ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 1, с. 45–53

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4+519.213

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ЛОКАЛЬНОГО ВЛИЯНИЯ ДВИЖУЩИХСЯ ОБЪЕКТОВ

© 2022 г. В. А. Литовченко

Для псевдодифференциального уравнения супердиффузии выяснена его общая стохастическая природа. Развивая идею Хольцмарка, показано, что функция Грина задачи Коши для этого уравнения является распределением вероятностей силы локального влияния движущихся объектов в системе с взаимодействием, происходящим по степенному закону.

DOI: 10.31857/S037406412201006X

Введение. Рассмотрим классическое уравнение диффузии

$$\partial_t u(t;x) - b\triangle_x u(t;x) = 0, \quad 0 < t \leqslant T, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

в котором $\triangle_x$ – n-мерный оператор Лапласа, действующий по пространственной переменной x, а $b > 0$ – фиксированный числовой параметр. Фундаментальным решением задачи Коши для уравнения (1) является функция

$$G(t;x) = \mathbb{F}[e^{-bt|\xi|^2}](t;x) \equiv (\sqrt{4\pi bt})^{-n} e^{-|x|^2/(4bt)}, \tag{2}$$

где $\mathbb{F}$ – оператор преобразования Фурье, а $|\cdot|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Уравнение (1) сыграло важную роль в создании классической теории параболических уравнений с частными производными, т.е. дифференциальных уравнений, фундаментальное решение задачи Коши для которых имеет относительно переменной x типичные для $G(t;\cdot)$ свойства поведения на бесконечности. Известными представителями таких уравнений являются уравнения, параболические по Петровскому [1], по Шилову [2], по Житомирскому [3, 4] или по Сироте [5] и т.д. Эти уравнения возникают при изучении различных естественных процессов, связанных с диффузией и тепломассообменом.

Уравнение (1) имеет отношение и к теории случайных процессов. Функция $G(t;\cdot)$ является плотностью вероятностного перехода случайного процесса Винера [6] – источника многих диффузионных процессов.

Обобщения классического уравнения диффузии (1) приводят к теории параболических псевдодифференциальных уравнений (ПДУ) с однородными точечно-негладкими символами псевдодифференцирования. Действительно, заменив в конструкции уравнения (1) оператор Лапласа $-\triangle_x$ на оператор Рисса [7] дробного дифференцирования $A_\alpha := (-\triangle_x)^{\alpha/2}$, $\alpha > 0$, получим класс ПДУ

$$\partial_t u(t;x) + bA_\alpha u(t;x) = 0, \quad 0 < t \leqslant T, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

с символом псевдодифференцирования $|\cdot|^\alpha$, содержащий при $\alpha = 2$ исходное уравнение (1). В частности, поэтому (3) при соответствующих α унаследовало название "уравнение изотропной супердиффузии" [8, с. 251].

Функция

$$G_\alpha(t;x) = \mathbb{F}[e^{-bt|\xi|^\alpha}](t;x), \quad 0 < t \leqslant T, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

является фундаментальным решением задачи Коши для уравнения (3). Изучением свойств функции $G_\alpha(t;\cdot)$ занимались многие исследователи. При этом оказалось, что в отличии от классического случая $\alpha = 2\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, эта функция при значениях α, не являющихся чётными, имеет уже не экспоненциальное убывание на бесконечности, а степенное. Первые оценки функции $G_\alpha(t;\cdot)$ и её производных методом преобразования Фурье получены С.Д. Эйдельманом совместно с Я.М. Дринём в [9, 10] при условии, что $\alpha > 1$:

$$|\partial_x^k G_\alpha(t;x)| \leqslant c_1 t (t^{1/\alpha} + |x|)^{-(n+|k|+[\alpha])}, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n, \quad t \in (0,T], \quad x \in \mathbb{R}^n$$

(здесь $[\,\cdot\,]$ – целая часть числа, а $|k| = k_1 + \ldots + k_n$). Точное асимптотическое поведение функции $G_\alpha(t;\cdot)$ в окрестности бесконечно удалённых точек установлено М.В. Федорюком в [11]:

$$G_\alpha(t;\cdot) \sim |\cdot|^{-n-\alpha}, \quad t > 0, \quad \alpha \geqslant 1. \tag{5}$$

Затем В. Шнайдер [12] с помощью преобразования Меллина выразил функцию $G_\alpha(t;\cdot)$ через специальные H-функции Фокса и, как следствие, получил асимптотику (5). Используя элементы теории обобщённых функций в сочетании с гармоническим анализом, А.Н. Кочубей впервые получил точные оценки производных функции $G_\alpha(t;\cdot)$ при $\alpha \geqslant 1$ и $n > 1$ [13]:

$$|\partial_x^k G_\alpha(t;x)| \leqslant c_1 t (t^{1/\alpha} + |x|)^{-(n+|k|+\alpha)}, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n, \quad t \in (0,T], \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

В работе [14] оценки (6) распространены на случай $\alpha > 0$.

При некоторых α уравнение (3) находит важное приложение в теории случайных процессов. Оператор A_α при $\alpha \leqslant 2$ является производящим оператором симметрично устойчивого процесса Леви с переходной функцией G_α [15, 16]. Яркими представителями таких процессов являются случайные процессы Коши ($\alpha = 1$), Хольцмарка ($\alpha = 3/2$), Гаусса–Винера ($\alpha = 2$) и др. В современной литературе приведено много примеров реальных применений распределений Коши, Гаусса, Хольцмарка и Парето в астрономии, ядерной физике, экономике, социологии, в промышленной и военной отраслях [17–22]. Каждое из них характеризует стохастические особенности ПДУ (3) при том или ином значении $\alpha \in (0,2]$.

В настоящей работе установлена общая стохастическая природа уравнения (3) при $\alpha \in (0,2)$. Показано, что фундаментальное решение G_α задачи Коши для этого уравнения при некоторых условиях на параметр b является распределением вероятностей силы F локального влияния движущихся объектов в системе, в которой взаимодействие происходит согласно некоторому степенному закону. Отметим, что случаю классической ньютоновской гравитации соответствует уравнение (3) при $\alpha = 3/2$ (нестационарная задача Хольцмарка [23, 24]).

1. Задача о локальном влиянии движущихся объектов. В вакуумной евклидовой среде $\mathbb{R}^3$ рассматривается счётная система свободно движущихся изолированных объектов Z_j, в каждом из которых сосредоточен некоторый потенциал p_j, при этом произвольный объект системы с потенциалом P взаимодействует с другим объектом с потенциалом p согласно закону

$$F = G\frac{Pp}{|r|^\beta} r^\circ, \quad \beta > 0. \tag{7}$$

Здесь F – сила взаимодействия, G – весовая константа, r – вектор расстояния между объектами, а $r^\circ := r/|r|$ – орт вектора r.

Задача состоит в исследовании силы $F(t)$ воздействия в момент времени t на единицу потенциала произвольного объекта Z_0 этой системы его ближайшим окружением.

Так как $F(t)$ – величина с относительно быстрыми и резкими отклонениями, вызванными мгновенным изменением локального распределения объектов из окружения объекта Z_0, то целесообразно рассматривать $F(t)$ как случайную величину.

Найдём распределение $W_\beta^t(F)$ для силы $F(t)$ при следующих предположениях. Будем считать, что распределение объектов в окружении объекта Z_0 подвергается флуктуациям и что объекты с потенциалом p встречаются в системе с некоторым вполне определённым эмпирически установленным законом. При этом в каждый момент времени t флуктуации плотности объектов подчинены условию постоянства их средней плотности на единицу объёма:

$$n(t;r;p) \equiv n(t).$$

Пусть рассматриваемый объект Z_0 находится в начале координат координатной системы пространства $\mathbb{R}^3$, а его сферическое окружение радиуса R в момент времени t содержит $N(t)$ объектов. Тогда, согласно сказанному,

$$F(t) = G\sum_{j=1}^{N(t)} \frac{p_j}{|r_j|^{\beta+1}} r_j \equiv \sum_{j=1}^{N(t)} F_j$$

и

$$N(t) = \frac{4}{3}\pi R^3 n(t). \tag{8}$$

Вначале для фиксированного t рассмотрим распределение $W^t_{\beta,R}(F)$ в центре сферической окрестности радиуса R, охватывающей $N(t)$ объектов системы, и найдём вероятность $W^t_{\beta,R}(F_\circ)dF_\circ$ того, что величина $F(t)$ попадает в куб $[F_\circ(t); F_\circ(t)+dF_\circ(t)] \subset \mathbb{R}^3$. Применив известный метод Маркова [22, с. 152], получим

$$W^t_{\beta,R}(F_\circ(t)) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-i(\xi,F_\circ(t))} A_R(\xi)\,d\xi,$$

где

$$A_R(\xi) := \prod_{j=1}^{N(t)} \int\limits_0^{+\infty} \bigg(\int\limits_{\mathbb{K}_R(0)} e^{i(\xi,F_j)} \tau_j(t;r_j;p_j)\,dr_j \bigg)\,dp_j.$$

Здесь $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{K}_R(0)$ – шар радиуса R с центром в начале координат, а $\tau_j(t;r_j;p_j)$ – распределение вероятностей того, что j-й объект с потенциалом p_j в момент времени t находится в положении r_j. Если теперь учесть, что имеют место лишь флуктуации, совместимые с пространственным постоянством средней плотности, то тогда

$$\tau_j(t;r_j;p_j) = \frac{3\tau(t;p)}{4\pi R^3},$$

где $\tau(t;p)$ – частота, с которой встречаются объекты с потенциалом p в момент времени t.

Отсюда приходим к равенству

$$A_R(\xi) = \bigg(\frac{3}{4\pi R^3} \int\limits_0^{+\infty} \bigg(\int\limits_{\mathbb{K}_R(0)} e^{i(\xi,\eta)} \tau(t;p)\,dr \bigg)\,dp \bigg)^{N(t)},$$

в котором

$$\eta := Gpr/|r|^{\beta+1}. \tag{9}$$

Устремив теперь $R \to +\infty$ и $N(t) \to +\infty$, согласно (8) получим

$$W^t_\beta(F) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-i(\xi,F(t))} A(t;\xi)\,d\xi, \tag{10}$$

где

$$A(t;\xi) := \lim_{R\to\infty} \bigg[\frac{3}{4\pi R^3} \int\limits_0^{+\infty} \bigg(\int\limits_{\mathbb{K}_R(0)} e^{i(\xi,\eta)} \tau(t;p)\,dr \bigg)\,dp \bigg]^{4\pi R^3 n(t)/3}.$$

Так как для каждого t имеет место равенство

$$\frac{3}{4\pi R^3} \int\limits_0^{+\infty} \bigg(\int\limits_{\mathbb{K}_R(0)} \tau(t;p)\,dr \bigg)\,dp = 1,$$

то

$$A(t;\xi)=\lim_{R\to\infty}\Bigl[1-\frac{3}{4\pi R^3}\int\limits_0^{+\infty}\Bigl(\int\limits_{\mathbb{K}_R(0)}(1-e^{i(\xi,\eta)})\tau(t;p)\,dr\Bigr)\,dp\Bigr]^{4\pi R^3 n(t)/3}. \tag{11}$$

Далее, абсолютная сходимость в (11) интеграла с переменной интегрирования r на всём пространстве $\mathbb{R}^3$ при $\beta>3/2$ позволяет записать соотношение (11) в виде

$$A(t;\xi)=\lim_{R\to\infty}\Bigl[1-\frac{3}{4\pi R^3}\int\limits_0^{+\infty}\Bigl(\int\limits_{\mathbb{R}^3}(1-e^{i(\xi,\eta)})\tau(t;p)\,dr\Bigr)\,dp\Bigr]^{4\pi R^3 n(t)/3},$$

а затем прийти к изображению

$$A(t;\xi)=e^{-n(t)B_\beta(t;\xi)}, \tag{12}$$

в котором

$$B_\beta(t;\xi):=\int\limits_0^{+\infty}\Bigl(\int\limits_{\mathbb{R}^3}(1-e^{i(\xi,\eta)})\tau(t;p)\,dr\Bigr)\,dp.$$

Найдём значение интегрального выражения в предыдущем равенстве. Для этого в его внутреннем интеграле перейдём от переменной r к переменной η согласно правилу (9). Учитывая равенство

$$dr=\frac{1}{\beta}(Gp/|\eta|^{1+\beta})^{3/\beta}\,d\eta,$$

получаем

$$B_\beta(t;\xi)=\frac{G^{3/\beta}}{\beta}\Bigl(\int\limits_0^{+\infty}p^{3/\beta}\tau(t;p)\,dp\Bigr)\int\limits_{\mathbb{R}^3}(1-e^{i(\xi,\eta)})|\eta|^{-3(1+\beta)/\beta}\,d\eta\equiv$$

$$\equiv\frac{G^{3/\beta}\langle p^{3/\beta}\rangle}{\beta}\int\limits_{\mathbb{R}^3}(1-e^{i(\xi,\eta)})|\eta|^{-3(1+\beta)/\beta}\,d\eta.$$

Отсюда с помощью несложных преобразований приходим к равенству

$$B_\beta(t;\xi)=\frac{G^{3/\beta}\langle p^{3/\beta}\rangle}{\beta}\int\limits_{\mathbb{R}^3}(1-\cos(\xi,\eta))|\eta|^{-3(1+\beta)/\beta}\,d\eta.$$

Если теперь перейти к сферической системе координат с осью аппликат, направленной по вектору ξ, то последнее равенство примет вид

$$B_\beta(t;\xi)=\frac{G^{3/\beta}\langle p^{3/\beta}\rangle}{\beta}\int\limits_0^{+\infty}\Bigl(\int\limits_{-1}^{1}\Bigl(\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos(|\xi||\eta|l))|\eta|^{2-3(1+\beta)/\beta}\,d\varphi\Bigr)\,dl\Bigr)\,d|\eta|$$

или, что то же самое,

$$B_\beta(t;\xi)=\frac{(G|\xi|)^{3/\beta}\langle p^{3/\beta}\rangle}{\beta}\int\limits_0^{+\infty}\Bigl(\int\limits_{-1}^{1}\Bigl(\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos(\rho l))\rho^{-1-3/\beta}\,d\varphi\Bigr)\,dl\Bigr)\,d\rho=$$

$$=\frac{2\pi(G|\xi|)^{3/\beta}\langle p^{3/\beta}\rangle}{\beta}\int\limits_0^{+\infty}\Bigl(\int\limits_{-1}^{1}(1-\cos(\rho l))\,dl\Bigr)\rho^{-1-3/\beta}\,d\rho.$$

Для внутреннего интеграла получаем

$$B_\beta(t;\xi) = \frac{4\pi(G|\xi|)^{3/\beta}\langle p^{3/\beta}\rangle}{\beta}\int\limits_0^{+\infty}(\rho-\sin\rho)\rho^{-2-3/\beta}\,d\rho.$$

Отметим, что интеграл в последнем равенстве сходится лишь при $\beta > 3/2$. Вычислив этот интеграл по частям, придём к изображению

$$B_\beta(t;\xi) = \frac{4\beta\pi\mathrm{I}(\beta)}{3(\beta+3)}(G|\xi|)^{3/\beta}\langle p^{3/\beta}\rangle, \quad t \geqslant 0, \quad \xi\in\mathbb{R}^3, \quad \beta > 3/2, \tag{13}$$

в котором

$$\mathrm{I}(\beta) := \begin{cases} \dfrac{\beta}{3-\beta}\Gamma(2-3/\beta)\cos\dfrac{(2-3/\beta)\pi}{2}, & 3/2<\beta<3,\\ \pi/2, & \beta=3,\\ \Gamma(1-3/\beta)\sin\dfrac{(1-3/\beta)\pi}{2}, & \beta>3 \end{cases}$$

(здесь $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера).

Объединяя равенства (10), (12) и (13), окончательно находим, что

$$W_\beta^t(F) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-i(\xi,F)}e^{-a_\beta(t)|\xi|^{3/\beta}}\,d\xi,$$

где

$$a_\beta(t) := \frac{4\beta\pi\mathrm{I}(\beta)}{3(\beta+3)}G^{3/\beta}n(t)\langle p^{3/\beta}\rangle.$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. *При указанных выше предположениях для каждого* $\beta > 3/2$ *функция*

$$W_\beta^t(F) = \mathbb{F}^{-1}[e^{-a_\beta(t)|\xi|^{3/\beta}}](t;F) \tag{14}$$

является распределением вероятностей силы $F(t)$ *локального влияния движущихся объектов в системе с взаимодействием, происходящим согласно степенному закону (7).*

2. Связь с ПДУ. Сравнивая равенства (4) и (14), видим схожесть структуры распределения вероятностей $W_\beta^t(\cdot)$ и фундаментального решения $G_\alpha(\cdot)$ задачи Коши для ПДУ (3), которая приводит к предположению, что функция $W_\beta^t(\cdot)$ является решением уравнения (3) при $\alpha = 3/\beta$ с соответствующим коэффициентом b. Убедимся в этом.

Предположим, что коэффициент $a_\beta(\cdot)$ на промежутке $[0,T]$ непрерывно дифференцируем. Непосредственно из работы [14] следует, что для всех $\beta > 3/2$ функция $W_\beta^t(x)$ на множестве $(0,T]\times\mathbb{R}^3$ дифференцируема по t и бесконечно дифференцируема по переменой x, причём для её производных выполняются оценки

$$|\partial_x^k W_\beta^t(x)| \leqslant c_1 t(t^{\beta/3}+|x|)^{-(3+|k|+3/\beta)} \quad \text{и} \quad |\partial_t\partial_x^k W_\beta^t(x)| \leqslant c_2 t^{\beta-1}(t^{\beta/3}+|x|)^{-(3+|k|+3/\beta)} \tag{15}$$

с некоторыми положительными постоянными c_1 и c_2.

Первая оценка в (15) обеспечивает принадлежность функции $W_\beta^t(\cdot)$ классу $L_1(\mathbb{R}^3)$ при каждом фиксированном $t\in(0,T]$, что в свою очередь гарантирует существование преобразования Фурье функции $W_\beta^t(\cdot)$ и выполнение равенства

$$\mathbb{F}[W_\beta^t(x)](t;\xi) = e^{-a_\beta(t)|\xi|^{3/\beta}}, \quad t\in(0,T], \quad \xi\in\mathbb{R}^3. \tag{16}$$

Зафиксируем произвольно $t\in(0,T]$ и для $\triangle t\neq 0$ рассмотрим разность

$$W_\beta^{t+\triangle t}(x)-W_\beta^t(x)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-i(x,\xi)-a_\beta(t)|\xi|^{3/\beta}}(e^{-(a_\beta(t+\triangle t)-a_\beta(t))|\xi|^{3/\beta}}-1)\,d\xi. \tag{17}$$

Согласно теореме Лагранжа о конечных приращениях, имеем

$$a_\beta(t+\triangle t)-a_\beta(t)=a'_\beta(t+\theta\triangle t)\triangle t,\quad \theta\in(0,1).$$

Отсюда, учитывая непрерывность функции $a'_\beta(\cdot)$, получаем равномерную сходимость

$$(e^{-(a_\beta(t+\triangle t)-a_\beta(t))|\xi|^{3/\beta}}-1)/\triangle t \underset{\triangle t\to 0}{\overset{\xi\in\mathbb{K}_0(R)}{\rightrightarrows}} -a'_\beta(t)|\xi|^{3/\beta}\quad (\text{для любого}\ \ R>0). \tag{18}$$

Кроме этого, воспользовавшись ещё раз теоремой Лагранжа, приходим к оценке

$$|(e^{-(a'_\beta(t+\theta\triangle t)|\xi|^{3/\beta})\triangle t}-1)/\triangle t|=|a'_\beta(t+\theta\triangle t)||\xi|^{3/\beta}e^{-a'_\beta(t+\theta\triangle t)|\xi|^{3/\beta}(\hat\theta\triangle t)}\leqslant$$

$$\leqslant a|\xi|^{3/\beta}e^{a|\triangle t||\xi|^{3/\beta}},\quad \hat\theta\in(0;1),\quad a:=\sup_{t\in[0,T]}|a'_\beta(t)|.$$

Тогда для всех $0<|\triangle t|\leqslant a_\beta(t)/(2a)$ и $\xi\in\mathbb{R}^3$ выполняются оценки

$$e^{-a_\beta(t)|\xi|^{3/\beta}}|(e^{-(a_\beta(t+\triangle t)-a_\beta(t))|\xi|^{3/\beta}}-1)/\triangle t|\leqslant a|\xi|^{3/\beta}e^{-(a_\beta(t)-a|\triangle t|)|\xi|^{3/\beta}}\leqslant$$

$$\leqslant 4ae^{-a_\beta(t)|\xi|^{3/\beta}/4}\sup_{\rho>0}\{\rho e^{-\rho}\}. \tag{19}$$

Соотношения (18) и (19) обосновывают равенство

$$\lim_{\triangle t\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-i(x,\xi)-a_\beta(t)|\xi|^{3/\beta}}\frac{e^{-(a_\beta(t+\triangle t)-a_\beta(t))|\xi|^{3/\beta}}-1}{\triangle t}\,d\xi=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-i(x,\xi)-a_\beta(t)|\xi|^{3/\beta}}\lim_{\triangle t\to 0}\left\{\frac{e^{-(a_\beta(t+\triangle t)-a_\beta(t))|\xi|^{3/\beta}}-1}{\triangle t}\right\}d\xi,$$

согласно которому будем вследствие (17) иметь

$$\partial_t W_\beta^t(x)=-\frac{a'_\beta(t)}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{3/\beta}e^{-i(x,\xi)-a_\beta(t)|\xi|^{3/\beta}}\,d\xi,\quad t\in(0,T],\quad \xi\in\mathbb{R}^3.$$

Учитывая равенство (16), окончательно находим

$$\partial_t W_\beta^t(x)=-a'_\beta(t)\mathbb{F}^{-1}[|\xi|^{3/\beta}\mathbb{F}[W_\beta^t](t;\xi)](t;x),\quad t\in(0,T],\quad x\in\mathbb{R}^3.$$

Таким образом, распределение $W_\beta^t(\cdot)$ при $\beta>3/2$ является классическим решением уравнения

$$\partial_t u(t;x)+a'_\beta(t)A_\alpha u(t;x)=0,\quad t\in(0,T],\quad x\in\mathbb{R}^3, \tag{20}$$

дробного порядка $\alpha=3/\beta$.

Далее выясним вопрос о существовании предельного значения распределения $W^t_\beta(\cdot)$ в точке $t=0$. Сначала рассмотрим случай $a_\beta(0)\neq 0$. Согласно равенству (16), а также известной формуле преобразования Фурье свёртки элементов из класса Лебега $L_1(\mathbb{R}^3)$ получаем

$$\mathbb{F}[W^t_\beta](t;\xi)=e^{-\int_0^t a'_\beta(\tau)\,d\tau|\xi|^\alpha}\cdot e^{-a_\beta(0)|\xi|^\alpha}=\mathbb{F}[\hat G_\alpha](t;\xi)\cdot\mathbb{F}[W^0_\beta](t;\xi)=\mathbb{F}[\hat G_\alpha * W^0_\beta](t;\xi)$$

или, что то же самое,

$$W^t_\beta(x)=(\hat G_\alpha * W^0_\beta)(t;x),\quad t\in(0,T],\quad x\in\mathbb{R}^3,$$

где

$$\hat G_\alpha(t;\cdot):=\mathbb{F}^{-1}[e^{-\int_0^t a'_\beta(\tau)\,d\tau|\xi|^\alpha}](t;\cdot).$$

Покажем теперь, что для каждой непрерывной ограниченной на $\mathbb{R}^3$ функции $\varphi(\cdot)$ выполняется предельное соотношение

$$(\hat G_\alpha*\varphi)(t;\cdot)\underset{t\to+0}{\to}\varphi(\cdot). \tag{21}$$

Для этого воспользуемся равенством

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3}\hat G_\alpha(t;x)dx=1,\quad t\in(0,T],$$

в силу которого

$$|(\hat G_\alpha*\varphi)(t;x)-\varphi(x)|\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^3}|\hat G_\alpha(t;\xi)||\varphi(x-\xi)-\varphi(x)|\,d\xi\equiv\mathfrak{I}(t;x).$$

Так как $\varphi(\cdot)$ – непрерывная функция на $\mathbb{R}^3$, то для каждого $x\in\mathbb{R}^3$ и произвольного $\varepsilon>0$ существует $t_\circ$ такое, что $t_\circ^{1/(2\alpha)}<\varepsilon$ и $|\varphi(x-\xi)-\varphi(x)|<\varepsilon$, как только $|\xi|<t_\circ^{1/(2\alpha)}$. Тогда

$$\mathfrak{I}(t;x)<\varepsilon\int\limits_{|\xi|<t_\circ^{1/(2\alpha)}}|\hat G_\alpha(t;\xi)|\,d\xi+\int\limits_{|\xi|\geqslant t_\circ^{1/(2\alpha)}}|\hat G_\alpha(t;\xi)||\varphi(x-\xi)-\varphi(x)|\,d\xi\leqslant\varepsilon\mathfrak{I}_1(t)+\mathfrak{I}_2(t;x),$$

где

$$\mathfrak{I}_1(t):=\int\limits_{\mathbb{R}^3}|\hat G_\alpha(t;\xi)|\,d\xi,\quad \mathfrak{I}_2(t;x):=\int\limits_{|\xi|\geqslant t_\circ^{1/(2\alpha)}}|\hat G_\alpha(t;\xi)||\varphi(x-\xi)-\varphi(x)|\,d\xi.$$

Далее, учитывая оценки [14]

$$|\partial^k_x\hat G_\alpha(t;x)|\leqslant c_1t(t^{1/\alpha}+|x|)^{-(3+|k|+\alpha)},\quad k\in\mathbb{Z}^3_+,\quad t\in(0,T],\quad x\in\mathbb{R}^3, \tag{22}$$

и ограниченность функции $\varphi(\cdot)$ на $\mathbb{R}^3$, для всех $t\in(0,T]$ и $x\in\mathbb{R}^3$ находим

$$\mathfrak{I}_1(t)\leqslant c_1t\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{d\xi}{(t^{1/\alpha}+|\xi|)^{3+\alpha}}=c_1\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{dz}{(1+|z|)^{3+\alpha}}\equiv c_2;$$

$$\mathfrak{I}_2(t;x)\leqslant c_3t\int\limits_{|\xi|\geqslant t_\circ^{1/(2\alpha)}}|\xi|^{-(3+\alpha)}\,d\xi=c_3t\int\limits_{t_\circ^{1/(2\alpha)}}^{+\infty}\rho^{-(1+\alpha)}\,d\rho=c_4tt_\circ^{-1/2}.$$

Из последнего неравенства следует, что для всех $x \in \mathbb{R}^3$ и $t \leqslant t_\circ$ справедлива оценка

$$\mathfrak{I}_2(t;x) \leqslant c_4 t_\circ^{1/2} < c_4\varepsilon^\alpha.$$

Следовательно, для любого $x \in \mathbb{R}^3$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует $t_\circ < \varepsilon^{2\alpha}$ такое, что при всех $t \leqslant t_\circ$ выполняется неравенство $\mathfrak{I}(t;x) < c_2\varepsilon + c_4\varepsilon^\alpha$, т.е. имеет место предельное соотношение (21).

Функция $W^0_\beta(\cdot)$ бесконечно дифференцируема и ограничена на $\mathbb{R}^3$, поэтому, согласно (21), для $W^t_\beta(\cdot)$ выполняется соотношение

$$W^t_\beta(\cdot) \underset{t\to+0}{\to} W^0_\beta(\cdot). \tag{23}$$

Таким образом, распределение $W^t_\beta(\cdot)$ является классическим решением задачи Коши (20), (23).

Пусть теперь $a_\beta(0) = 0$, тогда

$$a_\beta(t) = \int\limits_0^t a'_\beta(\tau)\,d\tau, \quad t \in (0,T].$$

Отсюда, согласно (16), получаем равенство

$$W^t_\beta(\cdot) = \hat{G}_\alpha(t;\cdot), \quad t \in (0,T]. \tag{24}$$

Соотношение (21) характеризует свойство “δ-подобия” функции $\hat{G}_\alpha(t;\cdot)$ в пространстве S' распределений Шварца [25]:

$$\hat{G}_\alpha(t;\cdot) \underset{t\to+0}{\to} \delta(\cdot) \tag{25}$$

(здесь $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака). Поэтому при $a_\beta(0) = 0$ распределение $W^t_\beta(\cdot)$ является решением задачи Коши (20), (25), которое в обычном понимании удовлетворяет уравнению (20), а начальному условию (25) – в смысле слабой сходимости в пространстве S'.

Подытожим сказанное выше в виде следующего утверждения.

Теорема 2. *Если $\beta > 3/2$ и $a_\beta(\cdot)$ – непрерывно дифференцируемая функция на промежутке $[0,T]$, то распределение вероятностей $W^t_\beta(\cdot)$ на множестве $(0,T] \times \mathbb{R}^3$ является классическим решением задачи Коши (20), (23) при $a_\beta(0) \neq 0$. В случае $a_\beta(0) = 0$ функция $W^t_\beta(\cdot)$ – фундаментальное решение этой задачи для уравнения (20).*

Замечание 1. Равенство (24) раскрывает следующий смысл фундаментального решения задачи Коши для ПДУ (20): $\hat{G}_\alpha$ – первичное распределение вероятностей локального влияния на рассматриваемый объект со стороны его движущегося окружения, характеризующее этот процесс с самого начала его возникновения, т.е. с того момента, когда в окружении объекта впервые возникли элементы локального воздействия.

Замечание 2. ПДУ (20) превращается в классическое уравнение диффузии при $\beta = 3/2$. Однако значение $\beta = 3/2$ хотя и является предельным для интервала $(3/2, +\infty)$ сходимости случайных процессов локального влияния движущихся объектов, но к этому множеству оно не относится. Это означает, что процесс классической диффузии происходит по законам, которые имеют несколько иную природу, чем законы случайных завихрений локального влияния движущихся объектов, хотя они и являются предельно близкими.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Petrowsky I.* Über das Cauchyche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen // Math. Sb. 1937. V. 2. № 5. P. 815–870.
2. *Шилов Г.Е.* Об условиях корректности задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Успехи мат. наук. 1955. Т. 10. Вып. 4. С. 89–100.

3. *Житомирский Я.И.* Задача Коши для некоторых типов параболических по Г.Е. Шилову систем линейных уравнений в частных производных с непрерывными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1959. Т. 23. С. 925–932.
4. *Литовченко В.А., Довжицкая И.М.* Стабилизация решений параболических систем типа Шилова с неотрицательным родом // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55. № 2. С. 341–349.
5. *Shirota T.* O Cauchy problem for linear partial differential equations with variable coefficients // Osaka Math. J. 1957. V. 8. № 1. P. 43–59.
6. *Wiener N.* Differential space // J. Math. and Phys. 1923. V. 2. P. 131–174.
7. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.
8. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. Ульяновск, 2008.
9. *Эйдельман С.Д., Дринь Я.М.* Необходимые и достаточные условия стабилизации решения задачи Коши для параболических псевдодифференциальных уравнений // Приближённые методы математического анализа. Киев, 1974. С. 60–69.
10. *Дрінь Я.М.* Вивчення одного класу параболічних псевдодиференціальних операторів у просторах гёльдерових функцій // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1974. № 1. С. 19–21.
11. *Федорюк М.В.* Асимптотика функции Грина псевдодифференциального параболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 7. С. 1296–1301.
12. *Schneider W.R.* Stable distributions: Fox function representation and generalization // Lect. Not. Phus. 1986. V. 262. P. 497–511.
13. *Кочубей А.Н.* Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1988. Т. 52. № 5. С. 909–934.
14. *Litovchenko V.A.* Cauchy problem with Riesz operator of fractional differentiation // Ukr. Math. J. 2005. V. 57. № 12. P. 1936–1957.
15. *Levy P.* Calcul des Probabilities. Paris, 1925.
16. *Золотарев В.М.* Одномерные устойчивые распределения. М., 1983.
17. *Mandelbrot B.* The Pareto-Levy law and the distribution of income // Int. Econ. Rev. 1960. V. 1. P. 79–106.
18. *Собельман И.И.* Введение в теорию атомных спектров. М., 1963.
19. *Кац М.* Вероятность и смежные вопросы в физике. М., 1965.
20. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 2. М., 1984.
21. *Никифоров А.Ф., Новиков В.Г., Уваров В.Б.* Квантово-статистические модели высокотемпературной плазмы и методы расчёта росселандовых пробегов и уравнений состояния. М., 2000.
22. *Агекян Т.А.* Теория вероятностей для астрономов и физиков. М., 1974.
23. *Holtsmark J.* Über die Verbreiterung von Spektrallinier // Ann. der Physik. 1919. Bd. 58. S. 577–630.
24. *Chandrasekhar S.* Stohastic problems in physics and astronomy // Rev. of Modern Phys. 1943. V. 15. № 1. P. 1–89.
25. *Schwartz L.* Theorie des distributions. V. 1. Paris, 1951.

Черновицкий национальный университет
им. Ю. Федьковича, Украина

Поступила в редакцию 11.07.2020 г.
После доработки 11.07.2020 г.
Принята к публикации 23.11.2021 г.