. \tag{3}$$

Якщо його вдається розв'язати відносно y', то одержимо рівняння $y' = f_k(x)(k = 1, 2, ...)$ з відокремлюваними змінними. Якщо ж (3) можна розв'язати відносно незалежної змінної x, тобто $x = \varphi(y')$, де φ — деяка диференційовна функція в області зміни y', то в цьому випадку розв'язок можна знайти в параметричній формі. Справді, введемо параметр $y' = p(dy = pdx)$. Тоді

$$x = \varphi(p), \quad dy = pdx = p\varphi'(p)dp, \quad y = \int p\varphi'(p)dp.$$

Отже, співвідношення

$$x = \varphi(p), \quad y = \int p\varphi'(p)dp$$

визначають загальний розв'язок рівняння (3) в параметричній формі.

3) Якщо ліва частина (1) явно не залежить від x, тобто

$$F(y, y') = 0, \tag{4}$$

то для розв'язання (4) можна використати ті ж міркування, що й у попередньому пункті.

4) У загальному випадку (1) розв'язують методом введення параметра, який докладно описаний у [5]. Ми ж розглянемо найпростіший варіант цього методу. Припустимо, що (1) можна розв'язати відносно x або y. Наприклад, його можна подати у вигляді $x = f(y, y')$. Увівши параметр $y' = p(dy = pdx)$ і продиференціювавши рівність $x = f(y, p)$, одержимо рівняння

$$\frac{dy}{p} = \frac{\partial f(y,p)}{\partial y}dy + \frac{\partial f(y,p)}{\partial p}dp, \quad p \neq 0,$$

тобто

$$P(y, p)dy + Q(y, p)dp = 0.$$

Якщо розв'язки останнього рівняння задані формулою $y = \varphi(p, c)$, то розв'язки рівняння (1) можна записати в параметричній формі

$$x = f(\varphi(p, c), p), \quad y = \varphi(p, c).$$

Прикладами рівнянь, які можна розв'язати викладеним методом, є рівняння Лагранжа

$$y = A(y')x + B(y') \tag{5}$$

та рівняння Клеро

$$y = xy' + B(y'). \tag{6}$$

Тут $A(y')$ і $B(y')$ — неперервно диференційовні функції в області зміни y'.

Приклад 1. Знайти всі розв'язки рівняння

$$(y')^2 + xy = y^2 + xy'.$$

Розв'язання. Дане рівняння є рівнянням першого порядку другого степеня. Розв'язуючи його як квадратне рівняння відносно y', одержимо два рівняння першого порядку, розв'язані відносно похідної:

$$y' = y, \quad y' = x - y.$$

Перше з них є рівнянням з відокремлюваними змінними і має загальний розв'язок $y = Ce^x$, а друге зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою заміни $z = y - x$ $(z' = y' - 1)$:

$$z' = -z - 1, \quad \frac{dz}{z+1} = -dx, \quad z + 1 = Ce^{-x}, \quad y = x - 1 + Ce^{-x}.$$

Отже, сукупність рівностей

$$y = Ce^x, \quad y = x - 1 + Ce^{-x}$$

визначає загальний інтеграл даного в умові задачі рівняння.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y'(x - \ln y') = 1$.

Розв'язання. Дане рівняння має вигляд (3). Його легко розв'язати відносно x:

$$x = \frac{1}{y'} + \ln y'.$$

Уведемо параметр $y' = p$ і продиференціюємо рівність $x = \ln p + \frac{1}{p}$. Маємо:

$$dx = \left(-\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}\right) dp, \quad \frac{dy}{dp} = \left(-\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}\right) dp, \quad dy = \left(1 - \frac{1}{p}\right) dp,$$

$$y = \int \left(1 - \frac{1}{p}\right) dp = p - \ln p + C.$$

Таким чином, $x = \frac{1}{p} + \ln p$, $y = p - \ln p + C$ — загальний розв'язок рівняння в параметричній формі.

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$5y + (y')^2 = x(x + y'). \tag{7}$$

Розв'язання. Нехай $y' = p$. Тоді з (7) маємо ланцюжок рівностей:

$$y = \frac{1}{5}(x^2 + px - p^2), \quad dy = \frac{1}{5}(2xdx + xdp + pdx - 2pdp),$$

$$5pdx = (2x + p)dx + (x - 2p)dp, \quad (x - 2p)(dp + 2dx) = 0.$$

Аналіз останнього рівняння показує, що $x = 2p$ або $x = -\frac{p}{2} + C$. Тоді, враховуючи рівність $y = \frac{1}{5}(x^2 + px - p^2)$, одержимо всі розв'язки рівняння (7) в параметричній формі:

$$\begin{cases} x = 2p, \\ y = p^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{p}{2} + C, \\[2ex] y = \dfrac{1}{20}(4C^2 - 5p^2). \end{cases}$$

Зазначимо, що в останніх співвідношеннях легко виключити параметр p, внаслідок чого отримаємо розв'язки в явному вигляді:

$$y = \frac{x^2}{4}, \quad y = -x^2 + 2Cx - \frac{4}{5}C^2.$$

Приклад 4. Знайти всі розв'язки рівняння

$$y = x(y')^2 - 2(y')^3. \tag{8}$$

Розв'язання. Дане диференціальне рівняння має вигляд (5), тобто є рівнянням Лагранжа. Запровадимо параметр $y' = p$. Тоді

$$y = xp^2 - 2p^3, \quad dy = pdx = p^2dx + 2p(x - 3p)dp.$$

При $p \neq 0$ і $p \neq 1$ звідси отримаємо лінійне неоднорідне рівняння відносно невідомої функції x:

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2}{p-1}x + \frac{6p}{p-1}.$$

Розв'язуючи його методом варіації сталої (тема 3), знаходимо загальний розв'язок

$$x = \frac{C}{(p-1)^2} + 2p + 1.$$

Оскільки $y = xp^2 - 2p^3$, то можемо записати розв'язки рівняння (8) у параметричній формі:

$$x = \frac{C}{(p-1)^2} + 2p + 1, \quad y = \frac{p^2C}{(p-1)^2} + p^2.$$

Відзначимо, що останні співвідношення встановлені при $p \neq 0$ і $p \neq 1$. При $p = 0$ і $p = 1$ із формули $y = xp^2 - 2p^3$ знаходимо ще два розв'язки рівняння (8): $y = 0$, $y = x - 2$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння Клеро $2y'^2(y - xy') = 1$.

Розв'язання. За допомогою параметра $p = y'$ дане рівняння можна записати у вигляді

$$y = xp + \frac{1}{2p^2}. \tag{9}$$

Диференціюючи (9) і враховуючи рівність $dy = pdx$, одержимо

$$\left(x - \frac{1}{p^3}\right) dp = 0.$$

Звідси випливає, що $p = C = \text{const} \neq 0$ або $p = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Підставимо знайдені значення p у (9) і отримаємо загальний розв'язок $y = Cx + \frac{1}{2C^2}$ рівняння Клеро і його особливий розв'язок [5] $y = \frac{3}{2}x^3$. Зазначимо, що загальний розв'язок рівняння Клеро — однопараметрична сім'я прямих, а особливий розв'язок — обвідна цієї однопараметричної сім'ї.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати рівняння:

а) $(y')^2 - (2x + y)y' + x^2 + xy = 0$, $\quad x = \ln y' + \sin y'$,
$y + xy' = 4\sqrt{y'}$, $\quad x^2(y')^2 = xyy' + 1$,
$\sqrt{(y')^2 + 1} + xy' - y = 0$, $\quad ye^{-y'} = (y')^2$;

б) $(y')^2 - y = -2(y')^3$, $\quad y' + y = x(y')^2$,
$xy' - y = \ln y'$, $\quad 2xy' - y = y\ln(y'y)$,
$x((y')^2 - 1) = 2y'$, $\quad (y')^2 - (3x - 2y)y' +$
$+2x^2 - xy - 3y^2 = 0$.

Завдання для домашньої роботи

Розв'язати рівняння відносно y', після цього загальний розв'язок шукати звичайними методами. Знайти також особливі розв'язки, якщо вони є

1. $y'^2 + xy = y^2 + xy'$. **2.** $xy'(xy' + y) = 2y^2$.
3. $xy'^2 - 2yy' + x = 0$. **4.** $xy'^2 = y(2y' - 1)$.
5. $y'^2 + x = 2y$. **6.** $y'^3 + (x+2)e^y = 0$.
7. $y'^2 - 2xy' = 8x^2$. **8.** $(xy' + 3y)^2 = 7x$.
9. $y'^2 - 2yy' = y^2(e^x - 1)$.
10. $y'(2y - y') = y^2 \sin^2 x$.
11. $y'^4 + y^2 = y^4$.
12. $x(y - xy')^2 = xy'^2 - 2yy'$.
13. $y(xy' - y)^2 = y - 2xy'$.
14. $yy'(yy' - 2x) = x^2 - 2y^2$.
15. $y'^2 + 4xy' - y^2 - 2x^2y = x^4 - 4x^2$.
16. $y(y - 2xy')^2 = 2y'$.

Розв'язати рівняння за допомогою введення параметра

17. $x = y'^3 + y'$. **18.** $x(y'^2 - 1) = 2y'$.
19. $x = y'\sqrt{y'^2 + 1}$. **20.** $y'(x - \ln y') = 1$.
21. $y = y'^2 + 2y'^3$. **22.** $y = \ln(1 + y'^2)$
23. $(y' + 1)^3 = (y' - y)^2$. **24.** $y = (y' - 1)e^{y'}$.
25. $y'^4 - y'^2 = y^2$. **26.** $y'^2 - y'^3 = y^2$.
27. $y'^4 = 2yy' + y^2$. **28.** $y'^2 - 2xy' = x^2 - 4y$.
29. $5y + y'^2 = x(x + y')$. **30.** $x^2y'^2 = xyy' + 1$.
31. $y'^3 + y^2 = xyy'$ **32.** $2xy' - y = y' \ln yy'$.
33. $y' = e^{xy'/y}$. **34.** $y = xy' - x^2y'^3$.
35. $y = 2xy' + y^2y'^3$. **36.** $y(y - 2xy')^3 = y'^2$.

Розв'язати рівняння Лагранжа та Клеро

37. $y = xy' - y'^2$. **38.** $y + xy' = 4\sqrt{y'}$.
39. $y = 2xy' - 4y'^3$. **40.** $y = xy' - (2 + y')$.
41. $y'^3 = 3(xy' - y)$. **42.** $y = xy'^2 - 2y'^3$.

43. $xy' - y = \ln y'$. **44.** $xy'(y'+2) = y$.
45. $2y'^2(y - xy') = 1$. **46.** $2xy' - y = \ln y'$.

Відповіді

1. $y = Ce^x$; $y = Ce^{-x} + x - 1$. **2.** $x^2y = C$; $y = Cx$. **3.** $x^2 + C^2 = 2Cy$; $y = \pm x$. **4.** $(x+C)^2 = 4Cy$; $y = 0$; $y = x$. **5.** $\ln|1 \pm 2\sqrt{2y - z}| = 2(x + C \pm \sqrt{2y - x})$; $8y = 4x + 1$. **6.** $(x+2)^{4/3} + C = 4e^{-y/3}$. **7.** $y = 2x^2 + C$; $y = -x^2 + C$. **8.** $y = Cx^{-3} \pm 2\sqrt{x/7}$. **9.** $\ln Cy = x \pm 2e^{x/2}$; $y = 0$. **10.** $\ln Cy = x \pm \sin x$; $y = 0$. **11.** $\operatorname{arctg} u + \dfrac{1}{2}\ln|(u-1)/(u+1)| = \pm x + C$, де $u = \sqrt[4]{1 - (1/y^2)}$; $y = 0$; $y = \pm 1$. **12.** $x^2 + (Cy+1)^2 = 1$; $y = 0$. **13.** $(Cx+1)^2 = 1 - y^2$; $y = 0$; $y = \pm 1$. **14.** $2(x-C)^2 + 2y^2 = C^2$; $y = \pm x$. **15.** $y = Ce^{\pm x} - x^2$. **16.** $y^2 = C^2x - C$; $4xy^2 = -1$. **17.** $x = p^3 + p$, $4y = 3p^4 + 2p^2 + C$. **18.** $x = \dfrac{2p}{p^2 - 1}$, $t = \dfrac{2}{p^2-1} - \ln|p^2 - 1| + C$. **19.** $x = p\sqrt{p^2+1}$, $3y = (2p^2 - 1)\sqrt{p^2+1} + C$. **20.** $x = \ln p + (1/p)$, $y = p - \ln p + C$. **21.** $x = 3p^2 + 2p + C$, $y = 2p^3 + p^2$; $y = 0$. **22.** $x = 2\operatorname{arctg} p + C$, $y = \ln(1+p^2)$; $y = 0$. **23.** $x = \ln|p| \pm \dfrac{3}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{p+1} - 1}{\sqrt{p+1}+1}\right| \pm 3\sqrt{p+1} + C$, $y = p \pm (p+1)^{3/2}$; $y = \pm 1$. **24.** $x = e^p + C$, $y = (p-1)e^p$; $y = -1$. **25.** $x = \pm\left(2\sqrt{p^2-1} + \arcsin\dfrac{1}{|p|}\right) + C$, $y = \pm p\sqrt{p^2-1}$; $y = 0$. **26.** $x = \pm\left(\ln\left|\dfrac{1 - \sqrt{1-p}}{1+\sqrt{1-p}}\right| + 3\sqrt{1-p}\right) + C$, $y = \pm p\sqrt{1-p}$; $y = 0$. **27.** $x = \pm 2\sqrt{1+p^2} - \ln(\sqrt{p^2+1} \pm 1) + C$, $y = -p \pm p\sqrt{p^2+1}$; $y = 0$. **28.** $4y = C^2 - 2(x-C)^2$; $2y = x^2$. **29.** $x = -\dfrac{p}{2} + C$, $5y = C^2 - \dfrac{5p^2}{4}$; $x^2 = 4y$. **30.** $\pm xp\sqrt{2\ln Cp} = 1$, $y = \pm\left(\sqrt{2\ln Cp} - \dfrac{1}{\sqrt{2\ln Cp}}\right)$. **31.** $pxy = y^2 + p^3$, $y^2(2p + C) = p^4$; $y = 0$. **32.** $y^2 = 2Cx - C\ln C$;

$2x = 1 + 2\ln|y|$. **33.** $Cx = \ln Cy$; $y = ex$. **34.** $xp^2 = C\sqrt{|p|} - 1$, $y = xp - x^2p^3$; $y = 0$. **35.** $2p^2x = C - C^2p^2$, $py = C$; $32x^3 = -27y^4$; $y = 0$. **36.** $y^2 = 2C^3x + C^1$; $27x^2y^2 = 1$. **37.** $y = Cx - C^2$; $4y = x^2$. **38.** $x\sqrt{p} = \ln p + C$, $y = \sqrt{p}(4 - \ln p - C)$; $y = 0$. **39.** $x = 3p^2 + Cp^{-2}$, $y = 2p^3 + 2Cp^{-1}$; $y = 0$. **40.** $y = Cx - C - 2$. **41.** $C^3 = 3(Cx - y)$; $9y^2 = 4x^3$. **42.** $x = C(p-1)^{-2} + 2p + 1$, $y = Cp^2(p-1)^{-2} + p^2$; $y = 0$; $y = x - 2$. **43.** $y = Cx - \ln C$; $y = \ln x + 1$. **44.** $y = \pm\sqrt{Cx} + C$; $y = -x$. **45.** $2C^2(y - Cx) = 1$; $8y^3 = 27x^2$. **46.** $xp^2 = p + c$, $y = 2 + 2Cp^{-1} - \ln p$.

Література: [1], с. 92–108; [2], с. 36–41; [3], с. 39–45; [5], с. 54–88; [6], с. 105–121; [7], с. 28–32.

Тема 6. РІВНЯННЯ, ЩО ДОПУСКАЮТЬ ЗНИЖЕННЯ ПОРЯДКУ

Розглянемо скалярне диференціальне рівняння n-го порядку

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \quad n \geq 2, \tag{1}$$

в якому x — незалежна змінна, $y = y(x)$ — шукана функція, F — задана функція в деякій області $D \subset \mathbb{R}^{n+2}$. Загальним розв'язком рівняння (1) в області D будемо називати n-параметричну сім'ю функцій $y = \varphi(x, c_1, ..., c_n)$ (параметри $c_1, ..., c_n$ — довільні сталі) за умови, що всякий член цієї сім'ї є розв'язком рівняння (1), і навпаки, всякий розв'язок рівняння (1), графік якого лежить в D, є членом даної сім'ї. Якщо співвідношення $\Phi(x, y, c_1, ..., c_n) = 0$ визначає загальний розв'язок рівняння (1) у неявному вигляді, тоді воно називається загальним інтегралом рівняння (1).

Інколи (1) вдається розв'язати відносно n-ої похідної і записати у вигляді

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}). \tag{2}$$

Задачею Коші для рівняння (2) називається задача про відшукання того розв'язку $y = y(x)$ рівняння, який справджує початкові умови

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \tag{3}$$

Тут $x_0, y_0, ..., y_{n-1}$ — задані числа. Відомо, що коли f — неперервна в деякому околі точки $(x_0, y_0, ..., y_{n-1})$ і має обмежені частинні похідні першого порядку за змінними $y, y', ..., y^{(n-1)}$, то існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ задачі Коші (2), (3), який визначений і n разів неперервно диференційовний у деякому околі точки $x = x_0$ (теорема Пікара).

Один із основних підходів до відшукання загального розв'язку рівнянь (1) або (2) полягає в послідовному зниженні їх порядку. Нижче ми вкажемо деякі класи таких рівнянь і проілюструємо їх на конкретних прикладах.

1) **Рівняння, що не містять в явному вигляді шуканої функції та деяких її послідовних похідних.** Розглянемо рівняння

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0, \quad k \geq 1. \tag{4}$$

Якщо вважати $y^{(k)} = z$, де $z = z(x)$ — нова невідома функція, то дістанемо рівняння $(n-k)$-го порядку

$$F(x, z, z', ..., z^{(n-k)}) = 0.$$

Нехай нам вдалося знайти загальний розв'язок $z = \varphi_1(x, c_1, ..., c_{n-k})$ цього рівняння. Після підстановки його в $y^{(k)} = z$ і подальшого інтегрування одержимо загальний розв'язок рівняння (4).

Приклад 1. Знайти всі розв'язки рівняння $2xy'y'' = (y')^2 - 1$.

Розв'язання. Дане рівняння не містить шуканої функції y, тому зробимо заміну $y' = z(x)$. Тоді одержимо рівняння

$$2xzz' = z^2 - 1. \tag{5}$$

Розв'яжемо його:

$$\frac{2zdz}{z^2-1} = \frac{dx}{x}, \quad z \neq \pm 1, \quad \ln|z^2 - 1| = \ln|x| + \ln|c_1|, \quad c_1 \neq 0,$$

$$z^2 - 1 = c_1 x, \quad z = \pm\sqrt{1 + c_1 x}.$$

Легко побачити, що при $c_1 \in R$ (включаючи $c_1 = 0$) формулою $z = \pm\sqrt{1 + c_1 x}$ записується загальний розв'язок рівняння (5). Повертаючись до змінної y ($y' = z$), дістанемо:

$$y' = \pm\sqrt{1 + c_1 x},$$

$$y = \pm \int \sqrt{1 + c_1 x} dx = \pm \frac{2}{3c_1}(1 + c_1 x)^{\frac{3}{2}} + c_2, \quad c_1 \neq 0$$

і $y = \pm x + c_2$ при $c_1 = 0$.

Отже, співвідношення $y = \pm \frac{2}{3c_1}(1 + c_1 x)^{\frac{3}{2}} + c_2$, $y = \pm x + c_2$ визначають усі розв'язки даного рівняння.

2) **Рівняння, які явно не містять незалежної змінної.** У рівнянні вигляду

$$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{6}$$

можна знизити порядок на одиницю за допомогою заміни $y' = u$, де $u = u(y)$ — нова шукана функція, а y — нова незалежна змінна. Справді, в цьому випадку

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = u'u,$$

$$y''' = \frac{d}{dx}(u'u) = \frac{d}{dy}(u'u)\frac{dy}{dx} = (u''u + (u')^2)u, ...$$

Приклад 2. Розв'язати задачу Коші

$$y'' \cos y + (y')^2 \sin y = y', \quad y(-1) = \frac{\pi}{6}, \quad y'(-1) = 2. \tag{7}$$

Розв'язання. Запровадимо заміну $y' = u(y)$, внаслідок чого дістанемо рівняння $u(u' \cos y + u \sin y - 1) = 0$. Функція $u = 0$, тобто $y = c = \text{const}$, не задовольняє початкові умови, тому знайдемо загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $u' \cos y + u \sin y - 1 = 0$. Маємо:

$$u' \cos y + u \sin y = 0, \quad \frac{du}{u} = -\operatorname{tg} y dy,$$

$$u = c \cos y, \quad u = c(y) \cos y,$$

$$c'(y) \cos^2 y - c(y) \cos y \sin y + c(y) \cos y \sin y - 1 = 0,$$

$$c(y) = \int \frac{dy}{\cos^2 y} = \operatorname{tg} y + c_1.$$

Таким чином, $u = c_1 \cos y + \sin y$ — загальний розв'язок лінійного рівняння. З початкових умов (7) знаходимо, що $u = y' = 2$ при $y = \frac{\pi}{6}$. Тому $2 = c_1 \cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}$, $c_1 = \sqrt{3}$, $u(y) = \sqrt{3}\cos y + \sin y = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} + y\right)$. Звернемося тепер до старих змінних:

$$y' = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} + y\right), \int \frac{dy}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + y\right)} = 2\int dx,$$

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{3} + y\right)}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{3} + y\right)} = -2x + c_2.$$

Підставивши в останню рівність $x = -1$, $y = \frac{\pi}{6}$, дістанемо $c_2 = -2$. Отже, рівність

$$\ln\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{3} + y\right)}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{3} + y\right)} = -4x - 4$$

визначає розв'язок задачі Коші (7) у неявному вигляді.

3. **Рівняння в повних похідних.** Якщо ліва частина рівняння (1) є повною похідною за x від деякої функції $F_1(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$, тобто

$$\frac{d}{dx}F_1(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) = F(x, y, y', ..., y^{(n)}),$$

то, очевидно, (1) рівносильне рівнянню $(n-1)$-го порядку

$$F_1(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) = c,$$

де c — довільна стала.

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$y'''y' = 2(y'')^2. \tag{8}$$

Розв'язання. Легко переконатись, що $y = c_1x + c_2$ $(y'' \equiv 0)$ є розв'язком рівняння (8) при довільних $c_1 \in R$, $c_2 \in R$. Нехай тепер $y'' \neq 0$. Розділимо (8) на $y''y'$, внаслідок чого одержимо рівняння в повних похідних:

$$\frac{y'''}{y''} = 2\frac{y''}{y'}, \quad (\ln|y''|)' = (\ln(y')^2)',$$

$$\ln|y''| = \ln(y')^2 + \ln|c_1|, \quad y'' = c_1(y')^2.$$

Останнє рівняння знову поділимо на y' і використаємо ті ж міркування:

$$\frac{y''}{y'} = c_1y', \quad (\ln|y'|)' = (c_1y)', \quad \ln|y'| = c_1y + \ln|c_2|, \quad y' = c_2e^{c_1y}.$$

Одержане рівняння з відокремлюваними змінними має загальний інтеграл $-\frac{1}{c_1}e^{-c_1y} = c_2x + c_3$. Таким чином, всі розв'язки рівняння (8) задаються формулами

$$-\frac{1}{c_1}e^{-c_1y} = c_2x + c_3, \quad y = c_1x + c_2.$$

Зауваження. Рівняння (8) можна інтерпретувати також як рівняння вигляду (5) або (6), тому його можна було розв'язувати також одним із запропонованих у попередніх пунктах способів.

4) **Рівняння, однорідні відносно** $y, y', ..., y^{(n)}$**.** Якщо існує таке дійсне k, що для всіх $t > 0$ виконується умова

$$F(x, ty, ty', ..., ty^{(n)}) = t^kF(x, y, y', ..., y^{(n)}), \tag{9}$$

то порядок рівняння (1) можна знизити на одиницю шляхом заміни $y' = yz$, де $z = z(x)$ — нова шукана функція. Щоб переконатися в цьому, досить показати, що $y^{(p)}$ виражається через похідні функції z до порядку $(p-1)$. Маємо:

$$y' = yz, \quad y'' = \frac{d}{dx}(yz) = y'z + yz' = y(z^2 + z'),$$

$$y''' = \frac{d}{dx}(y(z^2+z')) = y'(z^2+z')+y(2zz'+z'') = y(z''+3z'z+z^3), \ldots$$

Приклад 4. Розв'язати задачу Коші

$$yy'' = 2x(y')^2, \quad y(2) = 2, \quad y'(2) = \frac{1}{2}. \tag{10}$$

Розв'язання. Дане рівняння однорідне відносно y, y', y'', бо функція $F(x, y, y', y'') = yy'' - 2x(y')^2$ справджує умову (9) з показником однорідності $k = 2$. Запровадивши заміну $y' = yz$, дістанемо рівняння

$$y^2[z' + z^2 - 2xz^2] = 0.$$

Розв'язок $y \equiv 0$ не задовольняє початкові умови, тому досить розв'язати рівняння $z' + z^2 - 2xz^2 = 0$:

$$\frac{dz}{z^2} = (2x-1)dx, \quad z \neq 0; \quad \frac{1}{z} = -x^2 + x + c_1;$$

$$z = \frac{1}{-x^2 + x + c_1}, \quad z \equiv 0.$$

Враховуючи, що $z(2) = \dfrac{y'(2)}{y(2)} = \dfrac{\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{4}$, знайдемо c_1:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{-4+2+c_1}; \quad c_1 = 6; \quad z = \frac{1}{-x^2 + x + 6}.$$

Розв'язуючи рівняння

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{-x^2 + x + 6}$$

і враховуючи початкову умову $y(2) = 2$, одержимо

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{-x^2 + x + 6}, \quad \ln|y| = \frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-3}\right)dx,$$

$$y = c\sqrt[5]{\frac{x+2}{x-3}}, \quad 2 = c\sqrt[5]{\frac{2+2}{2-3}}, \quad c = -\sqrt[5]{8}.$$

Звідси випливає, що $y = \sqrt[5]{\dfrac{8(x+2)}{-x+3}}$ — розв'язок задачі Коші (10).

Завдання для самостійної роботи

1. Розв'язати рівняння:

а) $x^2y'' - (y')^2 = 0, \qquad y'' + (y')^2 = 2e^{-y},$

$yy'' + (y')^2 = \dfrac{yy'}{\sqrt{1+x^2}};$

б) $y''(e^x + 1) = -y', \quad y'' = 2yy' = 0, \quad xyy'' - x(y')^2 = yy';$

в) $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}, \qquad y^4 - y^3y'' = 1, \quad yy'' = (y')^2 + 15y^2\sqrt{x}.$

2. Перетворити наступні рівняння так, щоб утворились рівняння в повних похідних, і розв'язати їх:

а) $yy''' + 3y'y'' = 0$; б) $y'' = xy' + y + 1$; в) $yy'' - (y')^2 = y'$.

3. Розв'язати задачі Коші:

а) $(x^2 + 1)y'' - 2xy' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3;$

б) $yy'' - (y')^2 + (y')^3 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -1;$

в) $y''y^3 + 1 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1.$

Завдання для домашньої роботи

Розв'язати рівняння

1. $x^2y'' = y'^2$. **2.** $2xy'y'' = y'^2 - 1$.
3. $y^3y'' = 1$. **4.** $y'^2 + 2yy'' = 0$.
5. $y'' = 2yy'$. **6.** $yy'' + 1 = y'^2$.
7. $y''(e^x + 1) + y' = 0$. **8.** $y''' = y''^2$.
9. $yy'' = y'^2 - y'^3$. **10.** $y''' = 2(y'' - 1)\operatorname{ctg} x$.
11. $2yy'' = y^2 + y'^2$. **12.** $y''^3 + xy'' = 2y'$.
13. $y''^2 + y' = xy''$. **14.** $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$.
15. $xy''' = y'' - xy''$. **16.** $y''^2 = y'^2 + 1$.
17. $y'' = e^y$. **18.** $y'' - xy''' + y'''^3 = 0$.
19. $2y'(y'' + 2) = xy''^2$. **20.** $y^4 - y^3y'' = 1$.
21. $y'^2 = (3y - 2y')y''$. **22.** $y''(2y' + x) = 1$.
23. $y''^2 - 2y'y''' + 1 = 1$.
24. $(1 - x^2)y'' + xy' = 2$.
25. $yy'' - 2yy'\ln y = y'^2$.
26. $(y' + 2y)y'' = y'^2$. **27.** $xy'' + y' + x\sin\dfrac{y'}{x}$.
28. $y'''y'^2 = y''^3$. **29.** $yy'' + y = y'^2$.
30. $xy'' = y' + x(y'^2 + x^2)$.

Розв'язати рівняння, використовуючи формулу, що зводить багатократне інтегрування до однократного

31. $xy^{IV} = 1$. **32.** $xy' = \sin x'$.
33. $y''' = 2xy'$. **34.** $xy^{IV} + y''' = e^x$.

Розв'язати рівняння, перетворивши їх до такого вигляду, щоб обидві частини рівняння були повними похідними

35. $yy''' + 3y'y'' = 0$. **36.** $y'y''' = 2y''^2$.
37. $yy'' = y'(y' + 1)$. **38.** $5y'''^2 - 3y''y^{IV} = 0$.
39. $yy'' + y'^2 = 1$. **40.** $y'' = xy' + y + 1$.
41. $xy'' + y'^2 = 1$. **42.** $xy'' - y' = x^2yy'$.

Понизити порядок рівнянь, використовуючи їхню однорідність, та розв'язати ці рівняння

43. $xyy'' - xy'^2 = yy'$. **44.** $yy'' = y'^2 + 15y^2\sqrt{x}$.
45. $(x^2+1)(y'y'^2 - yy'') = xyy'$.
46. $xyy'' + xy'^2 = 2yy'$. **47.** $x^2yy'' = (y - xy')^2$.
48. $y'' + \dfrac{y'}{x} + \dfrac{y}{x^2} = \dfrac{y'^2}{y}$.
49. $y(xy'' + y') = xy'^2(1-x)$.
50. $x^2yy'' + y'^2 = 0$.
51. $x^2(y'^2 - 2yy'') = y^2$.
52. $xyy'' = y'(y + y')$.
53. $4x^2y^3y'' = x^2 - y^4$.
54. $x^3y'' = (y - xy')(y - xy' - x)$.
55. $\dfrac{y^2}{x^2} + y'^2 = 3xy'' + \dfrac{2yy'}{x}$.
56. $y'' = \left(2xy - \dfrac{5}{x}\right)y' + 4y^2 - \dfrac{4y}{x^2}$.
57. $x^2(2yy'' - y'^2) = 1 - 2xyy'$.
58. $x^2(yy'' - y'^2) + xyy' = (2xy' - 3y)\sqrt{x^3}$.
59. $x^4(y'^2 - 2yy'') = 4x^3yy' + 1$.
60. $yy' + xyy'' - xy'^2 = x^3$.

Відповіді

1. $C_1x - C_1^2y = \ln|C_1x+1| + C_2$; $2y = x^2 + C$; $y = C$. **2.** $9C_1^2(y - C_2)^2 = 4(C_1x+1)^3$; $y = \pm x + C$. **3.** $C_1y^2 - 1 = (C_1x + C_2)^2$. **4.** $y^3 = C_1(x + C_2)^2$; $y = C$. **5.** $y = C_1\operatorname{tg}(C_1x + C_2)$; $\ln\left|\dfrac{y - C_1}{y + C_1}\right| = 2C_1x + C_2$; $y = (C - x) = 1$; $y = C$. **6.** $C_1y = \sin(C_1x + C_2)$; $C_1y = \pm\operatorname{sh}(C_1x + C_2)$; $y = C \pm x$. **7.** $y = C_1(x - e^{-x}) + C_2$. **8.** $y = C_3 - (x + C_1)'lnC_2(x + C_1)$; $y = C_1x + C_2$. **9.** $y + C_1\ln|y| = x + C_2$; $y = C$. **10.** $2y = C_1\cos 2x + (1 + 2C_1)x^2 + C_2x + C_3$. **11.** $y = C_1[1 \pm \operatorname{ch}(x + C_2)]$; $y = Ce^{\pm x}$. **12.** $x = C_1p + 2p^2$, $y = \dfrac{12}{5}p^5 + \dfrac{5}{4}C_1p^4 + C_1^2\dfrac{p^3}{6} + C_2$; $y = C$. **13.** $y = C_1\dfrac{x^2}{2} - C_1^2x + C_2$; $y = (x^3/12) + C$. **14.** $e^y + C_1 = (x + C_2)^2$. **15.** $y = C_1(x+2)e^{-x} +$

C_2x+C_3. **16.** $y=\pm\operatorname{ch}(x+C_1)+C_2$. **17.** $e^y\sin^2(C_1x+C_2)=2C_1^2$; $e^y\operatorname{sh}^2(C_1x+C_2)=2C_1^2$; $e^y(x+C)^2=2$. **18.** $y=C_1\dfrac{x^3}{6}-C_1^2\dfrac{x^2}{2}+C_2x+C_3$; $y=\dfrac{\pm 8}{315}x^3\sqrt{3x}+C_1x+C_2$. **19.** $3C_1y=(x-C_1)^3+C_2$; $y=C$; $y=C-2x^2$. **20.** $\ln|y^2+C_1\pm\sqrt{y^4+2C_1y^2+1}|=2x+C_2$; $y=\pm1$. **21.** $x=3C_1p^2+\ln C_2p$, $y=2C_1p^3+p$; $y=C$. **22.** $x=C_1e^p-2p-2$, $y=C_1(p-1)e^p-p^2+C_2$. **23.** $12(C_1y-x)=C_1^2(x+C_2)^3+C_3$. **24.** $y=x^2+C_1+C_2(x\sqrt{x^2-1}-\ln|x+\sqrt{x^2-1}|)$; $y=x^2+C_1+C_2(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)$. **25.** $\ln y=C_1\operatorname{tg}(C_1x+C_2)$; $\ln|(\ln y-C_1)/(\ln y+C_1)|=2C_1x+C_2$; $(C-x)\ln y=1$; $y=C$. **26.** $x=u-\ln|1+u|+C_2$, де $u=\pm\sqrt{1+4C_1y}$; $y=C$; $y=Ce^{-x}$. **27.** $C_1^2y=(C_1^2x^2+1)\operatorname{arctg}C_1x-C_1x+C_2$; $2y=k\pi x^2+C$, $K=0,\pm1,\pm2,\ldots$. **28.** $x=\ln|p|+2C_1p-C_2$, $y=p+C_1p^2+C_3$; $y=C_1x+C_2$. **29.** $C_1^2y+1=\pm\operatorname{ch}(C_1x+C_2)$; $C_1^2y-1=\sin(C_1x+C_2)$; $2y=(x+C)^2$; $y=0$. **30.** $y=C_2-\ln\left|\cos\left(\dfrac{x^2}{2}+C_1\right)\right|$. **31.** $6y=x^3\ln|x|+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4$. **32.** $y=x\displaystyle\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt+\cos x+C_1x+C_2$. **33.** $y=C_1\left[x\displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt-\frac{1}{2}(e^{x^2}-1)\right]+C_2x+C_2$. **34.** $y=\dfrac{x^2}{2}\displaystyle\int_1^x\frac{e^t}{t}dt-\frac{x+1}{2}e^x+C_1x^2\ln|x|+C_2x^2+C_3x+C_4$. **35.** $C_2y^2-C_1=C_2^2(x+C_3)^2$; $y=C$. **36.** $C_1y=\ln|C_1x+C_2|+C_3$; $y=C_1x+C_2$. **37.** $C_1y-1=C_2e^{C_1x}$; $y=C-x$; $y=0$. **38.** $y=C_1x^2+c_2x+C_3$; $y=\pm\sqrt{C_1x+C_2}+C_3x+c_4$. **39.** $y^2=x^2+C_1x+C_2$. **40.** $y=e^{x^2/2}(C_1\int e^{-x^2/2}dx+C_2)-1$. **41.** $y=C_1\operatorname{tg}(C_1\ln C_2x)$; $y-C_1=C_2(y+C_1)|x|^{2C_1}$; $y\ln Cx=-1$. **42.** $2\ln\left|\dfrac{y-C_1}{y+C_1}\right|=C_1x^2+C_2$; $y=4C_1\operatorname{tg}(C_1x^2+C_2)$; $y(C-x^2)=4$;

$y = C$. **43.** $y = C_2 C_2 e^{Cx^2}$. **44.** $C_1 x + 4x^{5/2} = \ln C_2 y$; $y = 0$. **45.** $y = C_2(x + \sqrt{x^2+1})^{C_1}$. **46.** $y^2 = C_1 x^3 + C_2$. **47.** $y = C_2 x e^{-C_1/x}$. **48.** $y = C_2 |x|^{C_1 - (1/2)\ln|x|}$. **49.** $y = C_2 \left|\dfrac{x}{x+C_1}\right|^{1/C_1}$; $y = C$; $y = Ce^{-1/x}$. **50.** $|y|^{C_1^2+1} = C_2\left(x - \frac{1}{C_1}\right)|x + C_1|^{C_1^2}$; $y = C$. **51.** $y = C_2 x(\ln C_1 x)^2$; $y = Cx$. **52.** $\ln|y| = \ln|x^2 - 2x + C_1| + \displaystyle\int \frac{2dx}{(x-1)^2 + C_1 - 1} + C_2$; $y = C$. **53.** $4C_1 y^2 = 4x + x(C_1 \ln C_2 x)^2$. **54.** $y = -x\ln(C_2 \ln C_1 x)$; $y = Cx$. **55.** $\dfrac{y}{x} = C_2 - 3\ln\left|\dfrac{1}{x} - C_1\right|$; $y = Cx$. **56.** $x^2 y = C_1 \operatorname{tg}(C_1 \ln C_2 x)$, $C_2(x^2 y + C_1)|x|^{2C_1} = x^2 y - C_1$; $x^2 y \ln Cx = -1$. **57.** $4(C_1 y - 1) = C_1^2 \ln^2 C_2 x$. **58.** $Cy = x^{3/2}(C_2 x^c + 2)$; $y = Cx^{3/2}$; $y = -2x^{3/2}\ln Cx$. **59.** $2C_2 x^2 y = (C_2 x - C_1)^2 - 1$; $xy = \pm 1$. **60.** $2C_1 C_2 y = C_2^2 |x|^{2+C_1} + |x|^{2-C_1}$.

Література: [1], с. 116–130; [4], с. 327–331; [6], с. 125–146; [7], с. 35–38.

Тема 7. ЛІНІЙНІ ОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ n-ГО ПОРЯДКУ

Лінійним однорідним рівнянням n-го порядку називається рівняння

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \tag{1}$$

де дійсні функції $a_k, k = \overline{1,n}$ — неперервні на інтервалі (a, b). Відомо, що загальний розв'язок рівняння (1) визначається формулою

$$y = c_1 y_1(x) + ... + c_n y_n(x), \tag{2}$$

в якій $c_1, ..., c_n$ — довільні сталі, а $y_1(x), ..., y_n(x)$ — фундаментальна система розв'язків рівняння (1), тобто n лінійно незалежних на (a, b) розв'язків цього рівняння. Нагадаємо, що функції $\varphi_1(x), ..., \varphi_m(x)$ називаються лінійно незалежними на інтервалі (a, b), якщо тотожність

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + ... + \alpha_m\varphi_m(x) \equiv 0 \quad \forall\, x \in (a, b) \tag{3}$$

виконується тільки в тому випадку, коли всі числа α_k, $k = \overline{1,m}$, дорівнюють нулеві. Якщо ж (3) справджується і тоді, коли хоч одне із чисел α_k відмінне від нуля, то функції $\varphi_1(x), ..., \varphi_m(x)$ називаються лінійно залежними на (a, b).

Лінійна залежність чи незалежність функцій тісно пов'язана із властивостями визначника Вронського. Нехай функції $\varphi_k(x), k = \overline{1,m}$ неперервні разом із своїми похідними до $(m-1)$-го порядку на (a, b). Визначником Вронського цих функцій називається визначник

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & ... & \varphi_m(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & ... & \varphi_m'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ \varphi_1^{(m-1)}(x) & \varphi_2^{(m-1)}(x) & ... & \varphi_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Відзначимо його властивості:

1) якщо функції $\varphi_1(x), ..., \varphi_m(x)$ лінійно залежні на (a, b), то $W(x) \equiv 0 \; \forall \, x \in (a, b)$;

2) якщо $W(x_0) \neq 0$ хоча б в одній точці $x_0 \in (a, b)$, то функції $\varphi_1(x), ..., \varphi_m(x)$ лінійно незалежні на (a, b);

3) для того, щоб розв'язки $y_1(x), ..., y_n(x)$ рівняння (1) були лінійно незалежні на (a, b), необхідно і досить, щоб їх визначник Вронського був відмінний від нуля хоча б в одній точці $x_0 \in (a, b)$;

4) для визначника Вронського n розв'язків $y_1(x), ..., y_n(x)$ рівняння (1) має місце формула Остроградського-Ліувілля

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(t) dt}, \quad x \in (a, b). \tag{4}$$

Якщо в рівнянні (1) всі $a_k(x) = a_k = \text{const}, k = \overline{1, n}$, то рівняння

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{5}$$

називають лінійним однорідним рівнянням n-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Ейлером запропоновано шукати розв'язки рівняння (5) у вигляді $y = e^{\lambda x}$, де λ — деяка стала. Для знаходження λ досить підставити $y = e^{\lambda x}$ в рівняння (5), внаслідок чого отримаємо характеристичне рівняння

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \tag{6}$$

Згідно з основною теоремою алгебри, рівняння (6) в полі комплексних чисел має точно n коренів. Оскільки коефіцієнти a_k, $k = \overline{1, n}$, рівняння (6) дійсні, то поряд з комплексним коренем дане рівняння має також комплексно спряжений корінь такої ж кратності.

Нехай рівняння (6) має дійсні корені $\lambda_1, ..., \lambda_s$ кратності відповідно $r_1, ..., r_s$ і пари комплексно спряжених коренів $\alpha_1 \pm i\beta_1, ..., \alpha_p \pm i\beta_p$ кратності відповідно $m_1, ..., m_p$ $(r_1 + ... + r_s + 2m_1 + ... + 2m_p = n)$. Тоді фундаментальну систему розв'язків рівняння (5) утворюють наступні функції:

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, ..., x^{r_1 - 1}e^{\lambda_1 x}, ..., e^{\lambda_s x}, xe^{\lambda_s x}, ..., x^{r_s - 1}e^{\lambda_s x}, e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x,$$

$$e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, xe^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, xe^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, ..., x^{m_1 - 1}e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x,$$

$$x^{m_1 - 1}e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, ..., e^{\alpha_p x}\cos\beta_p x, e^{\alpha_p x}\sin\beta_p x, xe^{\alpha_p x}\cos\beta_p x,$$

$$xe^{\alpha_p x}\sin\beta_p x, ..., x^{m_p - 1}e^{\alpha_p x}\cos\beta_p x, x^{m_p - 1}e^{\alpha_p x}\sin\beta_p x.$$

Відзначимо, нарешті, що до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами шляхом заміни $x = e^t$ при $x > 0$ $(x = -e^t$ при $x < 0)$ зводиться рівняння Ейлера

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} x y' + a_n y = 0, \qquad (7)$$

де $a_k = \text{const}, k = \overline{1, n}$.

Приклад 1. Дослідити на лінійну залежність при $x \in R$ наступні функції: 1) $x^2 + 2x$, $3x^2 - 1$, $x + 4$; 2) $\cos 2x$, $\cos^2 x$, 1; 3) x^2, $x|x|$.

Розв'язання. 1) Обчислимо визначник Вронського системи функцій $x^2 + 2x$, $3x^2 - 1$, $x + 4$:

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 + 2x & 3x^2 - 1 & x + 4 \\ 2x + 2 & 6x & 1 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 46.$$

Оскільки $W(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in R$, то дані функції лінійно незалежні на всій осі.

2) Використовуючи формулу косинуса подвійного аргументу $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, $x \in R$, маємо тотожність

$$1 \cdot \cos 2x - 2 \cdot \cos^2 x + 1 \cdot 1 \equiv 0 \quad \forall\, x \in R.$$

У цій тотожності числа $\alpha_1 = 1; \alpha_2 = -2$ і $\alpha_3 = 1$ відмінні від нуля, тому, згідно з означенням, функції $\cos 2x$, $\cos^2 x$, 1 лінійно залежні на кожному інтервалі $(a, b) \subset R$.

3) Для функцій $x^2, x|x|$ запишемо тотожність

$$\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x|x| \equiv 0 \quad \forall\, x \in R.$$

Її аналіз показує, що $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ при $x \geq 0$ і $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ при $x \leq 0$. Ці дві умови задовольняють лише числа $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, тому для $x \in R$ дані функції лінійно незалежні.

Зауваження 1. Очевидно, що при $x \in [0, \infty)$ і при $x \in (-\infty, 0]$ функції x^2 та $x|x|$ лінійно залежні, тому при дослідженні на лінійну залежність функцій потрібно уважно слідкувати за областю їх задання.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$xy'' + 2y' - xy = 0, \tag{8}$$

якщо відомий його частинний розв'язок $y_1(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

Розв'язання. Знайдемо розв'язок $y_2(x)$ рівняння (8), лінійно незалежний з $y_1(x)$ на довільному інтервалі, що не містить точки $x = 0$. Скористаємося формулою Остроградського-Ліувілля (4), враховуючи при цьому, що в рівнянні (8) $a_1(x) = \dfrac{2}{x}$. Тоді дістанемо

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = W(x_0) e^{-\int\limits_{x_0}^{x} \frac{2}{t} dt}$$

або

$$y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x) = \frac{c}{x^2}, c = \mathrm{const}.$$

Поділимо останню рівність на $y_1^2(x)$:

$$\frac{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)}{y_1^2(x)} = \frac{c}{x^2 y_1^2(x)},$$

$$\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)' = \frac{c}{x^2 y_1^2(x)} = ce^{-2x}.$$

Звідси одержимо, що

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = \int ce^{-2x}dx = -\frac{c}{2}e^{-2x} + c_2 \equiv c_1 e^{-2x} + c_2,$$

$$y_2(x) = (c_1 e^{-2x} + c_2)y_1(x) = c_1 \frac{e^{-x}}{x} + c_2 \frac{e^x}{x},$$

де c_1, c_2 — довільні сталі. Легко переконатися, що визначник Вронського функцій $\dfrac{e^{-x}}{x}$ та $\dfrac{e^x}{x}$ дорівнює $\dfrac{46}{x^2} \neq 0$, тобто ці функції — лінійно незалежні розв'язки рівняння (8). Отже, згідно з (2), $y = c_1 \dfrac{e^{-x}}{x} + c_2 \dfrac{e^x}{x}$ — загальний розв'язок рівняння (8).

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y^{IV} - 6y''' + 12y'' - 8y' = 0$.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння й розв'яжемо його:

$$\lambda^4 - 6\lambda^3 + 12\lambda^2 - 8\lambda = 0, \quad \lambda(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8) = 0,$$

$$\lambda(\lambda - 2)^3 = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2.$$

Простому кореню $\lambda = 0$ характеристичного рівняння відповідає розв'язок $y_1(x) = e^{0x} = 1$ даного диференціального рівняння, а трикратному кореню $\lambda = 2$ відповідають три лінійно незалежні розв'язки $y_2(x) = e^{2x}$, $y_3(x) = xe^{2x}$, $y_4(x) = x^2e^{2x}$. Згідно із (2), $y = c_1 + c_2e^{2x} + c_3xe^{2x} + c_4x^2e^{2x}$ — загальний розв'язок диференціального рівняння.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^{IV} + 2y'' + y = 0.$$

Розв'язання. Характеристичний многочлен $\lambda^4+2\lambda^2+1 = (\lambda^2+1)^2$ має комплексні корені $\lambda = \pm i$ кратності 2. Тому функції $e^{0x}\cos 1x$, $e^{0x}\sin 1x$, $xe^{0x}\cos 1x$, $xe^{0x}\sin 1x$ утворюють фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння, а його загальний розв'язок має вигляд $y = c_1\cos x + c_2\sin x + c_3 x\cos x + c_4 x\sin x$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $x^2y'' - 3xy' + 5y = 0$.

Розв'язання. Дане рівняння є рівнянням Ейлера. Вважаючи, що $x > 0$, запровадимо заміну $x = e^t$ (або $t = \ln x$). Оскільки

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{x},$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\frac{1}{x}\right) = \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}\frac{1}{x} - \frac{dy}{dt}\frac{1}{x^2} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\frac{1}{x^2},$$

то рівняння Ейлера зведеться до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$x^2\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\frac{1}{x^2} - 3x\frac{dy}{dt}\frac{1}{x} + 5y = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 5y = 0.$$

Корені характеристичного рівняння $\lambda^2-4\lambda+5 = 0$ комплексно спряжені ($\lambda = 2\pm i$), тому $y = c_1e^{2t}\cos t + c_2e^{2t}\sin t$ — загальний розв'язок останнього диференціального рівняння. Повертаючись до заміни $x = e^t$, отримаємо загальний розв'язок рівняння Ейлера $y = c_1x^2\cos\ln x + c_2x^2\sin\ln x$.

Зауваження 2. Якщо $x < 0$, то одержимо аналогічну формулу, але з $\ln|x|$ замість $\ln x$.

Завдання для самостійної роботи

1. Дослідити на лінійну залежність функції:

а) 1) $x, x^2, e^x, x \in R$, 2) $10, \arcsin x, \arccos x, x \in (-1, 1)$;
б) 1) $\ln 5x, \ln x^2, 3, x \in (0, \infty)$, 2) $\sin 2x, \cos 2x, e^{3x}, x \in R$;
в) 1) $\mathrm{arctg}x, \mathrm{arcctg}x, -5, x \in R$, 2) $x, xe^x, x^2e^x, x \in R$.

2. Розв'язати рівняння, якщо відомо їх частинні розв'язки:
а) $(2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1 - x)y = 0$, $y_1(x) = e^x$;
б) $(e^x + 1)y'' - 2y' - e^x y = 0$, $y_1(x) = e^x - 1$;
в) $y'' - y' \operatorname{tg} x + 2y = 0$, $y_1(x) = \sin x$.

3. Знайти загальні розв'язки наступних рівнянь:

а) $y''' - 4y'' + 4y' - y = 0$, $x^2y'' - 3y = xy'$, $x^2y'' - 2xy' = -4y$;
б) $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$, $x^2y'' + xy' = y$, $3x^2y'' + 4xy' + 15y = 0$;
в) $y''' - y'' - y' + y = 0$, $x^2y'' + 3xy' + 2y = 0$, $x^2y'' + 3y = 3xy'$.

Завдання для домашньої роботи

1. Дослідити на лінійну залежність функції на тій множині, де вони визначені:

1) $x+2, x-2$, (ні). 2) $6x+9, 8x+12$, (так). 3) $\sin x, \cos x$, (ні). 4) $1, x, x^2$, (ні). 5) $4-x, 2x+3, 6x+8$, (так). 6) $x^2+2x, 3x^2-5, x+8$, (ні). 7) $x^2 - x + 3, 2x^2 + x, 2x - 4$, (так). 8) e^x, e^{2x}, e^{3x}, (ні). 9) x, e^x, xe^x, (ні). 10) $1, \sin^2 x, \cos 2x$, (так). 11) $\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x, 2+e^x$, (ні). 12) $\ln(x^2), \ln 3x, 7$, (так).

2. Розв'язати рівняння, якщо відомо їх частинні розв'язки:

1) $x^2(x + 1)y'' - 2y = 0, y_1 = 1 + \frac{1}{x}, (y = C_1(1 + \frac{1}{x}) + C_2(\frac{x}{2} + 1 - \frac{x+1}{x} \ln|x + 1|))$.

2) $y''-2(1+\operatorname{tg}^2 x)y = 0, y_1 = \operatorname{tg} x, (y = C_1\operatorname{tg} x+C_2(1+x\operatorname{tg} x))$.

3) $(e^x+1)y''-2y'-e^x y = 0, y_1 = e^x-1, (y = C_1(e^x-1)+\frac{C_2}{e^x+1})$.

4) $y'' - y'\operatorname{tg} x + 2y = 0, y_1 = \sin x, (y = C_1 \sin x + C_2(2 - \sin x \ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x}))$.

5) $(x^2+1)y'' + 5xy' + 4y = 0, y_1 = x(x^2+1)^{-3/2}, (y = x(x^2 + 1)^{-3/2}(C_1 + C_2(\ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \frac{\sqrt{x^2+1}}{x})))$.

6) $y'' + 4xy' + (4x^2+2)y = 0, y_1 = e^{-x^2}, (y = (C_1 + C_2 x)e^{-x^2})$.

7) $xy''' - y'' - xy' + y = 0, y_1 = x, y_2 = e^x, (y = C_1 x + C_2 e^x + C_3 e^{-x})$.

8) $x^2(2x-1)y''' + (4x-3)xy'' - 2xy' + 2y = 0, y_1 = x, y_2 = \frac{1}{x}, (y = C_1 x + C_2 x^{-1} + C_3(x \ln|x| + 1))$.

3. Розв'язати рівняння:

1) $y'' + 4y = 0, (y = C_1, \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

2) $y''' - 8y = 0, (y = C_1 e^{2x} + e^{-x}(C_2 \cos x\sqrt{3} + C_3 \sin x\sqrt{3}))$.

3) $y^{IV} - y = 0, (y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x)$.

4) $y^{IV} + 4y = 0, (y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-x}(C_3 \cos x + C_4 \sin x))$.

5) $y^{VI} + 64y = 0, (y = e^{x\sqrt{3}}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x + e^{-x\sqrt{3}}(C_5 \cos x + C_6 \sin x))$.

6) $y'' - 2y' + y = 0, (y = e^x(C_1 + C_2 x))$.

7) $4y'' + 4y' + y = 0, (y = e^{-x/2}(C_1 + C_2 x))$.

8) $y^V - 6y^{IV} + 9y''' = 0, (y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + e^{3x}(C_4 + C_5 x))$.

9) $y^V - 10y''' + 9y' = 0, (y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x} + C_4 e^{3x} + C_5 e^{-3x})$.

10) $y^{IV} + 2y'' + y = 0, (y = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x)$.

11) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0, (y = e^x(C_1 + C_2 x + C_3 x^2))$.

12) $y''' - y'' - y' + y = 0, (y = e^x(C_1 + C_2 x) + C_3 e^{-x})$.

13) $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0, (y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x})$.

14) $y^V + 8y''' + 16y' = 0, (y = C_1 + (C_2 + C_3 x)\cos 2x + (C_3 + C_4 x)\sin 2x)$.

15) $y''' - 8y' + 2y = 0, (y = e^x(C_1 + C_2 x) + C_3 e^{-2x})$.

16) $y^{IV} + 4y'' + 3y = 0, (y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos x\sqrt{3} + C_4 \sin x\sqrt{3})$.

Література: [1], с.150–157; [2], с.70–78; [3], с.67–79; [4], с.98–110, 131–133; [5], с.361–366; [6], с.158–188, 203–220; [7], с.38–56;

Тема 8. ЛІНІЙНІ НЕОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ n-го ПОРЯДКУ

Розглянемо лінійне неоднорідне рівнянням n-го порядку

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = f(x), \qquad (1)$$

в якому функції $a_k, k = \overline{1,n}$, f, — неперервні на інтервалі (a, b). Загальний розв'язок рівняння (1) дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння $L(y) = 0$ та якого-небудь частинного розв'язку рівняння (1).

Нехай $y_1(x), ..., y_n(x)$ — фундаментальна система розв'язків рівняння $L(y) = 0$. Згідно з методом варіації довільних сталих, загальний розв'язок рівняння (1) шукаємо у вигляді

$$y = c_1(x)y_1(x) + ... + c_n(x)y_n(x), \qquad (2)$$

де невідомі функції $c_k(x)$, $k = \overline{1,n}$, визначаються із алгебраїчної системи n рівнянь:

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + ... + c_n'(x)y_n(x) = 0, \\ c_1'(x)y_1'(x) + ... + c_n'(x)y_n'(x) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + ... + c_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0, \\ c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases} \qquad (3)$$

Її визначник $W(x) \neq 0$ для всіх $x \in (a, b)$, тому що він є визначником Вронського фундаментальної системи розв'язків рівняння $L(y) = 0$. Система (3) має єдиний розв'язок $c_k'(x) = g_k(x)$, $k = \overline{1,n}$, звідки знаходимо

$$c_k(x) = \int g_k(x)dx = G_k(x) + \tilde{c}_k. \qquad (4)$$

Тут $G_k(x)$ — первісна функції $g_k(x)$, $\tilde{c}_k$ — довільна стала. Підставляючи знайдені значення $c_k(x)$, $k = \overline{1,n}$, у формулу (2), дістанемо загальний розв'язок рівняння (1).

У багатьох задачах практики виникає необхідність побудови загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння з дійсними сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(x), \quad a_k = \mathrm{const}, \quad k = \overline{1, n}, \quad (5)$$

зі спеціальною правою частиною $f(x)$. Зазначимо, що загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння ми будувати вміємо (тема 7).

Якщо $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$, де $\alpha = \mathrm{const}$, а $P_m(x)$ — многочлен степеня m, то існує єдиний частинний розв'язок рівняння (5), що має вигляд

$$y = e^{\alpha x} x^s Q_m(x). \quad (6)$$

Тут $Q_m(x)$ — многочлен степеня m, коефіцієнти якого визначаються шляхом підстановки (6) у (5), s — кратність числа α як кореня характеристичного многочлена $R_n(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n$ ($s = 0$, якщо α не є коренем многочлена $R_n(\lambda)$).

Якщо

$$f(x) = e^{\alpha x}(P^{(1)}_{m_1}(x)\cos\beta x + P^{(2)}_{m_2}(x)\sin\beta x),$$

де $P^{(1)}_{m_1}(x)$ і $P^{(2)}_{m_2}(x)$ — многочлени степенів відповідно m_1 та m_2, то рівняння (5) має частинний розв'язок вигляду

$$y = e^{\alpha x} x^s (Q^{(1)}_m(x)\cos\beta x + Q^{(2)}_m(x)\sin\beta x), \quad (7)$$

де $Q^{(1)}_m(x)$ та $Q^{(2)}_m(x)$ — многочлени степеня $m = \max\{m_1, m_2\}$, s — кратність числа $\alpha + i\beta$ як кореня многочлена $R_n(\lambda)$.

Вказаний метод по суті зводиться до алгебраїчних операцій, тому використовувати його на практиці зручніше, ніж метод варіації сталих, оскільки останній вимагає обчислення інтегралів (формула (4)).

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - \frac{y'}{x} - \frac{8}{x^2} y = 6\sqrt[3]{x}. \quad (8)$$

Розв'язання. Відповідне однорідне рівняння після множення на x^2 стає рівнянням Ейлера: $x^2y'' - xy' - 8y = 0$. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = x^\lambda$:

$$x^2\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} - x\lambda x^{\lambda-1} - 8x^\lambda = 0; \quad \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0.$$

Звідси дістанемо, що $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$. Отже, $y = c_1x^4 + c_2x^{-2}$ — загальний розв'язок однорідного рівняння. Згідно з методом варіації сталих, загальний розв'язок рівняння (8) подамо у вигляді $y = c_1(x)x^4 + c_2(x)x^{-2}$, де функції $c_1(x)$ і $c_2(x)$ визначаються із системи (3):

$$c_1'(x)x^4 + c_2'(x)x^{-2} = 0, \quad c_1'(x)4x^3 + c_2'(x)(-2x^{-3}) = 6\sqrt[3]{x}.$$

Розв'язавши цю систему, одержимо $c_1'(x) = x^{-\frac{8}{3}}$, $c_2'(x) = -x^{\frac{10}{3}}$, звідки

$$c_1(x) = -\frac{3}{5}x^{-\frac{5}{3}} + \tilde{c}_1, \quad c_2(x) = -\frac{3}{13}x^{\frac{13}{3}} + \tilde{c}_2,$$

де $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ — довільні сталі. Тоді формула

$$y = \left(-\frac{3}{5}x^{-\frac{5}{3}} + \tilde{c}_1\right)x^4 + \left(-\frac{3}{13}x^{\frac{13}{3}} + \tilde{c}_2\right)x^{-2} =$$

$$= \tilde{c}_1x^4 + \tilde{c}_2x^{-2} - \frac{54}{65}x^{\frac{7}{3}}$$

визначає загальний розв'язок рівняння (8).

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x}{e^x + 1}. \tag{9}$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку загальний розв'язок рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0; \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2; \quad y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in R.$$

Якщо шукати загальний розв'язок рівняння (9) у вигляді $y = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{2x}$, то для знаходження $c_1(x)$ і $c_2(x)$ одержуємо систему

$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{2x} = 0, \quad c_1'(x)e^x + 2c_2'(x)e^{2x} = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

Звідси знаходимо

$$c_1'(x) = -\frac{1}{e^x + 1}, \quad c_2'(x) = \frac{1}{e^x(e^x + 1)};$$

$$c_1(x) = -\int \frac{dx}{e^x + 1} = \int \frac{d(e^{-x})}{1 + e^{-x}} = \ln(1 + e^{-x}) + \tilde{c}_1,$$

$$c_2(x) = \int \frac{dx}{e^x(e^x + 1)} = -\int \left(1 - \frac{1}{e^{-x} + 1}\right) de^{-x} =$$

$$= -e^{-x} + \ln(1 + e^{-x}) + \tilde{c}_2.$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (9) можна подати у вигляді

$$y = (\ln(1 + e^{-x}) + \tilde{c}_1)e^x + (-e^{-x} + \ln(1 + e^{-x}) + \tilde{c}_2)e^{2x}.$$

Приклад 3. Електричний коливний контур складається з послідовно з'єднаних джерела струму, напруга якого змінюється за законом $E(t) = E_0 \cos(\omega_1 t + \varphi)$, індуктивності L та ємності C ($E_0, \omega_1, \varphi, L, C$ — додатні сталі). Знайти залежність сили струму $I(t)$ в контурі від часу, якщо $\omega_1 \neq \omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ та $I(0) = 0$.

Розв'язання. Згідно із законом Кірхгофа,

$$U_L + U_R + U_C = E,$$

де

$$U_L = L\frac{dI}{dt}, \quad U_R = RI, \quad U_C = \frac{1}{C}\int\limits_0^t I(\tau)d\tau.$$

У нашому випадку $R = 0$, тому маємо інтегральне рівняння

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int\limits_0^t I(\tau)d\tau = E_0\cos(\omega_1 t + \varphi). \tag{10}$$

Продиференціювавши (10) за t, дістанемо лінійне неоднорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{C}I = -E_0\omega_1\sin(\omega_1 t + \varphi). \tag{11}$$

Зазначимо, що за умовою задачі $I(0) = 0$, а із (10) при $t = 0$ одержимо $\left.\dfrac{dI}{dt}\right|_{t=0} = \dfrac{E_0}{L}\sin\varphi$. Таким чином, для рівняння (11) маємо початкові умови

$$I|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0} = \frac{E_0}{L}\sin\varphi. \tag{12}$$

Корені $\lambda = \pm i\omega$ характеристичного рівняння $L\lambda^2 + \dfrac{1}{C} = 0$ чисто уявні, тому $I = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t$ — загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Частинний розв'язок рівняння (11) шукаємо за формулою (7) при $\alpha = 0$, $\beta = \omega_1$, $m = 0$ і $s = 0$ (оскільки $\alpha + i\beta = i\omega_1 \neq i\omega$):

$$\bar{I}(t) = A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t.$$

Тоді, підставивши в (11) значення $\bar{I}(t)$, дістанемо

$$\left(-L\omega_1^2 + \frac{1}{C}\right)(A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t) \equiv$$

$$\equiv -E_0\omega_1(\sin\omega_1 t\cos\varphi + \cos\omega_1 t\sin\varphi), \quad t\in R,$$

звідки, прирівнюючи коефіцієнти при $\cos\omega_1 t$ і $\sin\omega_1 t$, знайдемо значення сталих A і B:

$$A = -\frac{E_0\omega_1}{L(\omega^2-\omega_1^2)}\sin\varphi, \quad B = -\frac{E_0\omega_1}{L(\omega^2-\omega_1^2)}\cos\varphi.$$

Отже,

$$I(t) = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t - \frac{E_0\omega_1}{L(\omega^2-\omega_1^2)}(\sin\varphi\cos\omega_1 t + \cos\varphi\sin\omega_1 t)$$

— загальний розв'язок рівняння (11). Із початкових умов (12) знаходимо

$$c_1 = \frac{E_0\omega_1}{L(\omega^2-\omega_1^2)}\sin\varphi, \quad c_2 = \frac{E_0\omega_1}{L(\omega^2-\omega_1^2)}\cos\varphi,$$

тому шукана залежність струму від часу має вигляд

$$I(t) = \frac{E_0}{L(\omega_1^2-\omega^2)}[\omega_1\sin(\omega_1 t+\varphi) - \omega_1\sin\varphi\cos\omega t - \omega\cos\varphi\sin\omega t].$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$y^{IV} - 8y' = 48xe^{2x}. \tag{13}$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння

$$\lambda^4 - 8\lambda = 0, \quad \lambda(\lambda-2)(\lambda^2+2\lambda+4) = 0$$

має корені $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -1 + i\sqrt{3}$, $\lambda_4 = -1 - i\sqrt{3}$, тому $y = c_1 + c_2e^{2x} + e^{-x}(c_3\cos\sqrt{3}x + c_4\sin\sqrt{3}x)$ — загальний розв'язок однорідного рівняння $y^{IV} - 8y' = 0$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (13) шукаємо у вигляді

$$y = (ax+b)xe^{2x}. \tag{14}$$

Тут ми скористалися формулою (6), враховуючи при цьому, що число $\alpha = 2$ є коренем характеристичного рівняння кратності $s = 1$. Після підстановки (14) у (13) дістанемо

$$48ax + (24b + 48a) \equiv 48x \quad \forall\, x \in R.$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, знаходимо $a = 1, b = -2$. Отже, загальний розв'язок рівняння (13) має вигляд

$$y = c_1 + c_2 e^{2x} + e^{-x}(c_3 \cos\sqrt{3}x + c_4 \sin\sqrt{3}x) + (x^2 - 2x)e^{2x}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Розв'язати наступні задачі Коші:

а) $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x}$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$, $\quad y'' + 9y = 3\sin 3x$, $y(0) = -1, y'(0) = 0$;

б) $y'' - 3y' + 2y = x^2$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$, $\quad y'' + 4y = 2\cos 2x$, $y(0) = 0, y'(0) = -1$;

в) $y'' + y' - 2y = 6xe^x$, $y(0) = 0, y'(0) = -1$, $\quad y'' + 16y = 8\sin 4x$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

2. Розв'язати рівняння методом варіації сталих:

а) $y'' + y = \operatorname{tg} x$; $\quad$ б) $y'' + y = \dfrac{x^2 + 2}{x^4}$;

в) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

3. Для кожного з даних рівнянь написати частинний розв'язок з невизначеними коефіцієнтами (числових значень коефіцієнтів не шукати):

а) $y''' - 2y' + 4y = e^x \cos x + \sin 2x + x^2$,
$y'' - 2y' + 2y = e^x + x\cos x$;

б) $y''' - 4y'' + 3y' = x^3 + e^{3x}x$,
$y'' - 2y' + 5y = xe^x \sin 2x + x^2 e^x$;

в) $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = xe^{2x}\sin 2x + e^{2x}$,
$y'' + 2y' + y = e^{-x}\cos x + xe^{-x}$.

4. Розв'язати приклад 3 про електричний контур при умові $\omega = \omega_1$.

Завдання для домашньої роботи

1. Розв'язати рівняння:

1) $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}, (y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{5}e^{4x})$.

2) $y'' + y = 4xe^x, (y = C_1\cos x + C_2\sin x + (2x - 2)e^x)$.

3) $y'' - y = 2e^x - x^2, (y = C_1e^x + C_2e^{-x} + xe^x + x^2 + 2)$.

4) $y'' + y' - 2y = 3xe^x, (y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + (\frac{x^2}{2} - \frac{x}{5})e^x)$.

5) $y''-3y'+2y = \sin x, (y = C_1e^x+C_2e^{2x}+0.1\sin x+0.3\cos x)$.

6) $y'' + y = 4\sin x, (y = C_1\cos x + C_2\sin x - 2x\cos x)$.

7) $y''-5y'+4y = 4x^2e^{2x}, (y = C_1e^x+C_2e^{4x}-(2x^2-2x+3)e^{2x})$.

8) $y'' - 3y' + 2y = x\cos x, (y = C_1e^x + C_2e^{2x} + (0.1x - 0.12)\cos x - (0.3x + 0.34)\sin x)$.

9) $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}, (y = C_1e^x + C_2e^{-4x} - \frac{x}{5}e^{-4x} - (\frac{x}{6} + \frac{1}{36})e^{-x})$.

10) $y''-4y'+8y = e^{2x}+\sin 2x, (y = e^{2x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+ 0.25e^{2x} + 0.1\cos 2x + 0.05\sin 2x)$.

2. Розв'язати рівняння методом варіації сталих:

1) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}, (y = e^x(x\ln|x| + C_1x + C_2))$.

2) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}, (y = (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^x + 1) + C_1e^{-x} + C_2e^{-2x})$.

3) $y'' + 4y = 2\mathrm{tg}\, x, (y = \sin 2x\ln|\cos x| - 4\cos 2x + C_1\sin 2x + C_2\cos 2x)$.

4) $y''-2y'+y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}, (y = e^{-x}(\frac{4}{5}(x+1)^{5/2}+C_1+C_2x))$.

5) $x^3(y'' - y) = x^2 - 2, (y = -\frac{1}{x} + C_1e^x + C_2e^{-x})$.

3. Розв'язати задачу Коші:

1) $y'' - 2y' + y = 0, y(2) = 1, y'(2) = -2, (y = (7 - 3x)e^{x-2})$.

2) $y'' + y = 4e^x, y(0) = 4, y'(0) = -3, (y = 2\cos x - 5\sin x + 2e^x)$.

3) $y'' - 2y' = 2e^x, y(1) = 1, y'(1) = 0, (y = e^{2x-1} - 2e^x + e - 1)$.

4) $y'' - y = 2x, y(0) = 0, y'(0) = 0, (y = e^x - e^{-x} - 2x)$.

4. Розв'язати рівняння Ейлера:

1) $x^3y''' + xy' - y = 0, (y = x(C_1 + C_2 \ln|x| + C_3 \ln^2|x|))$.

2) $x^2y''' = 2y', (y = C_1 + C_2 \ln|x| + C_3x^3)$.

3) $x^2y'' - xy' + y = 8x^3, (y = x(C_1 + C_2 \ln|x| + 2x^3))$.

4) $x^2y'' + xy' + 4y = 10x, (y = C_1 \cos(2\ln x) + C_2 \sin(2\ln|x|) + 2x)$.

5) $x^2y'' - 2xy = 6\ln x, (y = C_1x^2 + \frac{1}{x}(C_2 - \frac{2}{3}\ln x - \ln^2 x))$.

6) $x^2y'' - 3xy' + 5y = 3x^2, (y = x^2(C_1 \cos\ln|x| + C_2 \sin\ln|x| + 3))$.

7) $x^2y'' - 6y = 5x^3 + 8x^2, (y = C_1x^3 + C_2x^{-2} + x^3\ln|x| - 2x^2)$.

8) $x^2y'' - 2y = \sin\ln x, (y = C_1x^2 + C_2x^{-1} + 0.1\cos\ln x - 0.3\sin\ln x)$.

9) $(x-2)^2y'' - 3(x-2)y' + 4y = x, (y = (x-2)^2(C_1 + C_2\ln|x-2|) + x - 1.5)$.

10) $(2x+3)^3y''' + 3(2x+3)y' - 6y = 0, (y = C_1(x+\frac{3}{2}) + C_2|x+\frac{3}{2}|^{3/2} + C_3|x+\frac{3}{2}|^{1/2})$.

Література: [1], с. 185–207; [2], с. 78–86; [3], с. 79–87; [4], с. 110–120; [5], с. 380–388; [6], с. 189–203, 221–236; [7], с. 43–45.

Тема 9. КРАЙОВІ ЗАДАЧІ

Нехай задано лінійне рівняння другого порядку

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \quad x \in [a, b], \tag{1}$$

з неперервними на відрізку $[a, b]$ функціями a_0, a_1, a_2 і f $(a_0(x) \neq 0)$ та крайові умови

$$\alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a) = 0, \quad \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0. \tag{2}$$

Тут $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ — сталі, причому $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$, $\alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0$.

Задача (1), (2) називається крайовою задачею. Для розв'язання крайової задачі потрібно знайти загальний розв'язок рівняння (1) і підставити його в крайові умови (2) для визначення довільних сталих. Зазначимо, що, на відміну від задачі Коші, крайова задача не завжди має розв'язок, а якщо і має — то не обов'язково єдиний.

Інший підхід до розв'язання задачі (1), (2) полягає в побудові й використанні функції Гріна. Функцією Гріна крайової задачі (1), (2) називають функцію $G(x, s)$, яка визначена при $x \in [a, b], s \in [a, b]$ і володіє такими властивостями:

1) при $x \in (a, s)$ і $x \in (s, b)$ функція $G(x, s)$ є розв'язком однорідного рівняння

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0; \tag{3}$$

2) при $x = a$ і $x = b$ вона задовольняє крайові умови (2);

3) $G(x, s)$ неперервна за $x \in [a, b]$, а її перша похідна по x має в точці $x = s$ розрив першого роду з величиною стрибка $\dfrac{1}{a_0(s)}$, тобто

$$G(s+0, s) = G(s-0, s), \quad G'_x(s+0, s) - G'_x(s-0, s) = \frac{1}{a_0(s)}. \tag{4}$$

Для побудови функції Гріна потрібно знайти розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ однорідного рівняння (3) ($y_k(x) \not\equiv 0, k = 1, 2$), які задовольняють відповідно крайові умови на лівому і правому кінцях відрізка $[a, b]$. Якщо однорідна крайова задача (2), (3) має тільки тривіальний розв'язок $y(x) \equiv 0$, то функція Гріна існує та її можна шукати у вигляді

$$G(x,s) = \begin{cases} y_1(x)p(s), & a \le x \le s, \\ y_2(x)q(s), & s < x \le b. \end{cases} \tag{5}$$

Невідомі функції $p(s)$ і $q(s)$ вибирають так, щоб виконувались умови (4), тобто

$$y_2(s)q(s) = y_1(s)p(s), \quad y_2'(s)q(s) - y_1'(s)p(s) = \frac{1}{a_0(s)}. \tag{6}$$

Система (6) — лінійна алгебраїчна система відносно $p(s), q(s)$. Її визначник відмінний від нуля внаслідок лінійної незалежності функцій $y_1(x)$ і $y_2(x)$ на відрізку $[a, b]$. Тому $p(s)$ і $q(s)$ визначаються однозначно.

Справджується таке твердження: якщо однорідна крайова задача (2), (3) має лише тривіальний розв'язок, то задача (1), (2) має єдиний розв'язок, і цей розв'язок можна зобразити у вигляді

$$y(x) = \int_a^b G(x,s)f(s)ds. \tag{7}$$

Тісний зв'язок з крайовими задачами мають задачі на власні значення та власні функції. Власним значенням задачі

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = \lambda y,$$
$$\alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a) = 0, \quad \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0 \tag{8}$$

називається таке число λ, при якому задача (8) має нетривіальний розв'язок $y(x) \not\equiv 0$. Цей розв'язок називають власною функцією задачі (8).

Приклад 1. Розв'язати крайову задачу

$$y'' - y' = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(1) - y(1) = 2.$$

Розв'язання. Відповідне диференціальному рівнянню $y'' - y' = 0$ характеристичне рівняння $\lambda^2 - \lambda = 0$ має корені $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, тому загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд $y = C_1 + C_2 e^x$. Задовольнивши крайові умови, дістанемо

$$C_1 + C_2 = -1, \quad C_2 e - (C_1 + C_2 e) = 2,$$

тобто $C_1 = -2, C_2 = 1$. Отже, $y = -2 + e^x$ — розв'язок заданої крайової задачі.

Приклад 2. Побудувати функцію Гріна крайової задачі

$$x^2 y'' - 2y = f(x), \quad y(1) = 0, \quad y(2) + 2y'(2) = 0. \tag{9}$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку загальний розв'язок рівняння Ейлера

$$x^2 y'' - 2y = 0. \tag{10}$$

Якщо шукати його розв'язок у вигляді $y = x^\lambda$, то одержимо характеристичне рівняння $\lambda(\lambda - 1) - 2 = 0$, коренями якого є $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$. Тому $y(x) = C_1 x^{-1} + C_2 x^2$ — загальний розв'язок рівняння (10). Задовольнивши крайову умову $y(1) = 0$, знаходимо $C_1 = 1$, $C_2 = -1$, тобто знаходимо частинний розв'язок $y_1(x) = x^{-1} - x^2$ рівняння (10). Аналогічно будуємо розв'язок $y_2(x) = x^{-1}$ рівняння (10), який справджує крайову умову $y(2) + 2y'(2) = 0$. Згідно з (5), функція Гріна має вигляд

$$G(x,s) = \begin{cases} (x^{-1} - x^2)p(s), & 1 \le x \le s, \\ x^{-1} q(s), & s < x \le 2. \end{cases}$$

Невідомі функції $p(s)$ і $q(s)$ визначаємо із системи рівнянь (6):

$$s^{-1} q(s) = (s^{-1} - s^2)p(s), \quad -s^{-2} q(s) - (-s^{-2} - 2s)p(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Її єдиним розв'язком є $p(s) = \dfrac{1}{3s^3}$, $q(s) = \dfrac{1-s^3}{3s_0^3}$. Таким чином, функція Гріна крайової задачі визначається рівністю

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{x^{-1} - x^2}{3s^3}, & 1 \le x \le s, \\ x^{-1}\dfrac{1-s^3}{3s^3}, & s < x \le 2, \end{cases}$$

а інтегральне зображення розв'язку задачі (9) має вигляд

$$y(x) = \int\limits_1^2 G(x,s) f(s) ds.$$

Приклад 3. Знайти власні значення і власні функції задачі

$$y'' = \lambda y, \quad y'(0) = 0, \quad y'(l) = 0. \tag{11}$$

Розв'язання. При $\lambda > 0$ загальний розв'язок рівняння $y'' = \lambda y$ має вигляд

$$y(x) = C_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{\lambda}x}.$$

Задовольнивши крайові умови, одержимо систему

$$-C_1\sqrt{\lambda} + C_2\sqrt{\lambda} = 0, \quad -C_1\sqrt{\lambda}e^{-l\sqrt{\lambda}} + C_2\sqrt{\lambda}e^{l\sqrt{\lambda}} = 0,$$

яка має єдиний розв'язок $C_1 = C_2 = 0$. Крайова задача в цьому випадку має лише тривіальний розв'язок $y(x) \equiv 0$, тому власних значень $\lambda > 0$ не існує.

Якщо $\lambda = 0$, то $y(x) = C_1 + C_2 x$ — загальний розв'язок рівняння $y'' = 0$. З крайових умов знаходимо $C_2 = 0$, C_1 — довільне. Припустивши, що $C_1 = 1$ одержимо власну функцію $y_0(x) = 1$, яка відповідає власному значенню $\lambda = 0$.

Нехай тепер $\lambda = -\omega^2 < 0$. Для функції $y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$, яка є загальним розв'язком рівняння $y'' = -\omega^2 y$, крайові умови можна записати так:

$$C_2 \omega = 0, \quad -C_1 \omega \sin \omega l + C_2 \omega \cos \omega l = 0.$$

Аналіз останньої системи показує, що вона має ненульовий розв'язок тільки в тому випадку, коли $\sin \omega l = 0$, тобто $\omega = \dfrac{\pi k}{l}$, $k = 1, 2, \dots$. Таким чином, $\lambda_k = -\dfrac{\pi^2 k^2}{l^2}$ і $y_k(x) = \cos \dfrac{\pi k}{l} x$, $k = 1, 2, \dots$ — відповідно власні значення і власні функції задачі (11).

Об'єднуючи випадки $\lambda = 0$ і $\lambda < 0$, можна стверджувати, що задача (11) має власні значення $\lambda_k = -\dfrac{\pi^2 k^2}{l^2}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ і відповідні їм власні функції $y_k(x) = \cos \dfrac{k \pi x}{l}$.

Завдання для самостійної роботи

1. Розв'язати крайові задачі:

а) $y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(a) = y_0;$
   $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y(1) = 3, \quad y(3) = 0;$

б) $y'' + y = 2x - \pi, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0;$
   $x^2 y'' + 5xy' + 3y = 0, \quad y'(1) = 3, \quad y(2) = 1;$

в) $y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0;$
   $x^2 y'' - 6y = 0, \quad y'(1) = 4, \quad y'(2) = 2.$

2. Побудувати функцію Гріна кожної з крайових задач:

а) $y'' = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0;$
   $xy'' - y' = f(x), \quad y'(1) = 0, \quad y(2) = 0;$

б) $y'' + y' = f(x), \quad y'(0) = 0, \quad y'(2) + y(2) = 0;$
   $x^2 y'' + 2xy' = f(x), \quad y(1) = 0, \quad y'(3) = 0;$

в) $y'' + y = f(x), \quad y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 0;$
   $x^2 y'' - 3xy' + 5y = f(x), \quad y'(1) = 0, \quad y(2) - y'(2) = 0.$

3. Знайти власні значення і власні функції задачі:

а) $y'' = \lambda y, \quad y(0) = 0, \quad y(l) = 0;$
б) $y'' = \lambda y, \quad y(0) = 0, \quad y'(l) = 0;$
в) $y'' = \lambda y, \quad y'(0) = 0, \quad y(l) = 0.$

Завдання для домашньої роботи

1. Розв'язати крайові задачі:
1) $y'' - y = 2x; y(0) = 0, y(1) = -1, (y = (\operatorname{sh} x/\operatorname{sh} 1) - 2x).$
2) $y'' + y' = 1, y'(0) = 0, y(1) = 1, (y = x + e^{-x} - e^{-1}).$
3) $y'' - y' = 0, y(0) = -1, y'(1) - y(1) = 2, (y = e^x - 2).$
4) $y'' + y = 1, y(0) = 0, y(\pi) = 0,$ (немає розв'язку).
5) $y'' - y' - 2y = 0, y'(0) = 2, y(+\infty) = 0, (y = -2e^{-x}).$
6) $y'' - y = 1, y(0) = 0, y(x)$ — обмежена при $x \to +\infty$, $(y = e^{-x} - 1).$
7) $y'' - 2iy = 0, y(0) = -1, y(+\infty) = 0, (y = -e^{(-1-i)x}).$
8) $x^2y'' - 6y = 0, y(0)$ — обмежена, $y(1) = 2, (y = 2x^3).$
2. Побудувати функцію Гріна кожної крайової задачі:
1) $y'' + y = f(x), y'(0) = 0, y(\pi) = 0, (G = \sin x \cos x (0 \le x \le s), G = \cos x \sin x (s \le x \le \pi)).$
2) $y'' + y' = f(x), y(0) = 0, y'(1) = 0, (G = e^s(e^{-x} - 1)(0 \le x \le s), G = 1 - e^s(s \le x \le 1)).$
3) $y'' - y = f(x), y'(0) = 0, y'(2) + y(2) = 0, (G = e^{-s}\operatorname{ch} x(0 \le x \le s), G = e^{-x}\operatorname{ch} s(s \le x \le 2)).$
4*) $y'' + y = f(x), y(0) = y(\pi), y'(0) = y'(\pi), (G = \frac{1}{2}\sin|x - s|).$
5) $x^2y'' - 2y = f(x), y(1) = 0, y(2) + 2y'(2) = 0, (G = \frac{1-x^3}{3s^3x}(1 \le x \le s), G = \frac{1-s^3}{3s^3x}(s \le x \le 2)).$
6) $y'' = f(x), y(0) = 0, y(x)$ — обмежена при $x \to +\infty$, $(G = -x(0 \le x \le s), G = -s(s \le x \le \infty)).$
7) $y'' + y' = f(x), y'(0) = 0, y(+\infty) = 0(G = -1(0 \le x \le s), G = -e^{s-x}(s \le x < \infty)).$
8) $xy'' + y' = f(x), y(1) = 0, y(x)$ — обмежена при $x \to +\infty$, $(G = -\ln x(1 \le x \le \delta), G = -\ln s(s \le x < \infty)).$

Література: [1], с. 270–285; [3], с. 105–127; [5], с. 232–250; [6], с. 269–280; [7], с. 56–58.

Тема 10. МЕТОД ЕЙЛЕРА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛІНІЙНИХ ОДНОРІДНИХ СИСТЕМ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Система n рівнянь

$$\frac{dx_k}{dt} = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n, \quad k = \overline{1,n}, \tag{1}$$

в якій a_{kj} — дійсні сталі, x_k — невідомі функції змінної $t \in \mathbb{R}$, називається **лінійною однорідною системою звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами**. Якщо через x позначити n-вимірний вектор з координатами $x_1, ..., x_n$, а через $A = (a_{kj})_{k,j=1}^n$ — $n \times n$-матрицю, то (1) можна подати в матричному вигляді

$$\frac{dx}{dt} = Ax. \tag{2}$$

Один із способів розв'язання таких систем полягає у зведенні системи до одного рівняння n-го порядку або до декількох рівнянь, сума порядків яких дорівнює n. Це зведення здійснюється шляхом послідовного диференціювання одного з рівнянь системи і виключення всіх невідомих функцій, крім однієї. Проінтегрувавши одержане лінійне рівняння, знаходимо загальний розв'язок вихідної системи рівнянь.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок системи

$$\frac{dx_1}{dt} = ax_1 + x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + ax_2, \quad a = \text{const}.$$

Розв'язання. Підставимо в перше рівняння значення $x_1 = ax_2 - \dfrac{dx_2}{dt}$, одержане з другого рівняння системи, внаслідок чого отримаємо рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} - 2a\frac{dx_2}{dt} + (a^2+1)x_2 = 0. \tag{3}$$

Корені $\lambda_{1,2} = a \pm i$ характеристичного рівняння $\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + 1 = 0$ комплексно спряжені, тому загальний розв'язок (3) визначається формулою

$$x_2 = C_1 e^{at} \sin t + C_2 e^{at} \cos t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тут C_1 і C_2 — довільні сталі. Тоді

$$x_1 = a x_2 - \frac{dx_2}{dt} = -C_1 e^{at} \cos t + C_2 e^{at} \sin t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Отже, рівності

$$x_1 = -C_1 e^{at} \cos t + C_2 e^{at} \sin t,$$

$$x_2 = C_1 e^{at} \sin t + C_2 e^{at} \cos t, \quad t \in \mathbb{R}$$

дають загальний розв'язок вихідної системи.

Запропонованим вище методом зручно користуватися, якщо в системі (1) $n = 2$. При $n \geq 3$ в загальному випадку цей метод веде до значних технічних труднощів. Систему рівнянь (1) можна розв'язувати також **методом Ейлера**. Його суть полягає в тому, що ненульовий розв'язок системи (1) шукають у вигляді

$$x = be^{\lambda t}, \tag{4}$$

де λ і $b = (b_1, ..., b_n) \neq 0$ — невідомі сталі. Для їх знаходження підставимо (4) в (1) чи (2). Аналіз одержаної системи показує, що функція (4) є ненульовим розв'язком системи (2) тоді і тільки тоді, коли λ — власне значення матриці A, тобто корінь алгебраїчного рівняння n-го степеня

$$\det(A - \lambda E_n) = O, \tag{5}$$

E_n — одинична матриця, $b = (b_1, ..., b_n)$ — власний вектор матриці A, який відповідає власному значенню λ. Рівняння (5) називається **характеристичним рівнянням**.

Якщо корені $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ характеристичного рівняння дійсні і різні, а $a^{(1)}, a^{(2)}, ..., a^{(n)}$ відповідні їм власні вектори матриці A, то загальний розв'язок системи (2) має вигляд:

$$x = C_1 a^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 a^{(2)} e^{\lambda_2 t} + ... + C_n a^{(n)} e^{\lambda_n t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

де $C_1, C_2, ..., C_n$ — довільні сталі. Якщо ж серед цих коренів характеристичного рівняння є пари комплексно спряжених $\lambda = \alpha \pm i\beta$ $(i^2 = -1)$, то цим способом можна знайти відповідні їм комплексні розв'язки, що мають вигляд $u(t) + iv(t)$. Оскільки коефіцієнти a_{kj} системи (1) дійсні, то розв'язками цієї системи є дійсна $u(t)$ та уявна $v(t)$ частини комплексного розв'язку. Так можна побудувати дійсні розв'язки системи, які відповідають комплексним λ.

Якщо характеристичне рівняння має k-кратний корінь λ $(k \geq 2)$, то відповідний даному λ розв'язок системи (1) потрібно шукати у вигляді

$$x = P(t) e^{\lambda t}, \tag{6}$$

де $P(t) = \left(P^{(1)}(t), ..., P^{(n)}(t)\right)$ — векторний многочлен степеня не вище $(k-1)$ з невідомими коефіцієнтами. Для їх знаходження потрібно підставити (6) в (1), скоротити одержану рівність на $e^{\lambda t}$ і прирівняти коефіцієнти при однакових степенях t в лівій і правій частинах кожної рівності. Більш точно, степінь многочлена $P(t)$ дорівнює $k - l$, де l — число лінійно незалежних власних векторів матриці A, що відповідають власному значенню λ.

Приклад 2. Розв'язати систему

$$\frac{dx_1}{dt} = 4x_1 + x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = 3x_1 + 2x_2,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3. \tag{7}$$

Розв'язання. Оскільки

$$\det(A-\lambda E_3) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda^2 - 6\lambda + 5)(4-\lambda)$$

то з характеристичного рівняння знаходимо, що $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 5$. Згідно з методом Ейлера розв'язок системи (7), що відповідає $\lambda = 1$, шукаємо у вигляді

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} e^t.$$

Після його підстановки в (7) маємо алгебраїчну систему

$$3b_1 + b_2 = 0, \quad 3b_1 + b_2 = 0, \quad 2b_1 + 3b_2 + 3b_3 = 0,$$

одним із ненульових розв'язків якої є $b_1 = 1$, $b_2 = -3$, $b_3 = \dfrac{7}{3}$. Отже,

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ \dfrac{7}{3} \end{pmatrix} e^t$$

частинний розв'язок системи (7). Нехай тепер $\lambda = 4$. Після підстановки

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} e^{4t}$$

в (7) одержимо систему

$$b_2 = 0, \quad 3b_1 - 2b_2 = 0, \quad 2b_1 + 3b_2 = 0,$$

яка має нетривіальний розв'язок $b_1 = b_2 = 0$, $b_3 = 1$. Цей розв'язок породжує розв'язок

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$$

системи (7). Якщо $\lambda = 5$, то із системи

$$-b_1 + b_2 = 0, \quad 3b_1 - 3b_2 = 0, \quad 2b_1 + 3b_2 - b_3 = 0$$

знаходимо $b_1 = b_2 = 1$, $b_3 = 5$, тому

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{5t}$$

ще один розв'язок системи (7). Таким чином, загальний розв'язок системи (7) має вигляд

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{5t}$$

або

$$x_1 = C_1 e^t + C_3 e^{5t}, \quad x_2 = -3C_1 e^t + C_3 e^{5t},$$
$$x_3 = \frac{7}{3} C_1 e^t + C_2 e^{4t} + 5C_3 e^{5t},$$

де C_1, C_2, C_3 — довільні сталі.

Приклад 3. Розв'язати задачу Коші

$$\frac{dx_1}{dt} = 3x_1 + 2x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2,$$

$$x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi}.$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку загальний розв'язок системи. Корені характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

комплексно спряжені: $\lambda_1 = 2 - i$, $\lambda_2 = 2 + i$. Знайдемо комплексний розв'язок $x_1 = a_1 e^{\lambda_1 t}$, $x_2 = a_2 e^{\lambda_1 t}$ даної системи, що відповідає кореню λ_1. Зазначимо, що a_1 і a_2 — комплексні числа, які є розв'язком системи

$$(1+i)a_1 + 2a_2 = 0, \quad -a_1 + (-1+i)a_2 = 0.$$

Одним із її ненульових розв'язків є $a_1 = 1 - i$, $a_2 = -1$. Тому $x_1 = (1-i)e^{(2-i)t}$, $x_2 = -e^{(2-i)t}$ — комплексний розв'язок вихідної системи диференціальних рівнянь. Використовуючи формулу Ейлера $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, де x, y — дійсні числа, запишемо знайдений розв'язок у вигляді

$$x_1 = e^{2t}(\cos t - \sin t) + ie^{2t}(-\cos t - \sin t),$$

$$x_2 = e^{2t}(-\cos t) + ie^{2t} \sin t.$$

Оскільки дійсна і уявна частини знайденого розв'язку також є розв'язками заданої системи, то маємо два дійсні розв'язки

$$x_{11} = e^{2t}(\cos t - \sin t) \qquad x_{12} = -e^{2t}(\cos t + \sin t),$$

$$x_{21} = -e^{2t} \cos t \qquad x_{22} = e^{2t} \sin t.$$

Легко переконатися, що знайдені розв'язки лінійно незалежні для всіх $t \in \mathbb{R}$. Відзначимо, що корінь $\lambda_2 = 2 + i$ характеристичного рівняння не породжує інших розв'язків системи, які були б лінійно незалежними із двома вищезнайденими [1].

Тому загальний розв'язок системи визначається співвідношеннями

$$x_1(t) = C_1 e^{2t}(\cos t - \sin t) + C_2 e^{2t}(-\cos t - \sin t),$$

$$x_2 = C_1 e^{2t}(-\cos t) + C_2 e^{2t} \sin t,$$

в яких C_1, C_2 — довільні сталі, $t \in \mathbb{R}$. Задовольнивши початкову умову $x_1\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, $x_2\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e^{\pi}$, одержимо $C_1 = -1$, $C_2 = 1$, Отже,

$$x_1(t) = -e^{2t}(\cos t - \sin t) + e^{2t}(-\cos t - \sin t),$$

$$x_2 = -e^{2t}(-\cos t) + e^{2t} \sin t$$

є розв'язком задачі Коші.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок системи

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + x_3, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 - x_3,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -x_2 + 2x_3. \tag{8}$$

Розв'язання. Якщо розв'язок системи шукати у вигляді $x_1 = a_1 e^{\lambda t}$, $x_2 = a_2 e^{\lambda t}$, $x_3 = a_3 e^{\lambda t}$, то a_1, a_2, a_3 і λ задовольняють рівняння

$$(1-\lambda)a_1 - a_2 + a_3 = 0, \quad a_1 + (1-\lambda)a_2 - a_3 = 0,$$

$$-a_2 + (2-\lambda)a_3 = 0. \tag{9}$$

Ці рівняння мають нетривіальний розв'язок за умови

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

тобто при $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Із (9) знаходимо, що кореню $\lambda = 2$ відповідає система

$$-a_1 - a_2 + a_3 = 0, \quad a_1 - a_2 - a_3 = 0, \quad -a_2 = 0,$$

ненульовим розв'язком якої є, наприклад, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$. Тому $x_1 = e^{2t}$, $x_2 = 0$, $x_3 = e^{2t}$ — частинний розв'язок системи (8).

Розглянемо тепер двократний корінь $\lambda = 1$ характеристичного рівняння. Згідно з методом Ейлера йому відповідає розв'язок системи (8) вигляду

$$x_1 = (a_1 + b_1 t)e^t, \quad x_2 = (a_2 + b_2 t)e^t, \quad x_3 = (a_3 + b_3 t)e^t. \quad (10)$$

Підставивши (10) у (8), одержуємо тотожності

$$(-a_2 + a_3 - b_1) + (-b_2 + b_3)t \equiv 0,$$

$$(a_1 - a_3 - b_2) + (b_1 - b_3)t \equiv 0,$$

$$(-a_2 + a_3 - b_3) + (-b_2 + b_3)t \equiv 0$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$. Звідси випливає, що

$$-b_2 - b_3 = 0, \quad b_1 - b_3 = 0, \quad -b_2 + b_3 = 0,$$

$$-a_2 + a_3 - b_1 = 0, \quad a_1 - a_3 - b_2 = 0, \quad -a_2 + a_3 - b_3 = 0$$

або

$$b_1 = b_2 = b_3 = \alpha, \quad a_2 = a_3 - \alpha, \quad a_1 = a_3 + \alpha,$$

де α і a_3 — довільні. Припустимо спочатку, що $\alpha = 1$, $a_3 = 0$, а потім $\alpha = 0$, $a_3 = 1$. Тоді одержимо два розв'язки алгебраїчної системи

$$b_1 = b_2 = b_3 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = 0$$

і

$$b_1 = b_2 = b_3 = 0, \quad a_1 = a_2 = a_3 = 1,$$

які, згідно з (10), породжують два лінійно незалежні розв'язки

$$x_1 = e^t(1+t), \quad x_2 = e^t(-1+t), \quad x_3 = e^t t$$

і

$$x_1 = e^t, \quad x_2 = e^t, \quad x_3 = e^t$$

системи (8). Таким чином, загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь (8) має вигляд

$$x_1 = C_1 e^{2t} + C_2 e^t (t+1) + C_3 e^t,$$

$$x_2 = C_1 \cdot 0 + C_2 e^t (t-1) + C_3 e^t,$$
$$x_3 = C_1 e^{2t} + C_2 e^t \cdot t + C_3 e^t.$$

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати системи рівнянь:

1. а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x, \\ \dfrac{dz}{dt} = y; \end{cases}$

   в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2y + 3z - x; \end{cases}$

2. а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y + z; \end{cases}$

$$\text{в)}\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 2z - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2z, \\ \\ \dfrac{dz}{dt} = y - 2x - z; \end{cases}$$

3. $$\text{а)}\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y; \end{cases} \qquad \text{б)}\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y + 2z; \end{cases}$$

$$\text{в)}\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y + 2z. \end{cases}$$

Завдання для домашньої роботи

I. Розв'язати наступні системи рівнянь (в деяких задачах вказано корені характеристичного рівняння):

1. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = y - 4x. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} + x - 8y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + y. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} \dot{x} + x + 5y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4y - x. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x, \\ \dot{y} = y - 2x. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} \dot{x} - 5x - 3y = 0, \\ \dot{y} + 3x + y = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = x + z - y, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2x - y \end{cases}$
$(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1)$.

12. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z, \\ \dot{y} = y - x + z, \\ \dot{z} = x - z \end{cases}$
$(\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1)$.

13. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases}$
$(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3)$.

14. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z, \\ \dot{y} = x + y + z, \\ \dot{z} = 4x - y + 4z \end{cases}$
$(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5)$.

15. $\begin{cases} \dot{x} = 4y - 2z - 3x, \\ \dot{y} = z + x, \\ \dot{z} = 6x - 6y + 5z \end{cases}$
$(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1)$.

16. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = 3x + z \end{cases}$
$(\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i)$.

17. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = 2y + 3z - x \end{cases}$
$(\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = 3 \pm i)$.

18. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2z - y, \\ \dot{y} = x + 2z, \\ \dot{z} = y - 2x - z \end{cases}$
$(\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \pm i)$.

19. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases}$
$(\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 3)$.

20. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z, \\ \dot{z} = 2z - x - y \end{cases}$
$(\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 1)$.

21. $\begin{cases} \dot{x} = y - 2x - 2z, \\ \dot{y} = x - 2y + 2z, \\ \dot{z} = 3x - 3y + 5z \end{cases}$
$(\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = -1)$.

22. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y - z, \\ \dot{y} = 3x - 4y - 3z, \\ \dot{z} = 2x - 4y \end{cases}$
$(\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -5)$.

23. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2z - y \end{cases}$
$(\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2)$.

24. $\begin{cases} \dot{x} = y - 2z - x, \\ \dot{y} = 4x + y, \\ \dot{z} = 2x + y - z \end{cases}$
$(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = -1)$.

25. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 2y + 4z, \\ \dot{z} = x - z \end{cases}$
$(\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 3)$.

26. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 2x - y - 2z, \\ \dot{z} = 2z - x + y \end{cases}$
$(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1)$.

27. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y, \\ \dot{y} = 3x + y - z, \\ \dot{z} = x + z \end{cases}$
$(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2)$.

Відповіді:

1. $x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}$, $y = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}$. 2. $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}$, $y = 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t}$. 3. $x = 2C_1 e^{3t} - 4C_2 e^{-3t}$, $y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}$. 4. $x = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$, $y = e^{2t}[(C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t]$. 5. $x = e^t(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t)$, $y = e^t(C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t)$. 6. $x = (2C_2 - C_1)\cos 2t - (2C_1 + C_2)\sin 2t$, $y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$. 7. $x = (C_1 + C_2 t)e^{3t}$, $y = (C_1 + C_2 + C_2 t)e^{3t}$. 8. $x = (C_1 + C_2 t)e^t$, $y = (2C_1 - C_2 + 2C_2 t)e^t$. 9. $x = (C_1 + 2C_2 t)e^{-t}$, $y = (C_1 + C_2 + 2C_2 t)e^{-t}$. 10. $x = (C_1 + 3C_2 t)e^{2t}$, $y = (C_2 - C_1 - 3C_2 t)e^{2t}$. 11. $x = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t}$, $y = C_1 e^t - 3C_3 e^{-t}$, $z = C_1 e^t + C_2 e^{2t} - 5C_3 e^{-t}$. 12. $x = C_1 + 3C_2 e^{2t}$, $y = -2C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t}$, $z = C_1 + C_2 e^{2t} - 2C_3 e^{-t}$. 13. $x = C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}$, $y = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$, $z = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}$. 14. $x = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{5t}$, $y = C_1 e^t - 2C_2 e^{2t} + C_3 e^{5t}$, $z = -C_1 e^t - 3C_2 e^{2t} + 3C_3 e^{5t}$. 15. $x = C_1 e^t + C_3 e^{-t}$, $y = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$, $z = 2C_2 e^{2t} - C_3 e^{-t}$. 16. $x = e^t(2C_2 \sin 2t + 2C_3 \cos 2t)$, $y = e^t(C_1 - C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t)$, $z = e^t(-C_1 - 3C_2 \cos 2t + 3C_3 \sin 2t)$. 17. $x = C_1 e^{2t} + e^{3t}(C_2 \cos t + C_3 \sin t)$, $y = e^{3t}[(C_2 + C_3)\cos t + (C_3 - C_2)\sin t]$, $z = C_1 e^{2t} + e^{3t}[(2C_2 - C_3)\cos t + (2C_3 + C_2)\sin t]$. 18. $x = C_2 \cos t + (C_2 + 2C_3)\sin t$, $y = 2C_1 e^t + C_2 \cos t + (C_2 + 2C_3)\sin t$, $z = C_1 e^t + C_3 \cos t - (C_2 + C_3)\sin t$. 19. $x = C_1 e^{2t} + (C_2 + C_3)e^{3t}$, $y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$, $z = C_1 e^{2t} + C_3 e^{3t}$. 20. $x = C_1 + C_2 e^t$, $y = 3C_1 + C_3 e^t$, $z = -C_1 + (C_2 - C_3)e^t$. 21. $x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}$, $y = -C_1 e^{3t} + (C_2 + 2C_3)e^{-t}$, $z = -3C_1 e^{3t} + C_3 e^{-t}$. 22. $x = C_1 e^{2t} +$

C_3e^{-5t}, $y = C_2e^{2t} + 3C_3e^{-5t}$, $z = (C_1 - 2C_2)e^{2t} + 2C_3e^{-5t}$. 23. $x = (C_1 + C_2t)e^t + C_3e^{2t}$, $y = (C_1 - 2C_2 + C_2t)e^t$, $z = (C_1 - C_2 + C_2t)e^t + C_3e^{2t}$. 24. $x = (C_2 + C_3t)e^{-t}$, $y = 2C_1e^t - (2C_2 + C_3 + 2C_3t)e^{-t}$, $z = C_1e^t - (C_2 + C_3 + C_3t)e^{-t}$. 25. $x = C_1 + C_2t + 4C_3e^{3t}$, $y = C_2 - 2C_1 - 2C_2t + 4C_3e^{3t}$, $z = C_1 - C_2 + C_2t + C_3e^{3t}$. 26. $x = (C_1 + C_3t)e^t$, $y = (C_2 + 2C_3t)e^t$, $z = (C_1 - C_2 - C_3 - C_3t)e^t$. 27. $x = (C_1 + C_2t + C_3t^2)e^{2t}$, $y = [2C_1 - C_2 + (2C_2 - 2C_3)t + 2C_3t^2]e^{2t}$, $z = [C_1 - C_2 + 2C_3 + (C_2 - 2C_3)t + C_3t^2]e^{2t}$.

II. Розв'язати системи, що не зведені до нормального вигляду:

1. $\begin{cases} \ddot{x} = 2x - 3y, \\ \ddot{y} = x - 2y. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \ddot{x} = 3x + 4y, \\ \ddot{y} = -x - y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \ddot{x} = 2y, \\ \ddot{y} = -2x. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \ddot{x} = 3x - y - z, \\ \ddot{y} = -x + 3y - z, \\ \ddot{z} = -x - y + 3z. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2\dot{x} - 5\dot{y} = 4y - x, \\ 3\dot{x} - 4\dot{y} = 2x - y. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + \\ \quad + \dot{y} - 2y = 0, \\ \dot{x} - \dot{y} + x = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \ddot{x} - 2\ddot{y} + \dot{y} + x - 3y = 0, \\ 4\ddot{y} - 2\ddot{x} - \dot{x} - 2x + 5y = 0. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} \ddot{x} - x + \\ \quad + 2\ddot{y} - 2y = 0, \\ \dot{x} - x + \\ \quad + \dot{y} + y = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \ddot{x} - 2\ddot{y} + 2x = 0, \\ 3\dot{x} + \ddot{y} - 8y = 0. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} \ddot{x} + 3\ddot{y} - x = 0, \\ \dot{x} + 3\dot{y} - 2y = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \ddot{x} + 5\dot{x} + 2\dot{y} + y = 0, \\ 3\ddot{x} + 5x + \dot{y} + 3y = 0. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \ddot{x} + 4\dot{x} - 2x - \\ \quad - 2\dot{y} - y = 0, \\ \dot{x} - 4\dot{x} - \ddot{y} + \\ \quad + 2\dot{y} + 2y = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2\ddot{x} + 2\dot{x} + x + \\ \quad + 3\ddot{y} + \dot{y} + y = 0, \\ \ddot{x} + 4\dot{x} - x + \\ \quad + 3\ddot{y} + 2\dot{y} - y = 0. \end{cases}$

Відповіді:

1. $x = 3C_1e^t + 3C_2e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t$, $y = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t$. 2. $x = -2e^t(C_1 + C_2 + C_2t) - 2e^{-t}(C_3 - C_4 + C_4t)$, $y = e^t(C_1 + C_2t) + e^{-t}(C_3 + C_4t)$. 3. $x = e^t(C_1\cos t + C_2\sin t) + e^{-t}(C_3\cos t + C_4\sin t)$, $y = e^t(C_1\sin t - C_2\cos t) + e^{-t}(C_4\cos t - C_3\sin t)$. 4. $x = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3e^{2t} + C_5e^{-2t}$, $y = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_4e^{2t} + C_6e^{-2t}$, $z = C_1e^t + C_2e^{-t} - (C_3 + C_4)e^{2t} - (C_5 + C_6)e^{-2t}$. 5. $x = 3C_1e^t + C_2e^{-t}$, $y = C_1e^t + C_2e^{-t}$. 6. $x = C_1e^t + C_2e^{-t} + 2C_3e^{-2t}$, $y = 2C_1e^t + C_3e^{-2t}$. 7. $x = 3Ce^{-t}$, $y = Ce^{-t}$. 8. $x = -2C_2e^{3t} + C_3e^t$, $y = C_1e^{-t} + C_2e^{3t}$. 9. $x = 2C_1e^{2t} + 2C_2e^{-2t} + 2C_3\cos 2t + 2C_4\sin 2t$, $y = 3C_1e^{2t} - 3C_2e^{-2t} - C_3\sin 2t + C_4\cos 2t$. 10. $x = C_1e^{\frac{t}{2}} - 4C_2e^{-2t}$, $y = C_1e^{\frac{t}{2}} + C_2e^{-2t}$. 11. $x = (C_1 + C_2t)e^t + C_3e^{-t}$, $y = (-2C_1 - C_2 - 2C_2t)e^t - 4C_3e^{-t}$. 12. $x = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3e^{2t} + C_4e^{-2t}$, $y = C_1e^t + 5C_2e^{-t} + 2C_3e^{2t} + 2C_4e^{-2t}$. 13. $x = C_1 + C_2e^t + C_3\cos t + C_4\sin t$, $y = -C_1 - C_2e^t + (\frac{3}{5}C_4 - \frac{4}{5}C_3)\cos t - (\frac{3}{5}C_3 + \frac{4}{5}C_4)\sin t$.

Література: [1], с. 158–177; [2], с. 107–114; [3], с. 96–101; [4], с. 153–161; [5], с. 257–262; [6], с. 305–322; [7], с. 58–66.

Тема 11. МАТРИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

Відомо, що для кожної лінійної системи n рівнянь $\dfrac{dx}{dt} = A(t)x$ з неперервною на інтервалі $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ матрицею $A(t)$ існує нормальна фундаментальна матриця $Q(t, t_0)$, тобто матриця, яка є розв'язком матричної задачі Коші

$$\frac{dQ}{dt} = A(t)Q, \quad Q(t_0, t_0) = E_n \quad \Big(t \in (\alpha, \beta), \quad t_0 \in (\alpha, \beta)\Big).$$

За допомогою нормальної фундаментальної матриці загальний розв'язок лінійної системи має вигляд $x = Q(t, t_0)c$, де $c = (c_1, ..., c_n)$ — вектор довільних сталих.

Крім того, формула $x = Q(t, t_0)x^0$ дає розв'язок задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad x|_{t=t_0} = x^0.$$

Тому питання розв'язності лінійної системи рівносильне побудові матриці Q. У загальному випадку знайти матрицю Q на практиці досить складно. Проте у випадку лінійних систем зі сталою матрицею $A(t) = A = \mathrm{const}$ нормальна фундаментальна матриця визначається формулою

$$Q(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}.$$

При цьому під матричною експонентою $e^{A(t-t_0)}$ розуміють матричний ряд

$$e^{A(t-t_0)} = E_n + A(t-t_0) + \frac{1}{2!}A^2(t-t_0)^2 + ... + \frac{1}{k!}A^k(t-t_0)^k + ..., \quad (1)$$

який збіжний для кожної матриці A і всіх $t \in \mathbb{R}$.

Потрібно пам'ятати, що для кожної квадратної матриці A існує така невироджена матриця T, що $A = T^{-1}JT$, де

$$J = \mathrm{diag}\Big(J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2), ..., J_p(\lambda_p)\Big)$$

— нормальна жорданова форма матриці A. Тут $r_k \times r_k$ матриці $J_k(\lambda_k)$ — клітини Жордана:

$$J_k(\lambda_k) = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_k \end{pmatrix} = \lambda_k E_{r_k} + I_{r_k},$$

$$I_{r_k} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix},$$

а λ_k — власні значення матриці A (не обов'язково різні). Власному значенню λ_k відповідає $m_k = n - \mathrm{rang}\,(A - \lambda_k E_n)$ жорданових клітин.

Використовуючи (1), можна показати, що

$$e^{At} = T^{-1}\mathrm{diag}\,(e^{J_1(\lambda_1)t}, ..., e^{J_p(\lambda_p)t})T,$$

де

$$e^{J_k(\lambda_k)t} = e^{\lambda_k t} e^{I_{r_k} t}.$$

Матрицю $e^{I_{r_k} t}$ легко побудувати за допомогою ряду (1), оскільки $I_{r_k}^m = 0$ при $m \geq r_k$.

Приклад 1. Побудувати нормальну фундаментальну матрицю $Q(t, t_0)$ системи

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 \cos t + x_2 \sin t, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 \sin t + x_2 \cos t. \qquad (2)$$

Розв'язання. Додаючи і віднімаючи рівняння системи (2), одержимо два рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{d(x_1 + x_2)}{dt} = (x_1 + x_2)(\cos t + \sin t),$$

$$\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} = (x_1 - x_2)(\cos t - \sin t),$$

всі розв'язки яких визначаються формулами

$$x_1 + x_2 = c_1 e^{\sin t - \cos t}, \quad x_1 - x_2 = c_2 e^{\sin t + \cos t}.$$

Звідси знаходимо загальний розв'язок системи (2)

$$x_1 = k_1 e^{\sin t - \cos t} + k_2 e^{\sin t + \cos t},$$

$$x_2 = k_1 e^{\sin t - \cos t} - k_2 e^{\sin t + \cos t}, \tag{3}$$

де $k_1 = \frac{1}{2} c_1$ і $k_2 = \frac{1}{2} c_2$ — довільні сталі.

Задамо для рівнянь (2) початкову умову

$$x_1|_{t=t_0} = 1, \quad x_2|_{t=t_0} = 0. \tag{4}$$

Щоб знайти розв'язок задачі Коші (2), (4), підставимо значення x_1 і x_2 із (3) в (4). Тоді одержимо систему алгебраїчних рівнянь відносно k_1 і k_2:

$$k_1 e^{\sin t_0 - \cos t_0} + k_2 e^{\sin t_0 + \cos t_0} = 1,$$

$$k_1 e^{\sin t_0 - \cos t_0} - k_2 e^{\sin t_0 + \cos t_0} = 0.$$

Її розв'язок

$$k_1 = \frac{1}{2} e^{-(\sin t_0 - \cos t_0)}, \quad k_2 = \frac{1}{2} e^{-(\sin t_0 + \cos t_0)}$$

і формули (3) дозволяють записати розв'язок задачі (2), (4) у вигляді

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{2} e^{(\sin t - \cos t) - (\sin t_0 - \cos t_0)} + \frac{1}{2} e^{(\sin t + \cos t) - (\sin t_0 + \cos t_0)},$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{2} e^{(\sin t - \cos t) - (\sin t_0 - \cos t_0)} - \frac{1}{2} e^{(\sin t + \cos t) - (\sin t_0 + \cos t_0)}.$$

Аналогічно будуємо розв'язок

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{2}e^{(\sin t - \cos t)-(\sin t_0 - \cos t_0)} - \frac{1}{2}e^{(\sin t + \cos t)-(\sin t_0 + \cos t_0)},$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{2}e^{(\sin t - \cos t)-(\sin t_0 - \cos t_0)} + \frac{1}{2}e^{(\sin t + \cos t)-(\sin t_0 + \cos t_0)},$$

системи (2), який задовольняє початкову умову

$$x_1|_{t=t_0} = 0, \quad x_2|_{t=t_0} = 1.$$

Тоді квадратна матриця другого порядку

$$Q(t, t_0) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

є нормальною фундаментальною матрицею системи (2), оскільки її стовпці є розв'язками (2) і

$$Q(t_0, t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2.$$

Приклад 2. Обчислити e^{At}, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Власні значення матриці A, тобто корені рівняння

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

дійсні й різні: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Тому нормальна жорданова форма матриці A має вигляд

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = TAT^{-1}.$$

Знайдемо невироджену матрицю $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ із умови $JT = TA$:

$$\alpha = 3\alpha + 2\beta, \quad \gamma = -\alpha, \quad 2\gamma = 3\gamma + 2\delta, \quad 2\delta = -\gamma.$$

Одним із розв'язків останньої системи є $\alpha = 2$, $\beta = 4$, $\gamma = -2$, $\delta = 1$, тобто

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тому

$$e^{At} = e^{T^{-1}JtT} = T^{-1}e^{Jt}T =$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} \\ 2e^{2t} - 2e^t & 2e^t - e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Приклад 3. За допомогою матриці e^{At} розв'язати задачу Коші

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$x\,\big|_{t=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv x^0.$$

Розв'язання. Оскільки задана матриця A вже зведена до нормальної жорданової форми ($\lambda = 2$ — власне значення A кратності 3), то

$$e^{At} = e^{2t}e^{I_3 t}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Враховуючи, що

$$I_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3^m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m \geq 3,$$

із формули (1) знаходимо, що

$$e^{I_3 t} = E_3 + I_3 t + \frac{1}{2!} I_3^2 t^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$e^{At} = e^{2t} e^{I_3 t} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{1}{2}t^2 e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix},$$

і розв'язок задачі Коші визначається із співвідношень

$$x = e^{At} x^0 = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{1}{2}t^2 e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}(t+1) \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти e^{At}, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix};$

б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix};$

в) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\qquad A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Не обчислюючи e^{At}, знайти $\det e^{At}$:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 5 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Побудувати e^{At} і розв'язати задачу Коші

$$\frac{dx}{dt}=Ax, \quad x\,|_{t=0}=x^0,$$

якщо:

а) $A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\quad x^0=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\qquad x^0=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\quad x^0=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4. Знайти нормальну фундаментальну матрицю $Q(t,t_0)$ лінійної системи

а) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=2tx_1, \\[2ex] \dfrac{dx_2}{dt}=3x_2+e^{-t^2}x_1; \end{cases}$ $\qquad$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=5x_1+e^{t}x_2, \\[2ex] \dfrac{dx_2}{dt}=4x_2; \end{cases}$

в) $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \cos t\, x_1, \\[2ex] \dfrac{dx_2}{dt} = -x_2 + x_1(1 + \cos t). \end{cases}$$

Література: [1], с. 177—185; [2], с. 101–107; [5], с. 329–250; [6], с. 310–321; [7], с. 67–69.

Тема 12. ЛІНІЙНІ НЕОДНОРІДНІ СИСТЕМИ

Лінійною неоднорідною системою називається система

$$\frac{dx_k}{dt} = a_{k1}(t)x_1 + ... + a_{kn}(t)x_n + f_k(t), \quad k = \overline{1,n}, \tag{1}$$

в якій $a_{kj}(t)$, $f_k(t)$ — задані неперервні функції змінної $t \in (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, $x_k = x_k(t)$ — невідомі функції. Якщо позначити

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \Big(a_{kj}(t)\Big)_{k,j=1}^{n},$$

то (1) можна переписати в матричній формі

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t). \tag{2}$$

Систему (2) можна розв'язувати шляхом зведення до одного або декількох лінійних неоднорідних рівнянь вищих порядків. Крім того, для розв'язання системи (2) використовують **метод варіації сталих**. Його суть полягає в тому, що спочатку знаходять загальний розв'язок $x = X(t)c$ відповідної однорідної системи $\dfrac{dx}{dt} = A(t)x$. Тут c — n-вимірний вектор довільних сталих, а $X(t)$ — $n \times n$-матриця, стовпцями якої є лінійно незалежні розв'язки однорідної системи. Тоді розв'язок неоднорідної системи шукають у вигляді

$$x = X(t)c(t). \tag{3}$$

Для знаходження невідомої вектор-функції $c(t)$ потрібно підставити (3) у (2), внаслідок чого одержимо рівність

$$\frac{dc(t)}{dt} = X^{-1}(t)f(t).$$

Далі $c(t)$ визначається шляхом інтегрування. Недолік цього методу полягає в тому, що на практиці часто зустрічаються випадки, коли досить громіздко обчислюються інтеграли.

Якщо в системі (2) матриця $A(t) = A$ — стала, а компоненти $f_k(t)$ вектора $f(t)$ мають вигляд

$$f_k(t) = e^{at}\Big(Q_{m_k}(t)\cos bt + P_{l_k}(t)\sin bt\Big),$$

де a, b — сталі, $Q_{m_k}(t)$ і $P_{l_k}(t)$ — многочлени степенів m_k і l_k, то частинний розв'язок неоднорідної системи може бути знайдений за допомогою методу невизначених коефіцієнтів. Згідно з цим методом, існує частинний розв'язок вигляду

$$x_k = e^{at}\Big(R^{k,1}_{m+s}(t)\cos bt + R^{k,2}_{m+s}(t)\sin bt\Big), \quad k = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Тут $R^{k,1}_{m+s}(t)$ і $R^{k,2}_{m+s}(t)$ — многочлени степеня $m+s$ з невідомими коефіцієнтами, $m = \max_k\{m_k; l_k\}$, s — кратність числа $a+bi$ як кореня характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E_n) = 0.$$

Невідомі коефіцієнти многочленів визначають шляхом підстановки (4) в (1) і прирівнювання коефіцієнтів подібних членів.

Приклад 1. Розв'язати систему

$$\frac{dx_1}{dt} = -4x_1 - 2x_2 + \frac{2}{e^t - 1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = 6x_1 + 3x_2 - \frac{3}{e^t - 1}$$

методом варіації сталих.

Розв'язання. Відповідна однорідна система

$$\frac{dx_1}{dt} = -4x_1 - 2x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = 6x_1 + 3x_2$$

є лінійною системою зі сталими коефіцієнтами, тому її загальний розв'язок (тема 1) має вигляд

$$x_1 = c_1 + c_2 e^{-t}, x_2 = -2c_2 - \frac{3}{2} c_2 e^{-t}. \tag{5}$$

Нехай у формулах (5) $c_1 = c_1(t)$ і $c_2 = c_2(t)$ — невідомі функції. Тоді після підстановки (5) у початкову систему одержимо

$$c_1'(t) + c_2'(t) e^{-t} = \frac{2}{e^t - 1}, \quad -2c_1'(t) - \frac{3}{2} c_2'(t) e^{-t} = -\frac{3}{e^t - 1}$$

або

$$c_1'(t) = 0, \quad c_2'(t) = \frac{2e^t}{e^t - 1}.$$

Інтегруючи останні рівності, знаходимо

$$c_1(t) = k_1, \quad c_2(t) = 2 \int \frac{e^t}{e^t - 1} dt = 2 \ln |e^t - 1| + k_2,$$

де k_1 і k_2 — довільні сталі. Враховуючи (5), одержимо загальний розв'язок системи

$$x_1 = k_1 + k_2 e^{-t} + 2e^{-t} \ln |e^t - 1|,$$

$$x_2 = -2k_1 - \frac{3}{2} k_2 e^{-t} - 3e^{-t} \ln |e^t - 1|.$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок системи

$$\frac{dx_1}{dt} = 5x_1 - 3x_2 + 2e^{3t}, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 + 4e^{2t}. \tag{6}$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & -3 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

має корені $\lambda_1 = 2$ і $\lambda_2 = 4$, тому загальний розв'язок відповідної однорідної системи має вигляд

$$x_1 = c_1 e^{2t} + 3c_2 e^{4t}, \quad x_2 = c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t}. \tag{7}$$

Розглянемо тепер неоднорідну систему

$$\frac{dx_1}{dt} = 5x_1 - 3x_2 + 2e^{3t}, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2. \tag{8}$$

Для неї $f(t) = \begin{pmatrix} 2e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix}$, а число $a + ib = 3 + i \cdot 0 = 3$ не є коренем характеристичного рівняння, тому частинний розв'язок системи (8) шукаємо у вигляді

$$x_1 = \alpha e^{3t}, \quad x_2 = \beta e^{3t}.$$

Після підстановки у (8) одержимо

$$3\alpha = 5\alpha - 3\beta + 2, \quad 3\beta = \alpha + \beta$$

або $\alpha = -4$, $\beta = -2$. Таким чином, $x_1 = -4e^{3t}$, $x_2 = -2e^{3t}$ — частинний розв'язок системи (8).

Аналогічно, частинний розв'язок системи

$$\frac{dx_1}{dt} = 5x_1 - 3x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 + 4e^{2t} \tag{9}$$

має вигляд $x_1 = (\alpha + \beta t)e^{2t}$, $x_2 = (\gamma + \delta t)e^{2t}$, оскільки число $a + ib = 2 + i \cdot 0 = 2$ є простим коренем характеристичного рівняння. Підставивши цей розв'язок в (9), дістанемо тотожності

$$3(\beta - \delta)t + (3\alpha - 3\gamma - \beta) = 0, \quad (\beta - \delta)t + (\alpha - \gamma - \delta + 4) \equiv 0, t \in \mathbb{R}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях t в лівій і правій частинах обох рівностей, отримаємо систему

$$3(\beta - \delta) = 0, \;\; \beta - \delta = 0, \;\; 3\alpha - 3\gamma - \beta = 0, \;\; \alpha - \gamma - \delta + 4 = 0,$$

одним із розв'язків якої є $\alpha = 2$, $\beta = 6$, $\gamma = 0$, $\delta = 6$. Отже, $x_1 = (2 + 6t)e^{2t}$, $x_2 = 6te^{2t}$ — частинний розв'язок системи (9).

Використовуючи принцип суперпозиції, можемо записати загальний розв'язок системи (6):

$$x_1 = c_1e^{2t} + 3c_2e^{4t} - 4e^{3t} + (2 + 6t)e^{2t},$$

$$x_2 = c_1e^{2t} + c_2e^{4t} - 2e^{3t} + 6te^{2t}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Розв'язати систему шляхом зведення до одного рівняння другого порядку:

а) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 - 4x_2 + 4te^{-2t}, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 - 2x_2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2 + e^{t}, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 2t; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - 3x_2 + 3e^{t}, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + 2x_2 + 16te^{t}. \end{cases}$

2. Розв'язати систему методом варіації сталих:

а) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 + \operatorname{tg} t; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_2 - x, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 4x_2 - 3x_1 + \dfrac{e^{3t}}{e^{2t} + 1}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + \dfrac{1}{\cos t}, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 - x_2. \end{cases}$

3. Розв'язати систему методом невизначених коефіцієнтів:

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + 2\sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + 8t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y + 2\cos t; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + 2e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - 3e^{4t}; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + 6, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3y - 2x. \end{cases}$

Завдання для домашньої роботи.

I. Розв'язати лінійні неоднорідні системи:

1. $\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + t^2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + y - e^{2t}, \\ \dot{y} = y - 2x. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x + 1, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dot{y} = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + e^t, \\ \dot{y} = -2x + 2t. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = x - 5\sin t. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y, \\ \dot{y} = x - 3y + 3e^t. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = y - 2x + 18t. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 16te^t, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y - 8, \\ \dot{y} = 3x + 6y. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2\sin t. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 2\sin t, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 2e^t. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + \sin t, \\ \dot{y} = 2x - y - 2\cos t. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t}. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 8t, \\ \dot{y} = 5x - y. \end{cases}$ 20. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 2y - x - 5e^t \sin t. \end{cases}$

Відповіді:

1. $x = C_1e^t + C_2e^{-t} + te^t - t^2 - 2$, $y = C_1e^t - C_2e^{-t} + (t-1)e^t - 2t$. 2. $x = C_1e^{2t} + C_2e^{-t} - 2\sin t - \cos t$, $y = 2C_1e^{2t} - C_2e^{-t} + \sin t + 3\cos t$. 3. $x = C_1e^t + 2C_2e^{4t} + 3e^{5t}$, $y = -C_1e^t + C_2e^{4t} + e^{5t}$. 4. $x = C_1(\cos 2t - \sin 2t) + C_2(\cos 2t + \sin 2t)$, $y = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t + e^{-2t}$. 5. $x = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + (t+1)e^{2t}$, $y = -2C_1e^{2t} - C_2e^{3t} - 2te^{2t}$. 6. $x = (C_1 + 2C_2t)e^t - 3$, $y = (C_1 + C_2 + 2C_2t)e^t - 2$. 7. $x = C_1e^{2t} + 3C_2e^{4t} - e^{-t} - 4e^{3t}$, $y = C_1e^{2t} + C_2e^{4t} - 2e^{-t} - 2e^{3t}$. 8. $x = C_1e^t\cos t + C_2e^t\sin t + e^t + t + 1$, $y = C_1e^t(-\cos t - \sin t) + C_2e^t(\cos t - \sin t) - 2e^t - 2t - 1$. 9. $x = C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t} - \cos t + 3\sin t$, $y = -C_1e^{-t} + C_2e^{2t} + 2\cos t - \sin t$. 10. $x = 4C_1e^t + C_2e^{-2t} - 4te^t$, $y = C_1e^t + C_2e^{-2t} - (t-1)e^t$. 11. $x = C_1e^{3t} + 3t^2 + 2t + C_2$, $y = -C_1e^{3t} + 6t^2 - 2t + 2C_2 - 2$. 12. $x = 2C_1e^{2t} + C_2e^{-3t} - (12t+13)e^t$, $y = C_1e^{2t} - 2C_2e^{-3t} - (8t+6)e^t$. 13. $x = 2C_1e^{8t} - 2C_2 - 6t + 1$, $y = 3C_1e^{8t} + C_2 + 3t$. 14. $x = 3C_1e^t + C_2e^{-t} + 3\sin t$, $y = C_1e^t + C_2e^{-t} - \cos t + 2\sin t$. 15. $x = C_1\cos t + C_2\sin t + t\sin t - t\cos t$, $y = C_1(\sin t + \cos t) + C_2(\sin t - \cos t) - 2t\cos t + \sin t + \cos t$. 16. $x = (C_1 + C_2t - t^2)e^t$, $y = [C_1 - C_2 + t(C_2 + 2) - t^2]e^t$. 17. $x = C_1e^t + 3C_2e^{2t} + \cos t - 2\sin t$, $y = C_1e^t + 2C_2e^{2t} + 2\cos t - 2\sin t$. 18. $x = C_1e^t + C_2e^{3t} + te^t - e^{4t}$, $y = -C_1e^t + C_2e^{3t} - (t+1)e^t - 2e^{4t}$. 19. $x = C_1\cos 2t - C_2\sin 2t + 2t + 2$, $y = (C_1 + 2C_2)\cos 2t + (2C_1 - C_2)\sin 2t + 10t$. 20. $x = C_1e^t + C_2e^{3t} + e^t(2\cos t - \sin t)$, $y = C_1e^t - C_2e^{3t} + e^t(3\cos t + \sin t)$.

II. Розв'язати методом варіації сталих:

1. $\begin{cases} \dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \dot{y} = -x + \operatorname{tg} t. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x, \\ \dot{y} = 4y - 3x + \frac{e^{3t}}{e^{2t}+1}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \frac{2}{e^t-1}, \\ \dot{y} = 6x + 3y - \frac{3}{e^t-1}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + \cos^{-1} t, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$
5. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - y + 15e^t\sqrt{t}. \end{cases}$

Відповіді:

1. $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \operatorname{tg} t$, $y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + 2$. 2. $x = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} - e^t \ln(e^{2t}+1) + 2e^{2t} \operatorname{arctg} e^t$, $y = C_1 e^t + 3C_2 e^{2t} - e^t \ln(e^{2t}+1) + 3e^{2t} \operatorname{arctg} e^t$. 3. $x = C_1 + 2C_2 e^{-t} + 2e^{-t} \ln|e^t - 1|$, $y = -2C_1 - 3C_2 e^{-t} - 3e^{-t} \ln|e^t - 1|$. 4. $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + t(\cos t + \sin t) + (\cos t - \sin t) \ln|\cos t|$, $y = (C_1 - C_2) \cos t + (C_1 + C_2) \sin t + 2 \cos t \ln|\cos t| + 2t \sin t$. 5. $x = (C_1 + 2C_2 t - 8t^{5/2})e^t$, $y = (C_1 + 2C_2 t - C_2 - 8t^{5/2} + 10t^{3/2})e^t$.

Література: [1], с. 185–200; [2], с. 119–124; [4], с. 161–165; [5], с. 367–391; [6], с. 322–333; [7], с. 62–63.

Тема 13. НЕЛІНІЙНІ СИСТЕМИ

Розглянемо нелінійну систему в нормальній формі

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1, ..., x_n), \quad k = \overline{1, n}, \tag{1}$$

права частина якої визначена і неперервна разом зі своїми частинними похідними першого порядку за всіма змінними $x_1, ..., x_n$ у деякій області $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$. При цьому припущенні задача Коші для системи (1) завжди має і при тому єдиний розв'язок.

Розв'язати систему означає, що потрібно знайти n незалежних у D інтегралів $u_k(t, x_1, ..., x_n)$, $k = \overline{1, n}$ системи (1). **Інтегралом системи** називається така функція $u(t, x_1, ..., x_n)$, яка не є тотожно сталою в жодній підобласті D, але перетворюється в сталу, якщо замість $x_1, ..., x_n$ підставити довільний розв'язок системи. Тоді кожна з рівностей

$$u_1(t, x_1, ..., x_n) = c_1, ..., u_n(t, x_1, ..., x_n) = c_n, \tag{2}$$

де $c_1, ..., c_n$ — довільні сталі, називається **першим інтегралом** системи (1), а сукупність рівностей (2) — **загальним інтегралом** системи.

Якщо рівності (2) розв'язати відносно $x_1, ..., x_n$, то одержимо загальний розв'язок системи (1). У тому випадку, коли для (1) знайдено $m < n$ незалежних інтегралів, порядок системи легко знизити на m одиниць. Для цього здійснюється заміна змінних [2], яка зводить (1) до нормальної системи $n - m$ рівнянь.

Для знаходження перших інтегралів у багатьох випадках використовують метод інтегровних комбінацій. Суть його полягає в тому, що із рівнянь системи утворюють інтегровні комбінації, тобто такі рівняння відносно деякої функції, які легко інтегруються. Цей метод можна використовувати також для розв'язання систем рівнянь у симетричній формі

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1,...,x_n)} = ... = \frac{dx_n}{a_n(x_1,...,x_n)}. \qquad (3)$$

Тут $a_1,...,a_n$ — задані функції. Для побудови перших інтегралів корисно пам'ятати таку властивість рівних дробів: якщо

$$\frac{p_1}{q_1} = ... = \frac{p_m}{q_m},$$

а $k_1,...,k_m$ — довільні числа, то

$$\frac{p_1}{q_1} = ... = \frac{p_m}{q_m} = \frac{p_1k_1 + p_2k_2 + ... + p_mk_m}{q_1k_1 + q_2k_2 + ... + q_mk_m}.$$

Відзначимо також, що як і у випадку лінійних систем, нелінійну систему (1) можна розв'язувати шляхом зведення до одного рівняння n-го порядку або декількох рівнянь, сумарний порядок яких дорівнює n.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь у симетричній формі

$$\frac{dx}{y+z} - \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{x+y}.$$

Розв'язання. Скориставшись властивістю рівних дробів, утворимо інтегровну комбінацію

$$\frac{dx - dy}{(y+z)-(x+z)} = \frac{dy - dz}{(x+z)-(x+y)}$$

або

$$\frac{d(x-y)}{x-y} = \frac{d(y-z)}{y-z}.$$

Розв'язуючи одержане рівняння з відокремлюваними змінними, знаходимо перший інтеграл системи $\dfrac{y-z}{x-y} = c_1$.

Іншу інтегровну комбінацію можна утворити таким чином:

$$\frac{dx+dy+dz}{y+z+x+z+x+y} = \frac{dx-dy}{(y+z)-(x+z)}.$$

Звідси маємо, що

$$\frac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)} = \frac{d(x-y)}{-(x-y)}, \quad \ln|x+y+z| = -2\ln|x-y| + \ln|c_2|,$$

тобто $\dfrac{x+y+z}{(x-y)^2} = c_2$ — ще один перший інтеграл системи. Неважко переконатись, що знайдені інтеграли незалежні, тому співвідношення

$$\frac{y-z}{x-y} = c_1, \quad \frac{x+y+z}{(x-y)^2} = c_2$$

визначають загальний інтеграл заданої системи.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок системи

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{z-x}, \quad \frac{dz}{dx} = y+1. \tag{4}$$

Розв'язання. Позначимо в (4) $u(x) = z-x$. Тоді одержимо систему

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{u}, \quad \frac{du}{dx} = y. \tag{5}$$

Розділимо перше з цих рівнянь на друге і розв'яжемо одержане рівняння:

$$\frac{dy}{du} = \frac{y}{u}, \quad \ln|y| = \ln|u| + \ln|C_1|, \quad y = uC_1.$$

Отже, $yu^{-1} = C_1$ — перший інтеграл системи (5). Підставимо значення $y = uC_1$ в друге рівняння системи (5):

$$\frac{du}{dx} = C_1 u, \quad u = C_2 e^{C_1 x}.$$

Таким чином, $y = uC_1$, $u = C_2e^{C_1x}$. Враховуючи заміну $z - x = u$, отримаємо загальний розв'язок

$$y = C_1C_2e^{C_1x}, \quad z = x + C_2e^{C_1x}$$

системи (4), в якому C_1 і C_2 — довільні сталі ($C_2 \neq 0$).

Приклад 3. Довести, що $u(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2x_3 - x_1x_4$ є інтегралом системи

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1, \quad \frac{dx_3}{dt} = x_4, \quad \frac{dx_4}{dt} = -x_3.$$

Розв'язання. Оскільки

$$\frac{du}{dt} = \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt} = (-x_4)x_2 + x_3(-x_1) + x_2x_4 + (-x_1)(-x_3) \equiv 0$$

для всіх $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$, то $u(x_1, x_2, x_3, x_4) = c = \text{const}$ на розв'язках системи. Згідно з означенням u є інтегралом заданої системи.

Завдання для самостійної роботи

1. Розв'язати системи:

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ 2x\dfrac{dy}{dt} = y^2 - x^2 + 1; \end{cases}$ $\quad \dfrac{dx}{y-x} = \dfrac{dy}{x+y+z} = \dfrac{dz}{x-y}$; $\quad \dfrac{dx}{xz} = \dfrac{dy}{yz} = \dfrac{dz}{-xy}$;

б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{y}{(x-y)^2}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x}{(x-y)^2}; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t}{y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{t}{x}; \end{cases}$

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{z^2 + xy} = \frac{dz}{z(x+z)};$$

в) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{z}, & \dfrac{dx}{2xy} = \dfrac{dy}{y^2 - x^2 - z^2} = \dfrac{dz}{2yz}; \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{x}{y}; & \dfrac{dx}{x + y^2 + z^2} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}. \end{cases}$

2. Перевірити, чи є співвідношення $u(t, x, y) = c$ першим інтегралом заданої системи:

а) $u = ty + x^2$, $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{x}{t}$, $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2x^2 - ty}{t^2}$;

б) $u = t^2 + 2xy$, $\dfrac{dx}{dt} = -y$, $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y^2 - t}{x}$;

в) $u = x^2 + y^2 - 2\ln|xy - 1|$, $\dfrac{dx}{dt} = x + y - xy^2$,

$$\frac{dy}{dt} = -x - y + x^2 y.$$

Завдання для домашньої роботи

I. Розв'язати системи рівнянь:

1. $y' = \dfrac{x}{z}, z' = -\dfrac{x}{y}$.
2. $y' = \dfrac{y^2}{z - x}, z' = y + 1$.
3. $y' = \dfrac{z}{x}, z' = \dfrac{z(y + 2z - 1)}{x(y - 1)}$.
4. $y' = y^2 z, z' = \dfrac{z}{x} - yz^2$.
5. $2zy' = y^2 - z^2 + 1, z' = z + y$.
6. $\dfrac{dx}{2y - z} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}$.
7. $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{x} = \dfrac{dz}{z}$.

8. $\dfrac{dx}{y+z}=\dfrac{dy}{x+z}=\dfrac{dz}{x+y}$.

9. $\dfrac{dx}{y-x}=\dfrac{dy}{x+y+z}=\dfrac{dz}{x-y}$.

10. $\dfrac{dx}{z}=\dfrac{dy}{u}=\dfrac{dz}{x}=\dfrac{du}{y}$.

11. $\dfrac{dx}{y-u}=\dfrac{dy}{z-x}=\dfrac{dz}{u-y}=\dfrac{du}{x-z}$.

12. $\dfrac{dx}{z}=\dfrac{dy}{xz}=\dfrac{dz}{y}$.

13. $\dfrac{dx}{z^2-y^2}=\dfrac{dy}{z}=-\dfrac{dz}{y}$.

14. $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dz}{xy+z}$.

15. $\dfrac{dx}{xz}=\dfrac{dy}{yz}=\dfrac{dz}{xy\sqrt{z^2+1}}$.

16. $\dfrac{dx}{x+y^2+z^2}=\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dz}{z}$.

17. $\dfrac{dx}{x(y+z)}=\dfrac{dy}{z(z-y)}=\dfrac{dz}{y(y-z)}$.

18. $-\dfrac{dx}{x^2}=\dfrac{dy}{xy-2z^2}=\dfrac{dz}{xz}$.

19. $\dfrac{dx}{x(z-y)}=\dfrac{dy}{y(y-x)}=\dfrac{dz}{y^2-xz}$.

20. $\dfrac{dx}{x(y^2-z^2)}=-\dfrac{dy}{y(z^2+x^2)}=\dfrac{dz}{z(x^2+y^2)}$.

Відповіді

1. $y=C_2e^{C_1x^2}$, $z=(2C_1C_2)^{-1}e^{-C_1x^2}$. 2. $y=C_2e^{C_1x}$, $z=x+C_2C_1^{-1}e^{C_1x}$; $y=0$, $z=x+C$. 3. $y=(x+C_1)(x+C_2)^{-1}$, $z=((C_2-C_1)x)(x+C_2)^{-2}$. 4. $y=C_2e^{C_1x^2}$, $z=2C_1C_2^{-1}xe^{-C_1}x^2$; $y=0$, $z=Cx$. 5. $y=-C_1^{-1}+2^{-1}C_1(x+C_2)-4^{-1}C_1(x+C_2)^2$, $z=4^{-1}C_1(x+C_2)^2+C_1^{-1}$. 6. $y=C_1z$, $x=2y-z+C_2$. 7. $x^2-y^2=$

C_1, $x+y=C_2z$. 8. $x-y=C_1(y-z)$, $(x+y+z)(x-y)^2=C_2$. 9. $x+z=C_1$, $(x+y+z)(y-3x-z)=C_2$. 10. $x^2-z^2=C_1$, $y^2-u^2=C_2$, $(x+z)=C_3(u+y)$. 11. $x+z=C_1$, $y+u=C_2$, $(x-z)^2+(y-u)^2=C_3$. 12. $x^2-2y=C_1$, $6xy-2x^3-3z^2=C_2$. 13. $y^2+z^2=C_1$, $x-yz=C_2$. 14. $x=C_1y$, $xy-z=C_2x$. 15. $x=C_1y$, $xy-2\sqrt{z^2+1}=C_2$. 16. $y=C_1z$, $x-y^2-z^2=C_2z$. 17. $y^2+z^2=C_1$, $x(y-z)=C_2$. 18. $xz=C_1$, $xy+z^2=C_2$. 19. $x+z-y=C_1$, $\ln|x|+zy^{-1}=C_2$. 20. $x^2+y^2+z^2=C_1$, $yz=C_2x$.

II. Для заданих систем диференціальних рівнянь та заданих функцій φ перевірити, чи є співвідношення $\varphi=C$ першими інтегралами цих систем.

1. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{x^2-t}{y}, \dfrac{dy}{dt}=-x$; $\varphi_1=t^2+2xy$; $\varphi_2=x^2-ty$. Відповідь: 1) так; 2) ні.

2. $\dot{x}=xy$, $\dot{y}=x^2+y^2$; $\varphi_1=x\ln y-x^2y$; $\varphi_2=\dfrac{y^2}{x^2}-2\ln x$. Відповідь: 1) ні; 2) так.

3. $\dfrac{dx}{y}=-\dfrac{dy}{x}=\dfrac{dz}{u}=-\dfrac{du}{z}$; $\varphi=yz-ux$. Відповідь: так.

Література: [1], с. 207–216; [2], с. 158–169; [5], с. 110–125; [6], с. 283–297; [7], с. 97–100.

Тема 14. СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Нехай задана система n рівнянь, записана у векторній формі

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x = (x_1, ..., x_n), \quad f = (f_1, ..., f_n), \tag{1}$$

права частина якої неперервна разом зі всіма своїми частинними похідними першого порядку за змінними $x_1, ..., x_n$ на множині $(t,x) \in [t_0, \infty) \times D = G$ (D — область із R^n).

Означення 1. Розв'язок $x = \varphi(t)$ системи (1), визначений для всіх $t \geq t_0$, називається стійким за Ляпуновим, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що для довільного розв'язку $x = x(t)$ цієї ж системи, який задовольняє нерівність

$$\|x(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta(\varepsilon),$$

при всіх $t \geq t_0$ виконується нерівність

$$\|x(t) - \varphi(t)\| \leq \varepsilon.$$

Тут і надалі під нормою вектора $x = (x_1, ..., x_n)$ будемо розуміти евклідову норму, тобто

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}.$$

Якщо ж для деякого $\varepsilon > 0$ такого $\delta(\varepsilon)$ не існує, то розв'язок $x = \varphi(t)$ називається нестійким.

Означення 2. Розв'язок $x = \varphi(t)$ системи (1) називається асимптотично стійким, якщо він стійкий у розумінні Ляпунова та існує таке $\delta_0 > 0$, що для довільного розв'язку $x = x(t)$ цієї ж системи, який задовольняє нерівність $\|x(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta_0$, виконується умова

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t) - \varphi(t)\| = 0.$$

Зазначимо, що дослідження стійкості розв'язку $x = \varphi(t)$ можна звести до дослідження стійкості нульового розв'язку $y \equiv 0$. Для цього досить у системі (1) зробити заміну $x = \varphi(t) + y$.

Припустимо, що (1) має нульовий розв'язок і її можна записати у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \tilde{f}(t, x), \tag{2}$$

де A — стала квадратна n-вимірна матриця, а $\tilde{f}$ задовольняє нерівність

$$\|\tilde{f}(t, x)\| \leq \alpha(x)x \quad \forall\,(t, x) \in G, \quad \lim_{x \to 0} \alpha(x) = 0.$$

Теорема 1 (Ляпунова). Якщо всі власні значення матриці A мають від'ємні дійсні частини, то нульовий розв'язок системи (2) асимптотично стійкий; якщо ж хоч одне власне значення має додатну дійсну частину, то нульовий розв'язок нестійкий.

З даної теореми випливає, що питання стійкості нульового розв'язку нелінійної системи (2) розв'язується за допомогою матриці A, тобто за допомогою питання стійкості нульового розв'язку лінійної системи $\dfrac{dx}{dt} = Ax$. Останню систему називають **системою першого наближення** для (2), а теорему 1 — **теоремою про стійкість за першим наближенням**.

Зазначимо, що теорема 1 не дає відповіді на питання про стійкість, якщо власні значення матриці A мають недодатні дійсні частини, причому A має власні значення з нульовою дійсною частиною. В цьому випадку стійкість розв'язку зручно досліджувати за допомогою функцій Ляпунова.

Теорема 2 (про стійкість). Якщо існує диференційовна функція $V(x) \equiv V(x_1, ..., x_n)$, яка при $\|x\| < \Delta$ справджує умови

1) $V > 0$ при $x \neq 0$, $V(0) = 0$,

2) $\dfrac{dV}{dt} \equiv \dfrac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \leq 0$ при $\|x\| < \Delta$, $t \geq t_0$,
то нульовий розв'язок системи (1) стійкий.

Теорема 3 (про асимптотичну стійкість). Якщо в теоремі 2 замість умови 2) виконується більш сильна умова

$$\frac{dV}{dt} \leq -W(x) < 0 \qquad 0 < \|x\| < \Delta, \quad t \geq t_0,$$

а функція $W(x)$ неперервна при $\|x\| < \Delta$, то нульовий розв'язок системи (1) асимптотично стійкий.

Відзначимо, що теореми 2, 3, як і теорема 1, вперше були доведені Ляпуновим.

Функції Ляпунова $V(x)$ можуть бути використані також для встановлення нестійкості розв'язку системи (1). Вважатимемо, що область D містить положення рівноваги $x = 0$ системи (1). Надалі через ∂D позначатимемо межу області D.

Теорема Четаєва (про нестійкість). Нехай в області D визначена неперервно диференційовна функція $V(x)$ з такими властивостями:

1) існує підобласть $D_1 \subset D$ така, що $0 \in \partial D_1$, $V(x) > 0$ $\forall\, x \in D_1$, $V(x) = 0$ $\forall\, x \in \partial D_1$;

2) $\dfrac{dV}{dt} \equiv \dfrac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \geq W(x) > 0$ $\forall\,(t,x) \in [t_0, \infty) \times D_1$, а функція $W(x)$ неперервна.

Тоді нульовий розв'язок системи (1) нестійкий.

Приклад 1. За допомогою теореми Ляпунова про стійкість за першим наближенням дослідити на стійкість нульовий розв'язок $x = 0$, $y = 0$ системи

$$\frac{dx}{dt} = e^{x+2y} - \cos 3x, \quad \frac{dy}{dt} = \sqrt{4+8x} - 2e^y. \tag{3}$$

Розв'язання. Скористаємося розкладами функцій e^z,

$\cos z$ і $(1+z)^{1/2}$ за формулою Тейлора:

$$e^z = 1+z+R_1(z), \quad \cos z = 1+R_2(z), \quad (1+z)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}z+R_3(z).$$

Тут $R_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$ — нескінченно малі другого порядку малості при $z \to 0$. Тоді (3) можна подати у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x + 2y + R_1(x+2y) - 1 - R_2(3x),$$
$$\frac{dy}{dt} = 2\left(1 + \frac{1}{2}\cdot 2x + R_3(2x)\right)2\left(1 + y + R_1(y)\right). \qquad (4)$$

Запишемо систему першого наближення для (4):

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y, \quad \frac{dy}{dt} = 2x - 2y.$$

Власні значення матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, тобто корені рівняння $(1-\lambda)(-2-\lambda)-4 = 0$, дорівнюють відповідно -2 і 3. Оскільки з власних значень одне додатне, то, згідно з теоремою Ляпунова нульовий розв'язок системи (3) нестійкий.

Приклад 2. Дослідити на стійкість положення рівноваги математичного маятника:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{dx}{dt} + \nu\sin x = 0, \quad \mu \geq 0, \quad \nu > 0.$$

Розв'язання. Перепишемо рівняння руху маятника у вигляді нормальної системи

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\nu\sin x - \mu y. \qquad (5)$$

Зазначимо, що випадок $\mu > 0$ відповідає маятнику з тертям, а $\mu = 0$ — без тертя. Розв'язавши систему рівнянь

$$y = 0, \quad -\nu\sin x - \mu y = 0,$$

знаходимо положення рівноваги маятника: $x = \pi n$, $y = 0$ ($n \in \mathbb{Z}$). Оскільки система (5) періодична за x з періодом 2π, то досить розглянути два її розв'язки: $x = 0$, $y = 0$ — нижнє положення рівноваги, $x = \pi$, $y = 0$ — верхнє положення рівноваги маятника.

Розглянемо спочатку нижнє положення рівноваги. Враховуючи розклад $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \ldots$, для (5) маємо систему першого наближення

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\nu x - \mu y.$$

Власні значення λ матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\nu & -\mu \end{pmatrix}$ визначаємо із рівняння $\lambda^2 + \mu\lambda + \nu = 0$. Аналіз цього рівняння показує, що при $\mu > 0$ дійсні частини обох коренів рівняння від'ємні, тому нижнє положення рівноваги маятника з тертям асимптотично стійке. Якщо ж $\mu = 0$ (маятник без тертя), то корені $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\nu}$ — чисто уявні, тому скористатись теоремою Ляпунова про стійкість за першим наближенням не можна. В цьому випадку питання стійкості розв'яжемо за допомогою функції Ляпунова. Розглянемо $V(x,y) = \dfrac{1}{2}y^2 + \nu(1 - \cos x)$. Очевидно, що $V(0,0) = 0$ і $V(x,y) > 0$ при $0 < x^2 + y^2 < 4\pi^2$. Крім того, з системи (5) при $\mu = 0$ маємо, що

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{dx}\frac{\partial x}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \nu \sin x \cdot y + y(-\nu \sin x) \equiv 0.$$

Таким чином, згідно з теоремою 2 нижнє положення рівноваги маятника без тертя ($\mu = 0$) стійке.

Розглянемо тепер верхнє положення рівноваги маятника. Оскільки $x = \pi$, $y = 0$ — ненульовий розв'язок (5), то зробимо в системі (5) заміну $x = a + \pi$, $y = b$:

$$\frac{da}{dt} = b, \quad \frac{db}{dt} = +\nu \sin a - \mu b. \tag{6}$$

У змінних (a, b) рівняння коливання маятника має нульовий розв'язок, який відповідає верхньому положенню рівноваги. Аналіз систем (5) і (6) показує, що вони відрізняються лише знаком перед ν в другому рівнянні. Тому власні значення матриці з коефіцієнтів системи першого наближення для (6) задовольняють рівняння $\lambda^2 + \mu\lambda - \nu = 0$. Його корені $\lambda_1 = -\frac{\mu}{2} - \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + \nu}$, $\lambda_2 = -\frac{\mu}{2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + \nu}$. Оскільки $\lambda_2 > 0$ при $\mu \geq 0$ і $\nu > 0$, то верхнє положення рівноваги як для маятника з тертям, так і для маятника без тертя нестійке.

Приклад 3. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи

$$\frac{dx}{dt} = y - 3x - x^3, \quad \frac{dy}{dt} = 6x - 2y.$$

Розв'язання. Власні значення матриці, складеної із коефіцієнтів лінійної системи першого наближення

$$\frac{dx}{dt} = -3x + y, \quad \frac{dy}{dt} = 6x - 2y,$$

дорівнюють відповідно -5 і 0. Саме наявність нульового власного значення не дозволяє скористатися теоремою Ляпунова про стійкість за першим наближенням. Тому скористаємося другим методом Ляпунова. Зазначимо, що не існує загальної схеми побудови функції Ляпунова $V(x, y)$. Покажемо, що для заданої системи існує функція Ляпунова вигляду $V(x, y) = x^2 + by^2$, де b — деяка додатна стала. Зрозуміло, що $V(x, y) > 0$ при $x^2 + y^2 \neq 0$ і $V(0, 0) = 0$. Обчислимо повну похідну за t від $V(x, y)$ вздовж розв'язків заданої системи:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2x(y - 3x - x^3) + 2by(6x - 2y) =$$

$$= -2[3x^2 - (1 + 6b)xy + 2by^2] - 2x^4.$$

Підберемо b так, щоб вираз у квадратних дужках був невід'ємним для всіх x, y. Для цього досить, щоб дискримінант квадратного тричлена $3t^2 - (1 + 6b)t + 2b$ дорівнював нулю: $(1 + 6b)^2 - 24b = 0$. Звідси знаходимо $b = \dfrac{1}{6}$. Отже, $V(x, y) = x^2 + \dfrac{1}{6}y^2$, $\dfrac{dV}{dt} = -6\left(x - \dfrac{1}{3}y\right)^2 - 2x^4$, тому згідно з теоремою 3 розв'язок $x = 0$, $y = 0$ заданої системи асимптотично стійкий.

Завдання для самостійної роботи

1. За допомогою теореми Ляпунова про стійкість за першим наближенням дослідити на стійкість нульовий розв'язок систем:

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - \ln(1 + y) + \sin x, \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = e^x + \sin(x + y) - \cos^2 y; \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x^3y - x + y, \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = x^3 + y^2 + 2x - 3y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \ln(3e^y - 2\cos x), \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = 2e^x - \sqrt[3]{8 + 12y} + x^3; \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = xy - x^5 - 2x, \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = -15x^2y^2 - x + 3y; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2^x - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - y\right), \\ \dfrac{dy}{dt} = \operatorname{tg}(x - y) + xy; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + y + x^2y^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2y - xy - x. \end{cases}$

2. Для даних систем знайти всі положення рівноваги і дослідити їх на стійкість:

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 2x + x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 2y + 3x^5; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (x - 1)(y - 1), \\ \dfrac{dy}{dt} = xy - 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = xy + 4, \\ \dfrac{dy}{dt} = x^2 + y^2 - 17; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x^2 - x, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - x^2 - y; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y^2 + x^2 - 13, \\ \dfrac{dy}{dt} = y^2 - x^2 - 5; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x - 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = \ln(x^2 - y). \end{cases}$

3. За допомогою функцій Ляпунова дослідити стійкість нульового розв'язку таких систем:

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x - y^2 - x^3, \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + xy; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - x^3 + x^5, \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x^3 - y^5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 2x, \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y - x^3. \end{cases}$

Завдання для домашньої роботи.

I. Дослідити на стійкість за Ляпуновим розв'язок задачі Коші.

1. $3(t-1)\dot{x} = x, x(2) = 0$ (нестійкий).
2. $\dot{x} = 4x - t^2 x, x(0) = 0$ (стійкий).
3. $\dot{x} = t - x, x(0) = 1$ (стійкий).
4. $2t\dot{x} = x - x^3, x(1) = 0$ (нестійкий).

II. Накреслити на площині xOy траєкторії заданих систем в околі точки (0,0) і за кресленням з'ясувати, чи є стійким нульовий розв'язок.

1. $\dot{x} = -x, \dot{y} = -2y$ (асимптотично стійкий).
2. $\dot{x} = x, \dot{y} = 2y$ (нестійкий).
3. $\dot{x} = -x, \dot{y} = y$ (нестійкий).
4. $\dot{x} = -y, \dot{y} = 2x^3$ (стійкий).
5. $\dot{x} = y, \dot{y} = -\sin x$ (стійкий).
6. $\dot{x} = y, \dot{y} = x^3(1 + y^2)$ (нестійкий).
7. $\dot{x} = -y\cos x, \dot{y} = \sin x$ (стійкий).

III. За допомогою теореми Ляпунова про стійкість за першим наближенням дослідити на стійкість нульовий розв'язок.

1. $\begin{cases} \dot{x} = 2xy - x + y, \\ \dot{y} = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y \end{cases}$ (стійкий).

2. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2x, \\ \dot{y} = 3x^2 - x + 3y \end{cases}$ (нестійкий).

3. $\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x, \\ \dot{y} = \sqrt{4 + 8x} - 2e^y \end{cases}$ (нестійкий).

4. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(4y + e^{-3x}), \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x} \end{cases}$ (стійкий).

5. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(3e^y - 2\cos x), \\ \dot{y} = 2e^x - \sqrt[3]{8 + 12y} \end{cases}$ (нестійкий).

6. $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(y - x), \\ \dot{y} = 2^y - 2\cos(\frac{\pi}{3} - x) \end{cases}$ (стійкий).

7. $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(z - y) - 2x, \\ \dot{y} = \sqrt{9 + 12x} - 3e^y, \\ \dot{z} = -3y \end{cases}$ (нестійкий).

8. $\begin{cases} \dot{x} = e^x - e^{-3z}, \\ \dot{y} = 4z - 3\sin(x + y), \\ \dot{z} = \ln(1 + z - 3x) \end{cases}$ (нестійкий).

IV. Дослідити, при яких значеннях параметрів a та b є асимптотично стійким нульовий розв'язок.

1 $\begin{cases} \dot{x} = ax - 2y + x^2, \\ \dot{y} = x + y + xy \end{cases}$
$(-2 < a < 1)$.

2. $\begin{cases} \dot{x} = ax + y + x^2, \\ \dot{y} = x + ay + y^2 \end{cases}$
$(a < -1)$.

3 $\begin{cases} \dot{x} = x + ay + y^2, \\ \dot{y} = bx - 3y - x^2 \end{cases}$
$(ab < -3)$.

4. $\begin{cases} \dot{x} = y + \sin x, \\ \dot{y} = ax + by \end{cases}$
$(a < b < -1)$.

5 $\begin{cases} \dot{x} = 2e^{-x} - \sqrt{4 + ay}, \\ \dot{y} = \ln(1 + x + ay) \end{cases}$
$(0 < a < e)$.

6. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(e + ax) - e^y, \\ \dot{y} = bx + \mathrm{tg} y \end{cases}$
$(-be < a < e)$.

V. Дослідити, чи є стійким розв'язок $x = -t^2, y = t$ системи

$$\dot{x} = y^2 - 2ty - 2y - x, \quad \dot{y} = 2x + 2t^2 + e^{2t-2y}$$

(стійкий).

VI. Дослідити, чи є стійким розв'язок $x = \cos t$, $y = 2\sin t$ системи

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln\left(x + 2\sin^2 \dfrac{t}{2}\right) - \dfrac{y}{2}, \\ \dot{y} = (4 - x^2)\cos t - 2x\sin^2 t - \cos^3 t \end{cases}$$

(нестійкий).

VII. Для заданих систем знайти всі положення рівноваги та дослідити їх на стійкість.

1. $\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 - x, \\ \dot{y} = 3x - x^2 - y \end{cases}$
$((0, 0)$, нестійке)

2. $\begin{cases} \dot{x} = ax + y + x^2, \\ \dot{y} = x + ay + y^2 \end{cases}$
$((1, 2), (2, 1)$, нестійкі).

3. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \sin(x + y) \end{cases}$
$((2k\pi, 0)$, нестійке),
$(((2k + 1)\pi, 0)$, стійке).

4. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(-x + y^2), \\ \dot{y} = x - y - 1 \end{cases}$
$((3, 2)$, нестійке),
$((0, -1)$, стійке).

5. $\begin{cases} \dot{x} = 3 - \sqrt{4 + x^2 + y}, \\ \dot{y} = \ln(x^2 - 3) \end{cases}$
$((2,1)$, стійке$)$,
$((-2,1)$, нестійке$)$.

6. $\begin{cases} \dot{x} = e^y - e^x, \\ \dot{y} = \sqrt{3x + y^2} - 2 \end{cases}$
$((1,1)$, нестійке$)$,
$((-4,-4)$, стійке$)$.

7. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(1 + y + \sin x), \\ \dot{y} = 2 + \sqrt[3]{3\sin x - 8} \end{cases}$
$((2k\pi, 0)$, нестійке$)$,
$(((2k+1)\pi, 0)$, стійке$)$.

8. $\begin{cases} \dot{x} = -\sin y, \\ \dot{y} = 2x + \sqrt{1 - 3x - \sin y} \end{cases}$
$((-1, 2k\pi)$, стійке$)$,
$((-1, (2k+1)\pi)$, нестійке$)$.

VIII. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок, побудувавши функцію Ляпунова та застосувавши теореми Ляпунова або Четаєва.

1. $\begin{cases} \dot{x} = x^3 - y, \\ \dot{y} = x + y^3 \end{cases}$
(нестійкий)

2. $\begin{cases} \dot{x} = y - x + xy, \\ \dot{y} = x - y - x^2 - y^3 \end{cases}$
(стійкий).

3. $\begin{cases} \dot{x} = 2y^3 - x^5, \\ \dot{y} = -x - y^3 + y^5 \end{cases}$
(стійкий)

4. $\begin{cases} \dot{x} = xy - x^3 + y^3, \\ \dot{y} = x^2 - y^3 \end{cases}$
(нестійкий).

5. $\begin{cases} \dot{x} = y - 3x - x^3, \\ \dot{y} = 6x - 2y \end{cases}$
(стійкий)

6. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x - y^3, \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}$
(стійкий).

7. $\begin{cases} \dot{x} = -x - xy, \\ \dot{y} = y^3 - x^3 \end{cases}$
(нестійкий)

8. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - xy^2, \\ \dot{y} = 2x - y - y^3 \end{cases}$
(стійкий).

9. $\begin{cases} \dot{x} = -f_1(x) - f_2(y), \\ \dot{y} = f_3(x) - f_4(y) \end{cases}$
де $\operatorname{sgn} f_i(z) = \operatorname{sgn} z$
і = 1,2,3,4 (стійкий).

IX. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок, використовуючи відомі умови від'ємності дійсних частин усіх коренів многочлена, наприклад, умови Раусса-Гурвіца або критерій Михайлова.

1. $y''' + y'' + y' + 2y = 0$ (нестійкий).
2. $y''' + 2y'' + 2y' + 3y = 0$ (стійкий).
3. $y^{IV} + 2y''' + 4y'' + 3y' + 2y = 0$ (стійкий).
4. $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0$ (нестійкий).
5. $y^{IV} + 2y''' + 6y'' + 5y' + 6y = 0$ (стійкий).
6. $y^{IV} + 8y''' + 14y'' + 36y' + 45y = 0$ (нестійкий).
7. $y^{IV} + 13y''' + 16y'' + 55y' + 76y = 0$ (нестійкий).
8. $y^{IV} + 3y''' + 26y'' + 74y' + 85y = 0$ (нестійкий).
9. $y^{IV} + 3.1y''' + 5.2y'' + 9.8y' + 5.8y = 0$ (стійкий).
10. $y^{V} + 2y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 5y' + 4y = 0$ (нестійкий).
11. $y^{V} + 2y^{IV} + 5y''' + 6y'' + 5y' + 2y = 0$ (стійкий).
12. $y^{V} + 3y^{IV} + 6y''' + 7y'' + 4y' + 4y = 0$ (нестійкий).
13. $y^{V} + 4y^{IV} + 9y''' + 16y'' + 19y' + 13y = 0$ (нестійкий).
14. $y^{V} + 4y^{IV} + 16y''' + 25y'' + 13y' + 9y = 0$ (стійкий).
15. $y^{V} + 3y^{IV} + 10y''' + 22y'' + 23y' + 12y = 0$ (нестійкий).
16. $y^{V} + 5y^{IV} + 15y''' + 48y'' + 44y' + 74y = 0$ (стійкий).
17. $y^{V} + 2y^{IV} + 14y''' + 36y'' + 23y' + 68y = 0$ (нестійкий).

X. Дослідити, при яких значеннях параметрів a та b нульовий розв'язок є асимптотично стійким.

1. $y''' + ay'' + by' + 2y = 0$ $(a > 0, b > 0, a - b > 2)$.
2. $y''' + 3y'' + ay' + by = 0$ $(3a > b > 0)$.
3. $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + ay = 0$ $(0 < a < 2)$.
4. $y^{IV} + ay''' + y'' + 2y' + y = 0$ (нестійкий при всіх a).
5. $ay^{IV} + y''' + y'' + y' + by = 0$ $(a > 0,\ b > 0,\ a + b < 1)$.

6. $y^{IV} + y''' + ay'' + y' + by = 0$ $(b > 0, a > b + 1)$.

7. $y^{IV} + ay''' + 4y'' + 2y' + by = 0$ $(a > 0, b > 0, 8a - a^2 b > 4)$.

8. $y^{IV} + 2y''' + ay'' + by' + y = 0$ $(a > 2, b > 0, 2ab - b^2 > 4)$.

9. $y^{IV} + ay''' + 4y'' + by' + y = 0$ $\left(a > 0, b > 0, 2 - \sqrt{3} < \dfrac{a}{b} < 2 + \sqrt{3}\right)$.

10. $y^{IV} + 2y''' + 4y'' + ay' + by = 0$ $(0 < a < b, 0 < b < 8a - a^2)$.

Література: [1], с. 310–328; [2], с. 218–252; [3], с. 128–150; [4], с. 359–383; [5], с. 443–461; [6], с. 338–367; [7], с. 70–77.

Тема 15. ОСОБЛИВІ ТОЧКИ НА ПЛОЩИНІ ТА ЇХ КЛАСИФІКАЦІЯ

Розглянемо автономну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1}{dt} = P(x_1, x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = Q(x_1, x_2), \tag{1}$$

права частина якої визначена і неперервно диференційовна в деякій області D фазової площини X_1OX_2. Нехай існує ізольована точка $(x_1^0, x_2^0) \in D$, для якої $P(x_1^0, x_2^0) = 0$, $Q(x_1^0, x_2^0) = 0$. У цьому випадку (x_1^0, x_2^0) називають ізольованою особливою точкою або положенням рівноваги системи (1). При зроблених на P і Q припущеннях через кожну точку області D проходить єдина фазова крива (траєкторія) системи (1). Нас буде цікавити питання про поведінку цих кривих в околі особливої точки (x_1^0, x_2^0).

Зробимо в (1) заміну $x_1 = x + x_1^0$, $x_2 = y + x_2^0$ (паралельний перенос осей координат) і запишемо для одержаної системи відповідну їй лінійну систему першого наближення

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + ly. \tag{2}$$

Тут a, b, c, l відповідно дорівнюють значенню частинних похідних $\dfrac{\partial P}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial P}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x_2}$ в точці (x_1^0, x_2^0). Зазначимо, що ізольованій особливій точці (x_1^0, x_2^0) системи (1) відповідає положення рівноваги $x = 0, y = 0$ системи (2). Легко переконатись, що при $al - bc \neq 0$ точка $(0, 0)$ є ізольованою особливою точкою системи (2). У багатьох випадках поведінка траєкторій системи (1) в околі (x_1^0, x_2^0) збігається з поведінкою траєкторій системи (2) в околі $(0, 0)$.

Наслідуючи Пуанкаре, характер особливої точки будемо досліджувати на прикладі системи (2). Нехай $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ така невироджена матриця, що $T^{-1}AT = J$ — нормальна жорданова форма матриці $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & l \end{pmatrix}$. Якщо в (2) зробити заміну $x = \alpha y_1 + \beta y_2$, $y = \gamma y_1 + \delta y_2$ (поворот осей координат), то в нових змінних (2) набуде вигляду

$$\frac{dY}{dt} = JY, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Залежно від структури матриці J, тобто від власних значень λ_1 і λ_2 матриці A, існує така класифікація:

I) λ_1 і λ_2 — дійсні й різні. У цьому випадку система (3) набуває вигляду

$$\frac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1, \quad \frac{dy_2}{dt} = \lambda_2 y_2,$$

і побудова її розв'язків не викликає труднощів. Якщо λ_1 і λ_2 одного знаку, то особлива точка $(0, 0)$ називається вузлом (асимптотично стійким — при $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ і нестійким — при $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$). Якщо ж λ_1 і λ_2 різних знаків, то особлива точка $(0, 0)$ — сідло (сідло — нестійке положення рівноваги).

II) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Система (3) залежно від структури матриці J може мати вигляд

$$\frac{dy_1}{dt} = \lambda y_1, \quad \frac{dy_2}{dt} = \lambda y_2, \tag{4}$$

або

$$\frac{dy_1}{dt} = \lambda y_1 + y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = \lambda y_2. \tag{5}$$

В обох випадках особлива точка називається вузлом: дикритичним вузлом у випадку (4) і виродженим вузлом у випадку (5). При $\lambda > 0$ вузол є нестійким положенням рівноваги, а при $\lambda < 0$ — асимптотично стійким.

Зазначимо, що на практиці зручно знаходити прямі $y = kx$ (або $x = ky$), на яких лежать траєкторії системи (2). Для цього досить підставити $y = kx$ $(x = ky)$ до одного з рівнянь

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + ly}{ax + by}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{ax + by}{cx + ly}.$$

III) $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\nu$ — комплексно спряжені. Тоді (3) можна переписати

$$\frac{dy_1}{dt} = \mu y_1 - \nu y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = \nu y_1 + \mu y_2.$$

Якщо $\mu = \operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda_2 \neq 0$, то особлива точка називається фокусом (асимптотично стійким при $\mu < 0$ і нестійким — при $\mu > 0$). Якщо ж $\mu = 0$, то особлива точка називається центром (центр — стійке положення рівноваги).

Приклад 1. Визначити тип положення рівноваги системи

$$\frac{dx}{dt} = x + y, \quad \frac{dy}{dt} = -2x + 4y$$

і зобразити на рисунку поведінку фазових кривих.

Розв'язання. Власні значення матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, тобто корені рівняння

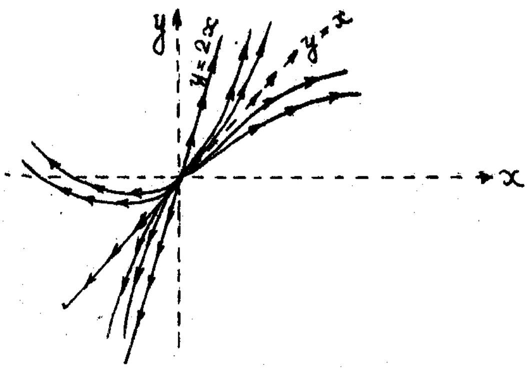
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

додатні й різні: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Тому особлива точка $x = y = 0$ — нестійкий вузол. Знайдемо прямі $y = kx$, на яких лежать траєкторії системи. Для цього підставимо $y = kx$ у рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x+4y}{x+y},$$

внаслідок чого одержимо $k = \dfrac{-2+4k}{1+k}$, або $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Отже, $y = x$ і $y = 2x$ — шукані прямі.

З'ясуємо тепер, якої з наведених двох прямих дотикаються траєкторії системи в початку координат. Для цього знайдемо власний вектор матриці A, який відповідає меншому за абсолютною величиною власному значенню $\lambda_1 = 2$. Легко переконатись, що цей вектор має координати (1;1) і він паралельний прямій $y = x$. Отже, траєкторії дотикаються прямої $y = x$ (див. рис. 1).



Стрілками на рисунку позначено напрямок руху по траєкторіях заданої системи при зростанні t.

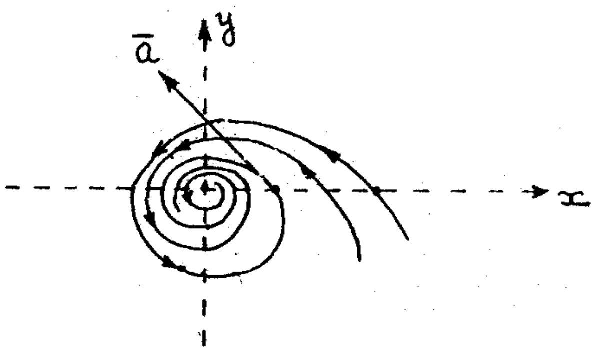
Приклад 2. Встановити характер особливої точки системи

$$\frac{dx}{dt} = -2y - 3x, \quad \frac{dy}{dt} = 4x - y.$$

Розв'язання. Корені $\lambda_{1,2} = -2 \pm i\sqrt{7}$ рівняння

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

комплексно спряжені і $\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda_2 = -2 < 0$, тому особлива точка $(0, 0)$ — асимптотично стійкий фокус. Фазові криві в цьому випадку — спіралі, рух по яких при зростанні t здійснюється в напрямку особливої точки. З'ясуємо тепер, буде цей рух здійснюватись за ходом чи проти ходу годинникової стрілки. Для цього зафіксуємо на площині довільну точку, наприклад $M(1; 0)$. Згідно із заданою системою знаходимо в точці M вектор швидкості $\vec{a} = \left(\dfrac{dx}{dt}; \dfrac{dy}{dt}\right) = (-2y - 3x; 4x - y) = (-3; 4)$ (див. рис. 2). Вектор $\vec{a}$ вказує на те, що зростанню t відповідає рух проти ходу годинникової стрілки



Приклад 3. Знайти всі особливі точки системи

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{x^2 - y + 2} - 2, \quad \frac{dy}{dt} = \operatorname{arctg}(x^2 + xy) \tag{6}$$

і дослідити їх характер.

Розв'язання. Система рівнянь

$$\sqrt{x^2 - y + 2} = 0, \quad \operatorname{arctg}(x^2 + xy) = 0$$

має три розв'язки $x_1 = 1$, $y_1 = -1$; $x_2 = 0$, $y_2 = -2$; $x_3 = -2$, $y_3 = 2$. $M_1(1,1)$, $M_2(0,-2)$ і $M_3(-2,2)$ — ізольовані особливі точки системи диференціальних рівнянь (6). Згідно з (2) матриця A із коефіцієнтів лінійної системи першого наближення для (6) в околі точки M_k $(k = 1, 2, 3)$ має вигляд

$$A = \left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2 - y} - 2\right) & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2 - y} - 2\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\operatorname{arctg}(x^2 + xy) & \dfrac{\partial}{\partial y}\operatorname{arctg}(x^2 + xy) \end{pmatrix}\right|_{\substack{x = x_k,\\ y = y_k.}}$$

Для точки $M_1(1,1)$ маємо

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ \dfrac{3}{5} & \dfrac{1}{5} \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \lambda & -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ \dfrac{3}{5} & \dfrac{1}{5} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Звідси знаходимо, що власні значення $\lambda_{1,2} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \pm i\dfrac{1}{20}\sqrt{80\sqrt{2} - 54}$ матриці A комплексно спряжені і $\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda_2 > 0$, тому $M_1(1,1)$ особлива точка типу фокус (нестійкий).

Точці $M_2(0,2)$ відповідає матриця $A = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, власні значення якої $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ дійсні і різних знаків. Згідно з наведеною вище класифікацією, точка $M_2(0,-2)$ — сідло.

У випадку точки $M_3(-2,2)$ матриця $A = \begin{pmatrix} -1 & -1/4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ і її власні значення $\lambda_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3}}{2}$ від'ємні, тому $M_3(-2,2)$ — асимптотично стійкий вузол.

Завдання для самостійної роботи

1. Визначити тип положення рівноваги $x = 0$, $y = 0$ кожної з таких систем і зобразити на рисунку поведінку траєкторій:

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y + x, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -y + 2x; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 3y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -6y - 5x, \\ \dfrac{dy}{dt} = y + 3x; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y - 3x; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2y - 5x; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - x. \end{cases}$

2. Знайти всі особливі точки і дослідити їх характер:

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sin x, \\ \dfrac{dy}{dt} = \sin y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \ln \dfrac{y^2 - y + 1}{3}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x^2 - y^2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = e^{x^2-y} - e, \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = \sqrt{(x-y)^2+3} - 2. \end{cases}$

Завдання для домашньої роботи.

I. Дослідити особливі точки заданих рівнянь та систем. Навести поведінку інтегральних кривих на площині xOy.

1. $y' = \dfrac{2x+y}{3x+4y}$ (сідло).
2. $y' = \dfrac{x-4y}{2y-3x}$ (вузол).
3. $y' = \dfrac{y-2x}{y}$ (фокус).
4. $y' = \dfrac{x+4y}{2x+3y}$ (вузол).
5. $y' = \dfrac{x-2y}{3x-4y}$ (сідло).
6. $y' = \dfrac{2x-y}{x-}$ (центр).
7. $y' = \dfrac{y-2x}{2y-3x}$ (вироджений вузол).
8. $y' = \dfrac{4y-2x}{x+y}$ (вузол).
9. $y' = \dfrac{y}{x}$ (особливий вузол).
10. $y' = \dfrac{4x-y}{3x-2y}$ (фокус).

11. $\begin{cases} \dot{x} = 3x, \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$
(вузол)

12. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x \end{cases}$
(вироджений вузол).

13. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = -6x - 5y \end{cases}$
(фокус)

14. $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$
(сідло).

15. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y, \\ \dot{y} = 2x + 2y \end{cases}$
(центр)

16. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = y - x \end{cases}$
(вироджений вузол).

17. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 4y - 6x \end{cases}$
(особливі точки

18. $\begin{cases} \dot{x} = y - 2x, \\ \dot{y} = 2y - 4x \end{cases}$
заповнюють пряму).

II. Знайти та дослідити особливі точки заданих рівнянь і систем.

1. $y' = \dfrac{2y - x}{3x + 6}$ $\quad$ $((-2, -1)$ — вузол).

2. $y' = \dfrac{2x + y}{x - 2y - 5}$ $\quad$ ((1,2) — фокус).

3. $y' = \dfrac{4y^2 - x^2}{2xy - 4y - 8}$ $\quad$ ((4,2) — вузол,
(-2,-1) — фокус).

4. $y' = \dfrac{2y}{x^2 - y^2 - 1}$ $\quad$ ((1,0) — особливий вузол, (-1,0) — сідло).

5. $y' = \dfrac{x^2 + y^2 - 2}{x - y}$ ((1,1) — фокус, (-1,-1) — сідло).

6. $y' = \dfrac{y + \sqrt{1 + 2x^2}}{x + y + 1}$ ((0,-1) — вироджений вузол, (2,-3) — сідло).

7. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = \ln(1 - x + x^2) - \ln 3 \end{cases}$ ((2,4) — вузол, (-1,1) — сідло).

8. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(2 - y^2), \\ \dot{y} = e^x - e^y \end{cases}$ ((1,1) — фокус, (-1,-1) — сідло).

9. $\begin{cases} \dot{x} = (2x - y)(x - 2), \\ \dot{y} = xy - 2 \end{cases}$ ((2,1) — вузол, (1,2) — сідло, (-1,-2) — фокус).

10. $\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{x^2 - y + 2} - 2, \\ \dot{y} = \mathrm{arctg}(x^2 + xy) \end{cases}$ ((1,-1) — фокус, (0,-2) — сідло, (-2,2) — вузол).

11. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = x^2 - (y - 2)^2 \end{cases}$ ((-2,4) — вузол, (1,1) — фокус).

12. $\begin{cases} \dot{x} = \ln \dfrac{y^2 - y + 1}{3}, \\ \dot{y} = x^2 - y^2 \end{cases}$ ((-2,2) — вироджений вузол, (-1,-1) — сідло).

13. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(1 - y + y^2), \\ \dot{y} = 3 - \sqrt{x^2 + 8y} \end{cases}$ ((3,0) — фокус, (1,1) — вузол, (-1,1) і (-3,0) — сідла).

14. $\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{(x - y)^2 + 3} - 2, \\ \dot{y} = e^{y^2 - x} - e \end{cases}$ ((0,1) і (0,-1) — сідла, (-1,0) — фокус, (3,2) — вузол).

Література: [1], с. 78–84; [2], с. 112–114; [3], с. 144–150; [4], с. 368–373; [5], с. 78–87; [6], с. 368–388; [7], с. 78–85.

Тема 16. ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА ТА ЙОГО ВИКОРИСТАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Нехай $f(t)$ — комплекснозначна функція дійсної змінної $t \in (-\infty, \infty)$, яка задовольняє умови: а) на кожному скінченному відрізку осі t функція $f(t)$ неперервна, крім, можливо, скінченного числа точок розриву першого роду; б) $f(t) = 0$ при $t < 0$; в) існують такі сталі c і α, що для всіх $t \geq 0$ виконується нерівність $|f(t)| \leq ce^{\alpha t}$. Функцію $f(t)$, що задовольняє ці умови, називають **оригіналом**, а функцію

$$F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t) dt \qquad (1)$$

комплексної змінної p називають перетворенням Лапласа функції $f(t)$ або зображенням функції $f(t)$. Зв'язок між оригіналом $f(t)$ і його зображенням $F(p)$ позначають $f(t) \risingdotseq F(p)$ або $F(p) \fallingdotseq f(t)$. Відзначимо, що $F(p)$ — аналітична функція комплексної змінної в півплощині $\operatorname{Re} p > \alpha$.

Потрібно знати основні властивості перетворення Лапласа.

1) Якщо $f(t) \risingdotseq F(p)$ і $g(t) \risingdotseq G(p)$, то для довільних комплексних λ, μ

$$\lambda f(t) + \mu g(t) \risingdotseq \lambda F(p) + \mu G(p). \tag{2}$$

2) Якщо $f(t) \risingdotseq F(p)$, то для кожного $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \tag{3}$$

3) Якщо $f(t), f'(t), ..., f^{(n)}(t)$ — оригінали і $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - ... -$$
$$-pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0), \tag{4}$$

де

$$f^{(k)}(0) = \lim_{t \to +0} f^{(k)}(t), \quad k = \overline{1, n-1}.$$

4) Якщо $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$(-t)^n f(t) \risingdotseq F^{(n)}(p). \tag{5}$$

5) Якщо $f(t) \risingdotseq F(p)$ і $f(t) = 0$ при $t < \tau$, де $\tau > 0$, то

$$f(t - \tau) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p). \tag{6}$$

6) Якщо $f(t) \risingdotseq F(p)$, то для кожного комплексного λ

$$e^{\lambda t} f(t) \risingdotseq F(p - \lambda). \tag{7}$$

Приклад 1. Знайти перетворення Лапласа функцій 1, $e^{\lambda t}$, $\sin \omega t$, $\cos \omega t$.

Розв'язання. Згідно з означенням зображення маємо, що

$$1 \risingdotseq \int\limits_0^\infty e^{-pt} 1 dt = \lim_{T \to \infty} \int\limits_0^T e^{-pt} dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{-T}(e^{-pT} - 1) = \frac{1}{p}.$$

Отже, $1 \risingdotseq \dfrac{1}{p}$. Для знаходження зображення функції $e^{\lambda t}$ використаємо формулу (7) при $f(t) = 1$, внаслідок чого одержимо $e^{\lambda t} \cdot 1 \risingdotseq \dfrac{1}{p-\lambda}$. Функції $\sin \omega t$ і $\cos \omega t$ виразимо через показникову функцію згідно з формулами Ейлера:

$$\sin \omega t = \frac{1}{2i} e^{i\omega t} - \frac{1}{2i} e^{-i\omega t}, \quad \cos \omega t = \frac{1}{2i} e^{i\omega t} + \frac{1}{2i} e^{-i\omega t}.$$

Тоді із співвідношення $e^{\lambda t} \risingdotseq \dfrac{1}{p-\lambda}$ і властивості 1) знаходимо

$$\sin \omega t = \frac{1}{2i} e^{i\omega t} - \frac{1}{2i} e^{-i\omega t} \risingdotseq \frac{1}{2i} \frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{2i} \frac{1}{p + i\omega} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2},$$

$$\cos \omega t = \frac{1}{2i} e^{i\omega t} + \frac{1}{2i} e^{-i\omega t} \risingdotseq \frac{1}{2i} \frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{2i} \frac{1}{p + i\omega} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

Приклад 2. Знайти зображення функцій t^n, $t^n e^{\lambda t}$, де n — натуральне.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(t) = e^{\lambda t}$. З попереднього прикладу випливає, що $f(t) = e^{\lambda t} \risingdotseq \dfrac{1}{p-\lambda} = F(p)$. Тоді згідно з (5), маємо

$$(-t)^n e^{\lambda t} \risingdotseq F^{(n)}(p) = \left(\frac{1}{p-\lambda} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(p-\lambda)^{n+1}},$$

тобто

$$t^n e^{\lambda t} \risingdotseq \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}.$$

З останньої формули при $\lambda = 0$ одержимо $t^n \risingdotseq \dfrac{n!}{p^{n+1}}$.

Випишемо тепер таблицю оригіналів і зображень, які часто зустрічаються в застосуваннях:

$f(t)$	1	$e^{\lambda t}$	t^n	$e^{\lambda t}t^n$	$\sin\omega t$	$\cos\omega t$
$F(p)$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1}{p-\lambda}$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	$\dfrac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$

$f(t)$	$e^{\lambda t}\sin\omega t$	$e^{\lambda t}\cos\omega t$
$F(p)$	$\dfrac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$	$\dfrac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$

Слід пам'ятати, що коли $F(p)$ є правильним раціональним дробом, розклад якого на прості дроби має вигляд

$$F(p) = \sum_{k=1}^{r}\sum_{s=1}^{n_k}\frac{A_{ks}}{(p-p_k)^s}, \tag{8}$$

де A_{ks} — задані комплексні числа, $n_1+n_2+...+n_r = n$ — степінь многочлена в знаменнику дробу $F(p)$, $p_1, p_2, ..., p_r$ — різні корені цього многочлена, а $n_1, n_2, ..., n_r$ — їх кратності, то оригінал $f(t)$, який має зображення $F(p)$, визначається рівністю

$$f(t) = \sum_{k=1}^{r}\sum_{s=1}^{n_k}A_{ks}\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}e^{p_k t}. \tag{9}$$

Приклад 3. Знайти оригінал $f(t)$, який має зображення

$$F(p) = \frac{2p^3+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3}.$$

Розв'язання. Розкладемо $F(p)$ на прості дроби

$$F(p) = \frac{2p^3+p^2+2p+2}{p^3(p^2+2p+2)} = \frac{2p^3+p^2+2p+2}{p^3[p-(-1+i)][p-(-1-i)]} =$$

$$= \frac{A}{p^3}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{p}+\frac{D}{p-(-1+i)}+\frac{E}{p-(-1-i)} =$$

$$= \frac{1}{p^3} + \frac{-i}{p-(-1+i)} + \frac{i}{p-(-1-i)}$$

і скористаємось формулами (8), (9). Тоді одержимо

$$f(t) = 1 \cdot \frac{t^{3-1}}{(3-1)!} e^{0 \cdot t} - ie^{(-1+i)t} + ie^{(-1-i)t} =$$

$$= \frac{t^2}{2} - ie^{-t}(\cos t + i \sin t) + ie^{-t}(\cos t - i \sin t) = \frac{t^2}{2} + 2e^{-t} \sin t.$$

Приклад 4. Знайти розв'язок диференціального рівняння $x''(t) + x(t) = 4 \sin t$, який задовольняє початкові умови $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

Розв'язання. Шукаємо розв'язок $x = x(t)$ даної задачі такий, що $x(t) = 0$ при $t < 0$. Нехай $x(t) \risingdotseq X(p)$. Застосуємо до рівняння $x''(t) + x(t) = 4 \sin t$ перетворення Лапласа, враховуючи при цьому властивості 1), 3) і співвідношення $\sin t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$:

$$p^2 X(p) - px(0) - x'(0) + X(p) = \frac{4}{p^2+1}.$$

За допомогою початкових умов звідси знаходимо, що

$$X(p) = \frac{4}{(p^2+1)^2} = \frac{4}{(p-i)^2(p+i)^2} =$$

$$= \frac{-i}{p-i} + \frac{-1}{(p-i)^2} + \frac{i}{p+i} + \frac{-1}{(p+i)^2}.$$

Оригінал $x(t)$, який має зображення $X(p)$, визначаємо із (8), (9):

$$x(t) = -ie^{it} - 1 \cdot te^{it} + ie^{-it} - 1 \cdot te^{-it} =$$

$$= -i(e^{it} - e^{-it}) - t(e^{it} - e^{-it}) = 2 \sin t - 2t \cos t.$$

Отже, $x(t) = 2 \sin t - 2t \cos t$ є розв'язком заданої задачі Коші.

Приклад 5. Побудувати такий розв'язок $(x(t), y(t))$ системи диференціальних рівнянь $x'(t) = 2x(t) + y(t)$, $y'(t) = 3x(t) + 4y(t)$, який задовольняє початкові умови $x(0) = 4$, $y(0) = 8$.

Розв'язання. Нехай $x(t) \risingdotseq X(p)$, $y(t) \risingdotseq Y(p)$. Тоді система диференціальних рівнянь із заданими початковими умовами приводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $X(p)$ та $Y(p)$:

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) = 2X(p) + Y(p), \\ pY(p) - y(0) = 3X(p) + 4Y(p), \end{cases}$$

$$\begin{cases} (p-2)X(p) - Y(p) = 4, \\ -3X(p) + (p-4)Y(p) = 8. \end{cases}$$

Зображенням $X(p)$ і $Y(p)$,

$$X(p) = \frac{1}{p-1} + \frac{3}{p-5}, \quad Y(p) = \frac{-1}{p-1} + \frac{9}{p-5},$$

що є розв'язком останньої системи, відповідають оригінали

$$x(t) = e^t + 3e^{5t}, \quad y(t) = -e^t + 9e^{5t},$$

які визначають розв'язок системи диференціальних рівнянь із заданими початковими умовами.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти зображення $F(p)$ наступних оригіналів $f(t)$:

а) $f(t) = \cos 5t(t^4 - it^2 + 2)$; б) $f(t) = t^2 e^{-t} \cos 2t$; в) $f(t) = (t+5)e^{-2t} \sin 3t$; г) $f(t) = (it^3 - 2t^2 + i - 1)\sin 2t$.

2. За заданим зображенням $F(p)$ відновити оригінал $f(t)$:

а) $F(p) = \dfrac{3p-2}{p^4 + 4p^3 + 5p^2}$; б) $F(p) = \dfrac{p^3 - p - 1}{(p^2 + 6p + 13)(p-i)^2}$;

в) $F(p) = \dfrac{1}{p^4 + 6p^2 + 9}$; г) $F(p) = \dfrac{7p^3 - p}{p^4 + 4p^2 + 4}$.

3. Знайти розв'язки диференціальних рівнянь із заданими початковими умовами:

а) $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = 6te^t,$ $x(0) = x'(0) = 0;$

б) $x''(t) - x(t) = 2e^t - t^2,$ $x(0) = 0, x'(0) = 1;$

в) $x''(t) - 5x'(t) + 4x(t) = 4t^2e^t,$ $x(0) = 1, x'(0) = 2;$

г) $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = \sin t,$ $x(0) = 2, x'(0) = -1.$

4. Розв'язати такі задачі Коші:

а) $\begin{cases} x'(t) - x(t) + y(t) = 0, \\ y'(t) + 4x(t) - y(t) = 0, \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = -1;$

б) $\begin{cases} x'(t) + x(t) - 8y(t) = 0, \\ y'(t) - x(t) - y(t) = 0, \end{cases}$ $x(0) = -1, y(0) = 1;$

в) $\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t), \\ y'(t) = 3y(t) - 2x(t), \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 1;$

г) $\begin{cases} x'(t) = x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + y(t), \end{cases}$ $x(0) = -2, y(0) = 0.$

Завдання для домашньої роботи.

За допомогою операційного числення знайти розв'язки таких задач:

1. $\dot{x} + x = 1;$ $x(0) = 0.$
2. $\ddot{x} + 4x = 1;$ $x(0) = \dot{x}(0) = 0.$
3. $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = t;$ $x(0) = \dot{x}(0) = 0.$
4. $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = \sin t;$ $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 2.$
5. $\ddot{x} + x = \sin 2t;$ $x(0) = \dot{x}(0) = 0.$
6. $\ddot{x} + x = t\cos 2t;$ $x(0) = \dot{x}(0) = 0.$
7. $\dddot{x} + x = 0;$ $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 3, \ddot{x}(0) = 8.$
8. $\ddot{x} - 4x = t - 1;$ $x(0) = \dot{x}(0) = 0.$
9. $\ddot{x} + \dot{x} = t^2 + 2t;$ $x(0) = 4, \dot{x}(0) = -2.$
10. $\ddot{x} - \dot{x} = te^t;$ $x(0) = \dot{x}(0) = 0.$
11. $\begin{cases} 3\dot{x} + 2x + y = 1, \\ x + 4\dot{y} + 3y = 0; \end{cases}$ $\begin{matrix} x(0) = 0, \\ y(0) = 0. \end{matrix}$
12. $\begin{cases} \dot{x} + 7x = y + 5, \\ \dot{y} + 2x + 5y = -37t; \end{cases}$ $\begin{matrix} x(0) = 0, \\ y(0) = 0. \end{matrix}$

13. $\begin{cases} \dot{x} + y = 0, & x(0) = 2, \\ \dot{y} + x = 0; & y(0) = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot{x} + x - 2y = 0, & x(0) = 1, \\ \dot{y} + x + 4y = 0; & y(0) = 1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot{x} = -y, & x(0) = 1, \\ \dot{y} = 2(x + y); & y(0) = 1. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dot{x} + 2y = 3t, & x(0) = 2, \\ \dot{y} - 2x = 4; & y(0) = 3. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot{x} + x = y + e^t, & x(0) = 1, \\ \dot{y} + y = x + e^t; & y(0) = 1. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, & x(0) = 1, \\ \dot{y} = x + y; & y(0) = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dot{x} + 7x - y = 0, & x(0) = 1, \\ \dot{y} - 2x + 5y = 0; & y(0) = 1. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dot{x} + \dot{y} = 0, & x(0) = 1, \\ x - 2\dot{y} + x = 0; & y(0) = -1. \end{cases}$

Література: [4], с. 286–304; [6], с. 411–431.

Тема 17. РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Розглянемо **лінійне рівняння з частинними похідними першого порядку**

$$a_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+...+a_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=0, \tag{1}$$

в якому $a_k=a_k(x_1,...,x_n)$ — задані неперервно диференційовні в області $(x_1,...,x_n)\in D$ функції, $u=u(x_1,...,x_n)$ — невідома функція. Вважатимемо, що a_k, $k=\overline{1,n}$ одночасно не перетворюються в нуль в області D.

Задача розв'язання рівняння (1) зводиться до задачі інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі

$$\frac{dx_1}{a_1}=\frac{dx_2}{a_2}=...=\frac{dx_n}{a_n}. \tag{2}$$

Якщо відомо $(n-1)$ незалежних в D перших інтегралів системи (2)

$$\varphi_1(x_1,...,x_n)=C_1,...,\varphi_{n-1}(x_1,...,x_n)=C_{n-1}, \tag{3}$$

то загальний розв'язок рівняння (1) має вигляд

$$u=F(\varphi_1(x_1,...,x_n),...,\varphi_{n-1}(x_1,...,x_n)),$$

де F — довільна диференційовна функція. Зазначимо, що інтегральні криві системи (2) називаються **характеристиками рівняння (2)**.

Квазілінійним рівнянням з частинними похідними першого порядку називається рівняння

$$a_1(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+...+a_n(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=$$

$$= a(x_1, ..., x_n, u). \tag{4}$$

Припустимо, що a_k $(k = \overline{1, n})$ і a неперервно диференційовні функції своїх аргументів $x_1, ..., x_n, u$ в деякій області $G \subset R^{n+1}$, причому

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + a^2 \neq 0 \quad \forall (x_1, ..., x_n, u) \in G.$$

Рівнянню (4) поставимо у відповідність систему звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі

$$\frac{dx_1}{a_1} = ... = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{du}{da}. \tag{5}$$

Інтегральні криві системи (5) називаються **характеристиками** квазілінійного рівняння (4). Якщо

$$\varphi_1(x_1, ..., x_n, u) = C_1, ..., \varphi_n(x_1, ..., x_n, u) = C_n \tag{6}$$

n незалежних в G перших інтегралів системи (5), то всі розв'язки рівняння (4) визначаються з рівності $\Phi(\varphi_1, ..., \varphi_n) = 0$, в якій Φ — довільна диференційовна функція.

Задачею Коші для рівняння (4) називається задача про знаходження розв'язку $u = u(x_1, ..., x_n)$ рівняння (4), який на заданій поверхні γ розміру $n - 1$ перетворюється в задану функцію $v(x_1, ..., x_n)$. При цьому початкова умова (γ, v) називається **нехарактеристичною** для рівняння (4) в точці $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0) \in \gamma$, якщо $(a_1, ..., a_n)$ в цій точці не дотикається до поверхні γ. Відомо [1], що розв'язок задачі Коші з нехарактеристичною в точці x^0 початковою умовою в деякому околі цієї точки існує і єдиний.

Для знаходження розв'язку рівняння (4), який задовольняє початкову умову $u|_\gamma = v(x_1, ..., x_n)$, де поверхня γ задана, наприклад, рівнянням $\Psi(x_1, ..., x_n) = 0$, потрібно із системи рівнянь

$$\Psi_k(x_1, ..., x_n, u) = C_k, \quad k = \overline{1, n},$$

$$\Psi(x_1, ..., x_n) = 0, \quad u = v(x_1, ..., x_n)$$

виключити змінні $x_1, ..., x_n, u$ і одержати співвідношення $\Psi(C_1, ..., C_n) = 0$. Підставивши сюди значення замість C_k $(k = \overline{1, n})$ із формул (6), матимемо

$$\Psi(\varphi_1(x_1, ..., x_n, u), ..., \varphi_n(x_1, ..., x_n, u)) = 0.$$

Дана рівність визначає розв'язок задачі Коші в неявному вигляді.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(x + 2y)\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Розв'язання. Відповідне заданому рівняння в симетричній формі $\dfrac{dx}{x + 2y} = \dfrac{dy}{-y}$ лінійне неоднорідне відносно x:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y} - 2. \tag{7}$$

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд $x = \dfrac{C}{y}$, а частинний розв'язок неоднорідного рівняння — $x = -y$. Тому $x = \dfrac{C}{y} - y$ — загальний розв'язок рівняння (7). Звідси знаходимо його перший інтеграл $xy + y^2 = C$. Отже, співвідношення $u = F(xy + y^2)$, де F — довільна диференційовна функція, визначає загальний розв'язок рівняння з частинними похідними.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$x^2 z\frac{\partial z}{\partial x} + y^2 z\frac{\partial z}{\partial y} = x + y. \tag{8}$$

Розв'язання. Рівняння (8) — квазілінійне рівняння з частинними похідними. Відповідна йому система звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі має вигляд

$$\frac{dx}{x^2z} = \frac{dy}{y^2z} = \frac{dz}{x+y}. \tag{9}$$

Із першого з цих рівнянь знаходимо, що $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = C_1$ — перший інтеграл системи (9). Утворимо далі інтегровану комбінацію

$$\frac{ydx + xdy}{yx^2z + xy^2z} = \frac{dz}{x+y}$$

або

$$\frac{d(xy)}{xy \cdot z} = dz.$$

Розв'язавши дане рівняння з відокремлюваними змінними, одержимо ще один перший інтеграл системи (9): $\ln|xy| - \dfrac{1}{2}z^2 = C_2$. Тоді загальний розв'язок рівняння (8) можна подати в неявному вигляді $\Phi\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}, \ln|xy| - \dfrac{1}{2}z^2\right) = 0$. Тут $\Phi(u,v)$ — довільна диференційована функція двох змінних.

Приклад 3. Розв'язати задачу Коші

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy, \quad z|_{x=2} = y^2 + 1.$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку незалежні перші інтеграли системи в симетричній формі

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - xy}.$$

З першого рівняння цієї системи знаходимо $\dfrac{y}{x} = C_1$ — перший інтеграл. Для знаходження ще одного першого інтеграла побудуємо інтегровану комбінацію

$$\frac{ydx + xdy}{xy + yx} = \frac{dz}{z - xy}, \quad \frac{d(xy)}{2xy} = \frac{dz}{z - xy}.$$

Якщо позначити $xy = t$, то одержимо лінійне неоднорідне рівняння

$$\frac{dz}{dt} = \frac{z}{2t} - \frac{1}{2},$$

загальний розв'язок якого має вигляд $z = C_2\sqrt{t} - t$. Тоді $\dfrac{z + xy}{\sqrt{xy}} = C_2$ — перший інтеграл системи в симетричній формі.

Виключимо далі із системи рівнянь

$$\frac{y}{x} = C_1, \quad \frac{z + xy}{\sqrt{xy}} = C_2, \quad x = 2, \quad z = y^2 + 1$$

змінні x, y, z. Маємо

$$y = 2C_1, \quad \frac{y^2 + 1 + 2y}{\sqrt{2y}} = C_2$$

або

$$\frac{(2C_1 + 1)^2}{2\sqrt{C_1}} = C_2.$$

Підставимо в останню рівність замість C_1 і C_2 їх значення з перших інтегралів. Тоді дістанемо рівність

$$\frac{\left(2\dfrac{y}{x} + 1\right)^2}{2\sqrt{\dfrac{y}{x}}} = \frac{z + xy}{\sqrt{xy}}.$$

Звідси знаходимо, що $z = \dfrac{(2y+x)^2}{2x} - xy$ є розв'язком задачі Коші.

Приклад 4. Знайти поверхню, яка перетинає під прямим кутом сім'ю сфер $x^2+y^2+z^2 = C^2$ і проходить через криву $x = 1$, $y^2+z^2 = 1$.

Розв'язання. Якщо поверхні $u(x,y,z) = 0$ і $v(x,y,z) = 0$ перетинаються під прямим кутом, то їх нормальні вектори $\operatorname{grad} u = \left\{\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}\right\}$ і $\operatorname{grad} v = \left\{\dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial z}\right\}$ перпендикулярні. Це означає, що скалярний добуток цих векторів дорівнює нулеві:

$$\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

У нашому випадку $\operatorname{grad} v = \{2x, 2y, 2z\}$, тому рівняння для знаходження u набуває вигляду

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Відповідна система звичайних диференціальних рівнянь $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$ має два незалежні перші інтеграли: $\frac{y}{x} = C_1$, $\quad \frac{z}{x} = C_2$. Отже, ортогональні поверхні до сім'ї сфер $x^2+y^2+z^2 = C^2$ визначаються співвідношенням $u = F\left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x}\right)$, в якому F — довільна диференційовна функція.

Знайдемо ту з поверхонь, яка проходить через криву $x = 1$, $y^2+z^2 = 1$. Для цього виключимо з рівнянь $\frac{y}{x} = C_1$, $\frac{z}{x} = C_2$, $x = 1$, $y^2+z^2 = 1$ змінні x, y, z, внаслідок чого одержимо $C_1^2 + C_2^2 = 1$. В цю рівність замість C_1 і C_2 підставимо їх значення з перших інтегралів: $\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^2 = 1$. Отже, $y^2+z^2 = x^2$ — шукана поверхня, яка є прямим круговим конусом.

Завдання для самостійної роботи

1. Розв'язати рівняння:

а) $y\dfrac{\partial u}{\partial x}+x\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^2+y^2,\quad xy\dfrac{\partial u}{\partial x}+(x-2y)\dfrac{\partial u}{\partial y}=uy;$

б) $\dfrac{\partial u}{\partial x}+(2y-u)\dfrac{\partial u}{\partial y}=y+2u,\quad \sqrt{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\sqrt{y}\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{2};$

в) $y\dfrac{\partial u}{\partial x}-xy\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\quad (u-y)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(x-u)\dfrac{\partial u}{\partial y}=y-x.$

2. Розв'язати задачі Коші:

а) $y\dfrac{\partial u}{\partial x}-x\dfrac{\partial u}{\partial y}=y^2-x^2,\quad u|_{y=a}=x^2-a^2;$

$$y^2\frac{\partial u}{\partial x}+xy\frac{\partial u}{\partial y}=x,\quad u|_{x=0}=y^2;$$

б) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-2y\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2+y^2,\quad z|_{y=1}=x^2;$

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+xy\frac{\partial u}{\partial z}=0,\quad u|_{z=0}=x^2+y^2;$$

в) $\dfrac{\partial z}{\partial x}+(2e^x-y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\quad z|_{x=0}=y;$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-x^2-y^2,\quad z|_{y=-2}=x-x^2.$$

Завдання для домашньої роботи

Знайти загальний розв'язок

1. $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0.$ **2.** $(x+2y)\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}.$

3. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

4. $(x-z)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(y-z)\dfrac{\partial u}{\partial y}+2z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

5. $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=x-y.$ **6.** $e^x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=ye^x.$

7. $2x\frac{\partial z}{\partial x}+(y-x)\frac{\partial z}{\partial y}-x^2=0.$

8. $xy\dfrac{\partial z}{\partial x}-x^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=yz.$

9. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+2y\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2y+z.$

10. $(x^2+y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+2xy\dfrac{\partial z}{\partial y}+z^2=0.$

11. $2y^4\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=x\sqrt{z^2+1}.$

12. $x^2z\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2z\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+y.$

13. $yz\dfrac{\partial z}{\partial x}-xz\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^z.$

14. $(z-y)^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+xz\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy.$

15. $xy\dfrac{\partial z}{\partial x}+(x-2z)\dfrac{\partial z}{\partial y}=yz.$

16. $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+z\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{x}.$

17. $\sin^2 x\dfrac{\partial z}{\partial x}+\operatorname{tg} z\dfrac{\partial z}{\partial y}=\cos^2 z.$

18. $(x+z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+y.$

19. $(xz+y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(x+yz)\dfrac{\partial z}{\partial y}=1-z^2.$

20. $(y+z)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(z+x)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(x+y)\dfrac{\partial u}{\partial z}=u.$

21. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+(z+u)\dfrac{\partial u}{\partial z}=xy.$

22. $(u-x)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(u-y)\dfrac{\partial u}{\partial y}-z\dfrac{\partial u}{\partial z}=x+y.$

Знайти розв'язки рівнянь, що задовольняють вказані умови

23. $\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0;\ z=2x$ при $y=1.$

24. $\dfrac{\partial z}{\partial x}+(2e^x-y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0;\ z=y$ при $x=0.$

25. $2\sqrt{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0;\ z=y^2$ при $x=1.$

26. $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+2\dfrac{\partial u}{\partial z}=0;\ u=yz$ при $x=1.$

27. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+xy\dfrac{\partial u}{\partial z}=0;\ u=x^2+y^2$ при $z=0.$

Знайти поверхню, що задовольняє дане рівняння та проходить через задану лінію

28. $y^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=x;\ x=0,\ z=y^2.$

29. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-2y\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2+y^2;\ y=1,\ z=x^2.$

30. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-xy;\ x=2,\ z=y^2+1.$

31. $\operatorname{tg} z\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z;\ =x,\ z=x^2.$

32. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2(x-3y);\ x=1,\ yz+1=0.$

33. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-x^2-y^2;\ y=-2,\ z=x-x^2.$

34. $yz\dfrac{\partial z}{\partial x}+xz\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy;\ x=a,\ y^2+z^2=a^2.$

35. $z\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=2xz.;\ x+y=2,\ yz=1.$

36. $z\dfrac{\partial z}{\partial x}+(z^2-x^2)\dfrac{\partial z}{\partial y}+x=0;\ y=x^2,\ z=2x.$

37. $(y-z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(z-x)\dfrac{\partial z}{\partial y}=x-y$; $z=y=-x$.

38. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+(xz+y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$; $x+y=2z$, $xz=1$.

39. $y^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+yz\dfrac{\partial z}{\partial y}+z^2=0$; $x-y=0$, $x-yz=1$.

40. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+z\dfrac{\partial z}{\partial y}=y$; $y=2z$, $x+2y=z$.

Відповіді

1. $z=f(x^2+y^2)$. **2.** $z=f(xy+y^2)$. **3.** $u=f(y/x,z/x)$. **4.** $u=f\Big(\dfrac{(xy)}{z},\dfrac{(x+y+2z)^2}{z}\Big)$. **5.** $F(x^2-y^2,x-y+z)=0$. **6.** $F\Big(e^{-x}-y^{-1},z+\dfrac{x-\ln|y|}{e^{-x}-y^{-1}}\Big)=0$. **7.** $F(x^2-4z,(x+y)^2/x)=0$. **8.** $F(x^2+y^2,z/x)=0$. **9.** $F\Big(\dfrac{x^2}{y},xy-\dfrac{3z}{x}\Big)=0$. **10.** $F\Big(\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{z},\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{z}\Big)=0$. **11.** $F(x^2+y^4,y(z+\sqrt{z^2+1}))=0$. **12.** $F\Big(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y},\ln|xy|-\dfrac{z^2}{2}\Big)=0$. **13.** $F(x^2+y^2,\operatorname{arctg}(x/y)+(z+1)e^{-z})=0$. **14.** $F(z^2-y^2,x^2+(y-z)^2)=0$. **15.** $F\Big(\dfrac{z}{x},2x-4z-y^2\ =0Big)$. **16.** $F(z-\ln|x\,2x(z-1)-y^2)=0$. **17.** $F(\operatorname{tg}z+\operatorname{ctg}x,2y-\operatorname{tg}^2z)=0$. **18.** $F\Big(\dfrac{x+y+z}{(x-y)^2},(x-y)(x+y-2z)\Big)=0$. **19.** $F((x-y)(z+1),(x+y)(z-1))=0$. **20.** $F(u(x-y),u(y-z),(x+y+z)/u^2)=0$. **21.** $F(x/y,xy-2u,(z+u-xy)/x)=0$. **22.** $F((x-y)/z,(2u+z+y)z,(u-x-y)/z^2)=0$. **23.** $z=2xy$. **24.** $z-ye^x-e^{2x}+1$. **25.** $z=y^2e^{2\sqrt{x}-1}$. **26.** $u=(1-x+y)(2-2x+z)$. **27.** $u=(xy-2z)\Big(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\Big)$. **28.** $y^2-x^2-\ln\sqrt{y^2-x^2}=z-\ln|y|$. **29.** $2x^2(y+1)=y^2+4z-1$. **30.** $(x+2y)^2=2x(z+xy)$. **31.** $\sqrt{z/y^3}\sin z=\sin\sqrt{z/y}$. **32.** $2xy+1=x+3y+z^{-1}$. **33.** $x-2y=$

x^2+y^2+z. **34.** $2x^2-y^2-z^2=a^2$. **35.** $[(y^2z-2)^2-x^2+z]y^2z=1$. **36.** $x^2+z^2=5(xz-y)$. **37.** $3(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2$. **38.** $xz=(xz-y-x+2z)^2$. **39.** $(1+yz)^3=3yz(1+yz-x)+y^3$. **40.** $x+y+z=0$.

Література: [1], с. 217–237; [3], с. 209–227; [4], с. 476–489; [6], с. 394–409; [7], с. 100–104.

КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДО ДРУГОГО МОДУЛЯ

1. Поняття стійкості та асимптотичної стійкості розв'язків диференціального рівняння.

2. Теорема 1 (Ляпунова) про стійкість за першим наближенням.

3. Метод функцій Ляпунова.

4. Стійкість розв'язків лінійних систем зі сталими коефіцієнтами. Критерій Гурвіца.

5. Особливі точки на площині та їх класифікація.

6. Властивості розв'язків автономних систем.

7. Дослідження коливання маятника.

8. Перетворення Лапласа та його застосування для розв'язання диференціальних рівнянь.

9. Рівняння з частинними похідними першого порядку.

10. Теорема про зображення загального розв'язку лінійного рівняння з частинними похідними.

11. Квазілінійні рівняння з частинними похідними.

Тема 18. ВИВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ ТА ПОСТАНОВКА КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НИХ

Рівняння, яке зв'язує невідому функцію u, незалежні змінні $x_1, \ldots, x_n$ і частинні похідні від невідомої функції до певного (ненульового порядку), називається **диференціальним рівнянням із частинними похідними**. Воно має вигляд

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, D_x^1 u, \ldots, D_x^m u) = 0, \tag{1}$$

де $D_x^k u$, $x := (x_1, \ldots, x_n)$, $k \in \{1, \ldots, m\}$, – сукупність усіх похідних від u порядку k, а F – відома функція своїх аргументів.

Найвищий порядок похідної, яка входить у рівняння (1), називається **порядком рівняння** з частинними похідними.

У математичній фізиці найпоширеніші і найкраще вивчені рівняння другого порядку. У випадку двох незалежних змінних x і y рівняння другого порядку можна записати в такій загальній формі:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0. \tag{2}$$

Якщо функція F у (2) є лінійною відносно старших похідних u_{xx}, u_{xy} і u_{yy}, то рівняння називається **квазілінійним** і воно має вигляд

$$A(x, y, u, u_x, u_y)u_{xx} + 2B(x, y, u, u_x, u_y)u_{xy}+$$

$$+C(x, y, u, u_x, u_y)u_{yy} + f(x, y, u, u_x, u_y) = 0.$$

Рівняння (1) називається **лінійним**, якщо воно лінійне відносно шуканої функції і всіх її похідних. Наприклад, лінійне рівняння другого порядку з двома незалежними змінними має вигляд

$$a(x,y)u_{xx}+2b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}+d(x,y)u_x+e(x,y)u_y+f(x,y)u =$$

$$= g(x, y), (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \tag{3}$$

де a, b, c, d, e, f – деякі задані функції змінних x і y, які називаються **коефіцієнтами** рівняння. Якщо $g \equiv 0$, тобто g є нульовою функцією, то рівняння (3) називається **однорідним**, у протилежному випадку – **неоднорідним**, при цьому функцію g називають неоднорідністю рівняння.

Класичним або **регулярним розв'язком** рівняння з частинними похідними (1) порядку m називається функція u, яка визначена в області Ω зміни незалежних змінних, якщо в цій області вона має неперервні частинні похідні до порядку m включно і при підстановці в рівняння (1) перетворює його в тотожність.

Багато задач механіки і фізики приводять до дослідження диференціальних рівнянь із частинними похідними другого порядку типу (3). Відомо, що рівняння (3) має безліч розв'язків. При розв'язуванні конкретної фізичної задачі необхідно з усіх цих розв'язків вибрати той, який задовольняє певні додаткові умови, що випливають з її фізичного змісту. Отже, задача математичної фізики полягає у відшуканні розв'язку рівняння з частинними похідними, який задовольняє відповідні додаткові умови. Такими додатковими умовами найчастіше є початкові умови, які задаються у деякий момент часу, з якого починається вивчення даного фізичного явища.

Математична модель задачі, яка описує реальний процес (явище) повинна задовольняти такі вимоги: розв'язок задачі повинен існувати, розв'язок задачі повинен бути єдиним, розв'язок задачі повинен бути стійким. Останнє означає, що малі зміни даних задачі мають викликати відповідно малі зміни розв'язку. Задача, яка задовольняє ці три вимоги, називається **коректною** (**коректно поставленою**).

Щоб правильно скласти математичну модель фізичного процесу, слід спочатку з'ясувати суть даного процесу і вибрати функцію u, яка його однозначно описує. Далі треба використати відповідний закон фізики, що характеризує процес, і застосувати його до довільної ділянки досліджуваного об'єкта. Використовуючи при цьому теореми математичного аналізу, одержуємо після відповідних перетворень, наприклад, співвідношення вигляду

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} F(x_1, x_2, x_3, t, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_3x_3}, u_t, u_{tt})dx = 0.$$

осклільки область інтегрування $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ та проміжок (t_1, t_2) довільні, а підінтегральна функція неперервна на $Q := (t_1, t_2) \times \Omega$, то вона в кожній точці області Q має дорівнювати нулю, тобто

$$F(x_1, x_2, x_3, t, u, u_{x_1}, \ldots, ux_1x_1, u_{x_1x_2}, \ldots, u_{x_3x_3}, u_t, u_{tt}) = 0. \quad (4)$$

Це і є диференціальне рівняння процесу. Додаткові умови (початкові, крайові тощо) визначають безпосередньо з умов фізичного процесу.

У деяких випадках зручно поступати по-іншому. Замість того, щоб застосовувати закон природи до довільної ділянки, припускають, що змінні величини, які характеризують процес, є двічі неперервно диференційовними функціями, і застосовують цей закон до малої ділянки тіла, обчислюючи значення фізичних характеристик у деяких середніх точках. Потім переходять до границі, стягуючи малу ділянку в точку. При цьому одержують також рівняння вигляду (4).

Приклад 1. Струна довжиною l натягнута з силою T_0 і знаходиться в прямолінійному положенні рівноваги. У момент $t = 0$ точкам струни надаються початкові відхилення і швидкості. Поставити задачу про визначення малих поперечних коливань точок струни при $t > 0$.

◀ Нехай вісь OX збігається зі станом струни в положенні рівноваги. Під струною розумітимемо тонку нитку, яка згинається без опору, тобто, якщо подумки розрізати її в точці x, то сила дії однієї ділянки на іншу, тобто сила натягу $\vec{T}(x,t)$, напрямлена вздовж дотичної до струни у момент часу t в точці x (рис. 1).

Оскільки коливання поперечні й малі, то можна вважати, що кожна точка струни переміщується лише у напрямку, перпендикулярному до осі Ox. Тому коливання в кожний момент часу t повністю описується величиною відхилення $u(x,t)$. Згідно з **принципом Даламбера** всі сили, що діють на виділену ділянку струни, включаючи й сили інерції, повинні врівноважуватися. Розглянемо малу ділянку струни M_1M_2 і обчислимо суму всіх цих сил (натяг на кінцях ділянки, зовнішні сили та сили інерції). Величина T сили натягу за **законом Гука** пропорційна відносному видовженню ділянки. Візьмемо довільну ділянку $(x, x+\Delta x)$ струни, яка при її коливанні деформується в ділянку M_1M_2. Довжина дуги цієї ділянки в момент часу t дорівнює $\int\limits_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+u_\xi^2(\xi,t)}d\xi \approx \Delta x$, бо коливання малі й тому можна знехтувати величиною u_ξ^2 . Це означає, що видовження ділянок струни в процесі коливання не відбувається і, отже, за законом Гука величина натягу T в кожній точці струни не змінюється з часом. Зауважимо, що величину натягу T можна вважати незалежною і від x, тобто $T \approx T_0$. Справді, оскільки ми вивчаємо лише поперечні коливання, то сили інерції і зовнішні сили напрямлені перпендикулярно до осі Ox, тому сума проекцій всіх сил на вісь Ox дорівнює

$$T(x+\Delta x,t)\cos\alpha(x+\Delta x,t) - T(x,t)\cos\alpha(x,t) = 0,$$

де $\alpha(x,t)$ – кут між дотичною в точці з абсцисою x до профіля струни в момент часу t і додатним напрямком осі Ox. Оскільки коливання малі, то $\cos\alpha(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha(x,t)}} =$

$\dfrac{1}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}} \approx 1$ і тому $T(x,t) \approx T(x+\Delta x,t)$. Звідси, врахувавши довільність x і Δx, одержимо, що величина натягу T не залежить від x. Отже, можна вважати, що $T \approx T_0$ для всіх значень x і t.

Сума проекцій на вісь Ou сил натягу, що діють у точках M_1 і M_2, дорівнює $Y = T_0(\sin\alpha(x+\delta x,t) - \sin\alpha(x,t))$, але внаслідок наших припущень $\sin\alpha(x,t) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha(x,t)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha(x,t)}} = \dfrac{u_x(x,t)}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}} \approx u_x(x,t)$, і тому $Y \approx T_0(u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t))$. Зауваживши тепер, що $u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t) = u_{xx}(x+\theta_1\Delta x,t)\Delta x$, де $\theta_1 \in (0,1)$, остаточно дістанемо $Y \approx T_0 u_{xx}(x+\theta_1\Delta x,t)\Delta_x$.

Позначимо через $p(x,t)$ густину зовнішньої сили, діючої у момент часу t на точку струни паралельно осі Ou і розрахованої на одиницю довжини. Тоді проекція на вісь Ou зовнішньої сили, яка діє на ділянку M_1M_2 струни, дорівнюватиме

$$F = p(x+\theta_2\Delta x,t)\Delta x, \quad \theta_2 \in (0,1).$$

Нехай $\rho(x)$ – лінійна густина маси струни в точці x. Тоді проекція сили інерції ділянки M_1M_2 струни на вісь Ou дорівнює

$$I = -\rho(x+\theta_3\Delta x)u_{tt}(x+\theta_3 x,t)\Delta x,$$

де $\theta_3 \in (0,1)$. Згідно з принципом Даламбера $Y+F+I=0$, тобто

$$(T_0u_{xx}(x+\theta_1\Delta x,t)+p(x+\theta_2\Delta x,t)-\rho(x+\theta_3\Delta x)u_{tt}(x+\theta_3\Delta x,t))\Delta x = 0.$$

Якщо поідлити цю рівність на Δx і перейти до границі при $\Delta x \to 0$, то дістанемо, що

$$\rho(x)u_{tt}(x,t) == T_0u_{xx}(x,t) + p(x,t), \quad 0 < x < l, t > 0. \qquad (5)$$

це і є шукане **рівняння коливань струни**.

Якщо $\rho = \text{const}$, тобто струна однорідна, то рівняння (5) записується у вигляді

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t), 0 < x < l, t > 0, \qquad (6)$$

де $a := \sqrt{\dfrac{T_0}{\rho}}$, $f(x,t) := \dfrac{p(x,t)}{\rho}$.

Якщо зовнішня сила відсутня, тобто $p \equiv 0$, то ми дістанемо **рівняння вільних коливань струни** $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.

Припустимо, що в момент часу $t = 0$ відхилення коливання в кожній точці $x \in [0, l]$ дорівнювало $\varphi(x)$, а швидкість $\psi(x)$, тобто

$$\begin{aligned} u(x,t)|_{t=0} := u(x,0) = \varphi(x), \\ u_t(x,t)|_{t=0} := u_t(x,0) = \psi(x), 0 \le x \le l. \end{aligned} \qquad (7)$$

Умови (7) називаються **початковими умовами**.

Далі, оскільки струна обмежена, то треба вказати, що відбувається на її кінцях. Для закріпленої на кінцях струни повинно бути

$$u(x,t)|_{x=0} := u(0,t) = 0, u(x,t)|_{x=l} := u(l,t) = 0, t \ge 0. \qquad (8)$$

Якщо кінці струни рухаються за певним законом, то

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), t \ge 0. \qquad (9)$$

У випадку вільних кінців сила натягу на них, а отже, і її проекція $T_0 u_x$ на вісь Ou дорівнює нулю, тобто

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \quad t \ge 0. \qquad (10)$$

Умови (8), (9), (10) називаються **крайовими умовами**. Крайові умови можуть бути комбінованими, наприклад, лівий кінець вільний, а правий закріплений, тобто $u_x(0,t) = u(l,t) = 0$ і т.п. ►

Зауваження. Можливі випадки, коли густина зовнішньої сили залежить від u і u_t. Тоді рівняння (5) буде квазілінійним рівнянням.

Приклад 2. Скласти математичну модель задачі про малі коливання важкої однорідної нитки, закріпленої верхнім кінцем.

◀ Як в прикладі 1, коливання описуються відхиленням $u(x,t)$ кожної точки x нитки від її положення рівноваги в момент часу t. Скориставшись принципом Даламбера для довільної ділянки нитки $(x, x+\Delta x)$ (див. рис. 2). Нехай довжина нитки l, а лінійна густина маси $\rho = \mathrm{const}$. Натяг у точках M_1 і M_2 дорівнює відповідно $T(x,t) = \rho g(l-x)$, $t(x+\Delta x, t) = \rho g(l - x - \Delta x)$, де g – прискорення сили тяжіння (вага ділянки нитки $[x,l]$ дорівнює $\rho(l-x)g$). Оскільки сила інерції напрямлена перпендикулярно до осі Ox, а зовнішня сила (вага ділянки M_1M_2) – паралельно осі Ox, то сума проекцій всіх сил на вісь Ox дорівнює нулю:

$$-\rho g(l-x) + \rho g(l-x-\Delta x) + \rho g \Delta x = 0.$$

Будемо проектувати всі діючи сили на вісь Ou. Сума проекція сил натягу в момент часу t, як і в прикладі 1, дорівнюватиме

$$F = -\rho g(l-x)\sin\alpha(x,t) - \rho g(l-x-\Delta x)\sin\alpha(x+\Delta x,t) \approx$$

$$\approx \rho g((l-x-\Delta x)u_x(x+Deltax,t) - (l-x)u_x(x,t)) =$$

$$= \rho g((l-x-\theta_1\Delta x)u_x(x+\theta_1\Delta x,t))_x \Delta x,$$

де α – кут, утворений дотичною до профілю нитки в момент часу t і віссю Ox, $\theta_2 \in (0,1)$. Зовнішня сила $\vec{P}$ (вага ділянки M_1M_2) у момент часу t проектується на вісь Ou в нуль, а сила інерції згідно з другим законом Ньютона дорівнює

$$I \approx -\rho u_{tt}(x+\theta_2\Delta x,t)\Delta x, \theta_2 \in (0,1).$$

На підставі принципу Даламбера $F + I = 0$, тобто

$$\rho g((l - x - \theta_1 \Delta x) u_x(x + \theta_1 \Delta x, t))_x \Delta x - \rho u_{tt}(x + \theta_2 \Delta x, t) \Delta x = 0.$$

Звідси, скоротивши на $\rho \Delta x$, перейшовши до границі при $\Delta x \to 0$ і врахувавши неперервність похідних від u, одержимо

$$u_{tt}(x,t) = g((l - x) u_x(x,t))_x, \quad 0 < x < l, t > 0. \qquad (11)$$

Отже, малі коливання важкої однорідної нитки. описуються рівнянням (11). Якщо відомі початкове положення і початкова швидкість кожної точки нитки, то матимемо початкові умови (7).

Оскільки верхній кінець нитки закріплений, то $u(0,t) = 0$. Щоб дістати умову для нижнього кінця нитки $x = l$, скористаємося тим, що коливання малі, і тому відхилення скнченне, тобто $|u(l,t)| < +\infty$. Така умова оправдана тим, що, хоч коефіцієнти рівняння (11) і гладкі, але коефіцієнт $g(l - x)$ при старшій похідній u_{xx} при $x = l$ перетворюється в нуль, тобто рівняння вироджується. Отже, крайові умови в даному випадку мають такий вигляд:

$$u(0,t) = 0, |u(l,t)| < +\infty, t \geq 0, \blacktriangleright$$

Приклад 3. Вивчити процес поширення тепла в ізотропному твердому тілі за наявності теплових джерел, якщо відома початкова температура точок тіла та тепловий режим на його межі.

◀ Розглянемо тверде тіло $D \subset \mathbb{R}^3$, температура якого в точці $x := (x_1, x_2, x_3)$ у момент часу t визначається функцією $u(x,t)$. Якщо частини тіла мають різну температуру, то в тілі буде відбуватися рух тепла від більш нагрітих частин до менш нагрітих. Візьмемо яку-небудь поверхню S всередині тіла і на ній елемент σ, площу якого позначатимемо через $\Delta\sigma$. З теорії теплопровідності відомо, що кількість тепла Δ, яка проходить через елемент σ за час Δt, пропорційна добутку $\Delta\sigma\Delta t$ і похідній $\partial_{\vec{v}}u$ від температури u вздовж нормалі $\vec{v}$ до σ у напрямку руху тепла, тобто

$$\Delta Q = -k\Delta\sigma\Delta t\partial_{\vec{v}}u = -k\Delta\sigma\Delta t(\mathrm{grad}u)_{\vec{v}}, \tag{12}$$

де $k > 0$ – коефіцієнт внутрішньої теплопровідності, $(\mathrm{grad}u)_{\vec{v}}$ – проекція вектора $\mathrm{grad}u := (u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3})$ на нормаль $\vec{v}$. За умовою тіло ізотропне, тому коефіцієнт k залежить лише від точки x тіла і не залежить від напрямку нормалі в цій точці.

Для виведення рівняння поширення тепла скористаємося **рівнянням теплового балансу**: *кількість тепла Q_1, витраченого на зміну температури певної області, дорівнює сумі кількості тепла Q_2, що поступило іззовні, і кількості тепла Q_3, що виділилося у межах даної області внаслідок хімічних, радіоактивних та інших процесів.* Розглянемо довільну підобласть $\Omega \subset D$ з гладкою замкненою межею S впродовж часу (t_1, t_2). Нехай у кожній точці x густина маси тіла D дорівнює $\rho(x)$, а теплоємність $c(x)$. Тоді кількість тепла Q_1, яка необхідна для зміни температури області Q на величину $u(x, t_2) - u(x, t_1)$, $x \in Q$, дорівнює

$$Q_2 = \int\limits_{\Omega} c(x)\rho(x)u(x, t_2)dx - \int\limits_{\Omega} c(x)\rho(x)u(x, t_1)dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} c(x)\rho(x)(u(x, t_2) - u(x, t_1))dx$$

або

$$Q_1 = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\Omega} c(x)\rho(x)u_t(x, t)dx,$$

оскільки $u(x, t_2) - u(x, t_1) = \int\limits_{t_1}^{t_2} u_t(x, t)dt.$

Згідно з формулою (12) через поверхню S за проміжок часу (t_1, t_2) надходить кількість тепла

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_S k(x)\partial_{\vec{v}} u(x,t) dS,$$

де $\vec{v}$ – зовнішня нормаль до поверхні S.

Нехай $F(x,t)$ – густина теплових джерел у точці x у момент часу t. Тоді кількість тепла, яке виділилося або поглинулося в області Ω за проміжок часу (t_1, t_2), дорівнює

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega F(x,t) dx.$$

Складемо тепер рівняння балансу тепла для виділеної області Ω. Очевидно, що $Q_1 = Q_2 + Q_3$, тобто

$$\int_{t_1}^{t_2} \Big(\int_\Omega c(x)\rho(x) u_t(x,t) dx - \int_S k(x)\partial_{\vec{v}} u(x,t) dS - \int_\Omega F(x,t) dx \Big) dt = 0.$$

Згідно з формулою Остроградського-Ґауса

$$\int_S k(x)\partial_{\vec{v}} u(x,t) d_x S = \int_\Omega \mathrm{div}(k(x)\mathrm{grad} u(x,t)) dx,$$

тому маємо

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega (c(x)\rho(x) u_t(x,t) dx - \mathrm{div}(k(x)\mathrm{grad} u(x,t)) - F(x,t)) dx = 0,$$

де $\mathrm{div}(k\mathrm{grad} u) := \sum_{i=1}^{3} (k u_{x_i})_{x_i}$. Оскільки підінтегральна функція неперервна, а область Ω і проміжок часу (t_1, t_2) довільні, то для будь-якої точки $x \in D$ і для довільного моменту часу $t > 0$

$$c(x)\rho(x)u_t(x,t) = \mathrm{div}(k(x)\mathrm{grad}u(x,t)) + F(x,t). \qquad (13)$$

Це рівняння називається **рівнянням поширення тепла в неоднорідному ізотропному тілі**.

Якщо тіло однорідне, то c, ρ, k – сталі і рівняння (13) можна переписати у вигляді

$$u_t(x,t) = a^2(u_{x_1x_1}(x,t) + u_{x_2x_2}(x,t)) + f(x,t), x \in D, t > 0, \quad (14)$$

де $a := \sqrt{\dfrac{k}{c\rho}}$, $f(x,t) := \dfrac{F(x,t)}{c\rho}$.

Якщо в розглядуваному однорідному тілі немає джерел тепла, тобто $F(x,t) = 0$, $x \in D$, $t > 0$, то дістанемо **однорідне рівняння теплопровідності**

$$u_t(x,t) = a^2(u_{x_1x_1}(x,t) + u_{x_2x_2}(x,t) + u_{x_3x_3}(x,t)), x \in D, t > 0, \quad (15)$$

яке є найпростішим рівнянням параболічного типу.

Зокрема, коли температура u залежить лише від координат x_1, x_2, t, що, наприклад, має місце при поширенні тепла в тонкій однорідній пластинці, рівняння (15) переходить у таке:

$$u_t(x,t) = a^2(u_{x_1x_1}(x,t) + u_{x_2x_2}(x,t)), x \in D, t > 0.$$

Нарешті, для тіла лінійного розміру, наприклад, для тонкого однорідного стержня, рівняння теплопровідності набуває вигляду

$$u_t(x,t) = a^2u_{xx}(x,t), x \in D, t > 0.$$

Якщо в момент часу $t = 0$ температура в кожній точці x тіла дорівнювала $\varphi(x)$, то

$$u(x,t)|_{t=0} := u(x,0) = \varphi(x), x \in \overline{D}, \qquad (16)$$

є початковою умовою задачі.

Крайова умова може задаватися різними способами, наприклад:

1) у кожній точці поверхні S задається температура

$$u(x,t)|_S = g_1(z,t), z \in S, t \geq 0, \tag{17}$$

де g_1 – відома функція точки z поверхні S і часу t;

2) на поверхні S задається тепловий потік $q = -k\partial_{\vec{v}}u$, звідки

$$\partial_{\vec{v}_s}u(x,t)|_S = g_2(z,t), z \in S, t \geq 0, \tag{18}$$

де $\vec{v}_z$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні S у точці z, g_2 – відома функція, яка виражається через заданий тепловий потік за формуою $g_2 = -\dfrac{q}{k}$;

3) на поверхні S задана температура оточуючого середовища u_0; тоді за **законом Ньютона** *тепловий потік* $q = -k\partial_{\vec{v}}u$ *пропорційний різниці температур тіла і середовища*, тобто

$$-k\partial_{\vec{v}}u(x,t)|_S = H(u(x,t) - u_0)|_S, t \geq 0,$$

де $\vec{v}$ – зовнішня нормаль до S, або, поклавши $h := \dfrac{H}{k}$,

$$(\partial_{\vec{v}}u(x,t) + h(u(x,t) - u_0))|_S = 0, t \geq 0. \tag{19}$$

Отже, математична модель задачі про поширення тепла в ізотропному твердому тілі така: знайти в області $Q = \{(x,t)|x \in D, t > 0\}$ розв'язок рівняння (14), який задовольняє початкову умову (16) і одну з крайових умов (17), (18) або (19). ▶

Приклад 4. Лівий кінець тонкого однорідного стержня довжиною l теплоізольований, через бічну поверхню відбувається теплообмін з навколишнім середовищем, температура якого дорівнює нулю, а температура на правому кінці є заданою функцією часу $g(t)$, $t \geq 0$. Скласти математичну модель задачі про поширення тепла в стержні, якщо початкова температура нульова.

◄ Сумістимо початок координат з лівим кінцем стержня, а вісь Ox спрямуємо вздовж його осі. Оскільки стержень тонкий однорідний, то c, ρ і k сталі, а зміною температури в напрямках осей Oy і Oz можна знехтувати, тобто $u_{yy} = u_{zz} = 0$. Межа стержня складається лише з двох точок $x = 0.$ і $x = l$, тому тепло, яке надходить через бічну поверхню, слід вважати "внутрішнім", тобто $\Delta Q_3 = \Delta S \Delta t h u$, отже, густина теплових джерел $F(x,t) = \dfrac{\Delta Q_3}{\Delta v \Delta t} = hu(x,t)\dfrac{\Delta S}{\Delta v}$, $0 < x < l$, $t > 0$. Якщо припустити, що переріз стержня – круг радіуса r, то $\Delta S = 2\pi r \Delta x$, $\Delta v = \pi r^2 \Delta x$ і тому $F(x,t) = \dfrac{2h}{r} u(x,t), 0 < x < l$, $t > 0$. Отже, рівняння (14) набуде вигляду

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + bu(x,t), \quad 0 < x < l, t > 0, \tag{20}$$

де $b := \dfrac{2h}{c\rho r}$.

Лівий кінець стержня теплоізольований, а тому потік тепла через нього дорівнює нулю. Оскільки вісь Ox і нормально $\vec{v}$ протилежно напрямлені, то $\partial_{\vec{v}} u = -u_x$, і тому з умови (18) випливає, що

$$u_x(0,t) = 0, t \geq 0. \tag{21}$$

На правому кінці

$$u(l,t) = g(t), t \geq 0. \tag{22}$$

Початкова температура згідно з умовою нульова, тобто

$$u(0,0) = 0, 0 \leq x \leq l. \tag{23}$$

Отже, математична модель задачі виражається рівностями (20)–(23). ►

Зауваження. Якщо припустити, що температура в кожній точці x усередині тіла усталилася, тобто вона не змінюється з часом, то тоді $u_t = 0$ і рівняння (15) набуває вигляду

$$u_{x_1x_1}(x) + u_{x_2x_2}(x) + u_{x_3x_3}(x) = 0, x \in D. \tag{24}$$

Рівняння (24) називається **рівнянням Лапласа**. Для визначення u тепер не треба задавати початковий розподіл температури (початкову умову), а досить задати лише крайову умову, незалежну від часу.

Задача про знаходження розв'язку рівняння (24) за його значенням на межі розглядуваної області називається **задачею Діріхле**.

Задача про знаходження розв'язку рівняння (24), який задовольняє крайову умову $\partial_{\vec{v}} u(x)|_S = \varphi(z)$, $z \in S$, називається **задачею Неймана**.

Якщо в тілі є джерела тепла, то рівняння, яке описує усталений тепловий процес, має вигляд

$$u_{x_1x_1}(x) + u_{x_2x_2}(x) + u_{x_3x_3}(x) = f(x), x \in D. \tag{25}$$

Рівняння (25) називається **рівнянням Пуассона**, для нього також розглядаються задачі Діріхле і Неймана.

Вправи

О1. Сформулювати задачу про малі поздовжні коливання пружного однорідного стержня змінного перерізу $S(x)$ довжиною l при довільних початкових умовах для випадків, коли:

а) стержень має форму зрізаного конуса з радіусами основ r і R ($r < R$), які закріплені жорстко;

б) кінець стержня $x = 0$ закріплений пружно, а до кінця $x = l$, починаючи з моменту $t = 0$, прикладена поздовжня сила $f(t)$, $t > 0$, на одиницю площі перерізу.

O2. Поставити задачу про малі коливання струни в середовищі з опором, пропорційним швидкості, припускаючи, що кінці струни закріплені.

O3. Дано однорідну кулю радіуса R з нульовою початковою температурою. Поставити задачу про розподіл температури при $t > 0$ всередині кулі, якщо: а) куля нагрівається рівномірно по всій поверхні сталим тепловим потоком q; б) на поверхні кулі відбувається конвективний теплообмін за законом Ньютона з навколишнім середовищем, температура якого залежить тільки від часу.

O4. У трубці довжиною l сталого перерізу S, однорідно заповненій пористою речовиною, відбувається дифузія газу з початковою (при $t = 0$) концентрацією $\varphi(x)$, $0 < x < l$. Поставити задачу про визначення концентрації u газу в трубці при $t > 0$, вважаючи бічну поверхню трубки газонепроникною, для випадків, коли:

а) на кінці $x = 0$, починаючи з моменту $t = 0$, підтримується концентрація газу $\mu(t)$, $t > 0$, а кінець $x = l$ перекритий пористою перегородкою, тобто на цьому кінці відбувається газообмін з навколишнім середовищем за законом, аналогічним закону Ньютона для конвективного теплообміну, причому концентрація газу в зовнішньому середовищі дорівнює нулю.

O5. Абсолютно гнучка нитка довжиною l підвішена за кінець $x = l$, а на другому кінці $x = 0$ прикріплено вантаж масою M. Лінійна густина нитки ρ змінюється за законом $\rho(x) = \dfrac{A}{\sqrt{l_1 + x}}$, $0 < x < l$, де сталі A і l_1 зв'язані з масою вантажу співвідношенням $M = 2A\sqrt{l_1}$. Довести, що рівняння малих коливань нитки навколо положення рівноваги має вигляд $u_{yy} = \dfrac{1}{a^2}u_{tt}$, $a := \sqrt{\dfrac{g}{2}}$, $y := \sqrt{l + l_1} - \sqrt{l_1 + x}$.

O6. Поставити задачу для поперечних коливань важкої струни довжиною l, що обертається з кутовою швидкістю ω відносно вертикального положення рівноваги, верхній кінець якої жорстко закріплено, а нижній – вільний.

О7. Поставити задачу про визначення стаціонарної концентрації нестійкого газу в циліндрі радіуа R_0 і висоти h, якщо в циліндрі є джерело газу (внаслідок хімічної реакції) сталої потужності Q, а швидкість розпаду газу пропорційна його концентрації u, для випадків, коли:

а) на основах циліндра $z = 0$ і $z = h$ концентрація газу підтримується нульовою, а бічна поверхня циліндра газонеприникна;

б) основи $z = 0$ і $z = h$ циліндра пористі (через них відбувається дифузія за законом, аналогічним закону Ньютона для конвективного теплообміну), а на бічній поверхні підтримується нульова концентрація газу, при цьому концентрація газу в зовнішньому середовищі дорівнює нулю.

О8. Скласти математичну модель задачі про поперечні коливання неоднорідної прямокутної мембрани $\{0 < x, < p, 0 < y < q\}$, які викликані початковим відхиленням $\varphi(x, y) = Axy$, $A = \text{const}$, за умови, що частина межі $\{x = p, 0 \le y \le q\}$ і $\{y = q, 0 \le x \le p\}$ вільна, а інша частина межі закріплена жорстко, вважаючи, що початкові швидкості точок мембрани дорівнюють нулю, а оточуюче середовище не чинить опору коливанням.

С1. Поставити задачу про охолодження тонкого кільця, через поверхню якого відбувається конвективний теплообмін за законом Ньютона з навколишнім середовищем, що має задачу температуру. Нерівномірнісью розподілу температури по товщині кільця нехтувати.

С2. Дві пластинки завдовжки l_1 і l_2, виготовлені з різних матеріалів і нагріті до температур u^0 і v^0, у момент $t = 0$ вводяться в дотик одна з одною. Скласти рівняння, які описують процес вирівнювання температур, вважаючи, що вільні грані теплоізольовані від навколишнього середовища.

С3. З'ясувати, чи співвідношення є диференціальним рівнянням із частинними похідними:

а) $u_{xx}^2 - u_{yy}^2 = (u_{xx}u_{yy})^2$;

б) $(\operatorname{tg} u)_x - u_x \dfrac{1}{\cos^2 u} = 3u - 2$.

С4. Визначити порядок рівняння з частинними похідними:

а) $2(u_x - 2u)u_{xy} - ((u - x - 2u)^2)_y = xy$;

б) $(u_{yy}^2 - u_y)_x - 2u_{yy}(x_{xy} - u_x)_y = 2(u_x - 1)$;

в) $2u_{xx}u_{xxy} - ((u_{xx} - u_y)^2)_y = 2u_y u_{xxy} - u_x$.

С5. Скласти математичну модель задачі про поперечні коливання круглої мембрани радіуса R, які викликані неперервно розподіленою по мембрані поперечно діючою силою з густиною $q \sin \omega t$, що діє з моменту $t = 0$, якщо край мембрани закріплено пружно.

Домашнє завдання

Д1. Верхній кінець пружного однорідного вертикально підвішеного важкого стержня довжиною l жорстко прикріплено до стелі ліфта, який вільно падає, причому, досягнувши швидкості v, він умить зупиняється. Поставити задачу про малі поздовжні коливання цього стержня.

Д2. Неоднорідна нитка, густина якої змінюється за законом $\rho(x) = \dfrac{a}{\sqrt{b^2 - x^2}}$, $0 < x < l$, $(a > 0,\ b > l)$ прикріплена кінцем $x = 0$ до нерухомої осі, а на другому кінці $x = l$ прикріплена кулька, маса якої $M = \dfrac{a}{l}\sqrt{b^2 - l^2}$.

Довести, що при обертанні нитки зі сталою кутовою швидкістю ω навколо вказаної осі рівняння малих коливань має вигляд $u_{tt} = \omega^2 u_{yy}$, де $y := \arcsin \frac{x}{b}$.

Д3. Поставити задачу про малі поздовжні коливання однорідного пружного стержня довжиною l, один кінець якого закріплено жорстко, а другий – пружно, тобто зазнає опору, пропорційного швидкості. Опором середовища знехтувати.

Д4. Дано тонкий однорідний стержень довжиною l, початкова температура якого $\varphi(x)$, $0 \le x \le l$. Поставити крайову задачу про визначення температури стержня, якщо на кінці $x = 0$ підтримується стала температура u_0, а на бічній поверхні і на кінці $x = l$ відбувається конвективний теплообмін за законом Ньютона з навколишнім середовищем, температура якого дорівнює нулю.

Д5. Однорідний стержень довжиною l сталого перерізу S має початкову температуру $\varphi(x)$, $0 \le x \le l$. На поверхні стержня відбувається конвективний теплообмін за законом Ньютона з середовищем, яке має температуру $v(t)$, $t > 0$. Кінці стержня $x = 0$ і $x = l$ затиснути в масивні клеми із заданими теплоємностями C і Q відповідно і достатньо великою теплопровідністю. Сформулювати задачу про визначення температури u при $t > 0$ у цьому стержні для випадків, коли:

1) стержень нагрвається електричним струмом силою I, який тече оп ньому;

2) починаючи з моменту $t = 0$, у стержні діють теплові джерела з об'ємною густиною $F(x,t)$, $0 < x < l$, $t > 0$;

3) тепло в стержні поглинається пропорційно u_t у кожній його точці.

Д6. Вивести рівняння стаціонарного процесу дифузії:

а') в однорідному ізотропному середовищі, яке перебуває у стані спокою;

б) в однорідному ізотропному середовищі, яке рухається із заданою швидкістю вздовж осі Ox.

Д7. Поставити задачу про визначення стаціонарного розподілу температури в твердому тілі, що має форму обмеженого циліндра, якщо на його нижню основу подається сталий тепловий потік q, бічна поверхня теплоізольована, а верхня основа підтримується при заданій температурі.

Відповіді

О1. а) $\Big(r+\dfrac{R-r}{l}x\Big)^2u_{tt}=\dfrac{E}{\rho}\Big(\Big(r+\dfrac{R-r}{l}x\Big)^2u_x\Big)_x$, $0<x<l$, $l>0$, $u(0,t)=0$, $u(l,t)=0$, $t\ge 0$, $u(x,0)=\varphi(x)$, $u_t(x,0)=\psi(x)$, $0\le x\le l$;

б) $\rho Su_{tt}=e(Su_x)_x, 0<x<l, l>0, S(0)Eu_x(0,t)-\sigma u(0,t)=0$, $Eu_{xx}(l,t)=F(t)$, $t\ge 0$, $u(x,0)=\varphi(x)$, $u_t(x,0)=\psi(x)$, $0\le x\le l$, σ – коефіцієнт жорсткості пружного кріплення.

О2. Для визначення поперечних відхилень u точок струни від їхнього положення рівноваги дістанемо задачу

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)-2v^2u_t(x,t), 0<x,<l, t>0,$$

$$u(0,t)=0, u(l,t)=0, t\ge 0,$$

$$u(x,0)=f(x), u_t(x,0)=F(x), 0\le x\le l,$$

де $2v^2:=k/\rho$, ρ – лінійна густина маси струни, k – коефіцієнт тертя, тобто коефіцієнт пропорційності в співвідношенні $\Phi=-ku_t$, яке виражає силу тертя, діючу на одиницю довжини струни.

О3. $u_t=a^2(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r)$, $0<r<R$, $t>0$; $u(r,0)=0$, $0\le r\le R$; крайові умови: а) $|u(0,t)|<+\infty$, $u_r(R,t)=\dfrac{q}{k}$, $t>0$; б) $|u(0,t)|<+\infty$, $(u_r+hu)|_{r=R}=\varphi(t)$, $t\ge 0$, $h:=\dfrac{H}{k}$.

О4. а) $u_t=a^2u_{xx}$, $0<x<l$, $t>0$, $a^2:=\dfrac{\alpha D}{c}$, $u(0,t)=\mu(t)$, $u_x(l,t)=0$, $t\ge 0$, $u(x,0)=\varphi(x)$, $0\le x\le l$, α – коефіцієнт пористості перерізу, який дорівнює відношенню площі пор у даному перерізі до площі цього перерізу;

б) $u_t=a^2u_{xx}$, $0<x<l$, $t>0$, $a^2:=\dfrac{\alpha D}{c}$, $u_x(0,t)=-\frac{1}{\alpha SD}q(t)$, $u_x(l,t)+\dfrac{\alpha}{D}u(l,t)=0, t\ge 0, u(x,0)=\varphi(x), 0\le x\le l,$

де D – коефіцієнт дифузії, c – коефіцієнт пористості середовища трубки, α – коефіцієнт дифузії через пористу перегородку.

О6. $u_{tt} = g((l-x)u_x)_x + \omega^2 u$, $0 < x < l$, $t > 0$, $u(0,t) = 0$, $|u(l,t)| < +\infty$, $t \geq 0$, $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$, $0 \leq x \leq l$.

О7. а) $K\Delta u - \gamma u + Q = 0$, $0 < r < R_0$, $0 < z < h$, $t > 0$, $u(r,0) = 0$, $u(r,h) = 0$, $0 \leq r < R_0$, $u_r(R_0, z) = 0$, $0 \leq z \leq h$, де γ – коефіцієнт розпаду газу.

О8. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy})$, $0 < x < p$, $0 < y < q$, $t > 0$, $u(0,y,t) = 0$, $u_x(p,y,t) = 0$, $0 \leq y \leq q$, $t \geq 0$, $u(x,0,t) = 0$, $u_y(x,q,t) = 0$, $0 \leq x \leq p$, $t \geq 0$, $u(x,y,0) = Axy$, $u_t(x,y,0) = 0$, $0 \leq x \leq p$, $0 \leq y \leq q$.

С1. $u_{xx} = -\dfrac{1}{a^2}u_t = b(u - u_0)$, $a := \sqrt{\dfrac{k}{c\rho}}$, $b := \dfrac{\alpha l}{k\sigma}$, $0 < x, < l$, $t > 0$, $u(x,0) = \varphi(x)$, $0 \leq x \leq l$, $u(0,t) = u(l,t)$, $u_x(0,t) = u_x(l,t)$, $t \geq 0$.

С2. $u_{xx} = \dfrac{c_1\rho_1}{k_1}u_t$, $0 < x < l_1$, $v_{xx} = \dfrac{c_2\rho_2}{k_2}v_t$, $l_1 < x < l_1 + l_2$.

С3. а) так, б) ні.

С4. а) першого порядку, б) і в) – другого порядку.

С5. $u_{tt} = a^2(u_{rr} + \frac{1}{r}) + \frac{q}{r}\sin\omega t$, $0 < r < R$, $t > 0$, $|u(0,t)| < +\infty$, $(u_r(R,t) + hu(R,t)) = 0$, $t \geq 0$, $u(r,0) = 0$, $u_t(r,0) = 0$, $0 \leq e \leq R$, де ρ – поверхнева густина маси мембрани, $h > 0$.

Д1. $u_{xx} = -\dfrac{1}{a^2}u_{tt} = -\dfrac{g}{a^2}$, де $a := \sqrt{\dfrac{E}{\rho_v}}$, $0 < x < l$, $t > 0$; $u(0,t) = 0$, $u_x(l,t) = 0$, $t \geq 0$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = v(x)$, $0 \leq x \leq l$.

Д3. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$, $a^2 := \dfrac{E}{\rho}$, $u(0,t) = 0$, $(ESu_x - ku_t)|_{x=l} = 0$, $t \geq 0$; $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$, $0 \leq x \leq l$, де k – коефіцієнт тертя для кінця стержня $x = l$.

Тема 19. КЛАСИФІКАЦІЯ ТА ЗВЕДЕННЯ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

1^0. **Випадок довільного числа незалежних змінних.** Розглянемо в області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)u_{x_i} + a(x)u = f(x), \tag{1}$$

де $x := (x_1, \ldots, x_n)$, коефіцієнти a_{ij}, a_i, a та права частина f є дійснозначними функцівями і, крім того $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $x \in \Omega$, $\{i, j\} \subset \{1, \ldots, n\}$.

Нехай x^0 – довільна точка з Ω. Розглянемо рівняння (1) із обчисленими в цій точці коефіцієнтами a_{ij} групи старших членів, тобто рівняння

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)u_{x_i} + a(x)u = f(x). \tag{2}$$

Зробимо в рівнянні (2) невироджену заміну змінних

$$\xi_k = \sum_{j1}^{n} \alpha_{kj}x_j, k \in \{1, \ldots, n\}, \det(\alpha_{kj})_{kj=1}^{n} \neq 0. \tag{3}$$

При заміні (3) функція $u(x)$ перейде у функцію $\tilde{u}(\xi)$. Виразимо похідні від функції u за x через похідні від функції $\tilde{u}$ за ξ:

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{u}_{\xi_k}(\xi_k)_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{u}_{\xi_k}\alpha_{ki},$$

$$u_{x_ix_j} = \sum_{m=1}^{n} (\tilde{u}_{x_i})_{\xi_m}(\xi_m)_{x_j} = \sum_{k,m=1}^{n} \tilde{u}_{\xi_k\xi_m}\alpha_{ki}\alpha_{mj}.$$

Підставивши ці виразв в (2) дістанемо рівняння

$$\sum_{k,m=1}^{n} \tilde{\alpha}_{km}(x^0)\tilde{u}_{\xi_k\xi_m} = F(\xi, \tilde{u}, \tilde{u}_{\xi_1}, \ldots, \tilde{u}_{\xi_n}), \tag{4}$$

де $\tilde{\alpha}_{km}(x^0) := \sum\limits_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x^0)\alpha_{ki}\alpha_{mj}$, а $F(\xi, \tilde{u}, \tilde{u}_{\xi_1}, \ldots \tilde{u}_{\xi_n})$ – функція, яка не залежить від других похідних фунції $\tilde{u}$.

Розглянемо тепер квадратичну форму

$$K = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0)y_iy_j, \quad (y_1, y_j) \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

і зробимо в ній заміну змінних

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k_i}z_k, \quad i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{6}$$

Тоді

$$K = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0) \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k_i}z_k \sum_{m=1}^{n} \alpha_{m_j}z_m =$$

$$= \sum_{k,m=1}^{n} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0)\alpha_{k_i}\alpha_{m_j} \Big) z_k = \sum_{k,m=1}^{n} \overline{a}_{km}(x^0)z_kz_m.$$

Отже, коефіцієнти квадратичної форми при перетворенні (6) змінюються так само, як коефіцієнти групи старших членів рівняння (2) при перетворенні (3). Очевидно, що для знаходження матриці перетворення (3) треба взяти матрицю перетворення (6), знайти для неї обернену мтрицю і транспонувати її.

З курсу алгебри відомо, що невироджене перетворення (6) можна вибрати так, щоб квадратична форма (5) звелася до канонічного вигляду

$$K = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x^n) z_i^2, \quad \lambda_i \in \{-1, 0, 1\}.$$

Тоді, вибравши описаним вище способом переторення (3), зведемо рівняння (2) до канонічного вигляду

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x^0) \tilde{u}_{\xi_i \xi_i} = F(\xi, \tilde{u}, \tilde{u}_{\xi_1}, \ldots, \overline{\xi_n}).$$

Позначимо через $n_+ := n_+(x^0)$ число додатних λ_i, через $n_- := n_-(x^0)$ – число від'ємних λ_i, а через $n_0 := n_0(x^0)$ – число нульових λ_i, $n = n_+ + n_- + n_0$.

Рівняння (1) називається **еліптичним у точці** x^0 (рівнянням еліптичного типу в точці x^0), якщо $n_+ = n$ або $n_- = n$.

Рівняння (1) називається **гіперболічним у точці** x^0 (рівнянням гіперболічного типу в точці x^0), якщо $n_+ = 1$, а $n_- = n - 1$ або $n_- = 1$, а $n_+ = n - 1$.

Рівняння (1) називається **параболічним у точці** x^0 (рівнянням параболічного типу в точці x^0), якщо $n_0 = 1$, а $n_- = n - 1$ або $n_+ = n - 1$.

Наведені співвідношення між n_+, n_- і n_0, очевидно, не вичерпують усіх можливих випадків. Тому рівняння у точці x^0 може не належати до жодного із зазначених типів. Таке рівняння називають **безтипним**. Серед безтипних у цьому розумінні рівнянь виділяють ультрагіперболічні й ультрапараболічні.

Рівняння (1) називається:

1) **ультрагіперболічним у точці** x^0, якщо $n_0 = 0$, $n_+ \geq 2$, $n_- \geq 2$;

2) **ультрапараболічним у точці** x^0, якщо $n_0 \geq 2$, а $n_- = 0$ або $n_+ = 0$.

Рівняння (1) називається **еліптичним**, **гіперболічним**, **параболічним**, **ультрагіперболічним** чи **ультрапараболічним в області** Ω, якщо воно є таким у кожній точці цієї області.

З попереднього випливає, що рівняння (1) може в різних підобластях області Ω належаь до різних типів. Тоді воно називається рівнянням **мішаного типу**.

Приклад 1. Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} + u_x + u_y = 0, \tag{7}$$

де $u := u(x, y, z)$.

◀ Розглянемо квадратичну форму, складену за групою старших членів рівняння (7),

$$K = z_1^2 + 2z_1z_2 + 2z_2^2 + 4z_2z_3 + 5z_3^2 \tag{8}$$

і зведемо її до канонічного вигляду. Для цього виділимо повні квадрати

$$K = (z_1 + z_2)^2 + (z_2 + 2z_3)^2 + z_3^2. \tag{9}$$

Якщо зробити перетворення

$$\eta_1 = z_1 + z_2, \eta_2 = z_2 + 2z_3, \eta_3 = z_3, \tag{10}$$

то квадратична форма набуде вигляду

$$K = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2. \tag{11}$$

Отже, рівняння (7) еліптичне в усьому просторі, бо $n_+ = 3$ $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1)$.

Щоб звести рівняння (7) до канонічного вигляду, треба вибрати відповідне перетоврення. Згідно з описаним вище, для цього треба знайти матрицю, обернену до матриці перетворення (10)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \eta = Az$$

і транспонувати її. Легко бачити, що цією матрицею є

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тому

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

і шукане перетворення таке:

$$\xi_1 = x, \quad \xi_2 = -x + y, \quad \xi_3 = 2x - 2y + z. \tag{12}$$

Відомо, що група старших членів рівняння (7) матиме після перетворення (12) вигляд

$$\tilde{u}_{\xi_1\xi_1} + \tilde{u}_{\xi_2\xi_2} + \tilde{u}_{\xi_3\xi_3}. \tag{13}$$

Для знаходження групи молодших членів рівняння обчислимо похідні

$$u_x = \tilde{u}_{\xi_1}(\xi_1)_x + \tilde{u}_{\xi_2}(\xi_2)_x + \tilde{u}_{\xi_3}(\xi_3)_x = \tilde{u}_{\xi_1} - \tilde{u}_{\xi_2} + 2\tilde{u}_{\xi_3}, u_y = \tilde{u}_{\xi_2} - 2\tilde{u}_{\xi_3}.$$

Якщо підставити ці вирази в рівняння (7) і врахувати (13), то одержимо канонічний вигляд рівняння (7)

$$\tilde{u}_{\xi_1\xi_1} + \tilde{u}_{\xi_2\xi_2} + \tilde{u}_{\xi_3\xi_3} + \tilde{u}_{\xi_1} = 0. \blacktriangleright$$

Приклад 2. Визначити тип рівняння

$$4u_{xx} + 2u_{yy} - 6u_{zz} + 6u_{xy} + 10u_{xz} + 4u_{yx} + 2u = 0, \tag{14}$$

де $u := u(x, y, z)$, і звести його до канонічного вигляду.

◀ Розглянемо квадратичну форму, складену за групою старших членів рівняння,

$$K = 4z_1^2 + 2z_2^2 - 6z_3^2 + 6z_1z_2 + 10z_1z_3 + 4z_2z_3.$$

Виділивши повні квадрати, дістанемо

$$K = \frac{1}{4}(4z_1 + 3z_2 + 5z_3)^2 - \frac{1}{4}(z_2 + 7z_3)^2.$$

Якщо зробити заміну

$$\eta_1 = \frac{1}{2}(4z_1 + 3z_2 + 5z_3), \eta_2 = \frac{1}{2}(z_2 + 7z_3), \eta_3 = z_3,$$

то квадратична форма набуде канонічного вигляду

$$K = \eta_1^2 - \eta_2^2.$$

Тут $n_0 = 1$, $n_+ = 1$, $n_- = 1$, а тому рівняння (14) не належить до жодного з описаних вище типів, тобто є безтипним.

Визначимо перетворення, яке зводить рівняння (14) до канонічного вигляду. Для цього знайдемо матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

і протранспонуємо її. Такою є матриця

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -3/2 & 2 & 0 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тому перетворення, яке зводить рівняння (14) до канонічного вигляду, таке: $\xi_1 = \frac{1}{2}x$, $\xi_2 = -\frac{3}{2}x + 2y$, $\xi_3 = 4x - 7y + z$, а канонічний вигляд рівняння (14)

$$\tilde{u}_{\xi_1\xi_1} - \tilde{u}_{\xi_2\xi_2} + 2\tilde{u} = 0. \ ▶$$

2^0. **Випадок двох незалежних змінних**. Розглянемо тепер квазілінійне рівняння другого порядку з двома незалежними змінними x і y

$$a(x,y)u_{xx}+2b(x,y)u_{xy}+c(x,y)nu_{yy}+f(x,y,u,u_x,u_y)=0, \quad (x,y)\in\Omega, \tag{15}$$

де коефіцієнти a, b і c мають неперервні частинні похідні до другого порядку включно і $|a|+|b|+|c|\neq 0$ в Ω.

Рівнянню (15) відповідає квадратична форма

$$k=a(x,y)z_1^2+2b(x,y)z_1z_2+c(x,y)z_2^2, (x,y)\in\Omega, (z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2.$$

З курсу алгебри відомо, що її канонічний вигляд, а отже, тип рівняння (15), залежить від знаку виразу b^2-ac, а саме: *якщо* $b^2-ac>0$*, то рівняння* (15) *належить до гіперболічного типу (квадратична форма K знакозмінна), якщо* $b^2-ac=0$ *– до параболічного типу (квадратична форма K знакостала), якщо ж якщо* $b^2-ac<0$ *– до еліптичного типу (квадратична форма K знаковизначена) в області* Ω.

Щоб звести рівняння (15) до канонічного вигляду, треба скласти рівняння характеристик

$$a(x,y)(dy)^2-2b(x,y)dxdy+c(x,y)(dx)^2=0, \quad (x,y)\in\Omega, \tag{16}$$

яке розпадається на два рівняння

$$ady-(b+\sqrt{b^2-ac})dx=0, \tag{17}$$

$$ady-(b-\sqrt{b^2-ac})dx=0, \tag{18}$$

і знайти їх перші (загальні інтеграли)

$$\varphi(x,y)=C_1, \psi(x,y)=C_2. \tag{19}$$

У гіперболічному випадку $b^2-ac>0$, тому функції φ і ψ є дійснозначними і, крім того, незалежними (якобіан $\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)}\neq$

0). Рівності (19) визначають дві різні сім'ї дійсних характеристик. Заміною змінних $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ рівняння (15) зводиться до канонічного вигляду

$$\tilde{u}_{\xi\eta} + f_1(\xi, \eta, \tilde{u}, \tilde{u}_\xi, \tilde{u}_\eta) = 0. \tag{20}$$

У параболічному випадку $b^2 - ac = 0$, а тому рівняння (17) і (18) збігаються і ми матимемо тільки одну сім'ю дійсних зарактеристик $\varphi(x, y) = c$. Заміною змінних $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, де ψ – довільна гладка функція така, що ця заміна змінних невироджена в розглядуваній області, рівняння (15) зводиться до канонічного вигляду

$$\tilde{u}_{\eta\eta} + f_(\xi, \eta, \tilde{u}, \tilde{u}_\xi, \tilde{u}_\eta) = 0. \tag{21}$$

В еліптичному випадку $b^2 - ac < 0$, тому перші інтеграли (19) будуть комплексно спряженими, тобто

$$\varphi(x, y) = \alpha(x, y) + i\beta(x, y), \quad \psi(x, y) = \alpha(x, y) - i\beta(x, y),$$

де α і β – дійснозначні функції. У цьому випадку маємо дві сім'ї уявних характеристик. Заміною $\xi = \alpha(x, y)$, $\eta = \beta(x, y)$ рівняння (15) зводиться до канонічного вигляду

$$\tilde{u}_{\xi\xi} + \tilde{u}_{\eta\eta} + f_3(\xi, \eta, \tilde{u}, \tilde{u}_\xi, \tilde{u}_\eta) = 0. \tag{22}$$

При зведенні до канонічного вигляду рівняння (15) треба пам'ятати, що таке зведення можливе лише у кожній з тих частин області, де рівняння зберігатиме тип.

Якщо рівняння (15) лінійне, тобто

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + d(x, y)u_x + e(x, y)u_y + f(x, y)u = g(x, y) \tag{23}$$

то після невиродженої заміни

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y) \tag{24}$$

воно набуде вигляду

$$\tilde{a}\tilde{u}_{\xi\xi} + 2\tilde{b}\tilde{u}_{\xi\eta} + \tilde{c}\tilde{u}_{\eta\eta} + \tilde{d}\tilde{u}_{\xi} + \tilde{e}\tilde{u}_{\eta} + \tilde{f}\tilde{u} = \tilde{g}, \tag{25}$$

де

$$\begin{aligned}
\tilde{a}(\xi,\eta) &:= a(\xi_x)^2 + 2b\xi_x\xi_y + c(\xi_y)^2,\\
\tilde{c}(\xi,\eta) &:= a(\eta_x)^2 + 2b\eta_x\eta_y + c(\eta_y)^2,\\
\tilde{b}(\xi,\eta) &:= a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y,\\
\tilde{d}(\xi,\eta) &:= a\xi_{xx} + 2b\xi_{xy} + c\xi_{yy} + d\xi_x + e\xi_y,\\
\tilde{e}(\xi,\eta) &:= a\eta_{xx} + 2b\eta_{xy} + c\eta_{yy} + d\eta_x + e\eta_y,\\
\tilde{f}(\xi,\eta) &:= f, \quad \tilde{g}(\xi,\eta) := g.
\end{aligned} \tag{26}$$

Зауважимо, що в правих частинах (26) треба перейти від змінних x і y до змінних ξ і η, розв'язавши відносно x і y систему рівнянь

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = \xi,\\ \psi(x,y) = \eta. \end{cases}$$

Можна довести, що коли коефіцієнти рівняння (23) сталі, то і коефіцієнти рівняння (25) є сталими. Формулами (26) зручно користуватися при знаходженні канонічного вигляду рівняння (23).

Приклад 3. Звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx}(x,y) - 2\cos x u_{xy}(x,y) - (3+\sin^2 x)u_{yy}(x,y) - yu_y(x,y) = 0. \tag{27}$$

де $u := u(x,y,z)$, і звести його до канонічного вигляду.

◄ Оскільки $a = 1$, $b = -cosx$, $c = -(3+\sin^2 x)$, то $b^2 - ac = \cos^2 x + 3 + \sin^2 x = 4 > 0$ і, отже, задане рівняння є гіперболічним в усій площині. Рівняння характеристик

$$(dy)^2 + 2\cos x dxdy - (2+\sin^2 x)(dx)^2 = 0$$

розпадається на такі два рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = -\cos x - 2, \quad \frac{dy}{dx} = -\cos x + 2.$$

Загальними інтегралами цих рівнянь є відповідно

$$y + \sin x - 2x = C_1, \quad y + \sin x + 2x = C_2.$$

Для зведення рівняння (27) до канонічного вигляду зробимо заміну $\xi = y + \sin x - 2x$, $\eta = y + \sin x + 2x$. Частинні похідні від функції u за змінними x, y виразимо через похідні від функції $\tilde{u}$ за зміннимси ξ, η:

$$u_x = \tilde{u}_\xi \xi_x + \tilde{u}_\eta \eta_x = \tilde{u}_\xi(\cos x - 2) + \tilde{u}_\eta(\cos x + 2),$$

$$u_y = \tilde{u}_\xi \xi_y + \tilde{u}_\eta \eta_y = \tilde{u}_\xi + \tilde{u}_\eta,$$

$$u_{xx} = \tilde{u}_{\xi\xi}(\xi_x)^2 + 2\tilde{u}_{\xi\eta}\eta_x\eta_x + \tilde{u}_{\eta\eta}(\eta_x)^2 + \tilde{u}_\xi \xi_{xx} + \tilde{u}_\eta \eta_{xx} =$$

$$= (cosx - 2)^2\tilde{u}_{\xi\xi} + 2(\cos^2 x - 4)\tilde{u}_{\xi\eta} + (\cos x + 2)^2\tilde{u}_{\eta\eta} - \sin x\tilde{u}_\xi - \sin x\tilde{u}_\eta,$$

$$u_{xy} = \tilde{u}_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + \tilde{u}_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + \tilde{u}_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + \tilde{u}_\xi \xi_{xy} + \tilde{u}_\eta \eta_{xy} =$$

$$= (cosx - 2)\tilde{u}_{\xi\xi} + 2\cos x\tilde{u}_{\xi\eta} + (\cos x + 2)\tilde{u}_{\eta\eta},$$

$$u_{yy} = \tilde{u}_{\xi\xi}(\xi_y)^2 + 2\tilde{u}_{\xi\eta}\eta_y\eta_y + \tilde{u}_{\eta\eta}(\eta_y)^2 + \tilde{u}_\xi \xi_{yy} + \tilde{u}_\eta \eta_{yy} = \tilde{u}_{\xi\xi} + 2\tilde{u}_{\xi\eta} + \tilde{u}_{\eta\eta}.$$

Підставивши вирази для цих похідних у рівняння (27), після зведення подібних членів, дістанемо

$$-16\tilde{u}_{\xi\eta}(\xi, \eta) - (y + \sin x)(\tilde{u}_\xi(\xi, \eta) + \tilde{u}_\eta(\xi, \eta)) = 0.$$

Оскільки $y + \sin x = \dfrac{1}{2}(\xi + \eta)$, то остаточно матимемо

$$\tilde{u}_{\xi\eta} + \frac{\xi + \eta}{32}(\tilde{u}_\xi(\xi, \eta) + \tilde{u}_\eta(\xi, \eta)) = 0. \blacktriangleright$$

Приклад 4. Звести до канонічного вигляду рівняння

$$xu_{xx}(x,y)-2\sqrt{xy}u_{xy}(x,y)+yu_{yy}(x,y)+0,5u_y(x,y)=0, x>0, y>0. \tag{28}$$

◀ Тут $a=x$, $b=-\sqrt{xy}$, $c=y$, $b^2-ac=xy-xy=0$. Отже, рівняння (28) параболічне в області $\Omega := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|x>0, y>0\}$. Воно має одну сім'ю характеристик, які описуються диференціальним рівнянням

$$y^{-1/2}dy=-x^{-1/2}dx.$$

Загальний інтеграл цього рівняння $\sqrt{x}+\sqrt{y}=C$. Тому беремо $\xi=\sqrt{x}+\sqrt{y}$, а за η можна взяти довільну функцію $\psi\in C^2(\Omega)$, для якої якобіан $\dfrac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}\neq 0$. Покладемо $\eta=\sqrt{x}$. Маємо

$$u_{=}(2\sqrt{x})^{-1}(\tilde{u}_\xi+\tilde{u}_\eta), u_y=(2\sqrt{y})^{-1}\tilde{u}_\xi,$$
$$u_{xx}=(4x)^{-1}\tilde{u}_{\xi\xi}+(2x)^{-1}\tilde{u}_{\xi\eta}+(4x)^{-1}\tilde{u}_{\eta\eta}-(4\sqrt{x^3})^{-1}(\tilde{u}_\xi+\tilde{u}_\eta),$$
$$u_{xy}=(4\sqrt{xy})^{-1}(\tilde{u}_{\xi\xi}+\tilde{u}_{\xi\eta}), u_{yy}=(4y)^{-1}\tilde{u}_{\xi\xi}-(2\sqrt{y^3})\tilde{u}_\xi.$$

Якщо підставити ці вирази в рівняння (28), то дістанемо його канонічний вигляд

$$\tilde{u}_{\eta\eta}-\frac{1}{\eta}(\tilde{u}_\xi(\xi,\eta)+\tilde{u}_\eta(\xi,\eta))=0. \blacktriangleright$$

Приклад 5. Звести до канонічного вигляду рівняння

$$y^2u_{xx}(x,y)+2xyu_{xy}(x,y)+2x^2u_{yy}(x,y)+yu_y(x,y)=0, x\neq 0, y\neq 0. \tag{29}$$

◀ У цьому рівнянні $a=y^2$, $b=xy$, $c=2x^2$, $b^2-ac=-x^2y^2<0$ в області, де $x\neq 0$ і $y\neq 0$. Це означає, що воно еліптичне в цій області. Рівняння характеристик $y^2(dy)^2-2xydxdy+2x^2(dx)^2=0$ розпадається на два рівняння

$$\frac{dy}{dx}=(1+i)\frac{x}{y}, \frac{dy}{dx}=(1-i)\frac{x}{y}.$$

Розв'язуючи ці рівняння, знаходимо дві сім'ї уявних характеристик

$$(1+i)x^2 - y^2 = C_1, \quad (1-i)x^2 - y^2 = C_2.$$

Введемо нові незалежні змінні $\xi = x^2 - y^2$, $\eta = x^2$. Для знаходження коефіцієнтів канонічного вигляду рівняння (29), скористаємося формулами (26). Оскільки в еліптичному випадку $\tilde{a} = \tilde{c}$, а $\tilde{b} = 0$, то

$$\tilde{a} = \tilde{c} = y^2(2x)^2 = 2xy(2x)(-2y) + 2x^2(-2y)^2 = 4x^2y^2,$$

$$\tilde{d} = 2y^2 + 2xy \cdot 0 + 2x^2(-2) + y(-2y) = -4x^2,$$

$$\tilde{e} = y^2 \cdot 2 + 2xy \cdot 0 + 2x^2 \cdot 0 + y \cdot 0 = 2y^2, \tilde{f} = f = 0, \tilde{g} = g = 0.$$

Отже, рівняння (29) набуває вигляду

$$4x^2y^2(\tilde{u}_{\xi\xi} + \tilde{u}_{\eta\eta}) - 4x^2\tilde{u}_\xi + 2y^2\tilde{u}_\eta = 0.$$

Оскільки $y^2 = \eta - \xi$, $x^2 = \eta$, то канонічний вигляд рівняння такий

$$\tilde{u}_{\xi\xi}(\xi,\eta) + \tilde{u}_{\eta\eta}(\xi,\eta) + \frac{1}{\xi-\eta}\tilde{u}_\xi(\xi,\eta) + \frac{1}{2\eta}\tilde{u}_\eta(\xi,\eta) = 0. \blacktriangleright$$

Зауваження 1. Рівняння (29) визначене також на координатних осях, але там $b^2 - ac = 0$, тобто рівняння перестає бути еліптичним. При цьому коефіцієнти канонічного вигляду $\frac{1}{2\eta} = \frac{1}{2x^2}$ або $\frac{1}{\xi-\eta} = -\frac{1}{y^2}$ стають необмеженими. Лінії $x = 0$ і $y = 0$ називаються **лініями параболічності**.

Приклад 6. Звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx} + yu_{yy} = 0, (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{30}$$

$\blacktriangleleft$ Тут $a = 1$, $b = 0$, $c = y$, $b^2 - ac = -y$. Якщо $y = 0$, то рівняння параболічне і його канонічний вигляд $u_{xx} = 0$, тобто, як і в прикладі 5, $y = 0$ є лінією параболічності. При $y > 0$ наше рівняння є еліптичним, а при $y < 0$ – гіперболічним.

Складемо рівняння характеристик

$$(dy)^2 + y(dx)^2 = 0.$$

Якщо $y > 0$, то звідси дістаємо два рівняння

$$dy + i\sqrt{y}dx = 0, \quad dy - i\sqrt{y}dx = 0,$$

які мають загальні інтеграли $-2\sqrt{y}i + x = C_1$, $2\sqrt{y}i + x = C_2$. Зробивши заміну $\xi = x$, $\eta = 2\sqrt{y}$, одержуємо за формулами (26), що $\tilde{a} = \tilde{c} = 1$, $\tilde{b} = 0$, $\tilde{d} = 0$, $\tilde{e} = -\frac{1}{2\sqrt{y}}$, $\tilde{f} = 0$, $\tilde{g} = 0$. Отже, в області еліптичності рівняння (30) має канонічний вигляд

$$\tilde{u}_{\xi\xi}(\xi, \eta) + \tilde{u}_{\eta\eta}(\xi, \eta) - \frac{1}{\eta}\tilde{u}_{\eta}(\xi, \eta) = 0, \eta > 0.$$

В області гіперболічності ($y < 0$) рівняння характеристик розпадається на рівняння

$$dy + \sqrt{-y}dxc = 0, dy - \sqrt{-y}dx = 0.$$

Звідси дістаємо дві сім'ї характеристик: $x + 2\sqrt{-y} = C_1$, $x - 2\sqrt{-y} = C_2$. Заміна змінних $\xi = x + 2\sqrt{-y}$, $\eta = x - 2\sqrt{-y}$ зводить рівняння (30) до канонічного вигляду

$$\tilde{u}_{\xi\eta}(\xi, \eta) + \frac{1}{2(\xi - \eta)}(\tilde{u}_{\xi}(\xi, \eta) - \tilde{u}_{\eta}(\xi, \eta)) = 0,$$

бо коефіцієнти $\tilde{a} = \tilde{c} = 0$, $\tilde{b} = 2$, $\tilde{d} = \dfrac{1}{2\sqrt{-y}}$, $\tilde{e} = -\dfrac{1}{2\sqrt{-y}}$, $\tilde{f} = 0$, $\tilde{g} = 0$, $\xi - \eta = 4\sqrt{-y} \neq 0$. ►

Зауваження 2. Оскільки характеристики вибираються неоднозначно, то коефіцієнти в групі молодших членів канонічної форми рівняння можуть відрізнятися.

Вправи

О1. Визначити тип рівняння і звести його до канонічного вигляду:

1) $u_{xx}+2u_{xy}-2u_{xx}+2u_{yy}+6u_{zz}=0$,

2) $u_{xy}+u_{xz}-u_{yz}-u_x+u_y=0$,

3) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+6u_{xy}+2u_{xx}+2u_{yz}+2u_x+2u_y+4u=0$,

4) $u_{xy}-2u_{xz}+u_{yz}+u_x+\frac{1}{2}u_y=0$,

5) $u_{xx}+5u_{yy}+14u_{zz}+4u_{xy}+16u_{yz}+6u_{xz}=0$.

О2. Пропоновані нижче рівняння звести до канонічного вигляду в кожній з областей, де зберігається тип рівняння:

1) $u_{xx}+2u_{xy}+2u_{yy}=0$,

2) $u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}+4u=0$,

3) $u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}+2u_x+6u_y=0$,

4) $x^2u_{xx}-y^2u_{yy}-2yu_y=0$,

5) $x^2u_{xx}-2xyu_{xy}+y^2u_{yy}+xu_x+yu_y=0$,

6) $\sin^2 xu_{xx}-2y\sin xu_{xy}+y^2u_{yy}=0$,

7) $u_{xx}+yu_{yy}+0,5u_y=0$,

8) $xyu_{xx}+u_{yy}+\frac{1}{2y}yu_x-\frac{1}{2y}u_y=0$, $x\geq 0$, $y>0$,

9) $x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=0$,

10) $y^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=0$,

11) $u_{xx}-4u_{xy}+4u_{yy}+u_y-u_x=0$,

12) $u_{xx}-2\sin xu_{xy}-\cos^2 xu_{yy}-\cos xu_y=0$,

13) $x^2u_{xx}-y^2u_{yy}=0$,

14) $u_{xx}-4u_{xy}-3u_{yy}-2u_x+6u_y=0$.

С1. Звести до канонічного вигляду рівняння:

1) $u_{xx}+2u_{xy}+2u_{yy}+4u_{yz}+5u_{zz}-u_x+3u_z=0$,

2) $u_{xx}+2u_{xz}-2u_{xt}+u_{yy}+2u_{yz}+2u_{yt}+2u_{zz}+2u_{tt}=0$,

3) $u_{yy}-2u_{xy}+u_{zz}+u_x+u_y+u_z+u=0$,

4) $2u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}-2u_{xy}+2u_x-u_y+u_z+u=0$,

5) $u_{xx}-2u_{xy}-2u_{xz}+u_x+u_y+2u_z+u=0$.

С2. Визначити тип рівняння і звести його до канонічного вигляду:

1) $u_{xx}+2u_{xy}+\cos^2 xu_{yy}-\operatorname{ctg} x(u_x+u_y)=0$,
2) $u_{xx}-xu_{yy}=0$,
3) $u_{xx}+xu_{yy}=0$ для $x\geq 0$,
4) $xu_{xx}+2\sqrt{xy}u_{xy}+yu_{yy}-\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}-1)u_y=0$,
5) $e^{2x}u_{xx}+2e^{x+y}u_{xy}+e^{2y}u_{yy}=0$,
6) $\operatorname{tg}^2 xu_{xx}-2y\operatorname{tg} xu_{xy}+y^2u_{yy}+(\operatorname{tg}^3 x)u_x=0$,
7) $yu_{xx}+xu_{yy}=0$, $x>0$, $y>0$,
8) $y^2u_{xx}+2xyu_{xy}+2x^2u_{yy}+yu_y=0$.

Домашнє завдання

Д1. Звести до канонічного вигляду рівняння:
1) $4u_{xx}-4u_{xy}-2u_{yz}+u_y+u_z=0$,
2) $u_{xy}-u_{xz}+u_x+u_y-u_z=0$,
3) $u_{xy}-u_{xt}+u_{zz}-2u_{zt}+2u_{tt}=0$,
4) $xu_{xy}+u_{xz}+yu_{xt}u_{zt}=0$,
5) $u_{xx}+4u_{xy}-u_{zz}=0$,
6) $3u_{xy}-2u_{xz}-u_{yz}-u=0$.

Д2. У кожній області, де зберігається тип рівняння, звести його до канонічного вигляду:
1) $u_{xx}-2u_{xy}+2u_{yy}=0$,
2) $4u_{xx}+4u_{xy}+u_{yy}-2u_y=0$,
3) $u_{xx}+4u_{xy}+u_{yy}+2u_x+u_y+u=0$,
4) $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+\alpha u_x+\beta u_y+cu=0$,
5) $y^2u_{xx}+x^2u_{yy}=0$,
6) $y^2u_{xx}-x^2u_{yy}=0$,
7) $yu_{xx}+u_{yy}=0$, $y>0$,
8) $4y^2u_{xx}-e^{2x}u_{yy}=0$,
9) $u_{xx}-2\sin xu_{xy}+(2-\cos^2 x)u_{yy}=0$,
10) $(1+x^2)u_{xx}+(1+y^2)u_{yy}+xu_x+yu_y-2u=0$,
11) $e^yu_{xx}+e^xu_{yy}-0,5e^yu_x-0,5e^xu_y=5xy$б
12) $u_{xx}+4u_{xy}+5u_{yy}+u_x+2u_y=0$,
13) $u_{xx}+2\sin xu_{xy}+\sin^2 xu_{yy}=0$,
14) $xy^2u_{xx}-2x^2yu_{xy}+x^2u_{yy}-y^2u_x=0$.

Відповіді

О1. 1) $\tilde u_{\xi_1\xi_1}+\tilde u_{\xi_2\xi_2}+\tilde u_{\xi_3\xi_3}=0$, $\xi_1=x$, $\xi_2=-x+y$, $\xi_3=x-\frac12 y+\frac12 z$; 2) $\tilde u_{\xi_1\xi_1}-\tilde u_{\xi_2\xi_2}-\tilde u_{\xi_3\xi_3}+\tilde u_{\xi_2}=0$, $\xi_1=x+y$, $\xi_2=-x+y$, $\xi_3=-x-y+z$; 3) $\tilde u_{\xi_1\xi_1}-\tilde u_{\xi_2\xi_2}+\tilde u_{\xi_3\xi_3}+2\tilde u_{\xi_1}+\sqrt2\tilde u_{\xi_2}+\sqrt2\tilde u_{\xi_3}+4\tilde u=0$, $\xi_1=x$, $\xi_2=(3x-y)/2\sqrt2$, $\xi_3=(-x-y+4z)/2\sqrt2$; 4) $\tilde u_{\xi_1\xi_1}-\tilde u_{\xi_2\xi_2}+\tilde u_{\xi_3\xi_3}+\frac32\tilde u_{\xi_1}-\frac12\tilde u_{\xi_2}=0$, $\xi_1=x+y$, $\xi_2=-x+y$, $\xi_3=\frac{\sqrt2}{2}(-x+2y+z)$; 5) $\tilde u_{\xi_1\xi_1}+\tilde u_{\xi_2\xi_2}+\tilde u_{\xi_3\xi_3}=0$, $\xi_1=x$, $\xi_2=-2x+y$, $\xi_3=x-2y+z$.

О2. 1) $\tilde u_{\xi\xi}+\tilde u_{\eta\eta}=0$, $\xi=y-x$, $\eta=x$; 2) $\tilde u_{\eta\eta}+\tilde u=0$, $\xi=x-y$, $\eta=x+y$; 3) $2\tilde u_{\xi\eta}-\tilde u_\xi=0$, $\xi=x+y$, $\eta=y-3x$; 4) $\tilde u_{\xi\eta}+\frac{1}{2\eta}\tilde u_\xi=0$, $\xi=xy$, $\eta=\frac yx$; 5) $\eta\tilde u_{\eta\eta}+\tilde u_\eta=0$, $\xi=xy$, $\eta=y$; 6) $\tilde u_{\eta\eta}-\frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2}\tilde u_\xi=0$, $\xi=y\operatorname{tg}\frac x2$, $\eta=y$; 7) $\tilde u_{\xi\eta}=0$ при $y<0$, $\xi=x+2\sqrt{-y}$, $\eta=x-2\sqrt{-y}$, $\tilde u_{\xi\xi}+\tilde u_{\eta\eta}=0$ при $y>0$, $\xi=x$, $\eta=2\sqrt y$, $\tilde u_{\xi\xi}+0,5\tilde u_\eta=0$ при $y=0$; 8) $\tilde u_{\xi\xi}+\tilde u_{\eta\eta}=0$ при $x>0$, $y<0$, $\xi=\frac23 y^{3/2}$, $\eta=2x^{1/2}$, $\tilde u_{yy}+\frac{1}{2y}y\tilde u_x-\frac{1}{2y}\tilde u_y=0$ при $x=0$, $y>0$; 9) $\tilde u_{\eta\eta}=0$, $\xi=\frac yx$, $\eta=y$; 10) $\tilde u_{\eta\eta}+\frac{2\xi}{\xi-\eta^2}\tilde u_\xi=0$, $\xi=x^2+y^2$, $\eta=y$; 11) $\tilde u_{\eta\eta}-\tilde u_\xi-\tilde u_\eta=0$, $\xi=2x+y$, $\eta=x$; 12) $\tilde u_{\xi\eta}=0$, $\xi=x+y-\cos x$, $\eta=-x+y-\cos x$; 13) $\tilde u_{\xi\eta}-\frac{1}{2\xi}\tilde u_\eta=0$, $\xi=xy$, $\eta=\frac yx$; 14) $\tilde u_{\xi\eta}-\tilde u_\xi=0$, $\xi=x+y$, $\eta=3x+y$.

С1. 1) $\tilde u_{\xi_1\xi_1}+\tilde u_{\xi_2\xi_2}+\tilde u_{\xi_3\xi_3}-\tilde u_{\xi_1}+\tilde u_{\xi_2}+\tilde u_{\xi_3}=0$, $\xi_1=x$, $\xi_2=-x+y$, $\xi_3=2x-2y+z$;

Тема 20. МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК. ЗАДАЧА КОШІ

1^0. Ідея методу полягає в тому, що після зведення до канонічного вигляду за допомогою характеристик рівняння часто спрощується настільки, що стає можливим знаходження його загального розв'язку. Це, в свою чергу, дозволяє досліджувати і розв'язувати задачу Коші та деякі інші задачі для цього рівняння.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$xy^3u_{xx}(x,y) - x^3yu_{yy}(x,y) + (8x^2-1)y^3u_x(x,y) + x^3u_y(x,y)+$$

$$+16x^3y^3u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}. \tag{1}$$

◀ Оскільки $b^2 - ac = x^4y^4 > 0$ при $xy \neq 0$, то рівняння (1) гіперболічне скрізь за винятком координатних осей (ліній параболічності). Розв'яжемо його при $xy \neq 0$. Рівняння характеристик $xy^3dy^2 - x^3ydx^2 = 0$ розпадається на два рівняння $ydy \pm xdx = 0$, тобто характеристиками є гіперболи $y^2 - x^2 = C_1$ та кола $x^2 + y^2 = C_2$. Отже, заміною $\xi = y^2 - x^2$, $\eta = x^2 + y^2$ рівняння (1) зводиться до канонічного вигляду. Знайдемо нові коефіцієнти, скориставшись формулами (26) з теми 19:

$$\tilde{a} = \tilde{c} = 0,$$

$$\tilde{b} = xy^3(-2x)\cdot 2x - x^3y\cdot 2y\cdot 2y = -8x^3y^3,$$

$$\tilde{d} = xy^3(-2) - x^3y\cdot 2 + (8x^2-1)y^3(-2x) + x^3\cdot 2y = -16x^3y^3,$$

$$\tilde{e} = xy^3\cdot 2 - x^3y\cdot 2 + (8x^2-1)y^3 2x + x^3\cdot 2y = 16x^3y^3,$$

$$\tilde{f} = f = 16x^3y^3, \tilde{g} = g = 0,$$

тому рівняння (1) набуде вигляду

$$-16x^3y^3\tilde{u}_{\xi\eta} - 16x^3y^3\tilde{u}_\xi + 16x^3y^3\tilde{u}_\eta + 16x^3y^3\tilde{u} = 0$$

або
$$(\tilde{u}_\eta + \tilde{u})_\xi - (\tilde{u}_\eta + \tilde{u}) = 0. \tag{2}$$
Позначимо
$$v := \tilde{u}_\eta + \tilde{u}, \tag{3}$$
тоді (2) набуде вигляду $v_\xi - v = 0$, звідки $v = \omega(\eta)e^\xi$, де ω – довільна неперервно диференційовна функція. Підставимо v в (3):
$$\tilde{u}_\eta + \tilde{u} = \omega(\eta)e^\xi.$$
Це звичайне лінійне диференціальне рівняння першого порядку відносно $\tilde{u}$ як функції η при фіксованому ξ, права частина якого залежить від параметра ξ. Розв'язуючи його, наприклад, методом варіації довільної сталої, дістанемо $\tilde{u}(\xi,\eta) = e^{-\eta}f(\xi) + e^{\xi-\eta}\int \omega(\eta)e^\eta d\eta$, де f – довільна двічі неперервно диференційовна функція. Тут і далі символом $\int \alpha(\eta)d\eta$, позначається якась одна з первісних функції α. Оскільки ω – довільна неперервно диференційовна функція, то і $e^{-\eta}\int \omega(\eta)e^\eta d\eta = g(\eta)$, $\eta > 0$, – довільна двічі неперервно диференційовна функція, а тому $\tilde{u}(\xi,\eta) = e^{-\eta}f(\xi) + e^\xi g(\eta)$. Повертаючись до старих змінних, маємо
$$u(x,y) = e^{-(y^2+x^2)}f(y^2-x^2) + e^{y^2-x^2}g(y^2+x^2), \quad xy \neq 0. \tag{4}$$

Зазначимо, що на лініях параболічності $xy = 0$ (4) теж є розв'язком рівняння (1), але містить, по суті, лише одну довільну функцію. Причиною останнього є дотик характеристик $y^2 - x^2 = C_1$ до характеристик $y^2 + x^2 = C_2$ на лініях параболічності.▶

2^0. **Класичною задачею Коші** для рівняння коливань струни називається задача про знаходження функції u з класу $C^2(\Pi^1) \cap C^1(\overline{\Pi^1})$, де $\Pi^1 : \{(x,t)\,|x \in \mathbb{R}, t > 0\}$, яка задовольняє рівняння
$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in \Pi^1, \tag{5}$$

і початкові умови

$$u(x,t)|_{t=0} := u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,t)|_{t=0} := u_t(x,0) = \psi(x), x \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

де $f \in C(\overline{\Pi^1})$, $f'_x \in C(\overline{\Pi^1})$, $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ – задані функції. Розв'язок задачі Коші (5), (6) існує, єдиний і при $f \equiv 0$ легко знаходиться метоом характеристик. Справді, оскільки $x \pm at = \mathrm{const}$ – характеристики рівняння (5), то заміною $\xi = x - at$, $\eta = x + at$ воно зводиться до рівняння $\tilde{u}_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0$, загальний розв'язок якого $\tilde{u} = g_1(\xi) + g_2(\eta)$, тобто

$$u(x,t) = g_1(x - at) + g_2(x + at), \{g_1, g_2\} \subset C^2(\mathbb{R}).$$

Задовольняючи початкові умови (6), одержуємо

$$g_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int\limits_x^0 \psi(z)dz + C, g_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int\limits_x^0 \psi(z)dz - C,$$

звідки

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz, (x,t) \in \Pi^1. \tag{7}$$

Формулу (7) називають називають **формулою Даламбера** для однорідного рівняння (5). Її можна узагальнити на випадок $f \not\equiv 0$. Справді, легко переконатися, що функція $v(x,t) := \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)dz$, $(x,t) \in \Pi^1$, є розв'язком рівняння (5) і при $t = 0$ задовольняє нульові початкові умови $v(x,0) = 0$, $v_t(x,0) = 0$, тому $u + v$, де u визначена в (7), є розв'язком задачі (5), (6), тобто формула

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz +$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)dz, (x,t)\in\Pi^1, \tag{8}$$

визначає рзв'язок цієї задачі. Ця формула називається **формулою Даламбера** для неоднорідного рівняння (5).

Зазначимо, що формули, аналогічні до (8), правильні також у випадку більшого числа просторових змінних. Зокрема, розв'язок задачі Коші для рівняння коливань мембрани

$$u_{tt}(x,y,t) = a^2(u_{xx}(x,y,t) + u_{uu}(x,y,t)) + f(x,y,t),$$

$$(x,y,t)\in\Pi^2 := \{(x,y,t)\,|(x,y)\in\mathbb{R}^2, t>0\},$$

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), u_t(x,y,0) = \psi(x,y), (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

при $f\in C^2(\overline{\Pi^2})$, $\varphi\in C^3(\mathbb{R}^2)$, $\psi\in C^2(\mathbb{R}^2)$ існує, єдиний і зображується **формулою Пуассона**

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\partial_t \int\limits_{K_{at}(x,y)} \frac{\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{K_{at}(x,y)} \frac{\psi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{K_{a(t-\tau)}(x,y)} \frac{f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}, (x,y,t)\in\Pi^2,$$

де $K_{at}(x,y)$ – круг радіуса at з центром у точці (x,y).

Аналогічно, розв'язок задачі Коші для хвильового рівняння в просторі

$$u_{tt}(x,y,z,t) = a^2(u_{xx}(x,y,z,t) + u_{yy}(x,y,z,t) + u_{zz}(x,y,z,t))+$$

$$+f(x,y,z,t), (x,y,z,t)\in\Pi^3 := \{(x,y,z,t)\,|(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, t>0\},$$

$$u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z), u_t(x,y,z,0)=\psi(x,y,z), (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,$$

при $f\in C^2(\overline{\Pi}^3)$, $\varphi\in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\psi\in C^2(\mathbb{R}^3)$ існує, єдиний і зображається **формулою Кірхгофа**

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\partial_t\left(\frac{1}{t}\int\limits_{S_{at}(x,y,z)}\varphi(\xi,\eta,\zeta)dS\right)+$$

$$+\frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{S_{at}(x,y,z)}\psi(\xi,\eta,\zeta)dS+$$

$$+\frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_{S_{at}(x,y,z)}\frac{f(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}{a})}{\sqrt{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2)}}d\xi d\eta d\zeta, (x,y,z,t)\in\Pi^3,$$

де $K_{at}(x,y,z)$ – куля радіуса at з центром (x,y,z), а $S_{at}(x,y,z)$ – її межа (сфера).

Приклад 2. Розв'язати задачу Коші

$$u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t)+xt^2, x\in\mathbb{R}, t>0,$$

$$u(x,0)=0, u_t(x,0)=x+1, x\in\mathbb{R}.$$

◀ Скористаємося формулою (8). У нашому випадку $a=1$, $\varphi(x)=0$, $\psi(x)=x+1$, $f(x,t)=xt^2$. Тому

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}(z+1)dz+\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}z\tau^2dz=\frac{1}{4}(z+1)^2\Big|_{x-t}^{x+t}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\tau^2\frac{z^2}{2}\Big|_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}d\tau=t(x+1)+x\int\limits_0^t\tau^2(t-\tau)d\tau=t(x+1)+\frac{1}{12}xt^4.$$

Отже, розв'язком задачі є функція $u(x,t)=t(x+1)+\frac{1}{12}xt^4$, $x\in\mathbb{R}$.▶

Приклад 3. Розв'язати задачу Коші для тривимірного рівняння коливань

$$u_{tt}(x,y,z,t)=u_{xx}(x,y,z,t)+u_{yy}(x,y,z,t)+u_{zz}(x,y,z,t),(x,y,z,t)\in\Pi^3,$$

$$u(x,y,z,0)=z,u_t(x,y,z,0)=x+z,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

◀ Використаємо формулу Кірхгофа. З умови задачі випливає, що $a=1$, $f(x,y,z,t)=0$, $\varphi(x,y,z)=z$, $\psi(x,y,z)=x+z$. Тоді

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi}\partial_t\int\limits_{S_t(x,y,z)}\frac{\zeta}{t}dS+\frac{1}{4\pi}\frac{\xi+\zeta}{t}dS.$$

Сфера $S_t(x,y,z)$ задається рівнянням $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z-\zeta(^2=t^2$. Спроектуємо цю сферу на площину $O\xi\eta$. Позначимо через $K_t(x,y,z)$ круг, в який проектується сфера. Зведемо поверхневі інтеграли, які ствоять у правій частині, до подвійних, що беруться по кругу $K_t(x,y,z)$:

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi}\partial_t\Bigg(\int\limits_{K_t(x,y,z)}\frac{z+\sqrt{t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}{t\sqrt{t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}rd\xi d\eta+$$

$$+\int\limits_{K_t(x,y,z)}\frac{z-\sqrt{t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}{t\sqrt{t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}rd\xi d\eta\Bigg)+$$

$$+\Bigg(\int\limits_{K_t(x,y,z)}\frac{\xi+z+\sqrt{t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}{t\sqrt{t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}rd\xi d\eta+$$

$$+\int\limits_{K_t(x,y,z)}\frac{\xi+z-\sqrt{t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}{t\sqrt{t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}rd\xi d\eta\Bigg).$$

Перші доданки в дужках – інтеграли, взяті по верхній половині сфери $\zeta=z+\sqrt{t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}$; другі – по нижній половині сфери $\zeta = z - \sqrt{t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}$. Перейдемо в подвійних інтегралах п кругу $K_t(x,y,z)$ до полярних координат: $\xi - x = \rho\cos\varphi$, $\eta - y = \rho\sin\varphi$, $0 < \rho < 1$, $0 < \varphi \le 2\pi$. Тоді

$$u(x,y,z,t) = \frac{z}{2\pi}\partial_t \int\limits_0^t \frac{\rho d\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t \frac{(x+z)\rho d\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= z + (x+z)t, \quad (x,y,z,t) \in \Pi^3. \blacktriangleright$$

Зауваження 1. Задачу з прикладу 3 можна розв'язати простіше. Оскільки функції $\varphi = z$ і $\psi = x + z$ задовольняють рівняння, то розв'язок задачі шукатимемо у вигляді

$$u(x,y,z,t) = f(t)z + g(t)(x+z),$$

де f і g – невідомі двічі неперервно диференційовні функції. Після підстановки цієї функції у рівняння одержимо

$$f''(t)z + g''(t)(x+z) = 0,$$

звідки випливає, що $f''(t) = 0$ і $g''(t) = 0$, $t > 0$. Якщо задовольнити функцією u початкові умови, то матимемо

$$\begin{cases} f(0)z + g(0)(x+z) = z, \\ f'(0)z + g'(0)(x+z) = x + z \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} f(0) = 1, \\ f'(0) = 0; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} g(0) = 0, \\ g'(0) = 1. \end{cases}$$

Отже, для f і g одержимо відповідно такі задачі Коші:

$$\begin{array}{ll} f''(t) = 0, & g''(t) = 0, \\ \begin{cases} f(0) = 1, \\ f'(0) = 0; \end{cases} & \begin{cases} g(0) = 0, \\ g'(0) = 1. \end{cases} \end{array}$$

Розв'яжемо першу з них. Загальний розв'язок рівняння $f(t0 = C_1t + C_2$ після підстановки в початкові умови дасть значення $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, звідси випливає, що $f(t) = 1$, $t \geq 0$.

Аналогічно одержимо, що $g(t) = t$, $t \geq 0$. Тому

$$u(x, y, z, t) = z + (x + z)t, \quad \{x, y, z\} \subset \mathbb{R}^3, t > 0.$$

Оскільки розв'язок задачі Коші єдиний, то іншого розв'язку немає.

Зауваження 2. При розв'язуванні задачі Коші для гіперболічного рівняння у випадку двох або трьох незалежних змінних зручно користуватися таким твердженням: *якщо функції f, φ, ψ гармонічні в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), а $g \in C^1((0, \infty))$, то розв'язок задачі Коші*

$$u_{tt}(x, t) = a^2 \Delta u(x, t) + g(t) f(x),$$

$$(x, t) \in \Pi^n := \{(x, t) \,|x \in \mathbb{R}^n, t > 0\},$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

де $\Delta u := u_{x_1x_1} + \cdots + u_{x_nx_n}$, *виражаєтьcя формулою*

$$u(x, t) = \varphi(x) + t\psi(x) + f(x) \int\limits_0^t (t - \tau) g(\tau) d\tau, (x, t) \in \Pi^n.$$

3^0. **Загальна задача Коші** полягає у знаходженні розв'язку гіперболічного ($b^2 - ac > 0$) в області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ рівняння

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + d(x, y)u_x + e(x, y)u_y +$$
$$+ f(x, y)u = g(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \tag{9}$$

з достатньо гладкими коефіцієнтами і правою частиною, який на кривій $\Gamma \subset \Omega$ задовольняє умови

$$u|_\Gamma = \varphi, \partial_{\bar{l}} u|_\Gamma = \psi. \tag{10}$$

Якщо крива Γ: 1) регулярна, 2) не є характеристикою і не дотикається до характеристик рівняння (9); 3) не має дотичних, паралельних вектору $\vec{l}$, то при досить гладких φ, ψ в області $\Omega_1 \subset \Omega$, обмеженій характеристиками рівняння (9), які проходять через кінці Γ, існує єдиний розв'язок задачі (9), (10).

Приклад 4. Розв'язати задачу

$$x^2u_{xx}(x,y) - 2xyu_{xy}(x,y) - 3y^2u_{yy}(x,y) = 0, x > 0, y > 1, \quad (11)$$

$$u(x,1) = 0, u_y(x,1) = \sqrt[4]{x^7}, x > 0. \quad (12)$$

◀ Оскільки $b^2 - 4ac = 4x^2y^2 > 0$, то рівняння гіперболічне. Крива Γ у цьому випадку – промінь $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,|x > 0, y = 1\}$, $\vec{l}$ – напрямок, паралельний осі Oy, область $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,|x > 0, y > 0\}$. Рівняння характеристик $x^2(dy)^2 = 2xydxdy - 3y^2(dx)^2 = 0$ розпадається на два рівняння $xdy - ydx = 0$ та $xdy + 3ydx = 0$, загальні інтеграли яких $\dfrac{x}{y} = C_1$ та $x^3y = C_2$. Отже, характеристики і напрям $\vec{l}$ утворюють з Γ ненульові кути α_1, α_2, β,тому розв'язок існує в області, обмеженій характеристиками, які проходять через точку $A(0,1)$: $\frac{x}{y} = 0$, $x^3y = 0$, тобто променями $\{x = 0, y > 0\}$ та $\{y = 0, x > 0\}$, іншими словами, область Ω_1 збігається з Ω. Заміною $\xi = \frac{x}{y}$, $\eta = x^3y$ рівняння (11) зводиться до вигляду $4\eta\tilde{u}_{\xi\eta} - \tilde{u}_\xi = 0$ або $(4\eta\tilde{u}_\eta - \tilde{u})_\xi = 0$, звідки $\tilde{u}_\eta - \frac{1}{4\eta}\tilde{u} = \omega(\eta)$, де ω – довільна неперервно диференційовна функція. Останнє рівняння лінійне і його розв'язок знаходимо, наприклад, методом варіації довільної сталої. Цим розв'язком є функція $\tilde{u}(\xi,\eta) = (f_1(\xi) + f_2(\eta))\sqrt[4]{\eta}$, а загальний розв'язок рівняння (11) має вигляд

$$u(x,y) = (f_1(x/y) + f_2(x^3y))\sqrt[4]{x^3y}, (x,y) \in \Omega, \quad (13)$$

де f_1, f_2 – довільні двічі неперервно диференційовні функції.

Підставимо (13) в (12):

$$(f_1(x) + f_2(x^3))\sqrt[4]{x^3} = 0, x > 0,$$

$$-(xf_1'(x) + x^3 f_2'(x^3))\sqrt[4]{x^3} + \frac{1}{4}(f_1(x) + f_2(x^3))\sqrt[4]{x^3} = \sqrt[7]{x^7}, x > 0,$$

або

$$f_1(x) + f_2(x^3) = 0, -f_1'(x) + x^2 f_2'(x^3) = 1, x > 0. \qquad (14)$$

Виключаючи f_1, дістанемо вираз $f_2'(x^3) = \frac{1}{4x^2} = \frac{1}{4}(x^3)^{-2/3}$, тобто $f_2'(z) = \frac{1}{4}z^{-2/3}$, звідки $f_2(z) = \frac{3}{4}z^{1/3} + C$, $z > 0$. Тоді з (14) випливає, що $f_1(x) = -f_2(x^3) = -\frac{3}{4}x - C$, $x > 0$. Підставивши f_1 і f_2 у (13), одержимо розв'язок задачу (11), (12)

$$u(x, y) = \Big(-\frac{3x}{4y} - C + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^3 y} + C\Big)\sqrt[4]{x^3 y} = \frac{3}{4}\sqrt[4]{x^7 y}(\sqrt[3]{y} - \frac{1}{y}),$$

$(x, y) \in \Omega$. ▶

Зауваження 3. Метод характеристик не придатний для еліптичних рівнянь, оскільки вони не мают дійсних характеристик, але й задача Коші для них, взагалі кажучи, неееоректна [**?**].

Зауваження 4. Мішану задачу (задачу з початковими і крайовими умовами) можна звести до задачі Коші, продовжуючи коефіцієнти рівняння і початкові дані через межу так, щоб крайові умови виконувалися. Застосовуючи після продовження метод характеристик, можна таким способом розв'язати й мішану задачу.

Приклад 5. Знайти u, якщо

$$u_{xx}(x, y) - u_{yy}(x, y) + 2u_x(x, y) + 2u_y(x, y) = 0, x > 0, y > 0, \quad (15)$$

$$u(x, 0) = x^2, u_y(x, 0) = 0, x \geq 0, \qquad (16)$$
$$u(0, y) = 0, y \geq 0.$$

◀ Продовжимо початкові функції з умов (16) на від'ємну піввісь і розглянемо задачу Коші

$$u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) + 2u_x(x,y) + 2u_y(x,y) = 0, x \in \mathbb{R}, y > 0, \tag{15'}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), u_y(x,0) = 0, x \in \mathbb{R}, \tag{16'}$$

де функція $\varphi(x)$ при $x > 0$ збігається з x^2. Задача (15′), (16′) розв'язується методом характеристик аналогічно до того, як у прикладі 4. Оскільки $x \pm y = \mathrm{const}$ є характеристиками рівняння (15′), то заміною $\xi = x - y$, $\eta = x + y$ воно зводиться до канонічного вигляду $\tilde{u}_{\xi\eta} + \tilde{u}_\eta = 0$, звідки знаходимо $\tilde{u}(\xi,\eta) = (f_1(\xi) + f_2(\eta))e^{-\xi}$, тобто загальний розв'язок рівняння(15′)

$$u(x,y) = (f_1(x-y) + f_2(x+y))e^{y-x}. \tag{17}$$

Підставимо (17) у (16′). Маємо

$$(f_1(x) + f_2(x))e^{-x} = \varphi(x), x \in \mathbb{R},$$

$$(-f_1'(x) + f_2'(x))e^{-x} + (f_1(x) + f_2(x))e^{-x} = 0, x \in \mathbb{R},$$

тоді

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)e^x, \quad -f_1'(x) + f_2'(x) = -\varphi(x)e^x,$$

звідки

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(\varphi(x)e^x + \int_0^x \varphi(z)e^z dz - C),$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}(\varphi(x)e^x - \int_0^x \varphi(z)e^z dz + C).$$

Підставивши останні два вирази у (17), одержимо розв'язок задачі Коші ($15'$), ($16'$) у вигляду

$$u(x,y) = \frac{1}{2}(\varphi(x-y)e^{x-y} + \varphi(x+y)e^{x+y} + \int\limits_{x-y}^{x+y} \varphi(z)e^z dz)e^{y-x}, x \in \mathbb{R}, y > 0.$$

Щоб підібрати продовження φ, підставимо цей розв'язок у ():

$$\varphi(-y)e^{-y} + \varphi(y)e^y + \int\limits_{-y}^{y} \varphi(z)e^z dz = 0, y \geq 0.$$

Звідси випливає, що $\varphi(y)e^y$ – непарна функція. Оскільки при $y > 0$ $\varphi(y) = y^2$, то $\varphi(y) = y|y|e^{|y|-y}$, тобто розв'язком є функція

$$u(x,y) = \frac{1}{2}((x-y)|x-y|e^{|x-y|} + (x+y)|x+y|e^{|x+y|} - \int\limits_{x-y}^{x+y} z|z|e^{|z|}dx)e^{y-x},$$

$x \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$. ►

Розглянемо задачу (5), (6) з $f \equiv 0$ для випадку напівобмеженої струни, яка в положенні рівноваги збігається з інтервалом $(0, +\infty)$ і кінець $x = 0$ якої жорстко закріплений (або він вільний), тобто задачу

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), 0 < .x < +\infty, t > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), 0 \leq x < +\infty$$
$$u(0,t) = 0 \quad (\text{або } u_x(0,t) = 0), t \geq 0.$$

Розв'язок цієї задачі можна знайти за допомогою формули Даламбера (7), якщо продовжити початкові функції на $\mathbb{R}$ непарним способом у випадку закріпленого жорстко кінця $x = 0$, тобто $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, $\psi(-x) = -\psi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, і парним способом у випадку вільного кінця $x = 0$, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$, $\psi(-x) = \psi(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 6. Знайти розв'язок рівняння $u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t)$, $0 < x < +\infty$, $t > 0$, який задовольняє умови $u(x,0) = x^2$, $u_t(x,0) = \sin^2 x$, $x \geq 0$, і $u(0,t) = 0$, $t \geq 0$.

◀ Продовжимо початкові функції $\varphi(x) = x^2$ і $\psi(x) = \sin^2 x$ на від'ємну піввісь непарно:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} x^2 \text{ при } x \geq 0, \\ -x^2 \text{ при } x < 0, \end{cases} \quad \psi_1(x) = \begin{cases} \sin^2 x \text{ при } x \geq 0, \\ -\sin^2 x \text{ при } x < 0, \end{cases}$$

Тоді, згідно з формулою Даламбера (7), розв'язок запишеться у вигляді

$$u(x,t) = \frac{\varphi_1(x-at) + \varphi_1(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi_1(z)dz) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(x+at)^2 + (x-at)^2}{2} + \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at} \sin^2 z dz \text{ при } t \leq \dfrac{x}{a}, \\ \dfrac{(x+at)^2 - (x-at)^2}{2} + \dfrac{1}{2a} \Big(\displaystyle\int\limits_{0}^{x+at} \sin^2 z dz - \int\limits_{x-at}^{0} \sin^2 z dz \Big) \\ \hfill \text{при } t > \frac{x}{a} > 0, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x^2 + a^2 t^2 + \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{4a} \cos 2x \sin 2at \text{ при } t < \dfrac{x}{a}, \\ 2axt + \dfrac{1}{4a}(2x - \sin 2x \cos 2at) \text{ при } t > \dfrac{x}{a} > 0. \end{cases}$$

Вправи

О1. Знайти загальний розв'язок рівняння:

1) $u_{xy} + au_x = 0$;
2) $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0$;
3) $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y = 2$;
4) $u_{xy} - 2au_{xy} + a^2 u_{yy} + u_x + au_y = 0$;
5) $e^{-2x}u_{xx} - e^{-2y}u_{yy} - e^{-2x}u_x + e^{-2y}u_y + 8e^y = 0$;
6) $x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$;
7) $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0$;
8) $xu_{xx} - yu_{yy} + \frac{1}{2}(u_x - u_y) = 0$, $x > 0$, $y > 0$;

O2. Знайти розв'язок задачі Коші:

1) $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$, $u(x,y)|_{y=0} = 3x^2$, $u_y(x,y)|_{y=0} = 0$;
2) $u_{xx} + 2\cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} - \sin x u_y = 0$, $u(x,y)|_{y=\sin x} = x + \cos x$, $u_y(x,y)|_{y=\sin x} = \sin x$;
3) $e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = 0$, $u(x,y)|_{y=0} = -x^2/2$, $u_y(x,y)|_{y=0} = -\sin x$;
4) $u_{xy} + yu_x + xu_y + xyu = 0$, $u(x,y)|_{y=3x} = 0$, $u_y(x,y)|_{y=3x} = e^{-5x^2}$, $x < 1$, $y < 3$;
5) $u_{xx} - 6u_{xy} + 5u_{yy} = 0$, $u(x,y)|_{y=x} = \sin x$, $u_y(x,y)|_{y=x} = \cos x$;
6) $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} - 2yu_y = 0$, $u(x,y)|_{x=1} = y$, $u_x(x,y)|_{x=1} = y$, $x > 0$, $y < 0$;
7) $e^x u_{xy} + u_{yy} = 0$, $u(x,y)|_{y=e^{-x}} = 0$, $u_y(x,y)|_{y=e^{-x}} = e^{2x}$;
8) $u_{xy} - 1/xu_y = 0$, $u(x,y)|_{x=2y} = 4y$, $u_x(x,y)|_{x=2y} = 2$.

O3. В області $\Pi^1 := \{(x,t) \mid x \in \mathbb{R}, t > 0\}$ знайти розв'язок задачі Коші:

1) $u_{tt} = u_{xx}$, $u(x,t)|_{t=0} = \cos x$, $u_t(x,t)|_{t=0} = \sin x$;
2) $u_{tt} = 4u_{xx} + xt$, $u(x,t)|_{t=0} = x^2$, $u_t(x,t)|_{t=0} = x$;
3) $u_{tt} = u_{xx} + e^x$, $u(x,t)|_{t=0} = \sin x$, $u_t(x,t)|_{t=0} = x + \cos x$;
4) $u_{tt} = u_{xx}$, $u(x,t)|_{t=0} = \frac{\sin x}{x}$, $u_t(x,t)|_{t=0} = \frac{x}{1+x^2}$;
5) $u_{tt} = u_{xx}$, $u(x,t)|_{t=0} = \frac{x}{1+x^2}$, $u_t(x,t)|_{t=0} = \sin x$.

O4. Використовуючи метод продовження і формулу Даламбера, знайти в області $\Pi^1_+ := \{(x,t) | 0 \le x < +\infty, t \ge 0\}$ розв'язок задачі:

1) $u_{tt} = a^2u_{xx}$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = \sin x$, $u_x(0,t) = 0$;

2) $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $u(x,0) = \frac{x^2}{1+x^2}$, $u_t(x,0) = 0$, $u(0,t) = 0$;

3) $u_{tt} = 4u_{xx}$, $u(x,0) = e^{-x^2}$, $u_t(x,0) = \sin x$, $u(0,t) = 0$;

4) $u_{tt} = 4u_{xx}$, $u(x,0) = x$, $u_t(x,0) = 0$, $u_x(0,t) = \cos t$.

O5. Розв'язати задачу:

1) $u_{tt} = u_{xx}$, $0 \le x < +\infty$, $t > 0$, $u(x,0) = x^2$, $u_t(x,0) = x$, $u(0,t) = t^2$;

2) $u_{tt} = 4u_{xx} + 16t^2$, $0 \le x < +\infty$, $t > 0$, $u(x,0) = x^4/6$, $u_t(x,0) = 2\sin x$, $u(0,t) = 4t^4$;

3) $u_{tt} = 3u_{xx} + 2(1-6t^2)e^{-2x}$, $0 \le x < +\infty$, $t > 0$, $u(x,0) = 1$, $u_t(x,0) = x$, $u_x(0,t) + 2u(0,t) = 2 + t$;

C1. Знайти загальний розв'язок рівняння:

1) $(u_x + u)_y + 2x^2 y(u_x + u) = 0$;

2) $u_{xy} + xu_x + 2yu_y + 2xyu = 0$;

3) $(u_x + u)_y + x(u_x + u) + x^2 y = 0$;

4) $2u_{xx} + 6u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + u_y = 0$;

5) $3u_{xx} - 10u_{xy} + 3u_{yy} - 2u_x + 4u_y + 5/16u = 0$;

6) $u_{xx} - 6u_{xy} + 8u_{yy} + u_x - 2u_y + 4e^{5x+3/2y} = 0$;

C2. На кінці $x = 0$ циліндричногоо стержня, настільки довгого, що його можна вважати напівобмеженим, діє збурююча сила $A\sin\omega t$. Довести, що відносне видовження перерізу стержня з абсцисою x у момент часу t виражається формулою

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t \le \dfrac{x}{a}, \\ A\sin\dfrac{\omega}{\alpha}(\alpha t - x) \text{ при } t > \dfrac{x}{a}, \end{cases}$$

якщо початкові відхилення і початкові швидкості точок струни дорівнюють нулю.

C3. Поширюючи збурення краю за допомогою прямої хвилі, розв'язати задачу:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, x > 0, t \ge 0;$$

$u_x(0,t) = \nu(t)$, $t > 0$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$, $x \ge 0$.

С4. Відрізок струни, який закріплений на кінцях $x = 0$ і $x = l$, має в початковий момент часу форму параболи, симетричної відносно перпендикуляра, проведеного через середину відрізка $[0, l]$. Знайти форму струн в момент часу $t_1 = \frac{l}{2a}$ і $t_2 = \frac{l}{a}$, вважаючи що початкові швидкості відсутні.

С5. Скориставшись зауваженням 1, розв'язати задачу:

1) $u_{tt} = \Delta u + 6xyt$, $u|_{t=0} = x^2 - y^2$, $u_t|_{t=0} = xy$;

2) $u_{tt} = \Delta u + t \sin y$, $u|_{t=0} = x^2$, $u_t|_{t=0} = \sin y$;

3) $u_{tt} = \Delta u + 2xy$, $u|_{t=0} = x^2 + y^2 - 2z^2$, $u_t|_{t=0} = 1$;

4) $u_{tt} = 8\Delta u + t^2x^2$, $u|_{t=0} = y^2$, $u_t|_{t=0} = z^2$.

С6. Довести, що при $|x| \neq |t|$ функція $u(x,t) = \frac{x^2+t^2}{(x^2-t^2)^2}$ є розв'язком рівняння коливання струни (5) з $a = 1$, $f = 0$.

С7. Нехай u – розв'язок рівняння (5) з $a = 1$, $f = 0$. Довести, що функція $v(x,t) = u(\frac{x}{x^2-t^2}, \frac{t}{x^2-t^2})$ також є розв'язком цього рівняння скрізь, де вона визначена.

С8. Розв'язати задачу Коші:

1) $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} + (\sin^2 - 9u_{yy}) - \cos x u_y = 36$, $u|_{y=\cos x} = -x^2$, $u_y|_{y=\cos x} = -\frac{2}{3}$;

2) $x^2u_{xx} - 2xyxu_{xy} - 3y^2u_{yy} = 0$, $u|_{y=1} = 0$, $u_y|_{y=1} = x^{4/3}$;

3) $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - (3 + \cos^2 x)u_{yy}) + u_x + (2 - \sin x - \cos x)u_y = 0$, $u|_{y=\cos x} = 0$, $u_y|_{y=\cos x} = e^{-x/2}\cos x$;

4) $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 16$, $u|_{y=0} = 3x^2$, $u_y|_{y=0} = 0$;

5) $3u_{xx} - 2u_{xy} - u_{yy} + \frac{4}{y-x}(u_x + u_y) = x - y$, $u(x,y)|_{x=0} = 1$, $u(x,y)_x|_{x=0} = y^2$.

Домашнє завдання

Д1. Знайти загальний розв'язок рівняння:

1) $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} - 2yu_y = 0$;

2) $u_{xx} - 2u_{xy} + 3u_{yy} = 0$;

3) $u_{xy} - 2u_{xy} - 3u_y + 6u = 2e^{x+y}$;

4) $u_{xx} - 2\cos x u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} + u_x + (\sin x - \cos x - 2)u_y = 0$;

5) $u_{xy} + yu_y - u = 0$;

6) $u_{xy} + yu_x + xu_y + xyu = 0$;

7) $u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} + u_x - u_y = 0$.

Д2. Розв'язати задачу Коші:

1) $u_{xy}u_x = 0$, $u|_{y=x} = \sin x$, $u_x|_{y=x} = 1$;

2) $y_{xx} + u_{xy} - 3u_{yy} = 2$, $u|_{x=0} = 0$, $u_y|_{y=0} = x + \cos x$;

3) $xu_{xx} + (x+y)u_{xy} + yu_{yy} = 0$, $u|_{y=\frac{1}{x}} = x^3$, $u_x|_{y=\frac{1}{x}} = 2x^2$, $x > 0$, $y > 0$;

4) $u_{xx} + 2(1+2x)u_{xy} + 4x(1+x)u_{yy} + 2u_y = 0$, $u|_{x=0} = y$, $u_x|_{x=0} = 2$

5) $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - (3 + \cos 2x)u_{yy} - \cos x u_y = 0$, $u|_{y=\cos x} = \sin x$, $u_y|_{y=\cos x} = \frac{1}{2}e^x$;

6) $u_{xx} + 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} + u_x + (\sin x + \cos x + 1)u_y = 0$, $u|_{y=-\cos x} = 1 + 2\sin x$, $u_y|_{y=-\cos x} = \sin x$;

7) $e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = xe^{2y}$, $u|_{y=0} = \sin x$, $u_y|_{y=0} = \frac{1}{1+x^2}$;

8) $y^2 u_{yy} - x^2 u_{xx} = 0$, $u(x,y)|_{y=1} = 3x$, $u_y(x,y)|_{y=1} = 6x^2$.

Д3. Розв'язати задачу Коші:

1) $u_{tt} = u_{xx}$, $u|_{t=0} = x^2$, $u_t|_{t=0} = x$;

2) $u_{tt} = u_{xx} + \sin x$, $u|_{t=0} = \sin x$, $u_t|_{t=0} = 0$;

3) $u_{tt} = 9u_{xx} + \sin x$,$u|_{t=0} = 1$, $u_t|_{t=0} = 1$;

4) $u_{tt} = u_{xx} + \alpha \sin \beta t$, $u|_{t=0} = \cos x$, $u_t|_{t=0} = \sin x$;

5) $u_{tt} = u_{xx} + x \sin t$, $u|_{t=0} = \sin x$, $u_t|_{t=0} = \cos x$;

6) $u_{tt} = \Delta u + x^3 - 3x^2$, $u|_{t=0} = e^x \cos y$, $u_t|_{t=0} = e^y \sin x$;

7) $u_{tt} = 2\Delta u$, $u|_{t=0} = 2x^2 - y^2$, $u_t|_{t=0} = 2x^2 + y^2$;

8) $u_{tt} = |deltau + 6te^{x\sqrt{2}} \sin y \cos z$, $u|_{t=0} = e^{x+y} \cos z\sqrt{2}$, $u_t|_{t=0} = e^{3y+4z} \sin 5x$.

Д4. В області $\Pi^1_+ := \{(x,t) \,|\, 0 \le x < +\infty, t \ge 0\}$. Знайти розв'язок задачі:

1) $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = \frac{x}{1+x^2}$, $u(0,t) = 0$;

2) $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $u(x,0) = \frac{x^2}{1+x^2}$, $u_t(x,0) = \frac{x}{1+x^2}$, $u(0,t) = 0$;

3) $u_{tt} = u_{xx}$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$, $u(0,t) = \sin \pi t$;

4) $u_{tt} = u_{xx}$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$, $u_x(0,t) = -\sin \pi t$.

Д5. Розв'язати задачу:

1) $u_{tt} = u_{xx} + 2$, $x > 0$, $t > 0$ $u|_{t=0} = x + \cos x$, $u_t|_{t=0} = 1$, $u_x|_{x=0} = 1$;

2) $u_{tt} = u_{xx}$, $x > 0$, $t > 0$ $u|_{t=0} = x^2$, $u_t|_{t=0} = 0$, $(u_t + u)|_{x=0} = 2t + t^2$;

3) $u_{tt} = u_{xx} - 6$, $x > 0$, $t > 0$ $u|_{t=0} = x^2$, $u_t|_{t=0} = 0$, $(u_t + 2u_x)|_{x=0} = -4$;

4) $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $x > 0$, $t > 0$ $u|_{t=0} = 0$, $u_t|_{t=0} = A$, A – стала, $x \geq 0$, $(u_x + hu)|_{x=0} = 0$, $t \geq 0$;

5) $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $x > 0$, $t > 0$ $u|_{t=0} = \begin{cases} \sin px/l, 0 \leq x \leq l, \\ 0, l < x < +\infty \end{cases}$, $u_t|_{t=0} = 0$, $x \geq 0$ $(u_x - hu)|_{x=0} = 0$, $t \geq 0$.

Відповіді

О1. 1) $u(x,y) = \varphi(x)e^{-\alpha y} + g(y)$; 2) $\tilde{u}_{\xi\eta} = 0$, $u = f(x + y - \cos x) + g(x - y + \cos x)$; 3) $\tilde{u}_{\xi\eta} + \frac{1}{7}\tilde{u}_\eta = \frac{2}{49}$, $u = \frac{2}{7}(2x+y) + f(x-3y) + g(2x+y)e^{\frac{1}{7}3y-x}$; 4) $\tilde{u}_{\xi\xi} + \tilde{u}_\xi = 0$, $u = f(y - ax) + g(y - ax)e^{-x}$; 5) $\tilde{u}_{\xi\eta} + \xi + \eta$, $u = e^y(e^{2y} - e^{2x}) + f(e^y - e^x) + g(e^y + e^x)$; 6) $\tilde{u}_{\eta\eta} + \frac{1}{\eta}\tilde{u}_\eta = 0$, $u = f(xy)\ln|x| + g(xy)$; 7) $\tilde{u}_{\xi\eta} - \frac{1}{2\xi}\tilde{u}_\eta = 0$, $u = \sqrt{xy} f(\frac{y}{x}) + g(xy)$; 8) $\tilde{u}_{\xi\eta} = 0$, $u = f(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + g(\sqrt{x} - \sqrt{y})$.

О2. 1) $u = 3x^2 + y^2$; 2) $u = x + \cos(x + \sin x - y)$; 3) $u = \frac{x^2}{2} - \cos x + \cos(x + e^y - 1)$; 4) $u = (y - 3x)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$; 5) $u = -\frac{3}{2}\sin\frac{y+5x}{6} + \frac{5}{2}\sin\frac{y+x}{2}$; 6) $u = \frac{y}{3x} + \frac{2}{3}x^2 y$; 7) $u(x,y) = 2e^x - \frac{4}{y+e^{-x}}$; 8) $u(x,y) = 2x$.

О3. 1) $u = \cos(x - t)$; 2) $u = x^2 + xt + 4t^2 + \frac{1}{6}xt^3$; 3) $u = xt = \sin(x + t) - (1 - \operatorname{ch} t)e^x$; 4) $u = \frac{x\sin x\cos t - t\cos\sin t}{x^2 - t^2} + \frac{1}{4}\ln\frac{1+(x+t)^2}{1+(x-t)^2}$; 5) $u = \frac{1}{2}(\frac{x+t}{1+(x+t)^2} + \frac{x-t}{1+(x-t)^2}) + \sin x\sin t$.

О4. 1) $u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{a}\sin x\sin at, & at < x < +\infty, \\ \frac{1}{a}(1 - \cos x\cos at), & 0 \leq x \leq at; \end{cases}$ 2) $u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\frac{(x+at)^2}{1+(x+at)^2} + \frac{(x-at)^2}{1+(x-at)^2}), & x > at, \\ \frac{1}{2}(\frac{(x+at)^2}{1+(x+at)^2} - \frac{(x-at)^2}{1+(x-at)^2}), & 0 \leq x \leq at; \end{cases}$ 3) $u(x,t) =$

$e^{-(x^2+4t^2)}\operatorname{ch}4xt+\begin{cases}\frac{1}{2}(1-\cos x\cos 2t), & 0\le x<2t,\\ \frac{1}{2}\sin x\sin 2t, & x\ge 2t;\end{cases}$ 4) $u(x,t)=\begin{cases}x, & x\ge 2t,\\ 2\sin(\frac{x}{2}-t)+2t, & x<2t;\end{cases}$

O5. 1) $u=x^2+xt+t^2$; 2) $u=4t^4+4t^4x^4+\frac{1}{6}x^4+\sin x\sin 2t$; 3) $u=1+xt+t^2e^{-2x}$.

C1. 1) $u=e^{-x}(\psi(y)+\int\limits_0^x\varphi(\xi)e^{\xi-\xi^2e^2}d\xi)$; 2) $u=e^{-xy}(yf(x)+f'(x)+\int\limits_0^y(y-\eta)g(\eta)e^{-x\eta}d\eta)$. Позначивши $u_y+xu:=\nu$, одержати рівняння $u=\nu_x+2y\nu$, $(\nu_y+x\nu)_x+2y(\nu_y+x\nu)=0$; 3) $u=(1+y)(1-e^{-x})-xy+e^{-x}(\varphi(y)+\int\limits_0^x e^{\xi(1-y)}\psi(\xi)d\xi)$. Користуючись позначенням $u_x+u:=e^{-xy}\nu$, одержати рівняння $u_x+u=1-xy+e^{-xy}\psi(x)$, розв'язуючи яке отримати відповідь; 4) $u=f(y-x)+e^{\frac{1}{2}(y-x)}g(y-2x)$; 5) $u=f(x+3y)+g(3x+y)e^{\frac{7x+y}{16}}$; 6) $u=e^{\frac{1}{2}(x+y)}((2x+y)e^{4x+y}+f(2x+y)+g(4x+y))$.

C2. Треба розв'язати задачу
$u_{tt}=a^2u_{xx}$, $x>0$, $t>0$,
$u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=0$, $x\ge 0$,
$u(0,t)=A\sin\omega t$, $t\ge 0$.

C3.
$$u(x,t)\begin{cases}0, & t\le\frac{x}{a},\\ -a\int\limits_0^{t-\frac{x}{2}}\nu(\tau)d\tau, & t>\frac{x}{a}.\end{cases}$$

C4. $u(x,\frac{l}{2a})=0$, $u(x,\frac{l}{a})=-\frac{4h}{l^2}(x-l)x$, $0\le x\le l$.

C5. 1) $u=xyt(1+t^2)+x^2-y^2$; 2) $u=x^2+t^2+t\sin y$; 3) $u=x^2+y^2-2z^2+t+t^2xyz$; 4) $u=y^2+tz^2+8t^2+\frac{8}{3}t^3+\frac{1}{12}t^4x^2+\frac{2}{45}t^6$.

C6. Розкласти u на прості дроби, тоді
$u(x,t)=\frac{1}{2(x-t)^2}+\frac{1}{2(x+t)^2}=f(x-t+g(x+t))$.

C7. Оскільки $u(x,t)=f(x-t)+g(x+t)$, то
$\nu(x,t)=f(\frac{x}{x^2-t^2}-\frac{t}{x^2-t^2})+g(\frac{x}{x^2-t^2}+\frac{t}{x^2-t^2})=f(\frac{1}{x+t})+g(\frac{1}{x-t})=$

$g_1(x+t)+f_1(x-t)$.

С8. 1) $u=-x^2-\frac{13}{3}(y-\cos x)^2-\frac{2}{3}(y-\cos x)$;

2) $u=\frac{3}{4}\sqrt[4]{x^7y}(\sqrt[3]{y}-\frac{1}{y})$;

3) $u=2e^{-\frac{1}{4}(2x-y+\cos x)}\cos x\sin\frac{1}{2}(y-\cos x)$.За допомогою заміни $\xi=2x-y+\cos x$, $\eta=2x+y-\cos x$, рівняння звести до канонічного вигляду $4\tilde{u}_{\xi\eta}+\tilde{u}_{\eta}=0$. Загальний розв'язок цього рівняння $\tilde{u}_{\xi\eta}=f(\xi)+e^{-\frac{\xi}{4}}g(\eta)$. Далі повернутися до змінних x і y та, задовольнивши початкові умови, знайти вигляд функції f і g;

4) $u=3x^2-\frac{5}{3}y^2$;

5) $u(x,y)=1+xy^2+\frac{x^2}{2}(x-3y)$.

Тема 21. МЕТОД ФУР'Є ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ МІШАНИХ ЗАДАЧ

У попередній темі ми розв'язували рівняння гіперболічного типу в необмежених областях зміни просторових змінних при $t > 0$ (наприклад, коливання нескінченної струни розглядалися при $-\infty < x < +\infty$ і $t > 0$). Уся сукупність розв'язків таких рівнянь визначається з точністю до двох довільних функцій. Для виділення певного розв'язку ми задавали дві умови (умови Коші): значення шуканої функції і її похідної за t при $t = 0$. Якщо ж нас цікавить розв'язок рівняння при $t > 0$ в обмеженій області зміни просторових змінних, наприклад, коливання струни, що має скінченну довжину, то в доповнення до початкових умов треба ще задавати поведінку шуканої функції на межі області зміни просторових змінних. Задачу про розв'язування диференціального рівняння з додатковими початковими і крайовими умовами називають **мішаною** або **початково-крайовою задачею**. Найчастіше розв'язування мішаних задач для рівнянь математичної фізики (не обов'язково гіперболічних) проводиться **методом Фур'є відокремлення змінних** або коротше **методом Фур'є**.

Цей метод застосовний для однорідних рівнянь з однорідними крайовими умовами. Опишемо загальну схему методу Фур'є для рівняння

$$A(y)u_{yy}(x,y) + B(y)u_y(x,y) + C(y)u(x,y) =$$

$$= \frac{1}{\rho(x)}\left((p(x)u_x(x,y))_x - q(x)u(x,y)\right), \tag{1}$$

де A, B, C – неперервні функції на $[0, y_0]$, а ρ, p, p', q – неперервні функції на $[0, l]$, причому $\rho > 0$, $p > 0$, $q \geq 0$. За таких припущень стосовно ρ і p тип рівняння (1) визначається знаком A, а саме, якщо при $y \in [0, y_0] : A(y) > 0$, то тип *гіперболічний*, $A(y) = 0$ – *параболічний* і $A(y) < 0$ – *еліптичний.* У гіперболічному й параболічному випадках змінна y є часовою змінною, область зміни якої може бути необмеженою, тобто $y_0 = +\infty$. Область зміни x у всіх випадках є скінченним відрізком $[0, l]$.

Основні однорідні рівняння математичної фізики є частинними випадками рівняння (1).

Нехай $Q_{y_0} := (0, l) \times (0, y_0)$. Розглянемо задачу про знаходження функції $u(x, y)$, $(x, y) \in \overline{Q_{y_0}}$, яка є розв'язком рівняння (1) у Q_{y_0}, задовольняє однорідні крайові умови за змінною x

$$\alpha u_x(0, y) + \beta u(0, y) = 0, \;\; \gamma u_x(l, y) + \delta u(l, y) = 0, \;\; 0 \le y \le y_0, \quad (2)$$

і неоднорідні умови за змінною y:

1) $A > 0$ (гіперболічний випадок)

$$u(x, 0) = \varphi(x), \;\; u_y(x, 0) = \psi(x), \;\; 0 \le x \le l, \quad (3)$$

2) $A = 0$ (параболічний випадок)

$$u(x, 0) = \varphi(x), \;\; 0 \le x \le l, \quad (4)$$

3) $A < 0$ (еліптичний випадок)

$$\alpha_1 u_y(x, 0) + \beta_1 u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$\gamma_1 u_y(x, y_0) + \delta_1 u(x, y_0) = \psi(x), \;\; 0 \le x \le l, \quad (5)$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ – сталі, які задовольняють умови $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$, $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$, $\gamma_1^2 + \delta_1^2 \neq 0$.

Задача (1), (2), (3) є мішаною задачею для гіперболічного рівняння; задача (1), (2), (4) – мішаною задачею для параболічного рівняння; а задача (1), (2), (5) – крайовою задачею для еліптичного рівняння.

Шукатимемо ненульові розв'язки рівняння (1), які задовольняють умови (2), у вигляді добутку функцій

$$u(x,y) = X(x)Y(y),\ (x,y) \in Q_{y_0} \tag{6}$$

Підстановка (6) у рівняння (1) дає

$$A(y)X(x)Y''(y) + B(y)X(x)Y'(y) + C(y)X(x)Y(y) =$$

$$= \frac{1}{\rho(x)}\left((p(x)X'(x))'Y(y) - q(x)X(x)Y(y)\right).$$

Поділивши цю рівність на $X(x)Y(y)$, дістанемо

$$\frac{A(y)Y''(y) + B(y)Y'(y) + C(y)Y(y)}{Y(y)} = \frac{(p(x)X'(x))' - q(x)X(x)}{\rho(x)X(x)}.$$

Ліва частина цієї тотожності не залежить від x, а права - від y, отже, рівність можлива тільки у випадку, коли її ліва й права частини дорівнюють сталій величині. Якщо позначити цю сталу через λ, то одержимо два звичайні диференціальні рівняння

$$A(y)Y''(y) + B(y)Y'(y) + (C(y) + \lambda)Y(y) = 0,\ y \in (0, y_0); \tag{7}$$

$$(p(x)X'(x))' + (\lambda\rho(x) - q(x))X(x) = 0,\ x \in (0, l). \tag{8}$$

Розв'язки (6) повинні задовольняти крайові умови (2). При підстановці (6) у (2) дістанемо умови, які повинна задовольняти функція X,

$$\alpha X'(0) + \beta X(0) = 0,\ \gamma X'(l) + \delta X(l) = 0. \tag{9}$$

Задача (8), (9) називається **задачею Штурма-Ліувілля**. Вона має нетривіальні розв'язки не при всіх значеннях λ. Ті значення λ, при яких вона має нетривіальні розв'язки, називаються **власними числами (значеннями)**, а відповідні їм нетривіальні розв'язки X – **власними функціями** задачі Штурма-Ліувілля.

Власні числа і власні функції задачі Штурма-Ліувілля (8), (9) мають такі властивості:

1) *існує злічення множина власних чисел* $\lambda_1, ..., \lambda_k, ...(\lambda_1 \leq ... \leq \lambda_k \leq ...)$ *і відповідних їм власних функцій* $X_1(x), ..., X_k(x), ..., x \in (0, l)$;

2) *усі власні числа дійсні і невід'ємні; для першої й третьої крайових задач власні числа додатні, для другої крайової задачі з* $q = 0$ *власним числом є також* $\lambda = 0$;

3) *власні функції* X_k *і* X_m, *які відповідають різним власним числам* λ_k *і* λ_m, *ортогональні між собою з вагою* ρ *на відрізку* $[0, l]$, *тобто*

$$\int\limits_0^l \rho(x)X_k(x)X_m(x)dx = \begin{cases} 0 \text{ при } k \neq m, \\ ||X_m||^2 \neq 0 \text{ при } k = m; \end{cases}$$

4) **(теорема Стеклова)** *всяка функція* f, *яка є неперервною на сегменті* $[0, l]$ *разом зі своїми похідними першого і другого порядків та задовольняє крайові умови* (9), *розкладається в рівномірно збіжний ряд Фур'є за системою власних функцій* X_k, $k \in \mathbb{N}$ *задачі* (8), (9):

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k X_k(x), \ x \in [0, l]. \tag{10}$$

Коефіцієнти a_k *визначаються за формулою*

$$a_k = \frac{1}{||X_k||^2} \int\limits_0^l \rho(x)X_k(x)f(x)dx, \ k \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Зауваження. Розклад f у ряд Фур'є (10) можливий і тоді, і коли $f \in L_{2,\rho}((0,l))$ $\left(\int\limits_0^l \rho(x)|f(x)|^2dx < +\infty\right)$. При цьому ряд (10) з коефіцієнтами (11) збігається в середньому до f на $(0,l)$, тобто

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n a_k X_k \right\|_{L_{2,\rho}} := \left(\int\limits_0^l \rho(x) \left| f(x) - \sum_{k=1}^n a_k X_k(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Якщо знайдено власні числа і власні функції задачі (8), (9), то, підставивши $\lambda = \lambda_k$, $k \in \mathbb{N}$ у рівняння (7), одержимо рівняння

$$A(y)Y_k''(y) + B(y)Y_k'(y) + (C(y) + \lambda_k)Y_k(y) = 0, \;\; k \in \mathbb{N}. \qquad (12)$$

Якщо $A \neq 0$, тобто маємо гіперболічний або еліптичіий випадки, то загальний розв'язок рівняння (12) має вигляд

$$Y_k(y) = A_kY_{1k}(y) + B_kY_{2k}(y), \;\; y \in [0, y_0], \;\; k \in \mathbb{N},$$

де Y_{1k} і Y_{2k} – лінійно незалежні розв'язки цього рівняння, а A_k і B_k – довільні сталі.

У параболічному випадку, коли $A = 0$ і $B \neq 0$, загальний розв'язок визначається формулою

$$Y_k(y) = A_kY_{1k}(y) := A_k \exp\left\{ -\int\limits_0^y \frac{C(z) + \lambda_k}{B(z)} dz \right\}, \; y \in [0, y_0], \; k \in \mathbb{N},$$

Знайдені X_k і Y_k підставляємо в (6) і одержуємо розв'язки $u_k(x,y)$, $(x,y) \in \overline{Q_{y_0}}$, $k \in \mathbb{N}$, рівняння (1), які задовольняють умови (2). При цьому

$$u_k(x,y) = \begin{cases} (A_kY_{1k}(y) + B_kY_{2k}(y))X_k(x), \;\text{якщо}\; A \neq 0, \\ A_kY_{1k}(y)X_k(x), \;\text{якщо}\; A = 0, B \neq 0. \end{cases}$$

За допомогою розв'язків u_k, $k \in \mathbb{N}$, будуємо розв'язки поставлених задач для рівняння (1). Для цього розглянемо ряд

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,y),\ (x,y) \in \overline{Q_{y_0}}, \tag{13}$$

який у випадку, коли $A \neq 0$, має вигляд

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k Y_{1k}(y) + B_k Y_{2k}(y)) X_k(x),\ (x,y) \in \overline{Q_{y_0}}, \tag{14}$$

а якщо $A = 0$, $B \neq 0$, то вигляд

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k Y_{1k}(y) X_k(x),\ (x,y) \in \overline{Q_{y_0}}. \tag{15}$$

Якщо ряд (13) збігається рівномірно в $\overline{Q_{y_0}}$ разом з рядами, які одержуються з нього почленним диференціюванням двічі за x і y, то його сума є розв'язком рівняння (1) і задовольняє крайові умови (2), бо таку властивість мають члени ряду. Щоб знайти коефіцієнти A_k і B_k із (14) і (15), треба задовольнити функцією u, яка визначається рівністю (13), умови (3) – (5) за змінною y. У залежності від типу рівняння (1) матимемо різні ситуації.

Гіперболічний тип ($A > 0$). Підставивши (14) у (3), дістанемо

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k Y_{1k}(0) + B_k Y_{2k}(0)) X_k(x),$$

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k Y'_{1k}(0) + B_k Y'_{2k}(0)) X_k(x),\ x \in [0,l]. \tag{16}$$

Якщо функції φ і ψ можна розкласти у ряди Фур'є за системою власних функцій $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$, то

$$\begin{cases} A_k Y_{1k}(0) + B_k Y_{2k}(0) = \dfrac{1}{\|X_k\|^2} \displaystyle\int_0^l \rho(x)\varphi(x)X_k(x)dx, \\ A_k Y'_{1k}(0) + B_k Y'_{2k}(0) = \dfrac{1}{\|X_k\|^2} \displaystyle\int_0^l \rho(x)\psi(x)X_k(x)dx. \end{cases} \tag{17}$$

Знайшовши A_k і B_k з цієї системи, підставимо їх у ряд (14). Як результат дістанемо розв'язок задачі (1) – (3).

Параболічний тип ($A = \ , B \neq 0$). Для знаходження коефіцієнтів A_k необхідно задовольнити рядом (15) початкову умову (4):

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k Y_{1k}(0) X_k(x),\ x \in [0, l].$$

Звідси випливає, що

$$A_k = \frac{1}{Y_{1k}(0)\|X_k\|^2} \int_0^l \rho(x)\varphi(x)X_k(x)dx,\ k \in \mathbb{N}.$$

Підставивши ці коефіцієнти у (15), одержимо розв'язок задачі (1), (2), (4).

Еліптичний тип ($A < 0$). Розв'язок рівняння (1), який задовольняє крайові умови (2), як і в гіперболічному випадку, знаходиться у вигляді ряду (14). Задовольнивши цим рядом крайові умови (5) за змінною y, дістанемо систему рівнянь, аналогічну до (17), з якої знайдемо коефіцієнти A_k і B_k. Підстановка їх у (14) дає розв'язок задачі (1), (2), (5).

Приклад 1. Вивчити вільні коливання тонкого однорідного стержня довжиною π, лівий кінець якого закріплений, а правий вільний, якщо початкове відхилення від положення рівноваги дорівнює $\frac{\pi}{32}x(2\pi - x)$, $0 \le x \le \pi$, а початкова швидкість нульова.

$\lhd$ Оскільки коливання вільні, а стержень однорідний, то рівняння коливань

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t),\ 0 < x < \pi, t > 0. \tag{18}$$

За умовою задачі лівий кінець стержня закріплений, тому $u(0,t) = 0$. Те, що правий кінець вільний, означає, що $u_x(\pi, t) = 0$. Отже, крайові умови мають вигляд

$$u(0,t) = 0,\ u_x(\pi,t) = 0,\ t \ge 0. \tag{19}$$

Початкові умови такі

$$u(x,0) = \frac{\pi}{32}x(2\pi - x),\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \le x \le \pi. \tag{20}$$

Будемо шукати ненульові частинні розв'язки рівняння (18), які задовольняють крайові умови (19), у вигляді добутку функцій

$$u(x,t) = T(t)X(x), \tag{21}$$

кожна з яких залежить від однієї змінної. Після підстановки (21) у (18) і відокремлення змінних дістаємо два звичайні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x),\ \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2,$$

$$T''(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0,\ t \ge 0, \tag{22}$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0,\ 0 \le x \le \pi. \tag{23}$$

Тут і надалі замість $-\lambda$ будемо писати $-\lambda^2$, щоб підкреслити недодатність цього числа.

Якщо функція u з (21) задовольняє умови (19), то

$$X(0) = 0, \ X'(\pi) = 0. \tag{24}$$

Отже, задачею Штурма-Ліувілля є задача (23), (24). Знайдемо її власні числа і власні функції. Загальний розв'язок рівняння (23)

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x, \ 0 \leq x \leq \pi.$$

Задовольняючи цією функцією умови (24), одержуємо систему двох рівнянь

$$\begin{cases} 0 = C_1 \cos \lambda 0 + C_2 \sin \lambda 0, \\ 0 = -C_1 \lambda \sin \lambda \pi + C_2 \lambda \cos \lambda \pi, \end{cases}$$

яка містить невідомі величини C_1, C_2 і λ. Додатковою тут є умова, що $u \neq 0$, а, отже, і $X \neq 0$. Тому при $C_1 = 0$, що випливає з першого рівняння, дістанемо з другого рівняння дві умови $C_2 \neq 0$ і $\cos \lambda \pi = 0$. З останньої умови випливає, що $\lambda \pi = \left(\dfrac{2n+1}{2}\right) \pi$ або $\lambda_n = \dfrac{2n+1}{2}$, де $n \in \mathbb{Z}_+$. Це і є власні числа задачі (23), (24), а власними функціями, які їм відповідають, є

$$X_n(x) = \sin \frac{2n+1}{2} x, \quad 0 \leq x \leq \pi, \ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{25}$$

Тут взято $C_2 = 1$ тому, що власні функції визначаються з точністю до довільної сталої C_2.

Для знаходження T з (22), враховуючи те, що $\lambda = \lambda_n$, дістанемо рівняння

$$T_n''(t) + a^2 \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 T_n(t) = 0, \ t \geq 0, \ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Звідси одержуємо, що

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{2n+1}{2} at + B_n \sin \frac{2n+1}{2} at, \ t \geq 0, \ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{26}$$

Отже, кожному власному числу λ_n відповідає розв'язок задачі (18), (19), який є добутком функцій (25) і (26), тобто

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos\frac{2n+1}{2}at + B_n \sin\frac{2n+1}{2}at\right)\sin\frac{2n+1}{2}x,$$

$$0 \le x \le \pi,\ t \ge 0. \tag{27}$$

Оскільки функції (27) ні при якому виборі сталих A_n і B_n не задовольняють умови (20), то розв'язок задачі (18) – (20) шукатимемо у вигляді ряду

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{2n+1}{2}at + B_n \sin\frac{2n+1}{2}at\right)\sin\frac{2n+1}{2}x,$$

$$0 \le x \le \pi,\ t \ge 0. \tag{28}$$

Задовольняючи рядом (28) умови (20), дістаємо рівності

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\frac{2n+1}{2}x = \frac{\pi}{32}x(2\pi - x),\ 0 \le x \le \pi,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n a\frac{2n+1}{2}\sin\frac{2n+1}{2}x = 0,\ 0 \le x \le \pi,$$

з яких знаходимо значення коефіцієнтів A_n і B_n:

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{\pi}{32}x(2\pi - x)\sin\frac{2n+1}{2}xdx =$$

$$= \frac{1}{8(2n+1)}\left(x(2\pi - x)\cos\frac{2n+1}{2}x\Big|_{\pi}^{0} + 2\int\limits_0^{\pi}(\pi - x)\cos\frac{2n+1}{2}xdx\right) =$$

$$= \frac{1}{2(2n+1)^2}\left((\pi - x)\sin\frac{2n+1}{2}x\Big|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi}\sin\frac{2n+1}{2}xdx\right) =$$

$$= \frac{1}{(2n+1)^3} \cos \frac{2n+1}{2} x \Big|_{\pi}^{0} = \frac{1}{(2n+1)^3}; \ B_n = 0, \ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Отже, розв'язок задачі (18) – (20) має вигляд

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cos \frac{2n+1}{2} at \sin \frac{2n+1}{2} x, 0 \le x \le \pi, t \ge 0.$$

Одержаний ряд і його похідні збігаються рівномірно для $0 \le x \le \pi$, $t \ge 0$, що можна довести, скориставшись мажорантною ознакою Вейєрштрасса й ознакою Діріхле. $\triangleright$

Приклад 2. Знайти розв'язок рівняння

$$u_{tt}(x,t) + 2h_1 u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \ 0 < x < l, \ t > 0, \qquad (29)$$

(h_1 – мале дійсне число), який задовольняє крайові

$$u_x(0,t) = 0, \ u_x(l,t) + h_2 u(l,t) = 0, \ h_2 > 0, \ t \ge 0, \qquad (30)$$

і початкові умови

$$u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = \psi(x), \ 0 \le x \le l. \qquad (31)$$

$\triangleleft$ Підставивши $u(x,t) = X(x)T(t)$ у рівняння (29), дістанемо, що $X(x)T''(t) + 2h_1 X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t)$, а після відокремлення змінних одержимо рівняння

$$T''(t) + 2h_1 T'(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0, \ t \ge 0, \qquad (32)$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \ 0 \le x \le l. \qquad (33)$$

Якщо задовольнити крайові умови (30), то матимемо

$$X'(0) = 0, \ X'(l) + h_2 X(l) = 0. \qquad (34)$$

Для знаходження X маємо задачу Штурма-Ліувілля (33), (34). Загальний розв'язок рівняння (33) $X(x) = C_1 \cos \lambda x +$

$C_2 \sin \lambda x$. Тоді $X'(x) = -C_1\lambda \sin \lambda x + C_2\lambda \cos \lambda x$ і тому, задовольнивши умови (34), дістанемо

$$\begin{cases} C_2\lambda = 0, \\ C_1(-\lambda \sin \lambda l + h_2 \cos \lambda l) + C_2(\lambda \cos \lambda l + h_2 \sin \lambda l) = 0, \ \ \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Оскільки $\lambda \neq 0$, то з першого рівняння цієї системи дістаємо $C_2 = 0$, а тоді з другого рівняння одержимо рівність $C_1(-\lambda \sin \lambda l + h_2 \cos \lambda l) = 0$. Очевидно, що $C_1 \neq 0$, бо в протилежному випадку $X \equiv 0$, а тому $-\lambda \sin \lambda l + h_2 \cos \lambda l = 0$, тобто $\operatorname{tg} \mu = \dfrac{h_2 l}{\mu}$, де $\mu = \lambda l$. Як легко бачити, розглядаючи в площині $O\mu z$ перетин двох ліній $z = \operatorname{tg} \mu$, $z = \dfrac{h_2 l}{\mu}$, це рівняння має зліченну множину пар коренів $\mu_1, \bar{\mu}_1, \mu_2, \bar{\mu}_2, ...$, які однакові за абсолютною величиною і протилежні за знаком. Розглядатимемо лише додатні $\mu_1, \mu_2, ...$ Тоді з рівності $\mu_k = \lambda_k l$, $k \in \mathbb{N}$ знаходимо власні числа задачі (33), (34).

У випадку $\lambda = 0$ загальний розв'язок рівняння (33) має вигляд $X(x) = C_1 x + C_2$. Задовольняючи умови (34), дістаємо систему

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_1 + h_2(C_1 l + C_2) = 0, \end{cases}$$

звідки випливає, що $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, а це означає, що $X \equiv 0$.

Отже, власні числа мають вигляд $\lambda_n = \dfrac{\mu_n}{l}$ і їм відповідають власні функції $X_n(x) = \cos \dfrac{\mu_n}{l} x$, $0 \leq x \leq l$, $n \in \mathbb{N}$.

Розглядаємо тепер рівняння (32) з $\lambda = \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$. Це лінійне однорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, загальний розв'язок якого

$$T_n(t) = e^{-h_1 t}(A_n \cos q_n t + B_n \sin q_n t), \ q_n = \sqrt{\mu_n^2 a^2 l^{-2} - h_1^2}, n \in \mathbb{N},$$

де $\mu_n^2 a^2 l^{-2} - h_1^2 \geq 0$. Тому розв'язком задачі (29), (30) є

$$u_n(x,t) = e^{-h_1 t}(A_n \cos q_n t + B_n \sin q_n t) \cos \frac{\mu_n}{l} x, \ n \in \mathbb{N},$$

а розв'язок задачі (29) – (31) шукаємо у вигляді ряду

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-h_1 t}(A_n \cos q_n t + B_n \sin q_n t) \cos \frac{\mu_n}{l} x,$$

$$0 \leq x \leq l, \ t \geq 0. \tag{35}$$

Задовольнивши початкові умови (31), дістанемо рівності

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{\mu_n}{l} x,$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-h_1 A_n + B_n q_n) \cos \frac{\mu_n}{l} x, \ 0 \leq x \leq l. \tag{36}$$

Система функцій $\{\cos \frac{\mu_n}{l} x, n \in \mathbb{N}\}$ ортогональна на $[0,l]$, тому, помноживши рівності (36) на $\cos \frac{\mu_m}{l} x$ та зінтегрувавши в межах від 0 до l, одержимо співвідношення

$$\int_0^l \varphi(x) \cos \frac{\mu_m}{l} x dx = A_m \int_0^l \cos^2 \frac{\mu_m}{l} x dx,$$

$$\int_0^l \psi(x) \cos \frac{\mu_m}{l} x dx = (-h_1 A_m + B_m q_m) \int_0^l \cos^2 \frac{\mu_m}{l} x dx,$$

з яких випливає, що

$$A_m = \frac{\int_0^l \varphi(x) \cos \frac{\mu_m}{l} x dx}{\int_0^l \cos^2 \frac{\mu_m}{l} x dx}, \ B_m = \frac{\int_0^l (\psi(x) + h_1 \varphi(x)) \cos \frac{\mu_m}{l} x dx}{q_m \int_0^l \cos \frac{\mu_m}{l} x dx}.$$

Оскільки

$$\int\limits_0^l \cos^2 \frac{\mu_m}{l} x dx = \frac{l}{2}\left(1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m}\right),$$

то, скориставшись рівністю $\operatorname{tg}\mu_m = \dfrac{h_2 l}{\mu_m}$ і тим, що $\sin 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, одержимо, що

$$\frac{1}{C_m} := \int\limits_0^l \cos^2 \frac{\mu_m}{l} x dx = \frac{l}{2}\frac{\mu_m^2 + h_2 l + (h_2 l)^2}{\mu_m^2 + (h_2 l)^2}.$$

Отже, коефіцієнти A_m і B_m визначаються формулами

$$A_m = C_m \int\limits_0^l \varphi(x) \cos \frac{\mu_m}{l} x dx,$$

$$B_m = \frac{C_m}{q_m} \int\limits_0^l [\psi(x) + h_1\varphi(x)] \cos \frac{\mu_m}{l} x dx, \ m \in \mathbb{N}.$$

Підставивши ці значення коефіцієнтів у ряд (35), отримаємо шуканий розв'язок задачі (29) – (31), якщо функції φ і ψ задовольняють умови теореми Стеклова. $\triangleright$

Приклад 3. Розв'язати задачу

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \ 0 < x < l, \ t > 0, \tag{37}$$

$$u_x(0,t) = 0, \ u_x(l,t) = 0, \ t \geq 0. \tag{38}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = \psi(x), \ 0 \leq x \leq l. \tag{39}$$

$\triangleleft$ Шукатимемо ненульовий розв'язок задачі (37), (38) у вигляді

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{40}$$

Підставивши (40) у рівняння (37) і відокремивши змінні, дістанемо такі два звичайні диференціальні рівняння:

$$T''(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0,\ t \geq 0, \tag{41}$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0,\ 0 \leq x \leq l. \tag{42}$$

Якщо задовольнити функцією (40) умови (38), то одержимо, що

$$X'(0) = 0,\ X'(l) = 0. \tag{43}$$

Розв'яжемо задачу Штурма-Шувілля (42), (43). Загальний розв'язок рівняння (42) $X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$. Підставивши X у крайові умови (43), дістанемо

$$0 = C_2\lambda,\ 0 = -C_1\lambda \sin \lambda l + C_2 \lambda \cos \lambda l.$$

Якщо $\lambda \neq 0$, то $C_2 = 0$ і тоді $C_1 \neq 0$, бо в протилежному випадку $X \equiv 0$. Тому одержуємо, що $\sin \lambda l = 0$, тобто $\lambda_n = \dfrac{n\pi}{l}$ і $X_n(x) = \cos \dfrac{n\pi}{l} x$, $0 \leq x \leq l$, $n \in \mathbb{N}$. У випадку, коли $\lambda = 0$, загальний розв'язок рівняння (42) має вигляд $X_0(x) = C_1 x + C_2$. Якщо задовольнити умови (43), то одержимо, що $C_1 = 0$. Тоді $C_2 \neq 0$, бо нас цікавлять ненульові розв'язки задачі Штурма-Ліувілля. Можна взяти $C_2 = 1$, а це означає, що $X_0(x) = 1$, $0 \leq x \leq l$.

Отже, ми маємо власні числа $\lambda_0 = 0$ і $\lambda_n = \dfrac{n\pi}{l}$, $n \in \mathbb{N}$ яким відповідають власні функції $X_0(x) = 1$ і $X_n(x) = \cos \dfrac{n\pi}{l} x$, $n \in \mathbb{N}$, задачі (42), (43).

При $\lambda = \lambda_0 = 0$ рівняння (41) має розв'язок $T_0(t) = A_0 t + B_0$, а при $\lambda = \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$, розв'язком є функція $T_n(t) = A_n \cos \dfrac{an\pi}{l} t + B_n \sin \dfrac{an\pi}{l} t$, $n \in \mathbb{N}$.

Складемо ряд

$$u(x,t) = A_0 t + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{an\pi}{l} t + B_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right) \cos \frac{n\pi}{l} x,$$

$$0 \le x \le l,\ t \ge 0. \tag{44}$$

Задовольняючи початкові умови (39), одержуємо співвідношення для визначення A_0, A_n, B_0 і B_n:

$$\begin{cases} B_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \cos \dfrac{n\pi}{l} x = \varphi(x), \\ A_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n \cos \dfrac{n\pi}{l} x = \psi(x),\ 0 \le x \le l. \end{cases}$$

Звідси

$$B_0 = \frac{1}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) dx, \quad A_0 = \frac{1}{l} \int\limits_0^l \psi(x) dx,$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx,\ B_n = \frac{2}{an\pi} \int\limits_0^l \psi(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx,\ n \in \mathbb{N}.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в ряд (44), дістанемо розв'язок задачі (37) – (39) за умови, що функції φ і ψ задовольняють умови теореми Стеклова. $\triangleright$

Зауваження. За допомогою методу Фур'є розв'язуються також мішані задачі для рівнянь гіперболічного, параболічного та еліптичного типів і у випадку, коли є декілька просторових змінних.

Приклад 4. В однорідної прямокутної мембрани $\{0 \le x \le s, 0 \le y \le p\}$ частина межі $\{x = 0, 0 \le y < p\}$ вільна, а інша частина закріплена жорстко. Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, вивчити поперечні коливання мембрани, якщо початкові відхилення $u(x,y,0) = A \cos \dfrac{\pi x}{2s} \sin \dfrac{\pi y}{p},\ 0 \le x \le s, 0 \le y \le p$ а початкові швидкості нульові.

$\triangleleft$ Математична модель задачі така:

$$u_{tt}(x,y,t) = a^2(u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t)),$$

$$0 < x < s,\ 0 < y < p,\ t > 0, \tag{45}$$

$$u_x(0, y, t) = 0,\ u(s, y, t) = 0,\ 0 \le y \le p,\ t \ge 0, \tag{46}$$

$$u(x, 0, t) = 0,\ u(x, p, t) = 0,\ 0 \le x \le s,\ t \ge 0, \tag{47}$$

$$\begin{gathered} u(x, y, 0) = A\cos\frac{\pi x}{2s}\sin\frac{\pi y}{p},\ 0 \le x \le s, 0 \le y \le p, \\ u_t(x, y, 0) = 0,\ 0 \le x \le s, 0 \le y \le p. \end{gathered} \tag{48}$$

Шукатимемо нетривіальні розв'язки рівняння (45), які задовольняють крайові умови (46), (47), у вигляді $u(x, y, t) = T(t)V(x, y)$. Як і в попередніх прикладах, дістанемо рівняння для T

$$T''(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0,\ t > 0, \tag{49}$$

і мішану задачу для V

$$V_{xx}(x, y) + V_{yy}(x, y) + \lambda^2 V(x, y) = 0,\ 0 < x < s,\ 0 < y < p, \tag{50}$$

$$V_x(0, y) = 0,\ V(s, y) = 0,\ 0 \le y \le p, \tag{51}$$

$$V(x, 0) = 0,\ V(x, p) = 0,\ 0 \le x \le s. \tag{52}$$

Задачу (50) – (52)), в свою чергу, розв'язуватимемо методом відокремлення змінних:

$$V(x, y) = X(x)Y(y),$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y) + \lambda^2 Y(y)}{Y(y)} = -\mu^2,$$

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0,\ X'(0) = 0,\ X(s) = 0, \tag{53}$$

$$Y''(y) + k^2 Y(y) = 0,\ k^2 = \lambda^2 - \mu^2,\ Y(0) = 0,\ Y(p) = 0. \tag{54}$$

Власними числами задачі (53) є $\mu_m = \dfrac{(2m+1)\pi}{2s}$, власними функціями – $X_m(x) = \cos\dfrac{(2m+1)\pi x}{2s}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, а задачі (54) – відповідно $kn = \dfrac{n\pi}{p}$ і $Y_n(y) = \sin\dfrac{n\pi y}{p}$, $n \in \mathbb{N}$.

Тоді

$$V_{mn}(x,y) = \cos\frac{(2m+1)\pi x}{2s}\sin\frac{n\pi y}{p},$$

$$m\in\mathbb{Z}_+,\ n\in\mathbb{N},\ 0\le x\le s,\ 0\le y\le p,$$

є власними функціями задачі (50) – (52), що відповідають власним числам $\lambda_{mn}^2 = \mu_m^2 + k_n^2 = \dfrac{(2m+1)^2\pi^2}{4s^2} + \dfrac{n^2\pi^2}{p^2}$. При цьому окремі власні числа можуть бути кратними, тобто одному власному числу відповідатимуть декілька лінійно незалежних функцій V_{mn} (при різних m і n може бути одне і те саме значення λ_{mn}).

Підставивши $\lambda^2 = \lambda_{mn}^2$ у рівняння (49) і одержимо рівняння

$$T''_{mn}(t) + \lambda_{mn}^2 a^2 T_{mn}(t) = 0,$$

загальним розв'язком якого є

$$T_{mn}(t) = A_{mn}\cos a\lambda_{mn}t + B_{mn}\sin a\lambda_{mn}t,$$

$$t\ge 0,\ m\in\mathbb{Z}_+,\ n\in\mathbb{N}.$$

Скориставшись принципом суперпозиції, отримаємо, що ряд

$$u(x,y,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{mn}\cos\sqrt{\frac{(2m+1)^2}{4s^2}+\frac{n^2}{p^2}}a\pi t + \right.$$

$$\left. B_{mn}\sin\sqrt{\frac{(2m+1)^2}{4s^2}+\frac{n^2}{p^2}}a\pi t\right)\cos\frac{(2m+1)\pi x}{2s}\sin\frac{n\pi y}{p},$$

$$t\ge 0,\ 0\le x\le s,\ 0\le y\le p, \tag{55}$$

коли він збігається рівномірно разом зі своїми формальними похідними, тобто рядами, одержаними почленним диференціюванням, до другого порядку, задовольняє рівняння (45) і крайові умови (46), (47), бо таку властивість мають члени ряду.

Задовольняючи початкові умови (48), дістаємо

$$\begin{cases} A\cos\frac{\pi x}{2s}\sin\frac{\pi y}{p} = \sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_{mn}\cos\frac{(2m+1)\pi x}{2s}\sin\frac{n\pi y}{p}, \\ 0 = \sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} B_{mn}\sqrt{\frac{(2m+1)^2}{4s^2}+\frac{n^2}{p^2}}a\pi\cos\frac{(2m+1)\pi x}{2s}\sin\frac{n\pi y}{p}, \end{cases}$$

$$0 \le x \le s,\ 0 \le y \le p.$$

Звідси випливає, що $A_{01} = A$, $A_{mn} = 0$, $m \ne 0$ і $n \ne 1$ одночасно, $B_{mn} = 0$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$, оскільки V_{mn} лінійно незалежні.

Підставивши знайдені коефіцієнти в ряд (55), одержимо розв'язок задачі (45) – (48)

$$u(x,y,t) = A\cos\sqrt{\frac{1}{4s^2}+\frac{1}{p^2}}a\pi t\cos\frac{\pi x}{2s}\sin\frac{\pi y}{p},$$

$$0 \le x \le s, 0 \le y \le p, t \ge 0. \ \triangleright$$

Вправи

О1. У пропонованих задачах дати фізичне тлумачення умов задач, знайти розв'язки цих задач і дослідити на рівномірну збіжність одержані функціональні ряди:

1) $u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0,$

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ t \ge 0,$$

$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = \sin\frac{2\pi}{l}x,\ 0 \le x \le l.$$

2) $u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0,$

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ t \ge 0,$$

$$u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{h}{c}x, \ 0\le x\le c,\\ \dfrac{h(x-l)}{c-l}, \ c<x\le l,\end{cases} \qquad u_t(x,0)=0, \ 0\le x\le l.$$

3) $u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t), \ 0<x<l, \ t>0,$

$$u(0,t)=0, \ u_x(l,t)=0, \ t\ge 0,$$

$$u(x,0)=\sin\frac{5\pi}{2l}x, \ u_t(x,0)=\sin\frac{\pi}{2l}x, \ 0\le x\le l.$$

4) $u_{tt}(x,t)+2u_t(x,t)=u_{xx}(x,t)+u(x,t), \ 0<x<\pi, \ t>0,$

$$u_x(0,t)=0, \ u(\pi,t)=0, \ t\ge 0,$$

$$u(x,0)=0, \ u_t(x,0)=x, \ 0\le x\le \pi.$$

5) $u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t), \ 0<x<l, \ t>0,$

$$u_x(0,t)=0, \ u_x(l,t)=0, \ t\ge 0,$$

$$u(x,0)=x, \ u_t(x,0)=1, \ 0\le x\le l.$$

6) $u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t), \ 0<x<l, \ t>0,$

$$u_x(0,t)=0, \ u(l,t)=0, \ t\ge 0,$$

$$u(x,0)=\cos\frac{\pi}{2l}x, \ u_t(x,0)=\cos\frac{3\pi}{2l}x+\cos\frac{5\pi}{2l}x, \ 0\le x\le l.$$

7) $u_{tt}(x,t)=9u_{xx}(x,t), \ 0<x<4, \ t>0,$

$$u_x(0,t)=0, \ u(4,t)=0, \ t\ge 0,$$

$$u(x,0)=0, \ u_t(x,0)=16-x^2, \ 0\le x\le 4.$$

8) $u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t)+10u(x,t), \ 0<x<\dfrac{\pi}{2}, \ t>0,$

$$u(0,t)=0, \ u_x\left(\frac{\pi}{2},t\right)=0, \ t\ge 0,$$

$$u(x,0) = \frac{1}{9}\sin x + \sin 3x,\ \ u_t(x,0) = 0,\ \ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}.$$

9) $u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0,$

$$u(0,t) = 0,\ \ u_x(l,t) = 0,\ \ t \ge 0,$$

$$u(x,0) = x,\ \ u_t(x,0) = \sin\frac{5}{2l}x + \sin\frac{3\pi}{2l}x,\ \ 0 \le x \le l.$$

10) $u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t),\ 0 < x < 1,\ t > 0,$

$$u(0,t) = 0,\ \ u(l,t) = 0,\ \ t \ge 0,$$

$$u(x,0) = h(x^4 - 2x^3 + x)x,\ \ u_t(x,0) = 0,\ \ 0 \le x \le 1.$$

O2. Вивчити коливання струни довжиною l із закріпленими кінцями, якщо початкові швидкості точок струни дорівнюють нулю, а початкове відхилення має форму параболи, віссю симетрії якої є пряма $x = \dfrac{l}{2}$, а вершиною – точка $\left(\dfrac{l}{2}, h\right)$.

O3. Знайти відхилення від положення рівноваги закріпленої на кінці $x = l$ однорідної горизонтальної струни, лівий кінець якої $x = 0$ переміщується так, що дотична до струни залишається горизонтальною, якщо в початковий момент часу струна мала форму $\dfrac{1}{9}\cos\dfrac{3\pi x}{2l}$, $0 \le x \le l$, а початкова швидкість відсутня.

O4. Кінець $x = 0$ однорідного стержня закріплений жорстко, а до кінця $x = l$ прикладена поздовжня сила $P = const$, під дією якої стержень перебуває у стані рівноваги. Знайти коливання стержня після того, як у початковий момент часу сила P перестає діяти, вважаючи, що початкові швидкості дорівнюють нулю.

O5. Розв'язати задачу:

1) $u_{tt}(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t),$

$$0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi,\ t > 0,$$

$$u(0,y,t)=0,\ u(\pi,y,t)=0,\ y\in[0,\pi],\ t\geq 0,$$
$$u(x,0,t)=0,\ u(x,\pi,t)=0,\ x\in[0,\pi],\ t\geq 0,$$
$$u(x,y,0)=3\sin x\sin 2y,\ u_t(x,y,0)=5\sin 3x\sin 4y,\ \{x,y\}\subset[0,\pi].$$

2) $u_{tt}(x,y,t)=a^2(u_{xx}(x,y,t)+u_{yy}(x,y,t)),$
$$0<x<s,\ 0<y<p,\ t>0,$$
$$u(0,y,t)=0,\ u_x(s,y,t)=0,\ y\in[0,p],\ t\geq 0,$$
$$u(x,0,t)=0,\ u_y(x,p,t)=0,\ x\in[0,s],\ t\geq 0,$$
$$u(x,y,0)=Axy,\ u_t(x,y,0)=0,\ x\in[0,s],y\in[0,p].$$

3) $u_{tt}(x,y,t)=a^2(u_{xx}(x,y,t)+u_{yy}(x,y,t)),$
$$0<x<p,\ 0<y<p,\ t>0,$$
$$u(0,y,t)=0,\ u(p,y,t)=0,\ y\in[0,p],\ t\geq 0,$$
$$u(x,0,t)=0,\ u(x,p,t)=0,\ x\in[0,p],\ t\geq 0,$$
$$u(x,y,0)=A\sin\tfrac{\pi x}{p}\sin\tfrac{\pi y}{p},\ u_t(x,y,0)=0,\ x\in[0,p],y\in[0,p].$$

С1. Розв'язати задачу про коливання струни довжиною l із закріпленими кінцями, якщо в початковому положенні струна знаходиться в спокої, а початкова щвидкість задається, формулою:

а) $\psi(x)=v_0=const,\ x\in[0,l];$

б) $\psi(x)=\begin{cases} v_0 \text{ при } x\in[\alpha,\beta], \\ 0 \text{ при } x\notin[\alpha,\beta], \end{cases}$ де $0\leq\alpha<\beta\leq l;$

в) $\psi(x)=\begin{cases} A\cos\dfrac{\pi(x-x_0)}{2\alpha}, \text{ якщо } x\in[x_0-\alpha,x_0+\alpha], \\ 0, \text{ якщо } x\notin[x_0-\alpha,x_0+\alpha], \end{cases}$

де $0\leq x_0-\alpha<x_0+\alpha\leq l.$

С2. Знайти закон вільних коливань струни, розміщеної на відрізку $[0,l]$, якщо в початковий момент струні була надана форма кривої $\varphi(x)=\dfrac{l}{100}\sin\dfrac{\pi x}{2l},\ 0\leq x\leq l$, а потім струна була відпущена без початкової швидкості. Струна закріплена в лівому кінці, а правий може вільно переміщуватися так, що дотична в ньому весь час залишається горизонтальною.

С3. В однорідної прямокутної мембрани $\Pi:=\{(x,y)|0\leq x\leq s, 0\leq y\leq p\}$ частина межі $\{(x,y)|x=0, 0\leq y\leq p\}$ вільна, а решта закріплена жорстко. Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, знайти поперечні коливання мембрани, викликані початковим розподілом швидкостей $u_t(x,y,0) = A(s-x)\sin\dfrac{\pi y}{p}$, $(x,y) \in \Pi$.

C4. Розв'язати задачу:

1) $u_{tt}(x,y,t) = a^2(u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t))$,

$$0 < x < p,\ 0 < y < q,\ t > 0,$$

$$u(0,y,t) = 0,\ u(p,y,t) = 0,\ y \in [0,q],\ t \ge 0,$$

$$u(x,0,t) = 0,\ u(x,q,t) = 0,\ x \in [0,p],\ t \ge 0,$$

$$u(x,y,0) = Axy(p-x)(q-y),\ u_t(x,y,0) = 0,\ x \in [0,p], y \in [0,q].$$

2) $u_{tt}(x,y,t) = a^2(u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t))$,

$$0 < x < p,\ 0 < y < q,\ t > 0,$$

$$u(0,y,t) = 0,\ u(p,y,t) = 0,\ y \in [0,q],\ t \ge 0,$$

$$u(x,0,t) = 0,\ u(x,q,t) = 0,\ x \in [0,p],\ t \ge 0,$$

$$u(x,y,0) = 0,\ u_t(x,y,0) = Axy(p-x)(q-y),\ x \in [0,p], y \in [0,q].$$

Домашнє завдання

Д1. Знайти закон коливання струни довжиною l, розміщеної на відрізку $[0,l]$, якщо в початковий момент часу $t = 0$ струні надано форму кривої $\varphi(x) = \dfrac{x(l-x)}{8l}$, $x \in [0,l]$, а потім струна відпущена без початкової швидкості. Струна закріплена на кінцях. Зовнішні сили відсутні.

Д2. Знайти відхилення від положення рівноваги закріпленої на кінцях $x = 0$ і $x = l$ однорідної струни, якщо в початковий момент: 1) струна мала форму $\dfrac{1}{8}\sin\dfrac{3\pi x}{l}$, $0 \le x \le l$, а початкові швидкості відсутні; 2) точки струни знаходились у положенні рівноваги і їй була надана початкова швидкість $\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{5\pi x}{l}$, $0 \le x \le l$.

Д3. Знайти закон коливання струни довжиною l, якщо у початковий момент усім точкам струни надана швидкість, яка дорівнює $\dfrac{a}{10}$, де a – стала, яка фігурує в рівнянні струни. Початкове відхилення відсутнє. Кінці струни закріплені. Зовнішні сили відсутні.

Д4. Знайти відхилення від положення рівноваги, закріпленої на кінці $x = 0$, однорідної горизонтальної струни, правий кінець якої при $x = l$ переміщується так, що дотична до струни є весь час горизонтальною. У початковий момент часу струна мала форму $\varphi(x) = \dfrac{1}{15}\sin\dfrac{11\pi x}{2l}\cos\dfrac{4\pi x}{2l}$, $x \in [0, l]$, а початкові швидкості нульові.

Д5. Розв'язати задачу:

1) $u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t),\ 0 < x < \pi,\ t > 0,$
$$u_x(0,t) = 0,\ u_x(\pi,t) = 0,\ t \ge 0,$$
$$u(x,0) = Ax(\pi - x),\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \le x \le \pi.$$

2) $u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0,$
$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ t \ge 0,$$
$$u(x,0) = x,\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \le x \le l.$$

3) $u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0,$
$$u(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0,\ t \ge 0,$$
$$u(x,0) = x,\ u_t(x,0) = \sin\tfrac{\pi}{2l}x + \sin\tfrac{3\pi}{2l}x,\ 0 \le x \le l.$$

4) $u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0,$
$$u_x(0,t) = 0,\ u_x(l,t) + hu(l,t) = 0,\ h > 0, t \ge 0,$$
$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 1,\ 0 \le x \le l.$$

5) $u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0,$
$$u_x(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0,\ t \ge 0,$$
$$u(x,0) = x(l - x),\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \le x \le l.$$

6) $u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0,$
$$u_x(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ t \ge 0,$$
$$u(x,0) = l^2 - x^2,\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \le x \le l.$$

7) $u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t),\ 0 < x < 2,\ t > 0,$

$$u_x(0,t) = 0,\ u(2,t) = 0,\ t \geq 0,$$

$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 4 - x^2,\ 0 \leq x \leq 2.$$

8) $u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0,$

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ t \geq 0,$$

$$u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{2h}{l}x \text{ при } 0 \leq x \leq \dfrac{l}{2}, \\ \dfrac{2h}{l}(l-x) \text{ при } \dfrac{l}{2} > x < l, \end{cases} \qquad u_t(x,0) = 0,\ 0 \leq x \leq l.$$

9) $u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0,$

$$u_x(0,t) - hu(0,t) = 0, h > 0,\ u(l,t) = 0,\ t \geq 0,$$

$$u(x,0) = 1 + hx - \tfrac{1+hl}{l^2}x^2,\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \leq x \leq l.$$

10) $u_{tt}(x,t) = 25u_{xx}(x,t) + x(3-x)\sin\omega t$, $\omega \neq \dfrac{5k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < x < 3$, $t > 0$,

$$u(0,t) = 0,\ u(3,t) = 0,\ t \geq 0,$$

$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \leq x \leq 3.$$

Д6. Закріпленій у точці $x = l$ однорідній горизонтальній струні, лівий кінець якої може переміщуватися з горизонтальною дотичною, надано початкову швидкість $\psi(x) = \dfrac{x(l-x)}{l^2}$, $x \in [0, l]$. Знайти закон її вільних коливань, якщо в початковий момент часу вона мала форму $\varphi(x) = \sin\dfrac{\pi x}{l}$, $x \in [0, l]$.

Д7. Однорідній квадратній мембрані зі стороною l, яка закріплена по контуру, надали форму $u(x,y,0) = \sin\dfrac{\pi x}{l}\sin\dfrac{\pi y}{l}$, $\{x, y\} \subset [0, l]$. Знайти закон вільних коливань, якщо початкова швидкість точок мембрани дорівнює a/l, де a – стала з рівняння коливань.

Д8. Роз'язати мішану задачу:

1) $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy})$, $0 < x < l$, $0 < y < p$, $t > 0$,

$$u_x(0,y,t) = 0,\ u(l,y,t) = 0,\ 0 \leq y \leq p,\ t \geq 0,$$

$$u(x,0,t) = 0,\ u(x,p,t) = 0,\ 0 \leq x \leq l,\ t \geq 0,$$

$$u(x,y,0) = 0,\ u_t(x,y,0) = A(l-x)\sin\frac{\pi}{p}y,\ 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq p.$$

2) $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy})$, $0 < x < p$, $0 < y < p$, $t > 0$,

$$u(0, y, t) = 0,\ u(p, y, t) = 0,\ 0 \le y \le p,\ t \ge 0,$$
$$u(x, 0, t) = 0,\ u(x, p, t) = 0,\ 0 \le x \le p,\ t \ge 0,$$
$$u(x, y, 0) = 0,\ u_t(x, y, 0) = \frac{a}{50}y,\ 0 \le x \le p, 0 \le y \le p,$$

де a – стала з рівняння коливання мембрани.

Відповіді

О1. 1) $u(x,t) = \frac{l}{2\pi a} \sin \frac{2\pi a}{l} t \sin \frac{2\pi}{l} x$;

2) $u(x,t) = \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi c}{l} \cos \frac{an\pi}{l} t \sin \frac{n\pi}{l} x$;

3) $u(x,t) = \frac{2l}{a\pi} \sin \frac{a\pi t}{2l} \sin \frac{\pi x}{2l} + \cos \frac{5a\pi t}{2l} \sin \frac{5\pi x}{2l}$;

4) $u(x,t) = 8e^{-t} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \left((-1)^n - \frac{2}{\pi(2n+1)} \right) \sin \frac{2n+1}{2} t \cos \frac{2n+1}{2} x$;

5) $u(x,t) = t + \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)a\pi t}{l} t \cos \frac{(2n+1)\pi x}{l}$;

6) $u(x,t) = \cos \frac{a\pi t}{2l} \cos \frac{\pi x}{2l} + \frac{2l}{3a\pi} \sin \frac{3a\pi t}{2l} \cos \frac{3\pi x}{2l} + \frac{2l}{5a\pi} \sin \frac{5a\pi t}{2l} \cos \frac{5\pi x}{2l}$;

7) $u(x,t) = \frac{4096}{3\pi^4} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^4} \sin \frac{3\pi(2n+1)t}{8} \cos \frac{\pi(2n+1)x}{8}$;

8) $u(x,t) = \frac{1}{18}(e^{3t} + e^{-3t}) \sin x + \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \sin 3x$;

9) $u(x,t) = \frac{2l}{a\pi} \sin \frac{a\pi t}{2l} \sin \frac{5x}{2l} + \frac{2l}{3a\pi} \sin \frac{3a\pi t}{2l} \sin \frac{3\pi x}{2l} + \frac{8l}{\pi^2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)a\pi t}{2l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$;

10) $u(x,t) = \frac{96h}{\pi^5} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \sin(2n+1)\pi x \cos a(2n+1)\pi t$.

О2. $u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0,$

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ t \ge 0,$$
$$u(x,0) = \frac{4h}{l^2} x(l-x),\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \le x \le l;$$
$$u(x,t) = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \cos \frac{(2k+1)a\pi t}{l} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l}.$$

О3. $u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0,$

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ t \ge 0,$$
$$u(x,0) = \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi x}{2l},\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \le x \le l;$$

$$u(x,t) = \tfrac{1}{9}\cos\tfrac{3a\pi t}{2l}\cos\tfrac{3\pi x}{2l}.$$

O4. $u_{tt}(x,t) = a^2u_{xx}(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0,$

$$u(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0,\ t \ge 0,$$

$$u(x,0) = \tfrac{Px}{E\sigma},\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \le x \le l,$$

де E – модуль Юнга, σ – площа поперечного перерізу стержня;

$$u(x,t) = \frac{8Pl}{E\sigma\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)a\pi t}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$$

O5. 1) $u(x,y,t) = 3\cos\sqrt{5}t\sin x\sin 2y + \sin 5t\sin 3x\sin 4y;$

2) $u(x,y,t) = \frac{64Asp}{\pi^4}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}}{(2k+1)^2(2n+1)^2}\cos\sqrt{\frac{(2k+1)^2}{4s^2}+\frac{(2n+1)^2}{4p^2}}\pi at\times$
$\times\sin\frac{2k+1}{2s}\pi x\sin\frac{2n+1}{2p}\pi y;$

3) $u(x,y,t) = A\cos\frac{\sqrt{2}a\pi l}{p}\sin\frac{\pi x}{p}\sin\frac{\pi y}{p}.$

C1. а) $u(x,t) = \frac{4lv_0}{\pi^2 a}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)a\pi t}{l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l};$

б) $u(x,t) = \frac{2lv_0}{\pi^2 a}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{k\pi\alpha}{l}-\cos\frac{k\pi\beta}{l}}{k^2}\sin\frac{a\pi kt}{l}\sin\frac{k\pi x}{l};$

в) $u(x,t) = \frac{8Al}{\pi^2 a}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi k\alpha}{l}\sin\frac{\pi kx_0}{l}}{k\left(1-\left(\frac{2\alpha k}{l}\right)^2\right)}\sin\frac{a\pi kt}{l}\sin\frac{\pi kx}{l}.$

C2. $u_{tt}(x,t) = a^2u_{xx}(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0,$

$$u(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0,\ t \ge 0,$$

$$u(x,0) = \tfrac{l}{100}\sin\tfrac{\pi x}{2l},\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \le x \le l;$$

$$u(x,t) = \tfrac{l}{100}\cos\tfrac{a\pi t}{2l}\sin\tfrac{\pi x}{2l}.$$

C3. Розв'язком задачі

$$u_{tt}(x,y,t) = a^2(u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t)),\ 0 < x < s, 0 < y < p, t > 0,$$

$$u_x(0,y,t) = u(s,y,t) = 0,\ 0 \le y \le p,\ t \ge 0,$$

$$u(x,0,t) = u(x,p,t) = 0,\ 0 \le x \le s,\ t \ge 0;$$

$$u(x,y,0) = 0,\ u_t(x,y,0) = A(s-x)\sin\tfrac{\pi y}{p},\ 0 \le x \le s, 0 \le y \le p,$$

є функція $u(x,y,t) = \frac{8As}{a\pi^3}\sin\frac{\pi y}{p}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2\omega_k}\sin(a\pi\omega_k t)\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2s},$

де $\omega_k = \sqrt{\left(\frac{2k+1}{2s}\right)^2 + \frac{1}{p^2}}.$

С4. 1) $u(x,y,t)=\frac{16Ap^2q^2}{\pi^6}\sum\limits_{m,n=0}^{\infty}\cos\left(a\pi\sqrt{\frac{(2m+1)^2}{p^2}+\frac{(2n+1)^2}{q^2}}t\right)\times$ $\times\frac{\sin\frac{(2m+1)\pi x}{p}\sin\frac{(2n+1)\pi y}{q}}{(2m+1)^3(2n+1)^3}$; 2) $u(x,y,t)=$ $\frac{16Ap^2q^2}{a\pi^7}\sum\limits_{m,n=0}^{\infty}\frac{\sin\left(a\pi\sqrt{\frac{(2m+1)^2}{p^2}+\frac{(2n+1)^2}{q^2}}t\right)}{\sqrt{\frac{(2m+1)^2}{p^2}+\frac{(2n+1)^2}{q^2}}}\times$ $\times\frac{\sin\frac{(2m+1)\pi x}{p}\sin\frac{(2n+1)\pi y}{q}}{(2m+1)^3(2n+1)^3}$.

Д1. $u(x,t)=\frac{1}{\pi^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)a\pi t}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}$.

Д2. 1) $u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\ 0<x<l,\ t>0,$

$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0,\ t\geq 0,$$
$$u(x,0)=\frac{1}{8}\sin\frac{3\pi x}{l},\ u_t(x,0)=0,\ 0\leq x\leq l;$$
$$u(x,t)=\frac{1}{8}\cos\frac{3a\pi t}{l}\sin\frac{3\pi x}{l};$$

2) $u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\ 0<x<l,\ t>0,$

$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0,\ t\geq 0,$$
$$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=\frac{1}{3}\sin\frac{5\pi x}{l},\ 0\leq x\leq l;$$
$$u(x,t)=\frac{l}{15a\pi}\sin\frac{5a\pi t}{l}\sin\frac{5\pi x}{l}.$$

Д3. $u(x,t)=\frac{2l}{5\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)a\pi t}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}$.

Д4. $u(x,t)=\frac{1}{30}\left(\cos\frac{7a\pi t}{2l}\sin\frac{7\pi x}{2l}+\cos\frac{15a\pi t}{2l}\sin\frac{15\pi x}{2l}\right)$.

Д5. 1) $u(x,t)=\frac{a\pi^2}{6}-A\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cos 2akt\cos 2kx$;

2) $u(x,t)=\frac{2l}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(-1)^{k+1}\cos\frac{ak\pi t}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}$;

3) $u(x,t)=\frac{2l}{a\pi}\sin\frac{a\pi t}{2l}\sin\frac{\pi x}{2l}+\frac{2l}{3a\pi}\sin\frac{3a\pi t}{2l}\sin\frac{3\pi x}{2l}+$ $\frac{8l}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\times\times\cos\frac{(2k+1)a\pi t}{2l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}$;

4) $u(x,t)=\frac{2h}{a}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{h^2+\lambda_k^2}}{\lambda_k(l(h^2+\lambda_k^2)+h)}\sin a\lambda_k t\cos\lambda_k x$, де λ_k – додатні корені рівняння $\lambda\operatorname{tg}\lambda l=h$;

5) $u(x,t)=\frac{l^2}{6}-\frac{l^2}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cos\frac{2ak\pi t}{l}\cos\frac{2k\pi x}{l}$;

6) $u(x,t)=\frac{32l^2}{\pi^3}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}\cos\frac{a(2k-1)t}{2l}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2l}$;

7) $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 512}{((2k-1)\pi)^4 a}\sin\frac{a(2k-1)\pi t}{4}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{4}$;

8) $u(x,t)=\frac{8h}{\pi^3}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{kn}{2}}{k^2}\cos\frac{ak\pi t}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}$;

9) $u(x,t)=\frac{4(1+hl)}{l^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k^2+h^2l^2}{(\mu_k^2+h^2l^2+hl)\mu_k}(1-\cos\mu_k)\cos\frac{a\mu_k t}{l}\times$
$\times\sin\frac{\mu_k}{l}(l-x)$, де μ_k, $k\in\mathbb{N}$, – додатні корені рівняння $\operatorname{tg}\mu=-\frac{\mu}{hl}$;

10) $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{36(1-(-1)^k}{(k\pi)^3\left(\left(\frac{5k\pi}{3}\right)^2-\omega^2\right)}\left(-\frac{3\omega}{5k\pi}\sin\frac{5k\pi t}{3}+\sin\omega t\right)\sin\frac{k\pi x}{3}$.

Д6. $u(x,t)=\frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\Bigg(-\frac{2}{(2k-3)(2k+1)}\cos\frac{a(2k-1)\pi t}{2l}+\frac{4l}{a(2k-1)^3\pi^2}\times$
$\times\left(-1+\frac{4(-1)^{k+1}}{(2k-1)\pi}\sin\frac{a(2k-1)\pi t}{2l}\right)\Bigg)\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2l}$.

Д7. $u_{tt}(x,y,t)=a^2(u_{xx}(x,y,t)+u_{yy}(x,y,t))$,

$$0<x<l,\ 0<y<l,\ t>0,$$
$$u(0,y,t)=0,\ u(l,y,t)=0,\ 0\le y\le l,\ t\ge 0,$$
$$u(x,0,t)=0,\ u(x,l,t)=0,\ 0\le x\le l,\ t\ge 0;$$
$$u(x,y,0)=\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi y}{l},\ u_t(x,y,0)=\frac{a}{l},\ 0\le x\le l, 0\le y\le l,$$
$$u(x,y,t)=\left(\cos\frac{a\sqrt{2}\pi t}{l}+\frac{16}{\sqrt{2}\pi^3}\sin\frac{a\sqrt{2}\pi t}{l}\right)\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi y}{l}+$$
$$+\frac{16}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2n+1)\sqrt{(2k+1)^2+(2n+1)^2}}\times$$
$$\times\sin\frac{a\sqrt{(2k+1)^2+(2n+1)^2}\pi t}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}\sin\frac{(2k+1)\pi y}{l}.$$

Д8. 1) $u(x,y,t)=\frac{8al}{a\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2\omega_k}\sin a\omega_k t\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2l}\sin\frac{\pi y}{p}$,
де $\omega_k=\pi\sqrt{\frac{(2k-1)^2}{4l^2}+\frac{1}{p^2}}$;

2) $u(x,y,t) = \frac{0{,}32p}{\pi^3} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{a\pi\sqrt{(2k+1)^2+(2n+1)^2}}{p} t}{(2k+1)(2n+1)\sqrt{(2k+1)^2+(2n+1)^2}} \times$
$\times \sin \frac{(2k+1)\pi x}{p} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{p}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння.— К.: Либідь, 1994.— 360 с.

2. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Высшая школа, 1991.— 303 с.

3. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения.— М.: Наука, 1985.— 232 с.

4. Диференціальні рівняння / Ляшко І.І. та ін.— К.: Вища школа, 1981.— 504 с.

5. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Еругин Н.П. и др.— К.: Вища школа, 1974.— 472 с.

6. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах.— К.: Вища школа, 1994.— 454 с.

7. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.— М.: Наука, 1979.— 128 с.

8. Диференціальні рівняння. Методичний посібник Частина 1 / Укл.: Р.І. Петришин, С.Г. Блажевський. – Чернівці: Чернівецький національний ун-т, 2008. – 80 с.

9. Диференціальні рівняння. Методичний посібник. Частина 2 / Укл.: Р.І. Петришин, С.Г. Блажевський. – Чернівці: Чернівецький національний ун-т, 2008. – 80 с.

10. Рівняння математичної фізики: основні методи, приклади, задачі: навчальний посібник / С.Д. Івасишен, В.П. Лавренчук, Т.І. Готинчан, Л.М. Мельничук. – Чернівці: Видавничий дім "Родовід", 2016 – 212 с.

11. Рівняння математичної фізики: Навчальний посібник / Ленюк М.П., Ленюк О.М. – Чернівці: Прут, 2012. – 152 с.

ЗМІСТ