

ЧЕРНІВЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЮРІЯ ФЕДЬКОВИЧА
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Візінська Ірина Іванівна

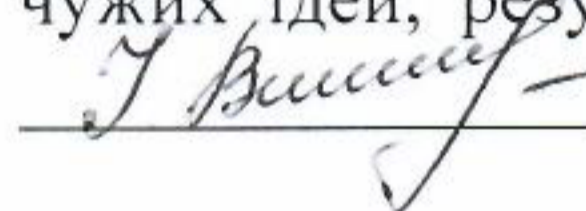
УДК 517.954

ДИСЕРТАЦІЯ
АПРОКСИМАЦІЯ ПОЧАТКОВИХ І КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ
ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ

113 «Прикладна математика»
11 «Математика та статистика»

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання чужих ідей, результатів і текстів мають посилання на відповідне джерело

 — І. І. Візінська

Науковий керівник: **Черевко Ігор Михайлович** доктор фіз.-мат. наук,
професор

Чернівці-2023

АНОТАЦІЯ

Візінська І. І. Апроксимація початкових і крайових задач для диференціально-функціональних рівнянь та їх числове моделювання. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 – "Прикладна математика". – Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, 2023.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню схем апроксимації початкових задач для систем лінійних диференціально-різницевих рівнянь запізнюючого й нейтрального типів з багатьма запізненнями послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь та їх застосуванню до дослідження на стійкість систем лінійних диференціально-різницевих рівнянь з багатьма запізненнями і знаходження верхньої межі запізнення для якої зберігається стійкість системи із запізненням. Розглядається також застосування схем апроксимації диференціальних рівнянь із запізненням системами звичайних диференціальних рівнянь для наближення розв'язків крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням.

Дисертація складається із вступу, чотирьох розділів, висновків, списку літератури та двох додатків. У вступі проаналізовано сучасний стан досліджень з теорії початкових та крайових задач для диференціально-різницевих та диференціально-функціональних рівнянь. Обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, завдання, предмет, об'єкт та методи дослідження, вказано наукову новизну, практичне значення отриманих результатів, зв'язок роботи з науковими темами. Зазначено особистий внесок здобувача, а також наведено дані про те, де доповідались, обговорювались та опубліковано основні результати дисертації.

У розділі 1 наведені деякі відомості з теорії диференціально-функціональних рівнянь, зокрема класичні означення та основні постановки початкових і крайових задач. Зроблено огляд літературних джерел за тематикою дисертаційних досліджень і з яких запозичується методика досліджень

та результати яких поширюються на нові класи задач. Наведено хронологію досліджень схем апроксимації диференціально-функціональних рівнянь послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь, її сучасний стан та можливі напрямки застосування, наведено питання, які залишились нерозв'язаними.

У другому розділі роботи вивчаються схеми апроксимації лінійних диференціально-різницевих рівнянь із запізненням та нейтрального типу, а також один клас лінійних диференціально-функціональних рівнянь, що найчастіше зустрічається в прикладних застосуваннях.

Аналіз точності апроксимації елемента запізнення у випадку неперервної вхідної функції здійснено в підрозділі 2.1. Тут для покращення точності апроксимації розглядається послідовність m елементів запізнення, що послідовно між собою з'єднані.

Точність апроксимації розв'язків початкових задач для диференціально-функціональних рівнянь із запізненням та нейтрального типу розв'язками відповідних апроксимуючих систем звичайних диференціальних рівнянь досліджено в підрозділах 2.2-2.4. Основними результатами цього розділу є Теорема 2.1 та Теорема 2.2. В них одержано коефіцієнтні умови на вихідні системи диференціально-функціональних рівнянь, що забезпечують збіжність схеми апроксимації. В цьому ж розділі розглянуто застосування схем апроксимації для наближення неасимптотичних коренів квазіполіномів лінійних систем диференціально-різницевих рівнянь із багатьма запізненнями за допомогою коренів характеристичних рівнянь відповідних апроксимуючих систем звичайних диференціальних рівнянь.

При застосуванні класичної схеми апроксимації одержуються зручні для реалізації на ЕОМ алгоритми знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів, що однак вимагають високої розмірності відповідної апроксимуючої системи. Для підвищення точності апроксимації неасимптотичних коренів квазіполіномів запропоновано схему підвищеної точності апроксимації та проведено порівняння схем на тестових модельних прикладах.

Алгоритми дослідження стійкості лінійних систем диференціально-різницевих рівнянь із багатьма запізненнями та їх реалізація для тестових прикладів розглянуто в підрозділі 2.6.

В інженерній практиці системи із запізненням часто замінюють системами без запізнення на тій підставі, що воно мале. В підрозділі 2.6.2 розглянуто математичне обґрунтування можливості заміни диференціально-різницевих рівнянь із запізненням на звичайні диференціальні рівняння, а також здійснено аналіз праць по знаходженню верхніх меж запізнення, для яких режим стійкості систем із запізненням є аналогічний режиму стійкості відповідних систем без запізнення. Тут, зокрема, запропонована методика знаходження верхньої межі запізнення, для якої зберігається стійкість системи із запізненням.

Для простіших лінійних диференціально-різницевих рівнянь із запізненням методом D-розбиття знайдено точне значення верхньої межі запізнення при якому ще зберігається стійкість.

У третьому розділі дисертаційної роботи досліджуються крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь із багатьма сталими запізненнями. Інтегро-диференціальні рівняння із запізненням виникають при математичному моделюванні поширення епідемій в задачах математичної біології та хімічної кінетики тощо. Визначено функціональний простір, якому належать розв'язки розглянутих крайових задач, досліджено властивості гладкості розв'язків в залежності від структури відхилень аргумента.

Відомо, що не існує універсальних методів побудови точних розв'язків інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням. Тому основними теоретичними питаннями при дослідженні таких задач є обґрунтування конструктивних підходів доведення існування їх розв'язків та розробка ефективних методів побудови наближених розв'язків. Методом стислих відображень встановлено достатні умови існування розв'язків таких задач.

Для наближеного знаходження розв'язків крайових задач у підрозділі 3.2 розглядається застосування схем апроксимації диференціальних рів-

нянь із запізненням системами звичайних диференціальних рівнянь. Для обґрунтування точності апроксимації загальної крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь із багатьма сталими запізненнями встановлено оцінку точності апроксимації елемента запізнення у випадку кусково неперервних вхідних функцій.

Наведену методику апроксимації крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із багатьма сталими запізненнями продемонстровано на модельному тестовому прикладі.

У четвертому розділі розглядаються застосування схем апроксимації лінійних диференціально-різницевих рівнянь для знаходження неасимптотичних коренів відповідних квазіполіномів та розв'язання важливих для практичних застосувань таких задач: аналіз стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь з багатьма запізненнями; знаходження верхньої межі запізнення лінійних систем із запізненням, для якої зберігається її стійкість.

Дослідження цих задач зводиться до перевірки умов від'ємності дійсних частин усіх нулів відповідних квазіполіномів. Оскільки безпосередня перевірка на практиці такої умови можлива тільки в найпростіших випадках у роботі для її розв'язання аналізуються корені характеристичних многочленів відповідних апроксимуючих систем звичайних диференціальних рівнянь.

Реалізація запропонованих алгоритмів дослідження стійкості розв'язків лінійних диференціально-різницевих рівнянь продемонстровано на модельних тестових прикладах. Описано розроблене прикладне програмне забезпечення для моделювання стійкості лінійних систем диференціально-різницевих рівнянь та знаходження наближених розв'язків крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням.

Аналіз числових експериментів, здійснених для тестових модельних прикладів, підтверджує наведені в роботі теоретичні результати.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертації мають в основному теоретичний характер. Вони є вагомим внеском у методику дослідження систем диференціально-різницевих і диференціально-

функціональних рівнянь. Побудовані та обґрунтовані схеми апроксимації початкових задач для диференціально-функціональних рівнянь запізнюючого і нейтрального типів та крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням можуть бути використані при вивченні прикладних задач механіки, оптимального керування, динамічних процесів екології, імунології, економіки та інших областей, математичними моделями яких є розглянуті в роботі диференціально-функціональні рівняння. Одержані алгоритми знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів та побудови області стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь можуть бути також використані для подальшого дослідження якісних властивостей розв'язків лінійних автономних систем із запізненням.

Ключові слова: диференціально-різницеві рівняння, диференціально-функціональні рівняння, динамічні системи, початкова та крайові задачі, існування та єдиність розв'язку, метод усереднення, запізнення та нейтральний тип, схеми апроксимації, оцінка похибки, стійкість та асимптотична стійкість, область стійкості, метод D -розбиття, малий параметр, функції Ляпунова, комп'ютерне моделювання.

ABSTRACT

Vizinska I. I. Approximation of initial and boundary value problems for differential functional equations and their numerical modeling – Qualified scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Philosophy (PhD) in specialty 113 – "Applied Mathematics". – Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, 2023.

The dissertation aims to study the schemes of approximation of initial value problems for systems of linear differential equations of delaying and neutral types with many delays by a sequence of systems of ordinary differential equations and their application to the study of the stability of systems of linear differential-difference equations with many delays and finding the upper bound of delay for which the stability of the system with delay is preserved. We also consider the use

of schemes for approximating delayed differential equations by systems of ordinary differential equations to approximate solutions of boundary value problems for delayed integro-differential equations.

The dissertation consists of an introduction, four chapters, conclusions, a bibliography, and two appendices. The introduction analyzes the current state of research in the theory of initial and boundary value problems for differential difference and differential functional equations. The relevance of the research topic is substantiated, the purpose, objectives, subject, object, and methods of the research are formulated, the scientific novelty, practical significance of the results obtained, and the connection of the work with scientific topics are indicated. The personal contribution of the applicant is indicated, as well as data on where the main results of the dissertation were presented, discussed, and published.

Section 1 presents some information on the theory of differential-functional equations, including classical definitions and basic formulations of initial and boundary value problems. A review of literature sources on the subject of dissertation research is made, from which the research methodology is borrowed, and the results are extended to new classes of problems. The chronology of studies of schemes for approximation of differential-functional equations by a sequence of systems of ordinary differential equations, its current state and possible applications, and the issues that remain unsolved are presented.

In the paper's second section, we study the approximation schemes for delayed and neutral linear differential equations and one class of linear differential-functional equations that are most often encountered in applied applications.

The accuracy of the delay element approximation in the case of a continuous input function is analyzed in subsection 2.1. Here, we consider a sequence of m delay elements connected in series to improve the approximation accuracy.

The accuracy of approximation of the solutions of the initial problems for differential-functional equations with delay and neutral type by the solutions of the corresponding approximating systems of ordinary differential equations is investigated in subsections 2.2-2.4. The main results of this section are Theorem 2.1

and Theorem 2.2. The coefficient conditions on the initial systems of differential-functional equations, which ensure the convergence of the approximation scheme, are obtained. In the same section, we consider using approximation schemes to approximate the asymptotic roots of quasipolynomials of linear systems of differential-difference equations with many delays through the roots of the characteristic equations of the corresponding approximating systems of ordinary differential equations.

The classical approximation scheme results in algorithms for finding the asymptotic roots of quasipolynomials that are convenient for computer implementation but require a high dimensionality of the corresponding approximating system. To improve the approximation accuracy of the nonasymptotic roots of quasipolynomials, a scheme for increased approximation accuracy is proposed and compared on test model examples.

Algorithms for studying the stability of linear systems of differential-difference equations with many delays and their implementation for Test devices are discussed in subsection 2.6. In engineering practice, systems with a delay are often replaced by systems without a delay because they are small. In subsection 2.6.2, the mathematical justification of the possibility of replacing differential-difference equations with delay by ordinary differential equations is considered, and the analysis of works on finding upper bounds of delay, for which the stability regime of systems with delay is analogous to the stability regime of the corresponding systems without delay, is carried out. In particular, we propose a methodology for finding the upper limit of the delay for which the stability of the system with a delay is preserved.

For simpler linear partial differential equations with delay, the D-partitioning method finds the exact value of the upper bound of the delay at which stability is still preserved.

In the third chapter of the thesis, we study boundary value problems for integro-differential equations with many constant delays. Delayed integro-differential equations arise in the mathematical modeling of the spread of epidemics in

problems of mathematical biology and chemical kinetics, etc. The functional space belonging to the solutions of the considered boundary value problems is determined, and the smoothness properties of the solutions are investigated depending on the structure of the argument deviations.

It is known that there are no universal methods for constructing their exact solutions of delayed integro-differential equations. Therefore, the main theoretical issues in the study of such problems are the substantiation of constructive approaches to proving the existence of their solutions and the development of effective methods for constructing approximate solutions. The sufficient conditions for the existence of solutions to such problems are established by the method of contracted mappings.

To approximate the solutions to boundary value problems, subsection 3.2 considers using schemes for approximating differential equations with a delay by systems of ordinary differential equations. To substantiate the accuracy of approximation of the general boundary value problem for integro-differential equations with many constant delays, we estimate the accuracy of approximation of the delay element in the case of piecewise continuous input functions.

A model test case demonstrates the method of approximating boundary value problems for integro-differential equations with many constant delays.

In the fourth section, we consider the use of approximation schemes for linear partial differential equations to find the asymptotic roots of the corresponding quasipolynomials and solve significant problems for practical applications: analysis of the stability of linear differential equations with many delays, finding the upper limit of the delay of linear systems with delays for which its stability is preserved.

The study of these problems is reduced to checking the conditions for the negativity of the real parts of all zeros of the corresponding quasipolynomials. Since a direct verification of this condition in practice is possible only in the simplest cases, we analyze the roots of characteristic polynomials of the corresponding approximating systems of ordinary differential equations to solve it.

The implementation of the proposed algorithms for studying the stability of

solutions of linear differential equations is demonstrated on model test examples. The developed application software for modeling the stability of linear systems of differential-difference equations and finding approximate solutions of boundary value problems for integro-differential equations with a delay is described.

The analysis of numerical experiments carried out for the test model examples confirms the theoretical results presented in the paper.

Practical significance of the results. The results of the dissertation are mainly theoretical in nature. They are a significant contribution to the methodology of studying systems of differential-difference and differential-functional equations. The constructed and substantiated schemes of approximation of initial problems for differential-functional equations of delayed and neutral types and boundary value problems for integro-differential equations with delay can be used in the study of applied problems of mechanics, optimal control, dynamic processes of ecology, immunology, economics, and other fields, the mathematical models of which are the differential-functional equations considered in this work. The obtained algorithms for finding the asymptotic roots of quasipolynomials and constructing the stability region of linear differential equations can also be used to further study the qualitative properties of solutions of linear autonomous systems with delay.

Key words: differential-difference equations, differential-functional equations, dynamic systems, initial and boundary value problems, existence and uniqueness of the solution, averaging method, delay and neutral type, approximation schemes, error estimation, stability and asymptotic stability, stability region, D -partitioning method, small parameter, Lyapunov functions, computer modeling.

Список публікацій за темою дисертації

Наукові праці у періодичних наукових фахових виданнях України:

1. Іліка С.А., Тузик І.І., Піддубна Л.А. Черевко І.М. Апроксимація лінійних диференціально-різницевого рівнянь та їх застосування. *Буковинський математичний журнал*. 2018. Т. 6, № 3-4. С. 80-83.

2. Іліка С.А., Тузик І.І., Черевко І.М. Апроксимація неасимптотичних коренів квазіполіномів диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу. *Буковинський математичний журнал*. 2020. Т. 8, № 1. С. 110-117.

3. Тузик І.І., Черевко І.М. Апроксимація крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням. *Буковинський математичний журнал*. 2022. Т. 10, № 1. С. 120-128.

4. Дорош А.Б., Тузик І.І., Черевко І.М. Схеми апроксимації крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням. *Нелінійні коливання*. 2023. 26, № 1. С. 33-41.

5. Візінська І.І. Моделювання стійкості диференціально-різницевих рівнянь із запізненням. *Буковинський математичний журнал*. 2023. Т. 11, № 1. С. 71-79.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

6. Cherevko I., Tuzyk I., Ilika S., Pertsov A. Approximation of Systems with Delay and Algorithms for Modeling Their Stability. *11th International Conference on Advanced Computer Information Technologies ACIT'2021*, 15-17 September 2021, Deggendorf, Germany. P. 49-52.

7. Tuzyk I., Cherevko I. Algorithms for studying the stability of linear systems with many delay. *12th International Conference on Advanced Computer Information Technologies*, 26-28 September 2022, Spišská Kapitula, Slovakia. P. 164-167.

8. Піддубна Л.А., Тузик І.І., Черевко І.М. Схеми апроксимації диференціально-різницевих рівнянь та їх застосування. *Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій"* : Матеріали конференції, 2-4 березня 2018 р. Рівне. С. 80-81.

9. Тузик І.І. Про апроксимацію диференціально-різницевих рівнянь та їх стійкість. *Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2019"*, Львів, 27-29 травня 2019 р.

10. Cherevko I., Tuzyk I. Approximation schemes of differentialfunctional equations and theirs application. *The 27th Conference On Applied and Industrial Mathematics* : Proceedings CAIM 2019, Targoviste, Romania, 19-22 September 2019. Targoviste : "Valahia" University. P. 20-21.

11. Матвій О., Тузык І., Черевко І. Схеми апроксимації лінійних диференціально-різницевих рівнянь та їх застосування. *Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування : Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 100-річчю від дня народження професора С.Д. Ейдельмана*, 16-19 вересня 2020 р. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2020. С. 159-160.

12. Іліка С.А., Тузык І.І., Черевко І.М. Апроксимація лінійних диференціально-функціональних рівнянь та неасимптотичних коренів їх квазіполіномів. *Тези доповідей ІХ міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації"*. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2020. С. 49-50.

13. Тузык І.І., Матвій О.В. Схеми апроксимації диференціально-різницевих рівнянь та їх застосування. *Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2020"*, Львів, 26-28 травня 2020 р.

14. Черевко І.М., Тузык І.І., Іліка С.А. Алгоритм дослідження стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь. *Матеріали XXVI Міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики"*, Львів, 27-28 вересня 2021. С. 173-177.

15. Cherevko I., Tuzyk I., Pidzybna L. On the approximation of linear systems with delay and their stability type. *The 28th Conference On Applied and Industrial Mathematics* : Proceedings CAIM 2021, Romania, 17-18 September 2021. P. 16-17.

16. Cherevko I., Tuzyk I. Approximation of systems with delay their stability. *Book of abstracts of EQUADIFF Brno*, Czech Republic, 11-15 July 2022, Masaryk University. No 15. P. 225.

ЗМІСТ

| | |
|--|----|
| ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ | 16 |
| ВСТУП | 17 |
| РОЗДІЛ 1 Огляд літературних джерел за темою | |
| дисертаційних досліджень та допоміжні відомості . | 23 |
| 1.1 Загальні відомості з теорії диференціально- функціональних рівнянь | 23 |
| 1.1.1 Вступ | 23 |
| 1.1.2 Початкова задача для диференціально-функціональних рівнянь | 24 |
| 1.1.3 Крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням | 29 |
| 1.2 Огляд наукових праць за темою дисертації | 30 |
| 1.2.1 Схеми апроксимації початкових задач для диференціально-функціональних рівнянь | 30 |
| 1.2.2 Застосування схем апроксимації | 35 |
| Висновки до розділу 1 | 38 |
| РОЗДІЛ 2 Дослідження схем апроксимації лінійних систем | |
| диференціально-функціональних рівнянь та їх | |
| застосування | 39 |
| 2.1 Про схему наближення елемента запізнення | 39 |
| 2.2 Апроксимація лінійних диференціально-функціональних рівнянь з багатьма запізненнями | 45 |
| 2.2.1 Вступ | 45 |
| 2.2.2 Апроксимація лінійних диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями | 45 |
| 2.3 Апроксимація лінійних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу | 53 |
| 2.4 Апроксимація лінійних диференціально-функціональних рівнянь із запізненням | 57 |

| | | |
|--|--|------------|
| 2.5 | Апроксимація неасимптотичних коренів квазіполіномів лінійних диференціально-різницевих рівнянь | 63 |
| 2.5.1 | Квазіполіноми лінійних диференціально-різницевих рівнянь запізнюючого типу | 63 |
| 2.5.2 | Квазіполіноми лінійних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу | 68 |
| 2.6 | Моделювання стійкості диференціально-різницевих рівнянь | 74 |
| 2.6.1 | Алгоритм дослідження стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь із запізненням | 74 |
| 2.6.2 | Оцінка впливу запізнення на стійкість розв'язків лінійних диференціально-різницевих рівнянь | 76 |
| | Висновки до розділу 2 | 81 |
| РОЗДІЛ 3 Апроксимація крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням | | 83 |
| 3.1 | Крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь з багатьма запізненнями | 83 |
| 3.1.1 | Постановка задачі | 83 |
| 3.1.2 | Існування та єдиність розв'язку | 85 |
| 3.2 | Схеми апроксимації крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями | 90 |
| 3.2.1 | Апроксимація простішої крайової задачі для інтегро-диференціального рівняння із запізненням | 90 |
| 3.2.2 | Апроксимація загальної крайової задачі для інтегро-диференціального рівняння із запізненням | 96 |
| 3.3 | Приклад | 104 |
| | Висновки до розділу 3 | 106 |
| РОЗДІЛ 4 Моделювання диференціально-різницевих рівнянь із запізненням | | 108 |
| 4.1 | Алгоритми дослідження стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь | 108 |

| | | |
|-------|--|------------|
| 4.2 | Опис використаних інформаційних технологій | 114 |
| 4.2.1 | Середовище розробки | 114 |
| 4.2.2 | Структура прикладної програми | 116 |
| | Висновки до розділу 4 | 120 |
| | ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ | 121 |
| | СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ | 122 |
| | ДОДАТКИ | 133 |
| | ДОДАТОК А | 134 |
| | ДОДАТОК Б | 137 |
| | ДОДАТОК В | 141 |

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ І СКОРОЧЕНЬ

$R = (-\infty, +\infty)$ – множина дійсних чисел;

R^n – дійсний n -вимірний евклідів простір;

N – множина натуральних чисел;

T – задане додатне число;

t_0, t_1, \dots, t_n – фіксовані значення з інтервала $[0, T]$;

$x = (x_1, \dots, x_n)$ – n -вимірний вектор в R^n ;

$[l]$ – ціла частина числа l ;

$\{l\}$ – дробова частина числа l ;

$Re\lambda$ – дійсна частина комплексного числа λ ;

$Im\lambda$ – уявна частина комплексного числа λ ;

τ – запізнення, яке може бути сталим ($\tau > 0$) або залежати від часу ($\tau = \tau(t) \geq 0$);

C_n^k – біноміальний коефіцієнт;

$\det(A)$ – визначник матриці A ;

$C = C([\alpha, \beta], R^n)$ – множина неперервних функцій зі значеннями в R^n , що визначені на $[\alpha, \beta]$;

$x_t \in C$ – функція, що задається співвідношенням $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$;

$\omega(x, \delta)$ – модуль неперервності функції $x(t)$ на $[\alpha, \beta]$;

$L(t, \varphi)$ – лінійний за φ функціонал;

$G(x, s)$ – функція Гріна крайової задачі $y''(x = 0)$, $x \in [a, b]$, $y(a) = y(b) = 0$.

ВСТУП

Актуальність теми. Диференціально-різницеві та диференціально-функціональних рівнянь є математичними моделями багатьох прикладних задач в системах автоматичного регулювання та керування, хімічних, біологічних, технічних, економічних та інших процесах еволюція яких залежить від передісторії. Так, в біологічних системах еволюція зв'язана з такими довготривалими процесами, як розмноження, розвиток і вимирання, які відбуваються не миттєво, а з певним запізнюванням. У техніці багато систем керування включають фізичну затримку, яка впливає на внутрішню динаміку системи керування. Тому дослідження впливу затримок часу на сучасні системи управління очевидно, є важливою темою дослідження при розробці та налаштуванню законів керування зі зворотним зв'язком [1]–[5].

Численні застосування обумовили активний ріст досліджень різних напрямків теорії диференціально-функціональних рівнянь та появу цікавих теоретичних проблем, що описують нові ефекти і явища у фізиці, біології, імунології та інших науках і потребують аналізу та розв'язання.

Активно теорія диференціально-функціональних рівнянь розвивалась такими математиками як М. М. Красовський, А. Д. Мишкіс, Р. Беллман, Дж. Хейл, М. В. Азбелєв, Л. Е. Ельсгольц, В. П. Рубаник, Є. Ф. Царков, А. Халанай, В. І. Фодчук, В. Ю. Слюсарчук, Д. Я. Хусаїнов і багатьма іншими. Отримані ними фундаментальні результати сформуvalи якісну теорію диференціальних рівнянь із запізненням [6]–[14].

Відзначимо, що для дослідження якісних властивостей розв'язків диференціально-функціональних рівнянь багато уваги приділяється поширенню методів теорії звичайних диференціальних рівнянь, зокрема асимптотичних та чисельно аналітичних методів М. М. Боголюбова, Ю. А. Митропольського, А. М. Самойленка, методу інтегральних многовидів та методу усереднення [14]–[16].

Для диференціально-функціональних рівнянь на даний час немає універсальних методів знаходження їх точних розв'язків тому важливою і акту-

альною задачею є побудова та обґрунтування алгоритмів знаходження наближених розв'язків початкових та крайових задач для таких рівнянь. Особливий інтерес викликають дослідження, що дозволяють використати методи теорії звичайних диференціальних рівнянь для аналізу диференціально-функціональних рівнянь.

Схеми апроксимації диференціально-різницевих рівнянь спеціальними системами звичайних диференціальних рівнянь запропоновано в роботах [17, 18]. Точність апроксимації нелінійних диференціально-різницевих рівнянь із запізненням досліджена в роботі [19] у випадку, коли розв'язок початкової задачі є диференційованим або задовольняє умову Ліпшиця. Подальше вивчення схем апроксимації диференціально-різницевих рівнянь в просторах неперервних функцій на скінченному інтервалі здійснено у працях І. М. Черевка та Л. А. Піддубної [20]–[22]. Аналіз точності апроксимації векторного елемента запізнення для різних вхідних функцій та узагальнення схем апроксимації для систем диференціально-різницевих рівнянь запізнюючого і нейтрального типів розглянуто в роботах І. М. Черевка та О.В. Матвія [23, 24]. Побудова та обґрунтування схем апроксимації диференціально-функціональних рівнянь послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь досліджено в роботі І. М. Черевка та С. А. Іліки [25].

Вивчення зв'язків між диференціально-різницевиими рівняннями і відповідними апроксимуючими системами звичайних диференціальних рівнянь дозволили запропонувати алгоритми розв'язання ряду прикладних задач. Зокрема, конструктивні алгоритми побудови областей стійкості лінійних систем із багатьма запізненнями одержані в роботі [26].

У даній дисертаційній роботі досліджено схеми апроксимації початкових задач для систем лінійних диференціально-різницевих рівнянь запізнюючого й нейтрального типів з багатьма запізненнями послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь та запропоновано алгоритми дослідження на стійкість систем лінійних диференціально-різницевих рівнянь з багатьма запізненнями і знаходження верхньої межі запізнення для якої збері-

гається стійкість системи із запізненням. Розглядається також застосування схем апроксимації диференціальних рівнянь із запізненням системами звичайних диференціальних рівнянь для наближення розв'язків крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням. Розроблено прикладне програмне забезпечення для реалізації запропонованих в роботі алгоритмів.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тема дисертаційної роботи відповідає науковому напрямку кафедри математичного моделювання факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Дослідження дисертаційної роботи були розпочаті в рамках держбюджетної наукової теми кафедри математичного моделювання "Дослідження асимптотичної поведінки розв'язків диференціально-функціональних та еволюційних рівнянь і моделювання детермінованих та стохастичних прикладних процесів" (номер держреєстрації 0113U003171) та продовжені в рамках держбюджетної наукової теми "Математичне та комп'ютерне моделювання динамічних процесів, що описуються детермінованими і стохастичними диференціально-функціональними та еволюційними рівняннями, і їх застосування" (номер держреєстрації 0120U105712).

Мета і завдання дослідження. Метою досліджень роботи є розробка та обґрунтування схем апроксимації початкових та крайових задач для диференціально-різницевих та диференціально-функціональних рівнянь послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь та їх застосування для дослідження стійкості лінійних автономних систем з багатьма запізненнями.

Об'єкт дослідження: початкові задачі для диференціально-різницевих та диференціально-функціональних рівнянь та крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням.

Предмет дослідження: розробка та обґрунтування схем апроксимації початкових та крайових задач для диференціально-різницевих та диференціально-функціональних рівнянь, аналіз неасимптотичних коренів квазіполіномів та комп'ютерне моделювання стійкості лінійних автономних систем із

запізненням.

Методи дослідження: методи якісної теорії звичайних диференціальних та диференціально-функціональних рівнянь, метод послідовних наближень, принцип стислих відображень.

Наукова новизна отриманих результатів. У дисертаційній роботі отримано такі нові результати:

1) встановлено точність апроксимації векторного елемента запізнення в просторі кусково неперервних функцій;

2) досліджено схеми апроксимації початкових задач для систем лінійних диференціально-різницевих рівнянь запізнюючого й нейтрального типів з багатьма запізненнями послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь;

3) запропоновано алгоритми дослідження на стійкість систем лінійних диференціально-різницевих рівнянь з багатьма запізненнями та знаходження верхньої межі запізнення, для якої зберігається стійкість системи із запізненням;

4) отримано достатні умови існування та єдиності розв'язку крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь із багатьма сталими запізненнями;

5) досліджено схему апроксимації крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації мають в основному теоретичний характер. Вони є вагомим внеском у методичку дослідження систем диференціально-різницевих і диференціально-функціональних рівнянь. Побудовані та обгрунтовані схеми апроксимації початкових задач для диференціально-функціональних рівнянь запізнюючого і нейтрального типів та крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням можуть бути використані при вивченні прикладних задач механіки, оптимального керування, динамічних процесів екології, імунології, економіки та інших областей, математичними моделями яких є розглянуті в роботі диференціально-функціональні рівняння. Одержані алгоритми знахо-

дження неасимптотичних коренів квазіполіномів та аналізу стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь можуть бути також використані для подальшого дослідження якісних властивостей розв'язків лінійних автономних систем із запізненням.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертації отримані автором самостійно. Зазначимо внесок автора у спільних працях: у працях [3, 7, 10, 16] науковому керівнику І.М. Черевку належить постановка задач, визначення загальної схеми досліджень та аналіз отриманих результатів; у праці [1] І.М. Черевку належить визначення загальної схеми досліджень, С.А. Іліці та Л.А. Піддубній результати п. 1, а результати п. 2, 3 – автору; у праці [2] І.М. Черевку належить постановка задачі, С.А. Іліці п. 1 та обговорення результатів, а результати п. 2, 3 – автору; у праці [4] І.М. Черевку належить постановка задачі та загальна схема досліджень, А.Б. Дорошу належить обговорення результатів та порівняння з існуючими аналогами; у праці [6] І.М. Черевку належить постановка задачі та п. 1, С.А. Іліці належить п. 5, А.С. Перцову – обговорення результатів досліджень, а п. 2, 3, 4 належать автору; у працях [8, 11, 12, 14, 15] І.М. Черевку, Л.А. Піддубній, С.А. Іліці, О.В. Матвію належать обговорення результатів досліджень; у праці [13] О.В. Матвію належить визначення схеми досліджень та обговорення результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень доповідались та обговорювались на:

- 11th International Conference on Advanced Computer Information Technologies ACIT'2021, 15–17 September 2021, Deggendorf, Germany.

- 12th International Conference on Advanced Computer Information Technologies, 26–28 September 2022, Spišská Kapitula, Slovakia.

- Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій", Рівне, 2–4 березня 2018 р.

- Конференції молодих учених "Підстригачівські читання – 2019", Львів, 27–29 травня 2019 р.

- The 27th Conference On Applied and Industrial Mathematics, Targoviste, Romania, 19–22 September 2019.

- Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування", присвяченій 100-річчю від дня народження професора С.Д. Ейдельмана, Чернівці, 16–19 вересня 2020 р.

- IX міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації", Кам'янець-Подільський, 2020 р.

- Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2020", Львів, 26–28 травня 2020 р.

- XXVI Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики", Львів, 27–28 вересня 2021 р.

- The 28th Conference On Applied and Industrial Mathematics, Romania, 17–18 September 2021.

- International Conference on Differential Equations and Their Applications EQUADIFF 15, Brno, Czech Republic, July 11–15, 2022.

- Наукових семінарах кафедри математичного моделювання факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (Чернівці, 2020, 2021, 2022 рр.).

Публікації. Основні результати дисертації висвітлені у 16 працях: із них у 5 статтях [1]–[5] (додаток А), з яких 4 статті [1]–[3], [5] (додаток А) належать до переліку наукових видань України категорії "Б", а стаття [4] (додаток А) входять до переліку наукових видань України категорії "А"; 11 – у матеріалах міжнародних та всеукраїнських наукових конференцій [6]–[16] (додаток А), з них 2 [6]–[7] (додаток А) у матеріалах міжнародних наукових конференцій, які належать до міжнародної наукометричної бази "Scopus".

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається із анотації, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних літературних джерел, що налічує 104 найменування, та 3 додатків. Загальний обсяг дисертації – 149 сторінок, робота містить 6 таблиць та 5 рисунків.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЙНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ ТА ДОПОМІЖНІ ВІДОМОСТІ

1.1 Загальні відомості з теорії диференціально-функціональних рівнянь

1.1.1 Вступ

Диференціально-різницеві рівняння та диференціально-функціональні рівняння виникають при врахуванні запізнення для опису багатьох технічних, фізичних та природніх процесів. Рівняння такого виду виникають при моделюванні екологічних та біологічних систем, дослідженні поведінки ядерних реакторів, у системах з напівпровідниковими елементами, хіміко-технологічних процесах та інших явищах, які залежать від передісторії. Це і стало причиною, того що системи диференціально-функціональних, зокрема диференціально-різницевих рівнянь є актуальним об'єктом досліджень [1]–[5].

Починаючи з середини минулого сторіччя теорія диференціально-функціональних рівнянь активно розвивалася такими математиками як М.М. Красовський, А.Д Мишкіс, Р. Беллман, Дж. Хейл, А. Халанай [6]–[11]. Важливий внесок у розвиток різних напрямків теорії диференціально-функціональних рівнянь зробили Ю. О. Митропольський А. М. Самойленко, Є. Ф. Царков, В. Ю. Слюсарчук, В. І. Фодчук, В. П. Рубаник, Д.Я. Хусаїнов [13]–[16], [27]–[29].

Незважаючи на важливі досягнення у вивченні диференціально-функціональних рівнянь, все ще залишається багато складних проблем, пов'язаних як з теорією, так і з їх застосуваннями.

Знайти точний розв'язок диференціально-функціональних рівнянь вдається тільки у найпростіших випадках, тому методи побудови наближених розв'язків таких рівнянь мають важливе значення.

У першу чергу на такі рівняння поширюються асимптотичні методи М. М. Боголюбова, Ю. А. Митропольського, А. М. Самойленка, метод усереднення та чисельно-аналітичні методи [14]–[16].

При дослідженні задач стійкості, осциляції, біфуркації, керування та стабілізації розв'язків лінійних диференціально-функціональних рівнянь важливу роль відіграє розміщення коренів відповідних характеристичних рівнянь, які у випадку таких рівнянь називають квазіполіномами.

Відзначимо, що ефективних алгоритмів знаходження нулів квазіполіномів на даний час немає. Основні методи, що тут розвиваються, стосуються побудови спеціальних многочленів, нулі яких наближають нулі квазіполіномів. При дослідженні апроксимації системи лінійних диференціально-різницевих рівнянь виявилось, що наближення неасимптотичних коренів їх квазіполіномів можна знаходити за допомогою характеристичних многочленів відповідних апроксимуючих систем звичайних диференціальних рівнянь.

У даній роботі досліджуються застосування схем апроксимації диференціально-функціональних та диференціально-різницевих рівнянь [30]–[32] до наближеного знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів та аналізу стійкості розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь із запізненням, а також застосування даного підходу до наближення нового класу крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь з багатьма запізненнями.

1.1.2 Початкова задача для диференціально-функціональних рівнянь

Диференціально-функціональні рівняння (ДФР) та диференціально-різницеві рівняння (ДРР), в яких невідома функція та її похідні входять при різних значеннях аргумента активний об'єкт дослідження. Загальноприйнятою є класифікація таких рівнянь [6]–[8], [10], [12]: рівняння із запізненням, нейтрального типу, з випереджаючим аргументом, а також змішаного типу. Ця класифікація будується на тому чи залежить поточний стан системи від минулих значень, майбутніх значень або від обох.

Нехай R^n – n -вимірний простір з деякою векторною нормою, $C = C([\alpha, \beta], R^n)$ – простір неперервних функцій зі значеннями в R^n , визна-

чених на $[\alpha, \beta]$ і для $\varphi \in C$

$$\|\varphi\| = \sup_{\alpha \leq s \leq \beta} |\varphi(s)|.$$

Для довільної неперервної функції $x(s)$, визначеної на $[-\tau, T]$, $T, \tau > 0$ і довільного фіксованого $t \in [0, T]$, позначатимемо через x_t функцію

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad \theta \in [-\tau, 0].$$

Нехай $f(t, \varphi) \in R^n$ – функція, що визначена для всіх $\varphi \in C$, $t \in [t_0, \infty)$. Позначаючи $\frac{dx}{dt}$ правосторонню похідну функції $x(s)$ при $s = t$ розглянемо диференціально-функціональне рівняння [7]

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x_t). \quad (1.1)$$

Означення 1.1. [7] Функція $x(t)$ називається розв'язком рівняння (1.1) з початковою функцією $\varphi \in C$ у початковий момент $t = t_0$, якщо існує $T > 0$ таке, що:

- 1) $x_t \in C$ для $t \in [t_0, t_0 + T]$;
- 2) $x_{t_0} = \varphi$;
- 3) x_t задовольняє рівняння (1.1) при $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Умови існування та єдиності розв'язку початкової задачі для рівняння (1.1) вивчалися у багатьох працях [6]–[8], [10], [12], [33].

Теорема 1.1. [7, 33] Нехай Ω відкрита множина в $R \times C$, функція $f(t, \varphi)$ неперервна і Ліпшицева за φ на кожному компактi із Ω . Якщо $(\sigma, \varphi) \in \Omega$, тоді існує єдиний розв'язок рівняння (1.1) із початковою умовою (σ, φ) .

Інтегральна крива рівняння (1.1), яка починається з точки (t_0, φ) , буде складатися із точок з $R \times C$, які задаються у вигляді $(t, x_t, t \geq t_0)$, де $x(t)$ – розв'язок (1.1) з початковою функцією φ при $t = t_0$.

Така ситуація породжує аналогію із звичайними диференціальними рівняннями. Однак, інтегральні криві рівняння (1.1) визначені, взагалі кажучи, тільки для $t \geq t_0$, можуть перетинатися в нескінченній множині точок, але не збігатися на жодному інтервалі тощо.

Уведемо до розгляду лінійне диференціально-функціональне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = L(t, x_t), \quad (1.2)$$

де $L(t, \varphi)$ – лінійний за φ функціонал.

Згідно з теоремою Ріса [7, 34] функціонал L можна представити у вигляді інтеграла Стальтьєса

$$L(t, \varphi) = \int_{-\tau}^0 d[\eta(t, \theta)]\varphi(\theta), \quad (1.3)$$

де $\eta(t, \theta)$ – $n \times n$ матриця, елементи якої є функціями обмеженої варіації для кожного t та неперервними за t рівномірно відносно θ .

Лінійну диференціально-різницеву систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(t - \tau) \quad (1.4)$$

можна зобразити у вигляді (1.3), припускаючи, що

$$\eta(t, \theta) = \begin{cases} 0, & \theta = 0, \\ -A(t), & -\tau < \theta < 0, \\ -A(t) - B(t), & \theta = -\tau. \end{cases}$$

Для практичних застосувань важливою є лінійна автономна система ДФР із запізненням

$$\frac{dx}{dt} = \int_{-\tau}^0 [\eta(\theta)]x(t + \theta), \quad (1.5)$$

де $\eta(\theta)$ – $n \times n$ -матриця, елементи якої є функціями обмеженої варіації.

Якщо $\eta(\theta)$ є функцією вигляду

$$\eta(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta = 0, \\ -A_0, & -\tau_1 < \theta < 0, \\ -(A_0 + A_1 + \dots + A_{k-j}), & -\tau_{k-j} \leq \theta < -\tau_{k-j-1}, \\ -(A_0 + A_1 + \dots + A_k), & \theta = -\tau_k, \end{cases}$$

де $\theta = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k = \tau$, A_j , $j = \overline{0, k}$ сталі $n \times n$ -матриці, тоді рівняння (1.5) є ДРР із багатьма запізненнями

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=0}^k A_i x(t - \tau_i). \quad (1.6)$$

Стійкість розв'язків рівнянь (1.5), (1.6) безпосередньо залежить від розміщення коренів їх квазіполіномів.

$$\Phi(\lambda) = \det \left(\lambda E - \int_{-\tau}^0 [d\eta(\theta)] e^{-\lambda\theta} \right), \quad (1.7)$$

$$D(\lambda) = \det \left(\lambda E - \sum_{i=0}^k A_i - e^{-\lambda\tau_i} \right). \quad (1.8)$$

Для квазіполіномів (1.7), (1.8) справджуються такі властивості [6, 7, 10, 35]:

1) квазіполіноми мають нескінченну кількість нулів скінченної кратності;

2) нулі квазіполіномів розміщені у півплощині

$$\operatorname{Re}\lambda < \delta, \quad \delta \in R;$$

3) у будь-якій смузі

$$\alpha < \operatorname{Re}\lambda < \beta$$

знаходиться скінченне число нулів квазіполіномів;

4) єдиною точкою згущення нулів квазіполіномів є $-\infty$.

На практиці нулі квазіполіномів розбиваються на два класи: асимптотичні та неасимптотичні. Перший клас – це нулі віддалені від початку координат, а другий клас – це нулі розміщені біля початку координат.

Основний вплив на властивості розв'язків рівнянь (1.5) та (1.6) мають неасимптотичні нулі їх квазіполіномів. Ці нулі можуть бути знайдені за допомогою наближених числових алгоритмів.

Нехай $f(t, \varphi)$, $g(t, \varphi)$ неперервні функції, що визначені для всіх $\varphi \in C$, $t \in [t_0, \infty)$.

Розглянемо ДФР нейтрального типу

$$\frac{d}{dt}g(t, x_t) = f(t, x_t). \quad (1.9)$$

Якщо $g(t, \varphi) = \varphi_0 - A\varphi(-\tau)$, $f(t, \varphi) = B\varphi_0 + C\varphi(-\tau)$, де A , B , C – $n \times n$ -матриці, тоді одержуємо лінійне ДФР нейтрального типу

$$\frac{d}{dt}(x(t) - Ax(t - \tau)) = Bx(t) + Cx(t - \tau).$$

Означення 1.2. [7] Функція x називається розв'язком рівняння (1.9), якщо для заданих $\sigma \in R$, $\varphi \in C$ вона є неперервна на $[\sigma - \tau, \sigma + T]$, $T > 0$, функція $g(t, x_t)$ неперервно диференційована на $[\sigma, \sigma + T]$, $x_\sigma = \varphi$ та задовольняє рівняння (1.9) на $[\sigma, \sigma + T]$.

Теорія ДФР нейтрального типу, зокрема умови існування та єдиності розв'язків, умови їх стійкості, неперервна залежність від початкових даних досліджена в працях [7, 36, 37].

Розглянемо лінійне автономне ДФР нейтрального типу

$$\frac{d}{dt}D(x_t) = L(x_t), \quad (1.10)$$

де $D(\varphi) = \varphi(0) - \int_{-\tau}^0 [d\eta(\theta)]\varphi(\theta)$, $L(\varphi) = \int_{-\tau}^0 [d\mu(\theta)]\varphi(\theta)$, $\eta(\theta)$, $\mu(\theta)$ – $n \times n$ -матриці, елементи яких є функціями обмеженої варіації.

Квазіполіном для рівняння (1.10) має вигляд

$$\Phi(\lambda) = \det \left(\lambda \left(E - \int_{-\tau}^0 [d\eta(\theta)]e^{-\lambda\theta} \right) - \int_{-\tau}^0 [d\mu(\theta)]e^{-\lambda\theta} \right). \quad (1.11)$$

Нулі квазіполінома (1.11), аналогічно як і для квазіполінома (1.7) ДФР із запізненням, лежать у півплощині $Re\lambda < \delta$, $\delta \in R$. Проте, в загальному випадку у смугі

$$\alpha < Re\lambda < \beta, \quad \alpha, \beta \in R$$

може знаходитися нескінченна кількість нулів (1.11).

Наприклад, для рівняння

$$\frac{d}{dt} [x(t) - x(t - \tau)] = a [x(t - \tau) - x(t)] = 0$$

квазіполіном

$$\lambda - \lambda e^{-\tau\lambda} = a (e^{-\lambda\tau} - 1)$$

має два дійсних корені $\lambda = -a$, $\lambda = 0$ і ланцюжок чисто уявних коренів

$$\lambda_k = \frac{2\pi k}{\tau}i, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

1.1.3 Крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням

Інтегро-диференціальні рівняння із запізненням описують реально існуючі процеси у в'язкопружних середовищах, динаміці популяцій, моделях хижак-жертва, варіаційних задачах теорії керування тощо. Це пов'язано з тим, що такі типи рівнянь забезпечують найкраще, а в багатьох випадках єдине реалістичне моделювання спостережуваних явищ [3, 5, 38]. У зв'язку з цим дослідження крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням є актуальною задачею.

Розглянемо крайову задачу із багатьма запізненнями

$$y''(x) = f'(x, [y(x)]) + \int_a^b g(x, s[y(s)]) ds, \quad x \in [a, b], \quad (1.12)$$

$$y^{(p)}(x) = \varphi^{(p)}(x), \quad p = 0, 1, x \in [a - \tau, a], y(b) = \gamma, \quad (1.13)$$

де $\gamma \in R$, $\varphi(x) \in C([a - \tau, a])$ – початкова функція

$$[y(x)] = (y(x), y(x - \tau_1), \dots, y(x - \tau_n)), \quad 0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n = \tau.$$

Введено множину точок, що визначають запізненнями τ_i , $i = \overline{1, n}$

$$E = \{x_i \in [a, b], x_i = a + \tau_i, i = \overline{1, n}\}.$$

У точках множини E розв'язок крайової задачі (1.12)–(1.13), взагалі кажучи, має розривну другу похідну.

Розв'язком крайової задачі (1.12)–(1.13) будемо вважати функцію, яка задовольняє рівняння (1.12) за можливим винятком точок множини E та крайові умови (1.13). Одним із методів розв'язання крайових задач із запізненням є метод кроків [6, 7, 10, 12]. При цьому розв'язання крайової задачі із запізненням зводиться до розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь і дозволяє встановити існування та єдиність розв'язку. Однак, реалізація на практиці цього методу можлива тільки для найпростіших типів крайових задач.

Для дослідження існування та єдиності розв'язків задачі (1.12)–(1.13) використовуються методи та підходи теорії крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь: метод нерухомої точки, метод функції Гріна тощо.

На основі цих методів встановлено необхідні і достатні умови розв'язності крайових задач із запізненням в термінах фундаментальної матриці та коефіцієнтів вхідної задачі.

Оскільки не існує універсальних алгоритмів побудови точних розв'язків крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням то важливими питаннями при їх дослідженні є розробка ефективних методів знаходження наближених розв'язків.

Актуальним питанням також є оцінка похибок при знаходженні наближених розв'язків та побудова конструктивних алгоритмів для їх реалізації.

1.2 Огляд наукових праць за темою дисертації

1.2.1 Схеми апроксимації початкових задач для диференціально-функціональних рівнянь

Теорія диференціально-функціональних рівнянь інтенсивно розвивається завдяки численным застосуванням таких задач у біології, медицині, економіці та інших прикладних задачах. Для наближеного розв'язання математичних моделей, що описують процеси з післядією ефективним виявився метод апроксимації рівнянь із запізненням послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь [17]–[19].

Розглянемо початкову задачу для диференціального рівняння із запізненням

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t - \tau)), \quad t \in [0, T], \quad (1.14)$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad (1.15)$$

де $\tau, T > 0$, $f(t, u, v)$ – неперервна функція, що задовольняє умову Ліпшиця за u, v , $\varphi(t)$ – неперервна початкова функція.

Початковій задачі (1.14)–(1.15) ставиться у відповідність задача Коші

для системи звичайних диференціальних рівнянь [17, 19]

$$\begin{aligned} \frac{dz_0(t)}{dt} &= f(t, z_0(t), z_m(t)), \\ \frac{dz_j(t)}{dt} &= \frac{m}{\tau} (z_{j-1}(t) - z_j(t)), \quad j = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$z_j(0) = \varphi \left(-\frac{j\tau}{m} \right), \quad j = \overline{0, m}. \quad (1.17)$$

В припущенні, що розв'язок початкової задачі (1.14)–(1.15) диференціальний на $[-\tau, T]$ в роботі [19] показано, що розв'язок задачі Коші (1.16)–(1.17) апроксимує його і справджуються нерівності

$$\left| x \left(t - \frac{j\tau}{m} \right) - z_j(t) \right| \leq \frac{K\tau}{\sqrt{m}}, \quad j = \overline{0, m}, t \in [0, T], K > 0. \quad (1.18)$$

Апроксимація (1.18) встановлена тільки на скінченному інтервалі. У випадку, якщо розв'язок рівняння із запізненням є асимптотично стійким, то при достатньо великих m стійкість задач (1.14)–(1.15) та (1.16)–(1.17) є еквівалентною. Але вибору розмірності m_0 апроксимуючої системи, щоб така властивість мала місце, в [19] не запропоновано.

Дослідження схем апроксимації диференціальних рівнянь із запізненням у різних функціональних просторах на скінченному інтервалі здійснено в роботах Л.А. Піддубної та І.М. Черевка [20]–[22]. Зокрема, якщо розв'язок $x(t)$ початкової задачі (1.14)–(1.15) є тільки неперервна функція, то справедливі співвідношення

$$\left| x \left(t - \frac{j\tau}{m} \right) - z_j(t) \right| \leq \beta \left(\omega \left(x, \frac{\tau}{m} \right) \right), \quad j = \overline{0, m}, t \in [0, T], \quad (1.19)$$

де $\omega \left(x, \frac{\tau}{m} \right)$ – модуль неперервності функції $x(t)$ на $[-\tau, T]$, $\beta(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow 0$.

Відзначимо, що за теоремою Кантора $\omega \left(x, \frac{\tau}{m} \right) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Отже, при достатньо великих m розв'язок задачі Коші (1.16)–(1.17) апроксимує, згідно (1.19), розв'язок початкової задачі (1.14)–(1.15).

Аналіз точності апроксимації векторного елемента запізнення для різних вхідних функцій та узагальнення схем апроксимації для систем диференціально-різницевих рівнянь запізнюючого та нейтрального типів досліджено в роботах О.В. Матвія та І.М. Черевка [23, 24].

Оригінальну методику дослідження апроксимації елемента запізнення у випадку інтегровних вхідних функцій розвинув А. Халанай [18], яка дозволила побудувати схеми наближень диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу за Хейлом.

Поширення схем апроксимації на систему ріницевих рівнянь з багатьма запізненнями

$$x(t) = g(t, x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_p)), \quad t \in [0, T], \quad (1.20)$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad (1.21)$$

де $0 < \tau_1 < \dots < \tau_p = \tau$, $g(t, u_1, \dots, u_p)$, $\varphi(t)$ – неперервні функції здійснено в [39].

Початковій задачі (1.20)–(1.21) поставлено у відповідність задачу Коші

$$\begin{aligned} \frac{dz_1(t)}{dt} &= \frac{\tau}{m} (g(t, z_{l_1}(t), \dots, z_{l_p}(t)) - z_1(t)), \\ \frac{dz_j(t)}{dt} &= \frac{m}{\tau} (z_{j-1}(t) - z_j(t)), \quad j = \overline{2, m}, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$z_j(0) = \varphi\left(-\frac{j\tau}{m}\right), \quad j = \overline{1, m}, \quad (1.23)$$

де індекси l_j визначаються нерівностями $\tau l_j \leq \tau < \tau(l_j + 1)$.

Встановлено таке твердження.

Теорема 1.2. [39] *Нехай $z_j(t)$, $j = \overline{1, m}$, розв’язок задачі Коші (1.22)–(1.23), а $x(t)$ – розв’язок початкової задачі (1.20)–(1.21), функція $g(t, u_1, \dots, u_p)$ задовольняє умову Ліпшиця*

$$|g(t, u_1, \dots, u_p) - g(t, v_1, \dots, v_p)| \leq L \sum_{k=1}^p |u_k - v_k|, \quad pL < 1.$$

Тоді мають місце співвідношення

$$\int_0^T \left| x\left(t - \frac{\tau j}{m}\right) - z_j(t) \right| dt \leq \beta_1 \left(\frac{\tau}{m}\right), \quad j = \overline{1, m}. \quad (1.24)$$

Якщо справджується умова ”склейки”

$$\varphi(0) = g(0, \varphi(-\tau_1), \dots, \varphi(-\tau_p)),$$

тоді [39]

$$\left| x \left(t - \frac{\tau j}{m} \right) - z_j(t) \right| \leq \beta_2 \left(\frac{\tau}{m} \right), \quad j = \overline{1, m}, t \in [0, T]. \quad (1.25)$$

Функції $\beta_i(s)$, $i = 1, 2$ монотонно неспадні і

$$\lim_{s \rightarrow 0} \beta_i(s) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Одержані схеми апроксимації узагальнюються на систему диференціально-різницевого та різницевого рівнянь [40].

Побудова та обґрунтування схем апроксимації диференціально-функціональних рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь вивчалася в роботах С.А. Іліки, І.М. Черевка [41, 42].

Схеми апроксимації ряду лінійних та нелінійних диференціально-функціональних рівнянь із запізненням та нейтрального типу, що застосовуються до задач оптимального керування, вивчалась в роботах Х.Т. Бенкса та К. Куніша [43]–[45].

Для наближення розв'язків крайових задач для диференціально-різницевого рівнянь використовуються методи колокацій та проекційно-колокаційні алгоритми [46, 47], чисельно-аналітичний метод А.М. Самойленка [16, 48], який виявився ефективним для знаходження періодичних розв'язків різних класів рівнянь із запізненням.

Достатньо ефективним методом наближеного розв'язання крайових задач для рівнянь із запізненням та нейтрального типу виявилось застосування методу сплайн-функцій [49, 50]. Використання сплайн-функцій дефекту два дозволило врахувати розриви похідних розв'язків крайових задач запізнюючого та нейтрального типу [51, 52].

У роботах [53, 54] запропоновано використати схему апроксимації рівнянь із запізненням для наближення крайових задач із запізненням послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь.

Розглянемо крайову задачу [53]

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = f(t, x(t), x(t - \tau)), \quad t \in [0, T], \quad (1.26)$$

$$y(t) = \varphi(t), \quad t \in [a - \tau, a], \quad y(b) = \gamma. \quad (1.27)$$

Нехай $f(t, u_1, u_2)$ – неперервна функція в області $G = [a, b] \times G_1 \times G_1$, де $G_1 = \{u \in R : |u| < P_1\}$, P_1, τ – додатні сталі, $\gamma \in R$, $\varphi(t)$ – задана неперервна на $[a - \tau, a]$ початкова функція.

Введемо позначення

$$P = \sup \{|f(t, u_1, u_2)| : |u_1| \leq P_1, |u_2| \leq P_1, a \leq t \leq b\},$$

$$J = [a - \tau, a], I = [a, b], B(J \cup I) = \{y(t) : y(t) \in C(J \cup I) \cap C^2(I), y(t) \leq P_1\}.$$

Поставимо у відповідність задачі (1.26)–(1.27) крайову задачу для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z_0(t)}{dt^2} &= f(t, z_0(t), z_m(t - \tau)), t \in I, \\ \frac{dz_i(t)}{dt} &= \frac{m}{\tau}(z_{i-1}(t) - z_i(t)), i = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$z_i(a) = \varphi\left(a - \frac{i\tau}{m}\right), i = \overline{0, m}, z_0(b) = \gamma. \quad (1.29)$$

Теорема 1.3. [53] *Нехай справджуються умови:*

- 1) $\frac{(b-a)^2}{8}p + \max\{\|\varphi\|, |\gamma|\} \leq P_1$;
- 2) в області G функція $f(t, u_1, u_2)$ задовольняє умову Ліпшиця

$$|f(t, u_1, u_2) - f(t, u'_1, u'_2)| \leq L_1 |u_1 - u'_1| + L_2 |u_2 - u'_2|;$$

$$3) (L_1 + L_2) \frac{(b-a)^2}{8} < 1.$$

Тоді:

1) існує єдиний розв'язок крайової задачі (1.26)–(1.27) в класі функцій B ;

2) крайова задача (1.28)–(1.29) апроксимує крайову задачу (1.26)–(1.27) і справджуються співвідношення

$$\left| x\left(t - \frac{i\tau}{m}\right) - z_i(t) \right| \leq K\omega\left(x, \frac{\tau}{m}\right), t \in I, j = \overline{1, m},$$

де $K > 0$, $\omega\left(x, \frac{\tau}{m}\right)$ – модуль неперервності функції $x(t)$ на $[a, b]$.

1.2.2 Застосування схем апроксимації

Вивчення зв'язків між диференціально-різницевиими рівняннями та відповідними їм апроксимуючими системами дозволили запропонувати алгоритми розв'язання ряду прикладних задач:

- апроксимація неасимптотичних коренів квазіполіномів лінійних диференціально-різницевих рівнянь;
- дослідження стійкості лінійних систем із запізненням;
- побудова областей стійкості лінійних систем із багатьма запізненнями.

Основні теоретичні результати, що стосуються стійкості розв'язків диференціально-різницевих та диференціально-функціональних рівнянь, наведені в працях [6]–[9], [11, 35, 37, 55].

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь із запізненням

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{i=0}^k A_i x(t - \tau_i), \quad (1.30)$$

де $A_i, i = \overline{0, k} - n \times n$ сталі матриці, $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots, \tau_k$.

Теорема 1.4. [6, 7, 11, 35, 55] *Для того, щоб нульовий розв'язок системи (1.30) був експоненціально стійким, необхідно і досить, щоб всі корені його характеристичного квазіполінома*

$$\det \left(\lambda E - \sum_{i=0}^k A_i e^{-\lambda \tau_i} \right) = 0 \quad (1.31)$$

лежали в лівій півплощині

$$\operatorname{Re} \lambda < 0.$$

Для систем диференціальних рівнянь без запізнення характеристичне рівняння є многочленом. Розміщення його коренів можна встановити, використовуючи критерій Рауса–Гурвіца, частотні критерії Михайлова і Найквіста тощо.

Знаходження всіх коренів квазіполіномів та аналіз їх розміщення є достатньо складною задачею. Для найпростіших квазіполіномів можна скористатися методом D -розбиття простору коефіцієнтів квазіполінома [55]. У пра-

цях [56, 57] аналіз розміщення нулів простіших квазіполіномів здійснювався шляхом побудови спеціальних могочленів, що наближають квазіполіноми.

При дослідженні схем апроксимації систем лінійних диференціально-різницевих рівнянь виявилось, що неасимптотичні корені їх квазіполіномів достатньо добре наближаються коренями відповідних апроксимуючих лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь. Алгоритми наближеного знаходження неасимптотичних коренів скалярних диференціально-різницевих рівнянь запропоновано в роботах [58, 59], а для систем лінійних диференціально-різницевих рівнянь з багатьма запізненнями – в роботах [21, 23, 24].

На практиці системи із запізненням замінюють системами без запізнення, вважаючи, що запізнення є малим [35, 60, 61]. Зокрема, при малому запізненні τ система (1.30) замінюється системою без запізнення

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left(\sum_{i=0}^k A_i \right) x(t). \quad (1.32)$$

При цьому важливою задачею є знаходження верхньої межі запізнення $\tau \leq \Delta$, для якої із стійкості системи (1.32) зберігається стійкість системи (1.30). Перші оцінки величини Δ були встановлені в роботі [61]. На практиці вони виявилися дуже грубими. Уточнення оцінок для величини Δ одержано в [62, 63].

Поставимо у відповідність системі із запізненням (1.30) апроксимуючу систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dz_0(t)}{dt} &= \sum_{i=0}^k A_i z_{l_i}(t), \quad l_i = \left[\frac{\tau_i m}{\tau} \right], \\ \frac{dz_i(t)}{dt} &= \frac{m}{\tau} (z_{i-1}(t) - z_i(t)), \quad i = 1, m. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Має місце таке твердження

Теорема 1.5. [23] *Якщо нульовий розв'язок системи із запізненням (1.30) експоненціально стійкий (нестійкий), то існує $m_0 > 0$ таке, що при $m \geq m_0$ нульовий розв'язок апроксимуючої системи звичайних диференціальних рівнянь (1.33) також експоненціально стійкий (нестійкий). Якщо для всіх*

$t \geq t_0$ нульовий розв'язок системи (1.33) експоненціально стійкий (нестійкий), то й розв'язок системи із запізненням (1.30) експоненціально стійкий (нестійкий).

Застосовуючи тепер теореми 1.4, 1.5, можна дістати конструктивний алгоритм дослідження на стійкість систем із запізненням.

Значна увага приділяється одержанню коефіцієнтних областей стійкості лінійних диференціальних рівнянь із запізненням [26, 63, 64].

Розглянемо лінійне рівняння із запізненнями

$$\frac{dx(t)}{dt} + \sum_{i=1}^k b_i x(t - \tau_i) = 0, \quad (1.34)$$

де $b_i \in R$, $i = \overline{1, k}$, $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k = \tau$.

Нехай у рівнянні (1.34) запізнення τ_i – додатні раціональні числа. Зробивши лінійну заміну незалежної змінної, можна одержати інше лінійне рівняння із запізненнями, які є цілими попарно різними числами. Його характеристичний квазіполіном буде мати вигляд

$$\lambda = a_1 e^{-\lambda} + a_2 e^{-2\lambda} + \dots + a_k e^{-k\lambda}. \quad (1.35)$$

Означення 1.3. [26] Областю стійкості рівняння (1.35) називається множина точок $(a_1, \dots, a_k) \in R^k$, для яких усі корені рівняння (1.35) задовольняють умову

$$\operatorname{Re} \lambda < 0.$$

Для побудови області стійкості рівняння (1.35) важливим є наступне твердження.

Теорема 1.6. [26] Область стійкості рівняння (1.35) обмежена.

Застосування методу D -розбиття для дослідження області стійкості лінійного диференціального рівняння з двома запізненнями досліджено в роботі [64]. Алгоритм побудови області стійкості лінійних диференціальних рівнянь з багатьма запізненнями розглянуто в праці [26].

Із наведеного аналізу наукових праць, що мають безпосереднє відношення до дисертаційної роботи, випливає, що методика апроксимації початкових і крайових задач для диференціально-різницевих рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь дозволила використання широкого спектру методів та підходів дослідження звичайних динамічних систем.

Актуальними нерозв'язаними задачами залишалися такі: побудова та обґрунтування схем апроксимації для систем диференціально-функціональних рівнянь, розробка та реалізація алгоритмів наближеного знаходження коренів квазіполіномів систем лінійних диференціально-різницевих та диференціально-функціональних рівнянь, побудова областей стійкості лінійних систем із багатьма запізненнями, розробка прикладного програмного забезпечення для реалізації запропонованих алгоритмів для модельних тестових прикладів.

Висновки до розділу 1

Диференціально-різницеві та диференціально-функціональні рівняння виникають при моделюванні прикладних процесів в техніці, біології, хімічній кінетики і тому є важливим об'єктом для дослідження.

Ефективним методом дослідження диференціально-функціональних рівнянь виявилась їх апроксимація послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь. Така методика наближення початкових і крайових задач для диференціально-функціональних рівнянь дозволила використання широкого спектру методів дослідження звичайних динамічних систем.

Застосування схем апроксимації надало можливість розв'язувати ряд важливих для практики прикладних задач із теорії стійкості.

РОЗДІЛ 2
ДОСЛІДЖЕННЯ СХЕМ АПРОКСИМАЦІЇ ЛІНІЙНИХ
СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ
РІВНЯНЬ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

2.1 Про схему наближення елемента запізнення

При дослідженні диференціальних рівнянь із запізненням

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t - \tau)), \quad \tau > 0 \quad (2.1)$$

у випадку досить малого τ розглядають його наближення звичайними диференціальними рівняннями. Можна замінити елемент запізнення $x(t - \tau)$ декількома членами розкладу в ряд Тейлора

$$x(t - \tau) = x(t) - \tau \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\tau^2}{2} \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \dots$$

Однак, якщо брати кількість членів розкладу більше за порядок рівняння, то порядок апроксимації погіршується [65].

Розглянемо наближення елемента запізнення

$$y(t) = x(t - \tau), \quad t_0 \leq t \leq T$$

за допомогою аперіодичної ланки, що задається рівнянням [18, 19]

$$\tau \frac{dz(t)}{dt} + z(t) = x(t), \quad (2.2)$$

де стала τ також як і запізнення в рівнянні (2.1), а $x(t)$ вхідна функція елемента запізнення при $t \geq t_0$. Для встановлення відповідності між елементом запізнення $y(t)$ та аперіодичною ланкою z у початковий момент покладемо

$$z(t_0) = y(t_0) = x(t_0 - \tau).$$

Оцінимо різницю

$$\varepsilon(t) = z(t) - y(t).$$

Нехай $x(t)$ має неперервну похідну при $t \in [t_0 - \tau, T]$, тоді, враховуючи що $\varepsilon(t_0) = 0$, для $\varepsilon(t)$ маємо задачу Коші

$$\begin{aligned} \varepsilon'(t) + \tau^{-1}\varepsilon(t) &= \tau^{-1}[x(t) - x(t - \tau)] - x'(t - \tau), \\ \varepsilon(t_0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для правої частини рівняння (2.3) одержуємо оцінку

$$|\tau^{-1} |x(t) - x(t - \tau)| - x'(t - \tau)| = |x'(s) - x'(t - \tau)| \leq \tau\omega(x', \tau),$$

де $\omega(x', \tau) = \max_{\substack{s_1, s_2 \in [t_0 - \tau, T], \\ |s_1 - s_2| \leq \tau}} |x'(s_1) - x'(s_2)|$ – модуль неперервності функції $x'(t)$ на $[t_0 - \tau, T]$.

Оцінюючи тепер $\varepsilon(t)$ дістаємо

$$\varepsilon(t) \leq \left| \int_{t_0}^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau}\right) \omega(x', \tau) ds \right| \leq \tau\omega(x', \tau). \quad (2.4)$$

У даному випадку за теоремою Кантора [66] маємо, що $\omega(x', \tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$ і $t \in [t_0, T]$.

Нехай тепер $x(t)$ тільки неперервна функція при $t \in [t_0 - \tau, T]$. Розглянемо згладжену функцію

$$x^{(1)}(t) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} x(s) ds, \quad (2.5)$$

на відрізок $[T, T + h]$ функцію $x(t)$ продовжимо за неперервністю як сталу.

Функція $x^{(1)}(t)$ вже неперервно диференційовна.

Якщо тепер у рівнянні (2.2) покласти

$$x(t) = x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t),$$

то згідно його лінійності розв'язок буде сумою функцій, що є розв'язками такої системи

$$\begin{aligned} \tau z_1'(t) + z_1(t) &= x^{(1)}(t), \\ z_1(t_0) &= y(t_0), \\ \tau z_2'(t) + z_2(t) &= x^{(2)}(t), \\ z_2(t_0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

При цьому

$$\left| x^{(2)}(t) \right| = \left| x(t) - x^{(1)}(t) \right| = \left| x(t) - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} x(s) ds \right| \leq \omega(x, h), \quad (2.7)$$

де $\omega(x, h)$ модуль неперервності функції $x(t)$ на $[t_0 - \tau, T]$.

Для різниці $\varepsilon(t)$ маємо тепер із (2.6) оцінку:

$$\begin{aligned} |\varepsilon(t)| &= |z(t) - y(t)| = |z_1(t) + z_2(t) - y_1(t) - y_2(t)| \leq \\ &\leq |z_1(t) - y_1(t)| + |z_2(t)| + |y_2(t)|. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Згідно нерівності (2.7) маємо

$$|y_2(t)| = \left| x^{(2)}(t - \tau) \right| \leq \omega(x, h).$$

Така ж оцінка з (2.6) справедлива для $|z_2(t)|$. Для оцінки різниці $|z_1(t) - y_1(t)|$ можна використати оцінку (2.4), оскільки $x^{(1)}(t)$ вже є диференційовною функцією.

Тепер нерівність (2.8) можемо записати у вигляді

$$|\varepsilon(t)| \leq \tau \omega \left(\left(x^{(1)}(t) \right)', \tau \right) + 2\omega(x, h).$$

Враховуючи вигляд функції $x^{(1)}(t)$ одержуємо

$$\begin{aligned} \omega \left(\left(x^{(1)}(t) \right)', \tau \right) &= \frac{1}{h} \max_{|t_1 - t_2| < \tau, t_1, t_2 \in [t_0 - \tau, T]} |[x(t_1 + h) - x(t_1)] - \\ &- [x(t_2 + h) - x(t_2)]| \leq \frac{2}{h} \omega(x, \tau). \end{aligned}$$

Якщо покласти $h = \tau$, тоді

$$|\varepsilon(t)| \leq 4\omega(x, \tau). \quad (2.9)$$

Із співвідношення (2.9) дістаємо, що різниця між вихідним станом елемента запізнення та значенням оперіодичної ланки $z(t)$ буде малою при малому запізненні τ .

Лема 2.1. *Нехай вхідна функція $x(t)$ елемента запізнення диференційовна на $[t_0 - \tau, T]$ або є неперервною функцією. Тоді між аперіодичною ланкою $z(t)$ та елементом запізнення $y(t)$ мають місце співвідношення*

$$|z(t) - y(t)| \leq \tau \omega(x', \tau), \quad (2.10)$$

або

$$|z(t) - y(t)| \leq 4\omega(x, \tau), \quad (2.11)$$

де $\omega(x', \tau)$, $\omega(x, \tau)$ модулі неперервності функцій $x'(t)$, $x(t)$.

Якщо запізнення τ не є малим, тоді для покращення апроксимації розглянемо $m \in N$ елементів запізнення, що послідовно між собою зв'язані та породжені деякою вхідною функцією $x(t)$ [18, 19]

$$y_1(t) = x\left(t - \frac{\tau}{m}\right), \quad y_2(t) = y_1\left(t - \frac{\tau}{m}\right) = x\left(t - \frac{2\tau}{m}\right), \dots,$$

$$y_m(t) = y_{m-1}\left(t - \frac{\tau}{m}\right) = x(t - \tau).$$

Будемо припускати, що вхідна функція $x(t)$ є неперервною на $[t_0 - \tau, T]$ і її початковий стан заданий $x(t) = \varphi(t)$, $t \in [t_0 - \tau, t_0]$.

Для відповідної послідовності аперіодичних ланок, що відповідають послідовності елементів запізнення, розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{m} z_1'(t) + z_1(t) &= x(t), \\ \frac{\tau}{m} z_j'(t) + z_j(t) &= z_{j-1}(t), \quad j = \overline{2, m}, t \in [t_0, T] \end{aligned} \quad (2.12)$$

з початковими умовами

$$z_j(t_0) = y_j(t_0) = x\left(t_0 - \frac{j\tau}{m}\right), \quad j = \overline{1, m}, m \in N. \quad (2.13)$$

Відзначимо, що система (2.12)–(2.13) досліджена в [19]. Якщо функція $x(t)$ задовольняє умову Ліпшиця або має обмежену сталою M похідну на $[t_0 - \tau, T]$, тоді

$$\left| z_j(t) - x\left(t - \frac{j\tau}{m}\right) \right| \leq \frac{2M\tau}{\sqrt{m}}, \quad j = \overline{1, m}, t \in [t_0, T]. \quad (2.14)$$

Якщо $x(t)$ є неперервною функцією то введемо згладжену функцію $x^{(1)}(t)$, аналогічно як (2.5).

Для різниці $x^{(2)}(t) = x(t) - x^{(1)}(t)$ маємо оцінку

$$\left| x^{(2)}(t) \right| = \left| x(t) - x^{(1)}(t) \right| = |x(t) - x(\xi)| \leq \omega(x, h) \quad (2.15)$$

для $t \in [t_0 - \tau, T]$.

Покладаючи тепер в системі (2.12) $x(t) = x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t)$, то в силу її лінійності можемо записати такі системи

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{m} z_1^{(1)'}(t) + z_1^{(1)}(t) &= x^{(1)}(t), \\ \frac{\tau}{m} z_j^{(1)'}(t) + z_j^{(1)}(t) &= z_{j-1}^{(1)}(t), \quad j = \overline{2, m}, \\ z_j^{(1)}(t_0) &= y_j(t_0), \quad j = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{m} z_1^{(2)'}(t) + z_1^{(2)}(t) &= x^{(2)}(t), \\ \frac{\tau}{m} z_j^{(2)'}(t) + z_j^{(2)}(t) &= z_{j-1}^{(2)}(t), \quad j = \overline{2, m}, \\ z_j^{(2)}(t_0) &= 0, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Встановимо тепер відповідності між елементами запізнення та їх аперіодичними ланкам, маємо

$$\begin{aligned} |z_j(t) - y_j(t)| &= \left| z_j^{(1)}(t) + z_j^{(2)}(t) - y_j^{(1)}(t) - y_j^{(2)}(t) \right| \leq \\ &\leq \left| z_j^{(1)}(t) - y_j^{(1)}(t) \right| + \left| z_j^{(2)}(t) \right| + \left| y_j^{(2)}(t) \right|. \end{aligned}$$

Згідно оцінки (2.15) дістаємо

$$\left| y_j^{(2)}(t) \right| = \left| x^{(2)} \left(t - \frac{j\tau}{m} \right) \right| \leq \omega(x, h). \quad (2.18)$$

Покажемо методом математичної індукції, що така ж оцінка має місце і для $z_j^{(2)}(t)$.

З першого рівняння системи (2.17) маємо зображення

$$z_1^{(2)}(t) = \frac{m}{\tau} \int_{t_0}^t e^{-\frac{m}{\tau}(t-s)} x^{(2)}(s) ds.$$

Враховуючи нерівність (2.18), одержуємо

$$\left| z_1^{(2)}(t) \right| \leq \frac{m}{\tau} \int_{t_0}^t e^{-\frac{m}{\tau}(t-s)} \left| x^{(2)}(s) \right| ds \leq \omega(x, h). \quad (2.19)$$

Із другого рівняння системи (2.17) маємо

$$z_2^{(2)}(t) = \frac{m}{\tau} \int_{t_0}^t e^{-\frac{m}{\tau}(t-s)} z_1^{(2)}(s) ds.$$

Тоді, враховуючи оцінку (2.19), дістаємо

$$\left| z_2^{(2)}(t) \right| \leq \omega(x, h). \quad (2.20)$$

Припускаємо, що така нерівність справджується для $j = m - 1$

$$\left| z_{m-1}^{(2)}(t) \right| \leq \omega(x, h) \quad (2.21)$$

і покажемо, що вона виконується для $j = m$.

Дійсно, для $j = m$ маємо зображення

$$z_m^{(2)}(t) = \frac{m}{\tau} \int_{t_0}^t e^{-\frac{m}{\tau}(t-s)} z_{m-1}^{(2)}(s) ds.$$

На основі індуктивного припущення (2.21) дістаємо

$$\left| z_m^{(2)}(t) \right| \leq \omega(x, h).$$

Для оцінки різниці $\left| z_j^{(1)}(t) - y_j^{(1)}(t) \right|$ можна застосувати нерівність (2.14), так як $x^{(1)}(t)$ вже є диференційовною функцією.

Таким чином, дістаємо оцінку

$$|z_j(t) - y_j(t)| \leq 2 \left(\frac{M\tau}{\sqrt{m}} + \omega(x, h) \right).$$

Покладаючи $h = \frac{\tau}{\sqrt{m}}$, одержуємо

$$|z_j(t) - y_j(t)| \leq 2 \left(\frac{M\tau}{\sqrt{m}} + \omega \left(x, \frac{\tau}{\sqrt{m}} \right) \right) = \delta \left(\frac{\tau}{\sqrt{m}} \right). \quad (2.22)$$

Лема 2.2. *Нехай вхідна функція $x(t)$ у системі (2.12) є неперервною на $[t_0 - \tau, T]$. Тоді для розв'язків задачі Коші (2.12)–(2.13) справджуються нерівності*

$$|z_j(t) - y_j(t)| \leq \delta \left(\frac{\tau}{\sqrt{m}} \right), \quad j = \overline{1, m},$$

де $\delta(s)$ – монотонно зростаюча функція та

$$\lim_{s \rightarrow 0} \delta(s) = 0.$$

2.2 Апроксимація лінійних диференціально-функціональних рівнянь з багатьма запізненнями

2.2.1 Вступ

Для диференціально-різницевих рівнянь актуальною є задача побудови та обґрунтування наближених методів знаходження розв'язків їх початкових та крайових задач, оскільки відсутні загальні методи їх аналітичного розв'язання.

Особливий інтерес становлять дослідження, які дозволяють використати методи та підходи теорії звичайних диференціальних рівнянь для розв'язання та аналізу диференціально-різницевих рівнянь.

Для розв'язання ряду важливих прикладних задач оптимального керування та теорії стійкості ефективним виявився метод заміни диференціальних рівнянь із запізненням послідовністю звичайних диференціальних рівнянь [17]–[19].

Для побудови різних схем апроксимації в [67] використано апроксимацію Паде для функції e^x , а в працях [43]–[45] застосовано апроксимацію інфінітезимального оператора підгрупи лінійних операторів. Такий підхід дозволяє звести дослідження систем із запізненням до аналізу спеціальних систем звичайних диференціальних рівнянь.

Подальше вивчення схем апроксимації диференціально-різницевих рівнянь в різних функціональних просторах на скінченному інтервалі здійснено в роботах І. М. Черевка, Л. А. Піддубної, О. В. Матвія, С. А. Іліки [22]–[25].

Вивчення зв'язків між розв'язками диференціально-різницевих рівнянь та розв'язками відповідних апроксимуючих систем звичайних диференціальних рівнянь у лінійному випадку дозволили запропонувати алгоритми розв'язання ряду важливих прикладних задач теорії стійкості. У зв'язку з цим в цьому пункті ми сконцентруємося на схемах апроксимації лінійних диференціально-різницевих рівнянь.

2.2.2 Апроксимація лінійних диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями

Розглянемо початкову задачу для системи звичайних диференціальних рівнянь із запізненням

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{i=0}^p A_i(t)x(t - \tau_i), \quad (2.23)$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0],$$

де $A_i(t)$, $i = \overline{0, p} - n \times n$ неперервні матриці при $t \in [0, T]$, запізнення $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_p = \tau$, $\varphi(t)$ – неперервна початкова функція на $[-\tau, 0]$.

Нехай $m, p \in N$. Поставимо у відповідність початковій задачі (2.23) задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь, аналогічно як в [22, 23]

$$\begin{aligned} \frac{dz_0(t)}{dt} &= \sum_{i=0}^p A_{l_i}(t)z_{l_i}(t), \\ \frac{dz_j(t)}{dt} &= \frac{m}{\tau} (z_{j-1}(t) - z_j(t)), \quad j = \overline{1, m}, t \in [0, T], \\ z_j(0) &= \varphi\left(-\frac{\tau j}{m}\right), \quad j = \overline{0, m}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

де індекси l_i визначаються рівностями

$$l_i = \left[\frac{m\tau_i}{\tau} \right], \quad i = \overline{0, p}.$$

Будемо говорити, що система звичайних диференціальних рівнянь (2.24) апроксимує систему диференціально-різницевих рівнянь, якщо виконуються співвідношення

$$\left\| x\left(t - \frac{\tau j}{m}\right) - z_j(t) \right\| \rightarrow 0, \quad j = \overline{0, m}, t \in [0, T] \text{ при } m \rightarrow \infty.$$

Дослідимо умови апроксимації розв'язків початкової задачі (2.23) розв'язками задачі Коші (2.24).

Введемо співвідношення

$$z_j(t) = z_j^{(1)}(t) + z_j^{(2)}(t),$$

де $z_j^{(1)}(t)$ та $z_j^{(2)}(t)$ розв'язки таких задач Коші

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{m} \frac{dz_1^{(1)}(t)}{dt} + z_1^{(1)}(t) &= x(t), \\ \frac{\tau}{m} \frac{dz_j^{(1)}(t)}{dt} + z_j^{(1)}(t) &= z_{j-1}(t), \quad j = \overline{2, m}, t \in [0, T], \\ z_j^{(1)}(0) &= x\left(-\frac{j\tau}{m}\right), \quad j = \overline{1, m}; \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{m} \frac{dz_1^{(2)}(t)}{dt} + z_1^{(2)}(t) &= z_0(t) - x(t), \\ \frac{\tau}{m} \frac{dz_j^{(2)}(t)}{dt} + z_j^{(2)}(t) &= z_{j-1}^{(2)}(t), \quad j = \overline{2, m}, t \in [0, T], \\ z_j^{(2)}(0) &= 0, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Враховуючи структуру лінійних систем (2.25), (2.26) та зображення для функцій $z_j(t)$, $j = \overline{1, m}$ оцінимо різницю $z_j(t) - x\left(t - \frac{j\tau}{m}\right)$, $j = \overline{1, m}$.

Маємо співвідношення

$$\begin{aligned} \left\| z_j(t) - x\left(t - \frac{j\tau}{m}\right) \right\| &= \left\| z_j^{(1)}(t) + z_j^{(2)}(t) - x\left(t - \frac{j\tau}{m}\right) \right\| \leq \\ &\leq \left\| z_j^{(1)}(t) - x\left(t - \frac{j\tau}{m}\right) \right\| + \left\| z_j^{(2)}(t) \right\|. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Розглядаючи зображення

$$z_j(t) = (z_{j1}(t), \dots, z_{jn}(t)), \quad x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

подамо $z_{ji}(t)$, $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n}$ у вигляді суми

$$z_{ji}(t) = z_{ji}^{(1)}(t) + z_{ji}^{(2)}(t),$$

де $z_{ji}^{(1)}(t)$ та $z_{ji}^{(2)}(t)$ є розв'язки таких задач Коші

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{m} \frac{dz_{j1}^{(1)}(t)}{dt} + z_{j1}^{(1)}(t) &= x_i(t), \\ \frac{\tau}{m} \frac{dz_{ji}^{(1)}(t)}{dt} + z_{ji}^{(1)}(t) &= z_{j-1,i}^{(1)}(t), \quad j = \overline{2, m}, i = \overline{1, n}, \\ z_{ji}^{(1)}(0) &= x_i\left(-\frac{j\tau}{m}\right), \quad j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}; \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\tau}{m} \frac{dz_{j1}^{(2)}(t)}{dt} + z_{j1}^{(2)}(t) &= z_{01}(t) - x_i(t), \\
\frac{\tau}{m} \frac{dz_{ji}^{(2)}(t)}{dt} + z_{ji}^{(2)}(t) &= z_{j-1,i}^{(2)}(t), \quad j = \overline{2, m}, i = \overline{1, n}, \\
z_{ji}^{(2)}(0) &= 0, \quad j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Позначимо

$$N_j(t) = \max_{0 \leq s \leq t} \sum_{i=1}^n \left| x_i \left(s - \frac{\tau j}{m} \right) - z_{ij}(s) \right|, \quad j = \overline{0, m}, t \in [0, T]. \tag{2.30}$$

Враховуючи структуру систем (2.28), (2.29) для різниці $\sum \left| x_i \left(t - \frac{\tau j}{m} \right) - z_{ij}(t) \right|$ маємо нерівність

$$\sum_{i=1}^n \left| x_i \left(t - \frac{j\tau}{m} \right) - z_{ij}(t) \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| x_i \left(t - \frac{j\tau}{m} \right) - z_{ji}^{(1)}(t) \right| + \sum_{i=1}^n \left| z_{ji}^{(2)}(t) \right|. \tag{2.31}$$

Покажемо методом математичної індукції, що для другого доданка в правій частині нерівності (2.31) справджується оцінка

$$\sum_{i=1}^n \left| z_{ji}^{(2)}(t) \right| \leq N_0(t), \quad j = \overline{1, m}, t \in [0, T]. \tag{2.32}$$

Для розв'язку задачі Коші

$$\begin{aligned}
\frac{\tau}{m} \frac{dz_{1i}^{(2)}(t)}{dt} + z_{1i}^{(2)}(t) &= z_{0i}(t) - x_i(t), \\
z_{1i}^{(2)}(0) &= 0
\end{aligned}$$

маємо зображення

$$z_{1i}^{(2)}(t) = \frac{m}{\tau} \int_0^t \exp \left(-\frac{m}{\tau} (t - \xi) \right) (z_{0i}(\xi) - x_i(\xi)) d\xi.$$

Звідси дістаємо

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \left| z_{1i}^{(2)}(t) \right| &\leq \frac{m}{\tau} \int_0^t \left[\max_{0 \leq \xi \leq t} \sum_{i=1}^n |z_{0i}(\xi) - x_i(\xi)| \right] \exp \left(-\frac{m}{\tau} (t - \xi) \right) d\xi \leq \\
&\leq \frac{m}{\tau} N_0(t) \int_0^t \exp \left(-\frac{m}{\tau} (t - \xi) \right) d\xi \leq N_0(t).
\end{aligned}$$

Отже, оцінка (2.32) при $j = 1$ справджується. Припустимо, що вона справджується для $j = k$:

$$\sum_{i=1}^n \left| z_{ki}^{(2)}(t) \right| \leq N_0(t)$$

і покажемо, що (2.32) буде справедлива для $j = k + 1$.

Дійсно,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left| z_{k+1,i}^{(2)}(t) \right| &\leq \frac{m}{\tau} \sum_{i=1}^n \left| \int_0^t z_{ki}^{(2)}(\xi) \exp\left(-\frac{m}{\tau}(t-\xi)\right) d\xi \right| \leq \\ &\leq \frac{m}{\tau} \int_0^t \left[\max_{0 \leq \xi \leq t} \sum_{i=1}^n \left| z_{ki}^{(2)}(\xi) \right| \right] \exp\left(-\frac{m}{\tau}(t-\xi)\right) d\xi \leq \\ &\leq \frac{m}{\tau} N_0(t) \int_0^t \exp\left(-\frac{m}{\tau}(t-\xi)\right) d\xi \leq N_0(t). \end{aligned}$$

Отже, оцінка (2.32) має місце.

Для початкової задачі (2.23) маємо [6]–[8], що функції $x_i(t) \in C[-\tau, T]$, $i = \overline{1, n}$, тому для оцінки різниці $\left| x_i\left(t - \frac{j\tau}{m}\right) - z_{ji}^{(1)}(t) \right|$ можна застосувати лему 2.2. Тоді дістаємо оцінку

$$\sum_{i=1}^n \left| x_i\left(t - \frac{j\tau}{m}\right) - z_{ji}^{(1)}(t) \right| \leq \delta\left(\frac{\tau}{\sqrt{m}}\right), \quad \lim_{s \rightarrow 0} \delta(s) = 0. \quad (2.33)$$

Нерівність (2.33) справджується для всіх $t \in [0, T]$ тому, враховуючи нерівності (2.32), (2.33), із співвідношення (2.31) дістаємо

$$N_j(t) \leq \delta\left(\frac{\tau}{\sqrt{m}}\right) + N_0(t), \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.34)$$

Для оцінки різниці $\|x(t) - z_0(t)\|$ запишемо рівняння (2.23) та (2.24) у еквівалентній інтегральній формі

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t \sum_{i=1}^p A_i(t) x(t - \tau_i) dt, \quad (2.35)$$

$$z_0(t) = \varphi(0) + \int_0^t \sum_{i=1}^p A_{l_i}(t) z_{l_i}(t) dt. \quad (2.36)$$

Позначимо $K_A = \max_{i=\overline{0,p}} \max_t \|A_i(t)\|$ і встановимо деякі властивості розв'язків задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь (2.24).

Нехай початкова функція $\varphi(t)$ така, що для початкових умов задачі Коші (2.24) справджуються нерівності

$$\sum_{i=1}^n |z_{ji}(0)| \leq \gamma, \quad j = \overline{0, m}.$$

Позначимо

$$M(t) = \max_{s \in [0, t]} \left[\gamma, \sum_{i=1}^n |z_{0i}(s)| \right]. \quad (2.37)$$

Із векторного рівняння

$$\frac{dz_1(t)}{dt} = \frac{m}{\tau} (z_0(t) - z_1(t))$$

дістаємо

$$z_{1i}(t) = z_{1i}(0) \exp\left(-\frac{mt}{\tau}\right) + \frac{m}{\tau} \int_0^t z_{0i}(s) \exp\left(-\frac{m}{\tau}(t-s)\right) ds, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тепер одержуємо

$$\sum_{i=1}^n |z_{1i}(t)| \leq M(t) \left[\exp\left(-\frac{mt}{\tau}\right) + \frac{m}{\tau} \int_0^t \exp\left(-\frac{m}{\tau}(t-s)\right) ds \right] = M(t).$$

Аналогічно дістаємо

$$\sum_{i=1}^n |z_{ji}(t)| \leq M(t), \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.38)$$

Враховуючи рівняння (2.36), дістаємо нерівності

$$\begin{aligned} |z_{0i}(t)| &\leq |z_{0i}(0)| + K_A \int_0^t \sum_{j=0}^p \sum_{i=1}^n |z_{lk,i}(s)| ds \leq \\ &\leq |z_{0i}(0)| + (p+1)K_A \int_0^t M(s) ds. \end{aligned}$$

Сумуючи одержані нерівності, дістаємо

$$\sum_{i=1}^n |z_{0i}(t)| \leq \sum_{i=1}^n |z_{0i}(0)| + n(p+1)K_A \int_0^t M(s)ds.$$

Враховуючи позначення (2.37), маємо

$$M(t) \leq \gamma + n(p+1)K_A \int_0^t M(s)ds.$$

Використовуючи лему Гронуолла–Беллмана [10], одержуємо

$$M(t) \leq \gamma e^{n(p+1)K_A T} = K_1. \quad (2.39)$$

Із рівностей (2.35), (2.36), враховуючи властивості матриці $A_i(t)$, $i = \overline{0, p}$ та оцінки (2.34), (2.39), дістаємо

$$\|x(t) - z_0(t)\| \leq \sum_{i=0}^p \|A_i(t)\| \int_0^t \|x(s - \tau_i) - z_i(s)\| ds. \quad (2.40)$$

Знайдемо оцінку різниці $|x_i(t - \tau_j) - z_{l_j i}(t)|$

$$\begin{aligned} |x_i(t - \tau_j) - z_{l_j i}(t)| &= \left| x_i(t - \tau_j) - x_i\left(t - \frac{\tau l_j}{m}\right) + x_i\left(t - \frac{\tau l_j}{m}\right) - z_{l_j i}(t) \right| \leq \\ &\leq \left| x_i(t - \tau_j) - x_i\left(t - \frac{\tau l_j}{m}\right) \right| + \left| x_i\left(t - \frac{\tau l_j}{m}\right) - z_{l_j i}(t) \right|. \end{aligned}$$

Із означення індекса l_j маємо, що

$$\frac{\tau}{m} \geq \tau_j - \frac{\tau l_j}{m} \geq 0.$$

Отже,

$$\left| x_i(t - \tau_j) - x_i\left(t - \frac{\tau l_j}{m}\right) \right| \leq \omega\left(x_i, \frac{\tau}{m}\right), \quad (2.41)$$

де $\omega\left(x_i, \frac{\tau}{m}\right)$ – модуль неперервності функції $x_i(t)$ на $[0, T]$. Тепер дістаємо, враховуючи (2.34) та (2.41),

$$\|x(s - \tau_i) - z_i(s)\| \leq \|x(s - \tau_j) - x(s - \tau_{l_j})\| + \|x(s - \tau_{l_j}) - z_{l_j}(s)\| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq N_{l_j}(s) + n\omega\left(\frac{\tau}{m}\right) \leq N_0(s) + \delta\left(\frac{\tau}{\sqrt{m}}\right) + n\omega\left(\frac{\tau}{m}\right) = \\
&= N_0(s) + \delta_1\left(\frac{\tau}{m}\right), \tag{2.42}
\end{aligned}$$

де $\delta_1\left(\frac{\tau}{m}\right) = \delta\left(\frac{\tau}{\sqrt{m}}\right) + n\omega\left(\frac{\tau}{m}\right)$, $\omega\left(\frac{\tau}{m}\right) = \max_{i=\overline{1,n}} \omega\left(x_i(t), \frac{\tau}{m}\right)$.

Неважко переконатися, що

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \delta_1\left(\frac{\tau}{m}\right) = 0.$$

Із оцінки (2.40) одержуємо

$$\begin{aligned}
\|x(t) - z_0(t)\| &\leq \sum_{i=0}^p \|A_i(t)\| \int_0^t \left[N_0(s) + \delta_1\left(\frac{\tau}{m}\right) \right] ds \leq \\
&\leq (p+1)K_A \delta_1\left(\frac{\tau}{m}\right) T + (p+1)K_A \int_0^t N_0(s) ds.
\end{aligned}$$

Враховуючи позначення (2.30), маємо

$$N_0(t) \leq (p+1)K_A \delta_1\left(\frac{\tau}{m}\right) T + (p+1)K_A \int_0^t N_0(s) ds.$$

Застосовуючи нерівність Гронуолла–Беллмана [10], дістаємо

$$N_0(t) \leq (p+1)K_A \delta_1\left(\frac{\tau}{m}\right) T e^{(p+1)K_A T}, \quad t \in [0, T].$$

Тепер із нерівності (2.34) знаходимо

$$N_j(t) \leq \delta\left(\frac{\tau}{\sqrt{m}}\right) + (p+1)K_A \delta_1\left(\frac{\tau}{m}\right) T e^{(p+1)K_A T} = \delta_2\left(\frac{\tau}{m}\right),$$

$$j = \overline{1, m}, \quad t \in [0, T],$$

при цьому

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \delta_2\left(\frac{\tau}{m}\right) = 0.$$

Одержали наступне твердження.

Теорема 2.1. Нехай $A_i(t)$, $i = \overline{0, p}$, неперервні матричні функції, $K_A = \max_{i=0, p} \max_t \|A_i(t)\|$, тоді розв'язки задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь (2.24) апроксимують розв'язки початкової задачі (2.23) для лінійних диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями і мають місце співвідношення

$$\left\| x \left(t - \frac{\tau_j}{m} \right) - z_j(t) \right\| \rightarrow 0, \quad j = \overline{0, m}, t \in [0, T] \text{ при } m \rightarrow \infty.$$

2.3 Апроксимація лінійних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу

Розглянемо початкову задачу для системи лінійних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу

$$\frac{d}{dt} \left[x(t) - \sum_{i=0}^p A_i(t)x(t - \tau_i) \right] = \sum_{i=0}^p B_i(t)x(t - \tau_i), \quad t \in [0, T], \quad (2.43)$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad (2.44)$$

де $n, p \in N$, $T \in R$, $x \in R^n$, τ_i , $i = \overline{0, p}$, – запізнення, $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_p = \tau$, $A_i(t)$, $B_i(t)$, $i = \overline{0, p}$ – $n \times n$ неперервні на $[0, T]$ матричні функції, $\varphi(t)$ – задана на $[-\tau, 0]$ неперервна функція.

Будемо розглядати для $x \in R^n$ норму $\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$, а для $n \times n$ матриці

А визначимо норму $\|A\| = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$, що узгоджена із векторною нормою.

Розв'язком початкової задачі (2.43)–(2.44) будемо називати [7] неперервну на $[-\tau, T]$ функцію $x(t)$, яка співпадає з $\varphi(t)$ на $[-\tau, 0]$, задовольняє рівняння (2.43) на $[0, T]$ і різниця $x(t) - \sum_{i=0}^p A_i(t)x(t - \tau_i)$ диференційовна на $[0, T]$.

При виконанні наведених припущень розв'язок початкової задачі (2.43)–(2.44) існує і єдиний [7], однак його знаходження в аналітичному вигляді можливе тільки у найпростіших випадках. Розглянемо схему його наближеного знаходження за допомогою розв'язку спеціальної задачі Коші для системи

звичайних диференціальних рівнянь, аналогічно як для системи диференціальних рівнянь запізнюючого типу.

Поставимо у відповідність початковій задачі (2.43)–(2.44) задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[z_0(t) - \sum_{i=0}^p A_i(t) z_{l_i}(t) \right] &= \sum_{i=0}^p B_i(t) z_{l_i}(t), \\ \frac{dz_j(t)}{dt} &= \frac{m}{\tau} (z_{j-1}(t) - z_j(t)), \quad j = \overline{1, m}, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$z_j(0) = \varphi \left(-\frac{\tau j}{m} \right), \quad j = \overline{0, m}, \quad (2.46)$$

де $m \in N$, індекси l_j визначаються рівностями

$$l_j = \left[\frac{m\tau j}{\tau} \right], \quad j = \overline{0, p}.$$

Будемо говорити, що задача Коші (2.45)–(2.46) апроксимує початкову задачу (2.43)–(2.44), якщо справджуються співвідношення

$$\left\| x \left(t - \frac{\tau j}{m} \right) - z_j(t) \right\| \rightarrow 0, \quad j = \overline{0, m}, t \in [0, T] \text{ при } m \rightarrow \infty.$$

Дослідимо питання про апроксимацію початкової задачі для системи диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу (2.43).

Припустимо, що для системи (2.43) виконуються умови

- 1) $\sum_{i=0}^p \|A_i(t)\| \leq r < 1, t \in [0, T],$
- 2) $\sum_{i=0}^p \|B_i(t)\| \leq K_B.$

Нехай $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), z_j(t) = (z_{j1}(t), \dots, z_{jn}(t)), j = \overline{1, m}.$

Позначимо

$$N_j(t) = \max_{0 \leq s \leq t} \sum_{i=1}^n \left| x_i \left(s - \frac{\tau j}{m} \right) - z_{ji}(s) \right|, \quad j = \overline{0, m}. \quad (2.47)$$

Представимо $z_{ji}(t), j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}$ у вигляді суми

$$z_{ji}(t) = z_{ji}^{(1)}(t) + z_{ji}^{(2)}(t),$$

де $z_{ji}^{(1)}(t)$ і $z_{ji}^{(2)}(t)$ є розв'язками таких задач Коші

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{m} \frac{dz_{1i}^{(1)}(t)}{dt} + z_{1i}^{(1)}(t) &= x_i(t), \\ \frac{\tau}{m} \frac{dz_{ji}^{(1)}(t)}{dt} + z_{ji}^{(1)}(t) &= z_{j,i-1}^{(1)}(t), \quad j = \overline{2, m}, i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$z_{ji}^{(1)}(0) = x_i \left(-\frac{j\tau}{m} \right), \quad j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}; \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{m} \frac{dz_{1i}^{(2)}(t)}{dt} + z_{1i}^{(2)}(t) &= z_{0i}(t) - x_i(t), \\ \frac{\tau}{m} \frac{dz_{ji}^{(2)}(t)}{dt} + z_{ji}^{(2)}(t) &= z_{j,i-1}^{(2)}(t), \quad j = \overline{2, m}, i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$z_{ji}^{(2)}(0) = 0, \quad j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}; \quad (2.51)$$

Задачі Коші (2.48)–(2.49) та (2.50)–(2.51) аналогічні розглянутим раніше задачам Коші (2.28) та (2.29). Тому для $N_j(t)$ справедливі нерівності, аналогічні нерівностям (2.34)

$$N_j(t) \leq \delta \left(\frac{\tau}{\sqrt{m}} \right) + N_0(t), \quad (2.52)$$

де $\delta \left(\frac{\tau}{\sqrt{m}} \right)$ визначається співвідношенням (2.33).

Представимо рівняння (2.43) та (2.45) в інтегральній формі для оцінки різниці

$$\|x(t) - z_0(t)\|.$$

Маємо

$$\begin{aligned} \left[x(t) - \sum_{i=0}^p A_i(t)x(t - \tau_i) \right] - \left[x(0) - \sum_{i=0}^p A_i(0)x(-\tau_i) \right] &= \\ = \int_0^t \sum_{i=0}^p B_i(s)x(s - \tau_i)ds, \quad t \in [0, T], & \quad (2.53) \\ \left[z_0(t) - \sum_{i=0}^p A_i(t)z_i(t) \right] - \left[z_0(0) - \sum_{i=0}^p A_i(0)z_i(0) \right] &= \end{aligned}$$

$$= \int_0^t \sum_{i=0}^p B_i(s) z_{l_i}(s) ds. \quad (2.54)$$

Оцінимо спочатку різниці $\|x(t - \tau_j) - z_{l_j}(t)\|$, скориставшись координатними нерівностями

$$\begin{aligned} |x_i(t - \tau_j) - z_{l_j i}(t)| &= \left| x_i(t - \tau_j) - x_i\left(t - \frac{\tau l_j}{m}\right) + x_i\left(t - \frac{\tau l_j}{m}\right) - z_{l_j i}(t) \right| \leq \\ &\leq \left| x_i(t - \tau_j) - x_i\left(t - \frac{\tau l_j}{m}\right) \right| + \left| x_i\left(t - \frac{\tau l_j}{m}\right) - z_{l_j i}(t) \right|. \end{aligned}$$

При цьому

$$\left| x_i(t - \tau_j) - x_i\left(t - \frac{\tau l_j}{m}\right) \right| \leq \omega\left(x_i, \frac{\tau}{m}\right),$$

де $\omega\left(x_i, \frac{\tau}{m}\right)$ – модуль неперервності функції $x_i(t)$ на $[0, T]$, оскільки $\frac{\tau}{m} \geq \tau_i - \frac{\tau l_j}{m} \geq 0$.

Тепер дістаємо оцінку, враховуючи позначення (2.47) та нерівність (2.52),

$$\begin{aligned} \|x(t - \tau_j) - z_{l_j}(t)\| &\leq \|x(t - \tau_j) - x(t - \tau_{l_j})\| + \|x(t - \tau_{l_j}) - z_{l_j}(t)\| \leq \\ &\leq N_{l_j}(t) + n\omega\left(\frac{\tau}{m}\right) \leq N_0(t) + \delta\left(\frac{\tau}{\sqrt{m}}\right) + n\omega\left(\frac{\tau}{m}\right) = \\ &= N_0(t) + \delta_1\left(\frac{\tau}{m}\right), \end{aligned} \quad (2.55)$$

де $\delta_1\left(\frac{\tau}{m}\right) = \delta\left(\frac{\tau}{\sqrt{m}}\right) + n\omega\left(\frac{\tau}{m}\right)$, $\omega\left(\frac{\tau}{m}\right) = \max_{i=1, n} \omega\left(x_i, \frac{\tau}{m}\right)$.

При цьому

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \delta_1\left(\frac{\tau}{m}\right) = 0.$$

Із рівнянь (2.53), (2.54), враховуючи оцінки (2.55) та припущення 1), 2) стосовно вихідної системи (2.43) маємо

$$\begin{aligned} \|x(t) - z_0(t)\| &\leq \sum_{i=0}^p \|A_i(t)\| \|x(t - \tau_i) - z_{l_i}(t)\| + \sum_{i=0}^p \|A_i(0)\| \times \\ &\times \left\| x(-\tau_i) - \varphi\left(\frac{l_j \tau}{m}\right) \right\| + \int_0^t \sum_{i=0}^p \|B_i(s)\| \|x(s - \tau_i) - z_{l_i}(s)\| ds \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{i=0}^p \|A_i(t)\| \left(N_0(t) + \delta_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) \right) + \sum_{i=0}^p \|A_i(0)\| n\omega \left(\frac{\tau}{m} \right) + \int_0^t \sum_{i=0}^p \|B_i(s)\| \times \\ &\times \left(N_0(s) + \delta_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) \right) ds \leq rN_0(t) + r\delta_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) + rn\omega \left(\frac{\tau}{m} \right) + K_B T \delta_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) + \\ &+ K_B \int_0^t N_0(s) ds. \end{aligned}$$

Останню нерівність, враховуючи властивість 1) і позначення (2.47), перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} N_0(t) &\leq r \left(\delta_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) + n\omega \left(\frac{\tau}{m} \right) \right) + K_B T \delta_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) + \frac{K_B}{1-r} \int_0^t N_0(s) ds = \\ &= \delta_2 \left(\frac{\tau}{m} \right) + \frac{K_B}{1-r} \int_0^t N_0(s) ds, \end{aligned}$$

де $\delta_2 \left(\frac{\tau}{m} \right) = r \left(\delta_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) + n\omega \left(\frac{\tau}{m} \right) \right) + K_B T \delta_1 \left(\frac{\tau}{m} \right)$.

Застосовуючи нерівність Гронуолла–Беллмана [10], дістаємо оцінку

$$N_0(t) \leq \delta_2 \left(\frac{\tau}{m} \right) e^{\frac{K_B}{1-r} t}, \quad t \in [0, T],$$

де $\lim_{m \rightarrow \infty} \delta_2 \left(\frac{\tau}{m} \right) = 0$.

Із останнього співвідношення слідує, що розв'язки задачі Коші (2.45)–(2.46) апроксимують розв'язки початкової задачі (2.43)–(2.44) при $t \in [0, T]$ і $m \rightarrow \infty$.

Теорема 2.2. *Нехай для системи (2.43) справджуються умови 1), 2). Тоді розв'язок задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь (2.45)–(2.46) апроксимує розв'язок початкової задачі для системи диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу (2.45)–(2.46) при $t \in [0, T]$ і $m \rightarrow \infty$.*

2.4 Апроксимація лінійних диференціально-функціональних рівнянь із запізненням

Нехай $C = C([\alpha, \beta], R^n)$ – простір неперервних функцій, що відображають $[\alpha, \beta]$ в R^n з нормою

$$\|\varphi\| = \sup_{\alpha < \theta < \beta} |\varphi(\theta)|.$$

Для довільної неперервної функції $x(t)$, визначеної на $[-\tau, T]$, $T, \tau > 0$ і довільного фіксованого $t \in [0, T]$ позначатимемо через x_t [7,8] функцію

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \theta \in [-\tau, 0].$$

Розглянемо початкову задачу для диференціально-функціонального рівняння вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} = L(t, x_t), \quad t \in [0, T], \\ x_0 = \varphi, \end{aligned} \tag{2.56}$$

де $L(t, \varphi)$ – лінійний по φ функціонал, який можна представити за допомогою інтеграла Стільтьєса

$$L(t, \varphi) = \int_{-\tau}^0 [d\eta(t, \theta)]\varphi(\theta),$$

$\eta(t, \theta)$ – $n \times n$ матриця, елементи якої є функціями обмеженої варіації по θ для кожного t і неперервними по t одностайно відносно θ .

Означення 2.1. [7] Функцію $x(t)$ будемо називати розв'язком початкової задачі (2.56), якщо

- 1) $x_t \in C$, $t \in [-\tau, T]$,
- 2) $x_0 = \varphi(\theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$,
- 3) x_t задовольняє рівняння (2.56) при $t \in [0, T]$.

В подальшому будемо розглядати рівняння (2.56), коли лінійний функціонал $L(t, \varphi)$ має вигляд

$$L(t, \varphi) = \sum_{i=0}^p A_i(t)\varphi(-\tau_i) + \int_{-\tau}^0 D(t, \theta)\varphi(\theta)d\theta, \tag{2.57}$$

що часто зустрічається в прикладних застосуваннях, $A_i(t)$, $i = \overline{0, p}$, – $n \times n$ неперервні матричні функції, $D(t, \theta)$ – $n \times n$ матрична функція, компоненти

якої $d_{ij}(\tau, \theta)$ – неперервні за сукупністю змінних функції на $[0, T] \times [-\tau, \theta]$, $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_p = \tau$.

Розглянемо схеми апроксимації початкової задачі (2.56) послідовністю задач Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь, які аналогічні схемам апроксимації для диференціально-різницевого рівнянь із запізненням.

Початковій задачі (2.56) у випадку лінійного функціонала вигляду (2.57) поставимо у відповідність систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dz_0(t)}{dt} &= \sum_{i=0}^p A_i(t) z_{l_i}(t) + \frac{\tau}{m} \sum_{i=0}^{m-1} D\left(t, -\frac{\tau(m-K)}{m}\right) z_{m-i}(t), \\ \frac{dz_j(t)}{dt} &= \frac{m}{\tau} (z_{j-1}(t) - z_j(t)), \quad j = \overline{1, m}, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (2.58)$$

з початковими умовами

$$z_j(0) = \varphi\left(-\frac{\tau j}{m}\right), \quad j = \overline{0, m}, \quad (2.59)$$

де індекси l_j визначаються рівностями

$$l_j = \left[\frac{m\tau j}{\tau} \right], \quad j = \overline{0, p},$$

а другий доданок у першому рівнянні (2.58) одержаний заміною інтеграла за формулою лівих прямокутників з кроком $h = \frac{\tau}{m}$.

Якщо інтеграл замінити за квадратурною формулою трапеції з кроком $h = \frac{\tau}{m}$, то поставимо початковій задачі (2.56) задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dz_0(t)}{dt} &= \sum_{i=0}^p A_i(t) z_{l_i}(t) + \frac{\tau}{2m} (D(t, -\tau) z_m + D(t, 0) z_0(t)) + \\ &+ \frac{\tau}{m} \sum_{i=1}^{m-1} D\left(t, -\frac{\tau(m-i)}{m}\right) z_{m-i}(t), \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{dz_j(t)}{dt} &= \frac{m}{\tau} (z_{j-1}(t) - z_j(t)), \quad j = \overline{1, m}, t \in [0, T], \\ z_j(0) &= \varphi\left(-\frac{\tau j}{m}\right), \quad j = \overline{0, m}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Будемо говорити, що розв'язки задачі Коші (2.58)–(2.59) та (2.60)–(2.61) апроксимують розв'язок початкової задачі (2.56), якщо будуть виконуватися співвідношення

$$\left\| x \left(t - \frac{\tau j}{m} \right) - z_j(t) \right\| \rightarrow 0, \quad j = \overline{0, m}, t \in [0, T] \quad (2.62)$$

при $t \rightarrow \infty$.

Розглянемо зображення $z_j(t) = z_j^{(1)}(t) + z_j^{(2)}(t)$, де $z_j^{(1)}(t)$ та $z_j^{(2)}(t)$ розв'язки задачі Коші (2.25) та (2.26). Аналогічно як в п. 2.2 можна показати, що справджуються нерівності

$$N_j(t) \leq \delta \left(\frac{\tau}{m} \right) + N_0(t), \quad j = \overline{1, m}, t \in [0, T],$$

$$\text{де } N_j(t) = \max_{0 \leq s \leq t} \sum_{i=1}^n \left| x_i \left(s - \frac{\tau j}{m} \right) - z_{ji}(s) \right|.$$

Позначимо $K_A = \max_{i=0, \overline{p}} \max_t \|A_i(t)\|$, $K_D = \max_{t, \theta} \|D(t, \theta)\|$, $\omega_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) = n \times \max_{i, j} \omega \left(d_{ij}, \frac{\tau}{m} \right)$, $\omega \left(d_{ij}, \frac{\tau}{m} \right)$ – модуль неперервності функцій $d_{ij}(t, \theta)$, $t \in [0, T]$, $\theta \in [-\tau, 0]$, $i, j = \overline{1, n}$.

Одержимо оцінки розв'язків системи (2.58)–(2.59).

$$\text{Нехай } \sum_{i=1}^n |z_{ij}(0)| \leq \gamma, \quad j = \overline{0, m}.$$

$$\text{Позначимо } M(t) = \max_{0 \leq s \leq t} \left[\gamma, \sum_{i=1}^n |z_{0i}(s)| \right].$$

Із векторного рівняння

$$\frac{dz_1(t)}{dt} = \frac{m}{\tau} (z_0(t) - z_1(t))$$

дістаємо

$$z_{1i}(t) = z_{1i}(0) \exp \left(-\frac{m}{\tau} t \right) + \frac{m}{\tau} \int_0^t z_{0i}(s) \exp \left(-\frac{m}{\tau} (t - s) \right) ds.$$

Отже,

$$\sum_{i=1}^n |z_{1i}(t)| \leq M(t) \exp \left(-\frac{m}{\tau} t \right) + \frac{m}{\tau} \int_0^t M(s) \exp \left(-\frac{m}{\tau} (t - s) \right) ds \leq$$

$$\leq M(t) \left[\exp\left(-\frac{m}{\tau}t\right) + \frac{m}{\tau} \int_0^t \exp\left(-\frac{m}{\tau}(t-s)\right) ds \right] = M(t).$$

Продовжуючи таким чином, одержимо

$$\sum_{i=1}^n |z_{ji}(t)| \leq M(t), \quad j = \overline{1, m}.$$

Запишемо рівняння (2.56), (2.58) в еквівалентній інтегральній формі

$$\begin{aligned} x(t) = & \varphi(0) + \int_0^t \sum_{i=0}^p A_i(s)x(s - \tau_i)ds + \\ & + \int_0^t \sum_{j=0}^{m-1} \int_{-\tau + \frac{j\tau}{m}}^{-\tau + (j+1)\frac{\tau}{m}} D(s, \theta)x(s + \theta)d\theta ds, \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} z_0(t) = & \varphi(0) + \int_0^t \sum_{i=0}^p A_i(s)z_{l_i}(s)ds + \\ & + \int_0^t \sum_{j=0}^{m-1} \int_{-\tau + \frac{j\tau}{m}}^{-\tau + (j+1)\frac{\tau}{m}} D\left(s, -\frac{\tau}{m}(m-j)\right) z_{m-j}(s)d\theta ds. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Враховуючи рівність (2.64), дістаємо

$$\begin{aligned} |z_{0i}(t)| \leq & |z_{0i}(0)| + (p+1)K_A \int_0^t M(s)ds + \tau K_D \int_0^t M(s)ds = \\ = & |z_{0i}(0)| + ((p+1)K_A + \tau K_D) \int_0^t M(s)ds. \end{aligned}$$

Тепер маємо

$$\sum_{i=1}^n |z_{i0}(t)| \leq \sum_{i=1}^n |z_{i0}(0)| + n((p+1)K_A + \tau K_D) \int_0^t M(s)ds.$$

Отже,

$$M(t) \leq \gamma + n((p+1)K_A + \tau K_D) \int_0^t M(s)ds.$$

Використовуючи тепер лему Гронуолла–Беллмана, одержимо

$$M(t) \leq \gamma e^{n((p+1)K_A + \tau K_D)T} = K_2. \quad (2.65)$$

Із рівнянь (2.63), (2.64) знаходимо

$$\begin{aligned} \|x(t) - z_0(t)\| &\leq \sum_{i=0}^p K_A \int_0^t \left(N_0(s) + \delta_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) \right) ds + \\ &+ \int_0^t \sum_{j=0}^{m-1} \int_{-\tau + \frac{j\tau}{m}}^{-\tau + (j+1)\frac{\tau}{m}} \|D(s, \theta) (x(s + \theta) - z_{m-j}(s)) + \\ &+ \left(D(s, \theta) - D \left(s, \frac{\tau}{m}(m - j) \right) \right) z_{m-j}(s)\| d\theta ds \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^p K_A \int_0^t \left(N_0(s) + \delta_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) \right) ds + \int_0^t \sum_{j=0}^{m-1} \int_{-\tau + \frac{j\tau}{m}}^{-\tau + (j+1)\frac{\tau}{m}} \left(K_D \left(\delta_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) + N_0(s) \right) + \right. \\ &+ K_2 \omega_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) \left. \right) d\theta ds \leq K_A(p + 1)T \delta_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) + (p + 1)K_A \int_0^t N_0(s) ds + \\ &+ \tau T \left(K_D \delta_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) + K_2 \omega_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) \right) + \tau K_D \int_0^t N_0(s) ds \leq \\ &\leq (K_A(p + 1) + \tau K_D) T \delta_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) + K_2 \tau T \omega_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) + ((p + 1)K_A + \tau K_D) \times \\ &\quad \times \int_0^t N_0(s) ds, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Скориставшись тепер лемою Гронуолла–Беллмана, маємо

$$N_0(t) \leq \left[(K_A(p + 1) + \tau K_D) \delta_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) + \tau K_2 \omega_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) \right] T e^{T[(p+1)K_A + \tau K_D]}. \quad (2.66)$$

Оскільки $\lim_{m \rightarrow \infty} \delta_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) = 0$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \omega_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) = 0$, то із співвідношення (2.66) слідує, що розв'язки задачі Коші (2.58)–(2.59) апроксимують розв'язки початкової задачі (2.56) при $m \rightarrow \infty$.

Зауваження 2.1. Аналогічно можна встановити, що розв'язки задачі Коші (2.60)–(2.61) апроксимують розв'язки початкової задачі (2.56) при $t \rightarrow \infty$.

Сформулюємо одержаний результат у вигляді теореми.

Теорема 2.3. Якщо $A_i(t)$, $i = \overline{0, p}$, $D(t, \theta)$ – неперервні матричні функції при $t \in [0, T]$, $\theta \in [-\tau, 0]$, тоді розв'язки задач Коші (2.58)–(2.59) та (2.60)–(2.61) апроксимують розв'язки початкової задачі (2.56) при $t \rightarrow \infty$.

2.5 Апроксимація неасимптотичних коренів квазіполіномів лінійних диференціально-різницевих рівнянь

2.5.1 Квазіполіноми лінійних диференціально-різницевих рівнянь запізнюючого типу

Розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь із запізненнями

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{i=0}^p A_i x(t - \tau_i), \quad (2.67)$$

де A_i , $i = \overline{0, p}$ – $n \times n$ сталі матриці, $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_p = \tau$.

При дослідженні системи (2.67) важливе значення має розміщення нулів його квазіполінома

$$\Phi(\lambda) = \det \left(\lambda E - \sum_{i=0}^p A_i e^{-\lambda \tau_i} \right). \quad (2.68)$$

Нулі квазіполінома (2.68), як правило, ділять на дві групи: асимптотичні та неасимптотичні. Для асимптотичних коренів можна одержати асимптотичні формули [12], [55]–[57]. Неасимптотичні нулі розміщені біля початку координат і визначають основні властивості розв'язків системи (2.67). У загальному випадку їх можна знайти тільки за допомогою наближених алгоритмів.

При дослідженні апроксимації лінійних систем із запізненням було виявлено, що неасимптотичні корені їх квазіполіномів можна наближати коренями характеристичних многочленів відповідних апроксимуючих систем звичайних диференціальних рівнянь.

Для скалярних диференціально-різницевих рівнянь такий процес вивчався в працях [20, 22, 68], а у випадку систем із багатьма запізненнями в працях [23, 24].

Системі (2.67) співставимо систему звичайних диференціальних рівнянь [23]

$$\begin{aligned}\frac{dz_0(t)}{dt} &= \sum_{i=0}^p A_i z_{l_i}(t), \quad l_i = \left[\frac{\tau_i m}{\tau} \right], \\ \frac{dz_i(t)}{dt} &= \mu (z_{i-1}(t) - z_i(t)), \quad i = \overline{1, m}, \mu = \frac{m}{\tau}.\end{aligned}\tag{2.69}$$

У роботі [23] встановлено, що для характеристичного рівняння системи (2.69) має місце рівність

$$\Psi_m(\lambda) = \det \left(\lambda E - \sum_{i=0}^p A_i \left(\frac{\mu}{\mu + \lambda} \right)^{l_i} \right) \cdot (\mu + \lambda)^{mn}\tag{2.70}$$

і послідовність функцій

$$H_m(\lambda) = \frac{\Psi_m(\lambda)}{(\mu + \lambda)^{nm}}, \quad m \in N\tag{2.71}$$

збігається при $m \rightarrow \infty$ до квазіполінома (2.68).

Так як нулі функцій $\Psi_m(\lambda)$ та $H_m(\lambda)$ збігаються, то корені характеристичного рівняння (2.70) апроксимують неасимптотичні корені квазіполінома (2.68).

Приклад 2.1. Розглянемо диференціальне рівняння з одним запізненням

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) + bx(t - \tau),\tag{2.72}$$

де $a, b, \tau \in R, \tau > 0$.

Квазіполіном для рівняння (2.72) має вигляд

$$\Phi(\lambda) = a - \lambda + be^{-\lambda\tau} = 0.\tag{2.73}$$

Відповідна (2.69) апроксимуюча система звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}\frac{dz_0}{dt} &= az_0 + bz_m, \\ \frac{dz_i}{dt} &= \mu (z_{i-1} - z_i), \quad i = \overline{1, m},\end{aligned}\tag{2.74}$$

та її характеристичне рівняння

$$\Psi_m(\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ \mu & -\mu - \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu & -\mu - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник за першим рядком, маємо

$$\Psi_m(\lambda) = (a - \lambda) \left(1 + \frac{\lambda\tau}{m}\right)^m + b = 0. \quad (2.75)$$

Аналогічно (2.71)

$$H_m(\lambda) = a - \lambda + b \left(1 + \frac{\lambda\tau}{m}\right)^{nm} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \Phi(\lambda).$$

Здійснивши у (2.75) заміну $s = 1 + \frac{\lambda\tau}{m}$, одержимо рівняння

$$s^{m+1} - \left(1 + \frac{\tau}{m}a\right) s^m - \frac{\tau}{m}b = 0, \quad (2.76)$$

яке зручне для обчислення його коренів на ЕОМ. \square

Однак, застосування такої схеми наближення неасимптотичних коренів на практиці виявилось ускладненим, оскільки задовільна точність наближення досягається, якщо розмірність апроксимуючої системи $\approx 100 - 200$, що вимагає знаходити корені многочленів достатньо великого степеня.

Для підвищення точності апроксимації неасимптотичних коренів квазі-поліномів в роботі [69] запропоновано схему підвищеної точності.

Аналогічно як в п. 2.1 введемо в розгляд функції

$$z_j(t) = x \left(t - \frac{\tau}{m}j \right), \quad j = \overline{0, m}, \quad m \in N.$$

Будемо використовувати розклад $z_{j-1}(t) = x \left(t - \frac{(j-1)\tau}{m} \right)$ в ряд Тейлора в околі точки $t - \frac{j\tau}{m}$ до третього члена включно

$$z_{j-1}(t) = z_j(t) + \frac{dz_j(t)}{dt} \frac{\tau}{m} + \frac{d^2z_j(t)}{dt^2} \frac{\tau^2}{2m^2} + \dots$$

Тоді відповідна системі (2.67) апроксимуюча система звичайних диференціальних рівнянь матиме вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dz_0(t)}{dt} &= \sum_{i=0}^p A_i z_{l_i}(t), \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{m}\right)^2 \frac{d^2 z_j(t)}{dt^2} + \frac{\tau}{m} \frac{dz_j(t)}{dt} + z_j(t) &= z_{j-1}(t), \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Ввівши позначення

$$\frac{dz_j(t)}{dt} = z_{m+j}(t), \quad j = \overline{1, m}, \quad \mu = \frac{m}{\tau},$$

запишемо систему (2.77) у такому вигляді

$$\begin{aligned} \frac{dz_0(t)}{dt} &= \sum_{i=0}^p A_i z_{l_i}(t), \\ \frac{dz_j(t)}{dt} &= z_{m+j}(t), \\ \frac{dz_{m+j}(t)}{dt} &= 2\mu^2 (z_{j-1}(t) - z_j(t)) - 2\mu z_{m+j}(t), \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Обчислення визначника системи (2.78) у скалярному випадку ($A_i \in R$, $i = \overline{1, p}$) здійснено в роботах [64,66].

Лема 2.3. [70] *Для характеристичного рівняння системи (2.77) справджується рівність*

$$\begin{aligned} \Psi_{2m+1}(\lambda) &= (A_0 - \lambda) \left(1 + \frac{\lambda\tau}{m} \left(1 + \frac{\lambda\tau}{2m}\right)\right)^m + \\ &+ \sum_{i=1}^p A_i \left(1 + \frac{\lambda\tau}{m} \left(1 + \frac{\lambda\tau}{2m}\right)\right)^{m-l_i} = 0, \end{aligned} \quad (2.79)$$

послідовність функцій

$$H_m(\lambda) = \frac{\Psi_{2m+1}(\lambda)}{\left(1 + \frac{\lambda\tau}{m} \left(1 + \frac{\lambda\tau}{2m}\right)\right)^m}, \quad m \in N \quad (2.80)$$

збігається при $m \rightarrow \infty$ до квазіполінома (2.70).

Приклад 2.2. Розглянемо диференціальне рівняння із запізненням (2.72), квазіполіном якого (2.73). Відповідна (2.77) апроксимуюча система звичай-

них диференціальних рівнянь має вигляд

$$\begin{aligned}\frac{dz_0}{dt} &= az_0 + bz_m, \\ \frac{dz_j}{dt} &= z_{m+j}, \\ \frac{dz_{m+j}}{dt} &= 2\mu^2(z_{j-1} - z_j) - 2\mu z_{m+j}, \quad j = \overline{1, m}.\end{aligned}\tag{2.81}$$

Для характеристичного рівняння системи (2.81) справедливе зображення

$$\Psi_{2m+1}(\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & 0 & \dots & 0 & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 2\mu^2 & -2\mu^2 & \dots & 0 & 0 & -2\mu - \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2\mu^2 & -2\mu^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & -2\mu - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник за першим рядком, одержуємо

$$\Psi_{2m+1}(\lambda) = (a - \lambda) \left(1 + \frac{\lambda\tau}{m} \left(1 + \frac{\lambda\tau}{2m} \right) \right)^m + b = 0.\tag{2.82}$$

Приведемо рівняння (2.82) до виду, що зручний для реалізації на ЕОМ. Здійснимо в (2.82) заміну $\lambda = \frac{2m}{\tau} \left(s - \frac{1}{2} \right)$, одержимо рівняння

$$\left(a - \frac{2m}{\tau} \left(s - \frac{1}{2} \right) \right) \left(2s^2 + \frac{1}{2} \right)^m + b = 0.$$

Розкладаючи $\left(2s^2 + \frac{1}{2} \right)^m$ за формулою бінома Ньютона, маємо рівняння

$$\left(a - \frac{2m}{\tau} \left(s - \frac{1}{2} \right) \right) \sum_{k=0}^m C_m^k 2^{m-2k} s^{2(m-k)} + b = 0,$$

яке можна записати у стандартному виді

$$\alpha_0 s^{2m+1} + \alpha_1 s^{2m} + \alpha_2 s^{2m-1} + \dots + \alpha_{2m} s + \alpha_{2m+1} = 0,\tag{2.83}$$

де

$$\alpha_{2i} = -\frac{2m}{\tau} C_m^i 2^{m-2i}, \quad i = \overline{0, m},$$

$$\alpha_{2i+1} = \left(a + \frac{m}{\tau}\right) C_m^i 2^{m-2i}, \quad i = \overline{0, m-1},$$

$$\alpha_{2m+1} = \left(a + \frac{m}{\tau}\right) 2^{-m} + b. \quad \square$$

Приклад 2.3. Розглянемо модельне диференціальне рівняння із запізненням

$$\frac{dx(t)}{dt} = 2x(t) + x(t-1), \quad (2.84)$$

характеристичний квазіполіном якого має вигляд

$$\lambda = 2 + e^{-\lambda}. \quad (2.85)$$

Дійсний корінь квазіполінома з найбільшою дійсною частиною, знайдений методом поділу відрізка навпіл, дорівнює $\lambda = 2.120028$.

Здійснимо апроксимацію рівняння (2.4) за класичною схемою (2.74) та за схемою підвищеної точності (2.81). Для кореня квазіполінома (2.85) з найбільшою дійсною частиною знайдемо його наближення коренями характеристичних многочленів апроксимуючих систем (2.76) та (2.83). Результати числових експериментів при різних m , наведені в таблиці 2.1, де $\lambda_i^{\text{кл.}}$ – одержане наближення за класичною схемою, а $\lambda_i^{\text{п.т.}}$ – наближення за схемою підвищеної точності.

Таблиця 2.1

Апроксимація коренів квазіполінома рівняння із запізненням

| m | $\lambda^{\text{кл.}}$ | $\Delta^{\text{кл.}}$ | $\lambda^{\text{п.т.}}$ | $\Delta^{\text{п.т.}}$ |
|----|------------------------|-----------------------|-------------------------|------------------------|
| 10 | 2.143414 | 0.023386 | 2.121493 | 0.001465 |
| 20 | 2.131895 | 0.011867 | 2.120422 | 0.000394 |
| 50 | 2.124817 | 0.004789 | 2.120094 | 0.000066 |

Із таблиці 2.1 одержуємо, що схема підвищеної точності є значно ефективнішою, ніж класична схема апроксимації. \square

2.5.2 Квазіполіноми лінійних диференціально-різницевого рівнянь нейтрального типу

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння нейтрального типу

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bx(t - \tau) + C \frac{dx(t - \tau)}{dt}, \quad (2.86)$$

де $A, B, C \in R, \tau > 0$.

Квазіполіном для рівняння (2.86) має вигляд

$$\Phi(\lambda) = A - \lambda + Be^{-\lambda\tau} + C\lambda e^{-\lambda\tau} = 0. \quad (2.87)$$

Поставимо у відповідність рівнянню (2.86) апроксимуючу систему звичайних диференціальних рівнянь, аналогічну (2.45). Одержимо лінійну систему

$$\begin{aligned} \frac{dz_0(t)}{dt} &= Az_0(t) + \mu C z_{m-1}(t) + (B - \mu C)z_m(t), \\ \frac{dz_i(t)}{dt} &= \mu(z_{i-1}(t) - z_i(t)), \quad i = \overline{1, m}, \mu = \frac{m}{\tau}, m \in N, \end{aligned} \quad (2.88)$$

характеристичне рівняння якої має вигляд

$$\Psi_m(\lambda) = \begin{vmatrix} A - \lambda & 0 & 0 & \dots & \mu C & B - \mu C \\ \mu & -\mu - \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -\mu - \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu & -\mu - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник за першим рядком, одержуємо вираз для характеристичного рівняння [71]

$$\Psi_m(\lambda) = (A - \lambda) \left(1 + \frac{\lambda\tau}{m}\right)^m + B + \lambda C = 0 \quad (2.89)$$

і, крім того, послідовність функцій

$$H_m(\lambda) = \frac{\Psi_m(\lambda)}{(\mu + \lambda)^m}, \quad m \in N$$

збігається при $m \rightarrow \infty$ до квазіполінома (2.87).

Отже, корені характеристичного рівняння (2.89) можна брати в якості наближень для неасимптотичних коренів квазіполінома (2.87).

Здійснимо заміну $\lambda = (s - 1)\frac{m}{\tau}$ в рівнянні (2.89) і одержимо многочлен

$$s^{m+1} - \left(1 + \frac{A\tau}{m}\right) s^m - Cs - \left(\frac{B\tau}{m} - C\right) = 0, \quad (2.90)$$

який є зручним для знаходження його коренів на ЕОМ.

Застосуємо тепер для рівняння (2.86) схему апроксимації підвищеної точності, аналогічно як в попередньому пункті. Одержимо апроксимуючу систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dz_0(t)}{dt} &= Az_0(t) + Bz_m(t) + Cz_{2m}(t), \\ \frac{dz_j(t)}{dt} &= z_{m+j}(t), \\ \frac{dz_{m+j}(t)}{dt} &= 2\mu^2 (z_{j-1}(t) - z_j(t)) - 2\mu z_{m+j}(t), \\ j &= \overline{1, m}, \quad m \in N, \quad \mu = \frac{m}{\tau}. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Лема 2.4. [72] Для характеристичного рівняння системи (2.91) справджується рівність

$$\Psi_{2m+1}(\lambda) = (A - \lambda) \left(1 + \frac{\lambda\tau}{m} \left(1 + \frac{\lambda\tau}{2m} \right) \right)^m + B + \lambda C = 0. \quad (2.92)$$

Доведення. Для знаходження аналітичного вигляду характеристичного рівняння системи (2.91) використаємо метод математичної індукції. Перевіримо, що при $m = 2, 3$ рівність (2.92) справедлива.

Для $m = 2$, безпосередньо обчислюючи, дістаємо

$$D_5(\lambda) = (A - \lambda) \left(1 + \frac{\lambda\tau}{2} \left(1 + \frac{\lambda\tau}{4} \right) \right)^2 + C\lambda + B = 0.$$

Для $m = 3$ маємо

$$D_7(\lambda) = \begin{vmatrix} A - \lambda & 0 & 0 & B & 0 & 0 & C \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 2\mu^2 & -2\mu^2 & 0 & 0 & -2\mu - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu^2 & -2\mu^2 & 0 & 0 & -2\mu - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu^2 & -2\mu^2 & 0 & 0 & -2\mu - \lambda \end{vmatrix}.$$

Розкриваючи виписаний визначник за першим рядком, одержимо

$$D_7(\lambda) = (A - \lambda) \left(1 + \frac{\lambda\tau}{3} \left(1 + \frac{\lambda\tau}{6} \right) \right)^3 + B + C\lambda = 0.$$

Отже, для $m = 2, 3$ рівність (2.92) вірна. Припустимо, що для деякого $m - 1$ вона вірна і доведемо, що вона справджується для m .

Випишучи характеристичне рівняння системи (2.91)

$$D_{2m+1}(\lambda) = \begin{vmatrix} A - \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & B & 0 & \dots & C \\ 0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda & 0 & \dots & 1 \\ 2\mu^2 & -2\mu^2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -2\mu - \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 2\mu^2 & -2\mu^2 & 0 & \dots & -2\mu - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

і розкриваючи одержаний визначник за елементами першого рядка, маємо

$$D_{2m+1}(\lambda) = (A - \lambda)I_1^m + (-1)^{m+2}BI_2^m + (-1)^{2m+2}CI_3^m = 0. \quad (2.93)$$

Для визначників I_1^m та I_3^m неважко одержати рекурентні співвідношення

$$\begin{aligned} I_1^m &= (\lambda(2\mu + \lambda) + 2\mu^2) I_1^{m-1}, \\ I_3^m &= 2\mu^2 I_3^{m-1}. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Із рекурентних співвідношень (2.94) одержуємо

$$\begin{aligned} I_1^m &= (\lambda(2\mu + \lambda) + 2\mu^2)^m, \\ I_3^m &= \lambda(2\mu^2)^m. \end{aligned}$$

Обчислюючи визначник I_2^m , використавши його структуру, маємо

$$I_2^m = (-1)^{m(m+2)} (2\mu^2)^m.$$

Підставляючи значення I_1^m , I_2^m , I_3^m у рівність (2.92), одержуємо

$$\begin{aligned} D_{2m+1}(\lambda) &= (A - \lambda) (\lambda(2\mu + \lambda) + 2\mu^2)^m + B(-1)^{(m+1)(m+2)} (2\mu^2)^m + \\ &+ C\lambda (2\mu^2)^m = 0. \end{aligned}$$

Зважаючи на те, що $(m + 1)(m + 2)$ завжди парне, а $\mu = \frac{m}{\tau}$, тоді

$$D_{2m+1}(\lambda) = (A - \lambda) \left(1 + \frac{\lambda\tau}{m} \left(1 + \frac{\lambda\tau}{2m} \right) \right)^m + B + C\lambda = 0.$$

Лема 2.4 доведена. □

Лема 2.5. [72] Для фіксованих $\lambda \in Z$ послідовність функцій

$$H_m(\lambda) = \frac{D_{2m+1}(\lambda)}{\left(1 + \frac{\lambda\tau}{m} \left(1 + \frac{\lambda\tau}{2m}\right)\right)^m}, \quad m \in N, \quad (2.95)$$

збігається при $m \rightarrow \infty$ до квазіполінома (2.87).

Доведення. Розглянемо фіксоване $\lambda \in Z$. Тоді $\lambda \neq -\frac{m}{\tau} \pm \frac{m}{\tau}i$ за можливим винятком одного значення m . Отже, функція $H_m(\lambda)$ визначена для всіх $m \in N$ за можливим винятком одного $m \in N$.

Враховуючи рівність (2.92), маємо

$$\begin{aligned} H_m(\lambda) &= (A - \lambda) + B \left(1 + \frac{\lambda\tau}{m} \left(1 + \frac{\lambda\tau}{2m}\right)\right)^{-m} + \\ &+ C\lambda \left(1 + \frac{\lambda\tau}{m} \left(1 + \frac{\lambda\tau}{2m}\right)\right)^{-m} = 0. \end{aligned} \quad (2.96)$$

На підставі відомої границі

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\lambda\tau}{m} + \frac{\lambda^2\tau^2}{2m^2}\right)^{-m} = e^{-\lambda\tau},$$

переходячи в рівності (2.96) до границі при $m \rightarrow \infty$, для фіксованого $\lambda \in Z$, одержимо

$$\lim_{m \rightarrow \infty} H_m(\lambda) = A - \lambda + Be^{-\lambda\tau} + C\lambda e^{-\lambda\tau}.$$

Лема 2.5 доведена. □

Зауваження 2.2. Оскільки нулі функцій $D_{2m+1}(\lambda)$ і $H_m(\lambda)$, згідно з рівністю (2.95), збігаються, то корені характеристичного многочлена (2.92) можна брати в якості наближених значень неасимптотичних коренів квазіполінома (2.87).

Приведемо характеристичне рівняння (2.92) до вигляду зручного для реалізації на ЕОМ. Здійснимо в (2.92) заміну

$$\lambda = \frac{m}{\tau}(s - 1),$$

одержимо

$$\left(A + \frac{m}{\tau} - \frac{m}{\tau}s\right) (s^2 + 1)^m + 2^m B + 2^m C\lambda = 0.$$

Розкладаючи $(s^2 + 1)^m$ за формулою бінома Ньютона, дістанемо рівняння у стандартному вигляді

$$\alpha_0 s^{2m+1} + \alpha_1 s^{2m} + \alpha_2 s^{2m-1} + \dots + \alpha_{2m} s + \alpha_{2m+1} = 0, \quad (2.97)$$

де коефіцієнти α_i , $i = \overline{0, 2m+1}$ обчислюються за формулами

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -\frac{m}{\tau}, & \alpha_1 &= A + \frac{m}{\tau}, \\ \alpha_{2m} &= \frac{m}{\tau}(2^m C - 1), \\ \alpha_{2m+1} &= A + 2^m B + \frac{m}{\tau}(1 - 2^m C), \\ \alpha_{2i} &= -\frac{m}{\tau} C_m^i, & i &= \overline{1, m-1}, \\ \alpha_{2i+1} &= \left(A + \frac{m}{\tau}\right) C_m^i, & i &= \overline{1, m-1}. \end{aligned}$$

Приклад 2.4. Розглянемо модельне диференціальне рівняння нейтрального типу

$$\frac{dx(t)}{dt} = 2x(t) + x(t-1) + \frac{dx(t-1)}{dt}, \quad (2.98)$$

характеристичний квазіполіном якого має вигляд

$$\lambda = 2 + e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda}. \quad (2.99)$$

Дійсний корінь квазіполінома (2.99) з найбільшою дійсною частиною знайдений методом поділу відрізка навпіл, дорівнює $\lambda = 2.32511$.

Здійснимо апроксимацію рівняння (2.98) за класичною схемою (2.88) та за схемою підвищеної точності (2.91). Для кореня квазіполінома (2.99) з найбільшою дійсною частиною знайдемо його наближення коренями характеристичних многочленів апроксимуючих систем (2.90) та (2.97). Результати числових експериментів при різних значеннях m , наведені в таблиці 2.2, де $x_i^{\text{кл.}}$ – наближення за класичною схемою, $x_i^{\text{п.т.}}$ – наближення за схемою підвищеної точності.

Апроксимація коренів квазіполінома рівняння нейтрального типу

| m | $\lambda^{\text{к.л.}}$ | $\Delta^{\text{к.л.}}$ | $\lambda^{\text{п.т.}}$ | $\Delta^{\text{п.т.}}$ |
|-----|-------------------------|------------------------|-------------------------|------------------------|
| 10 | 2.3963 | 0.0712 | 2.3298 | 0.0047 |
| 20 | 2.3608 | 0.0357 | 2.3263 | 0.0012 |
| 50 | 2.3394 | 0.0143 | 2.3254 | 0.0003 |

Числові результати, наведені в таблиці 2.2, підтверджують, що схема підвищеної точності є ефективнішою, ніж класична схема апроксимації.

2.6 Моделювання стійкості диференціально-різницевих рівнянь

2.6.1 Алгоритм дослідження стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь із запізненням

Однією із найважливіших задач теорії диференціально-різницевих рівнянь є задача про стійкість їх розв'язків. Основні результати, що відносяться до теорії стійкості розв'язків диференціально-різницевих та диференціально-функціональних рівнянь наведені в роботах [6, 7, 10, 13, 29, 35], [73]–[76].

Найбільше важливих результатів в теорії стійкості одержано для лінійних систем із запізненням та нейтрального типу [6, 10], [77]–[82].

Розглянемо лінійну систему із запізненням

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + \sum_{i=1}^k B_i x(t - \tau_i), \quad (2.100)$$

де $A, B_i, i = \overline{1, k}$, – сталі $n \times n$ матриці, $0 < \tau_1 < \dots < \tau_k$.

Теорія стійкості для систем (2.100) на даний час є достатньо добре дослідженою.

Теорема 2.4. [6, 7, 10] Для того, щоб нульовий розв'язок системи (2.100) був експоненціально стійкий, необхідно і досить, щоб усі корені його характеристичного квазіполінома

$$\Phi(\lambda) = \det \left(\lambda E - A - \sum_{i=1}^k B_i e^{-\lambda \tau_i} \right) = 0 \quad (2.101)$$

лежали у лівій півплощині

$$\operatorname{Re}\lambda < 0. \quad (2.102)$$

У випадку лінійних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + \sum_{i=1}^k B_i x(t - \tau_i) + \sum_{i=1}^k C_i \frac{dx(t - \tau_i)}{dt}, \quad (2.103)$$

умова (2.102) на корені характеристичного квазіполінома

$$\Psi(\lambda) = \det \left(\lambda E - A - \sum_{i=1}^k B_i e^{-\lambda \tau_i} - \lambda \sum_{i=1}^k C_i e^{-\lambda \tau_i} \right) = 0 \quad (2.104)$$

не забезпечує експоненціальну стійкість його нульового розв'язку, оскільки є можливість появи ланцюжка нулів рівняння (2.104), які необмежено наближаються до уявної осі. Проте, якщо замість умови (2.102) виконується така умова

$$\operatorname{Re}\lambda \leq -\alpha < 0, \quad \alpha > 0,$$

то нульовий розв'язок системи лінійних рівнянь нейтрального типу (2.103) вже буде експоненціально стійким [77, 82].

Таким чином, розміщення нулів квазіполіномів визначає стійкість розв'язків лінійних стаціонарних диференціально-різницевих рівнянь. Перевірка на практиці розміщення коренів квазіполіномів можлива тільки для найпростіших випадків.

Будемо досліджувати розміщення коренів квазіполіномів за рахунок їх наближення коренями характеристичних рівнянь відповідних апроксимуючих систем звичайних диференціальних рівнянь.

Для системи із запізненням (2.100) відповідна апроксимуюча система звичайних рівнянь згідно (2.69) має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dz_0}{dt} &= Az_0(t) + \sum_{i=1}^k B_i z_{l_i}(t), \quad l_i = \left[\frac{\tau_i m}{\tau} \right], \\ \frac{dz_i}{dt} &= \mu (z_{i-1}(t) - z_i(t)), \quad i = \overline{1, m}, \quad \mu = \frac{m}{\tau}. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Характеристичний многочлен системи (2.105) має вигляд

$$\Psi_m(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda E - A & 0 & \dots & -B_1 & \dots & -B_k \\ -\mu E & (\mu + \lambda)E & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\mu E & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & (\mu + \lambda)E \end{vmatrix}. \quad (2.106)$$

Елементи визначника (2.106) – матриці розмірності $n \times n$, а в першому рядку ненульові блоки знаходяться на позиціях l_i , $i = \overline{0, k}$.

Згідно співвідношень (2.70), (2.71) маємо

$$\Psi_m(\lambda) = \det \left(\lambda E - A - \sum_{i=1}^k B_i \left(\frac{\mu}{\mu + \lambda} \right)^{l_i} \right) (\mu + \lambda)^{mn} \quad (2.107)$$

і для фіксованих $\lambda \in Z$ послідовність функцій

$$H_m(\lambda) = \frac{\Psi_m(\lambda)}{(\mu + \lambda)^{mn}}, \quad m \in N \quad (2.108)$$

збігається при $m \rightarrow \infty$ до квазіполінома (2.101). Отже, функція $H_m(\lambda)$ апроксимує при достатньо великих m квазіполіном (2.101). Оскільки, згідно рівності (2.108) нулі функції $\Psi_m(\lambda)$ та $H_m(\lambda)$ збігаються, то нулі характеристичного рівняння (2.107) можна брати за наближення неасимптотичних нулів квазіполінома (2.101).

2.6.2 Оцінка впливу запізнення на стійкість розв'язків лінійних диференціально-різницевих рівнянь

При дослідженні стійкості лінійних стаціонарних систем із запізненням важлива інформація про розміщення нулів відповідних квазіполіномів. Оскільки обчислення нулів квазіполіномів є складною практичною задачею, тому важливо мати деякі достатні умови, прості для перевірки про знаходження коренів квазіполіномів.

Простим і практичним для застосувань є метод D -розбиття, коли простір коефіцієнтів квазіполіномів розбивається на області гіперплощинами, точкам яких відповідають квазіполіноми, що мають хоча б один корінь на уявній осі. Таке розбиття називається D -розбиттям [12, 55, 64].

Таким чином, кожній області D -розбиття відповідають квазіполіноми, що мають однакову кількість нулів з додатною дійсною частиною. Якщо таких областей скінченна кількість, то знайшовши область, якій відповідають квазіполіноми, що не мають нулів з достатною дійсною частиною, тобто мають всі від'ємні дійсні частини, знаходимо коефіцієнтну область асимптотичної стійкості розв'язків.

Розглянемо застосування методу D -розбиття для побудови та аналізу коефіцієнтних областей стійкості на прикладі найпростішого диференціального рівняння із запізненням

$$x'(t) + ax(t) + bx(t - \tau) = 0, \quad a, b \in R, \tau > 0, \quad (2.109)$$

квазіполіном якого має вигляд

$$\Phi(\lambda) = \lambda + a + be^{-\lambda\tau} = 0. \quad (2.110)$$

Розіб'ємо простір коефіцієнтів рівняння (2.109) лініями, яким відповідають квазіполіноми, що мають хоча б один корінь на уявній осі.

При $\lambda = 0$ маємо одну із ліній D -розбиття

$$a + b = 0. \quad (2.111)$$

Якщо квазіполіном (2.110) має чисто уявний корінь $\lambda = i\omega$, $i = \sqrt{-1}$, $\omega \in R$, тоді

$$i\omega + a + be^{-i\omega\tau} = 0.$$

Виділяючи дійсну та уявну частину, одержимо рівняння іншої границі D -розбиття в параметричній формі:

$$a = -\frac{\omega \cos \omega\tau}{\sin \omega\tau}, \quad b = \frac{\omega}{\sin \omega\tau}, \quad 0 < \omega < \frac{\pi}{\tau}. \quad (2.112)$$

Лінії (2.111), (2.112) в області коефіцієнтів (a, b) утворюють D -розбиття, яке зображене на рис. 2.1.

При $a > 0$ і $b = 0$ квазіполіном (2.110) не має коренів з додатними дійсними частинами, отже, область I є областю асимптотичної стійкості рівняння (2.109).

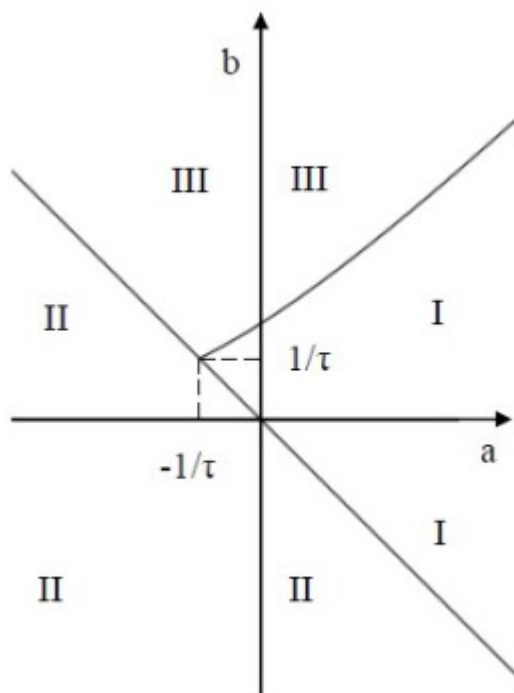


Рис. 2.1 Области D -розбиття для рівняння (2.109)

Аналізуючи рис. 2.1 маємо, що область II, де $a + b < 0$ є областю нестійкості при довільному запізненні τ . Якщо $a + b > 0$ та $a > |b|$ маємо область асимптотичної стійкості при будь-якому запізненні $\tau > 0$.

При $a + b > 0$ та $b > |a|$ можемо попадати як в область асимптотичної нестійкості III так і в область асимптотичної стійкості I в залежності від значення запізнення τ .

Якщо a та b фіксовані коефіцієнти рівняння (2.109), то із співвідношень (2.112) знаходимо параметри ω і τ , при яких границя D -розбиття (2.112) проходить через точку (a, b) :

$$\begin{aligned} \omega &= b \sin \left(\cos^{-1} \left(-\frac{a}{b} \right) \right), \\ \tau &= \frac{\cos^{-1} \left(-\frac{a}{b} \right)}{b \sin \left(\cos^{-1} \left(-\frac{a}{b} \right) \right)}. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Співвідношення (2.113) – це точне значення верхньої межі запізнення τ для рівняння (2.109), при якому ще зберігається асимптотична стійкість.

Як приклад розглянемо лінійне диференціальне рівняння із запізненням

$$x'(t) + 3x(t) + 3.1x(t - \tau) = 0. \quad (2.114)$$

Верхня межа запізнення, для якої нульовий розв'язок рівняння (2.114) є асимптотично стійкий, згідно оцінок одержаних в [62], задається співвідношенням $\tau \leq 0.3226$. Обчислюючи значення верхньої межі запізнення τ за формулою (2.113) дістаємо, що стійкість зберігається при $\tau < 3.6963$.

В інженерній практиці системи із запізненням часто заміняють системами без запізнення на тій підставі, що воно мале.

Розглянемо математичне обґрунтування можливості заміни диференціально-різницевого рівняння із запізненням на звичайні диференціальні рівняння, а також вивчимо способи знаходження верхніх меж запізнення, для яких режим стійкості систем із запізненням є аналогічний режиму стійкості відповідних систем без запізнення.

Розглянемо лінійну систему із запізненням (2.100) і відповідну їй систему без запізнення [29, 60, 61, 62, 83]

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left(A + \sum_{i=1}^k B_i \right) x(t). \quad (2.115)$$

Теорема 2.5. [61, 83] *Якщо нульовий розв'язок (2.115) асимптотично стійкий, тоді існує стала $\Delta > 0$ така, що при умові $0 \leq \tau \leq \Delta$ нульовий розв'язок системи із запізненням (2.100) також асимптотично стійкий.*

Перші оцінки величини Δ були встановлені в роботі [83] для системи лінійних диференціально-різницевого рівняння вигляду

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n (a_{ij}x_j(t) + b_{ij}x_j(t - \tau_{ij})), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.116)$$

де $\tau_{ij} \geq 0$, $i, j = \overline{1, n}$, $\tau = \max_{i,j}(\tau_{ij})$.

Встановлено, що якщо нульовий розв'язок системи без запізнення

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) x_j(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.117)$$

асимптотично стійкий, то існує додатне число

$$\Delta = \Delta(a_{ij}, b_{ij}) = \frac{\Delta_1 \cdots \Delta_n}{2A^2n^2L \left(1 + \frac{4L}{\Delta_2 \cdots \Delta_n} \right)} > 0 \quad (2.118)$$

таке, що нульовий розв'язок системи (2.116) є також асимптотично стійким, якщо

$$0 \leq \tau < \Delta(a_{ij}, b_{ij}),$$

$$\text{де } L = \Delta_2 \cdots \Delta_n + n^2 \sum_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^n \Delta_s \right) [(k-1)!]^2 (n!)^{2(k-1)} (2A)^{k(k+1)} M_k^2,$$

$$M_k = \begin{cases} (n-1) + (n-1)(n-2) + \dots + (n-1)(n-2)\dots(n-k), & \text{для непарних } k, \\ 1 + (n-1)(n-2) + \dots + (n-1)(n-2)\dots(n-k), & \text{для парних } k; \end{cases}$$

$$\Delta_1 = p_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ p_0 & p_2 \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} p_1 & p_3 & \dots & p_{2n-1} \\ p_0 & p_2 & \dots & p_{2n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{vmatrix},$$

$p_0 \equiv 1$, $p_k = 0$ при $k > n$; p_i , $i = \overline{1, n}$, – коефіцієнти характеристичного многочлена

$$|(a_{ij} + b_{ij}) - \lambda \delta_{ij}| = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n = 0.$$

У випадку $n = 2$ для величини Δ маємо рівність [83]

$$\Delta = \frac{1}{7000} \sqrt{\min\left(\frac{q^2}{A^n}, \frac{qp^2}{A^n}\right)} \cdot \frac{1}{A}, \quad (2.119)$$

де $p = -(a_{11} + b_{11} + a_{22} + b_{22})$, $q = (a_{11} + b_{11})(a_{22} + b_{22}) - (a_{21} + b_{21})(a_{12} + b_{12})$, $A = \max_{ij}(|a_{ij}|, |b_{ij}|) > 0$.

Якщо ж $n = 1$, тобто маємо скалярне диференціально-різницеве рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bx(t - \tau),$$

то маємо відповідну оцінку для Δ :

$$\Delta = \frac{1}{10 \max(|a|, |b|)}. \quad (2.120)$$

Оцінки верхньої межі запізнення (2.118), (2.119) та (2.120), що забезпечують стійкість лінійних систем із запізненням, виявились дуже грубими.

Подальше уточнення верхньої межі для оцінки запізнення здійснено в роботах [29, 62] для системи диференціальних рівнянь із запізненням вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bx(t - \tau), \quad (2.121)$$

де $A, B - n \times n$ сталі матриці, запізнення $\tau > 0$.

Відповідна (2.121) система без запізнення

$$\frac{dx}{dt} = (A + B)x(t). \quad (2.122)$$

Якщо нульовий розв'язок системи (2.122) асимптотично стійкий, тоді існує єдина додатно визначена матриця H , яка є розв'язком рівняння Ляпунова [62]

$$(A^T, B^T)H + H(A + B) = -C,$$

для довільної симетричної додатно визначеної матриці C .

Теорема 2.6. [29, 62] *Якщо нульовий розв'язок системи (2.122) асимптотично стійкий, тоді при $0 \leq \tau \leq \Delta$, де*

$$\Delta = \lambda_{\min}(C) \left[2 (\|A\| + \|B\|) \|HB\|^{-1} (\lambda_{\min}(H)/\lambda_{\max}(H))^{1/2} \right]. \quad (2.123)$$

нульовий розв'язок системи (2.121) буде асимптотично стійкий.

Зауваження 2.3. *Для знаходження розв'язку рівняння Ляпунова (2.122) можна застосувати ітераційний метод матричної сигнум-функції. Обчислення величини Δ за формулою (2.123) є достатньо складною обчислювальною задачею. Покращити значення Δ можна за рахунок вдалого вибору матриці C .*

Висновки до розділу 2

У даному розділі наведено схеми апроксимації лінійних систем диференціально-різницевих та диференціально-функціональних рівнянь послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь.

У п. 2.1 вивчається точність наближення векторного елемента запізнення для неперервної вхідної функції.

Схеми апроксимації лінійних диференціально-різницевих рівнянь із багатьма запізненнями та нейтрального типу за Хейлом досліджені в пунктах 2.2 та 2.3.

Наближення лінійних диференціально-функціональних рівнянь розглянуто в пункті 2.4.

Наближення неасимптотичних коренів квазіполіномів лінійних диференціально-різницевих рівнянь запізнюючого та нейтрального типів за допомогою класичної схеми апроксимації та схеми підвищеної точності розглянуто в п. 2.5.

У п. 2.6 запропоновані алгоритми дослідження стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь із запізненням та здійснено оцінку впливу запізнення на стійкість лінійних систем із запізненням.

Основні результати цього розділу опубліковано в працях [30]–[32], [72, 84, 96, 100].

РОЗДІЛ 3

АПРОКСИМАЦІЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

3.1 Крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь з багатьма запізненнями

3.1.1 Постановка задачі

Диференціальні рівняння із запізненням є узагальненням диференціальних рівнянь, в яких невідома функція та її похідні залежать від передісторії. Такий тип рівнянь з'явився при моделюванні різних задач в електроніці, біології, теорії керування, де процеси майже завжди супроводжуються затримкою в часі.

В останні роки зростає інтерес до інтегро-диференціальних рівнянь, які є комбінацією диференціальних та інтегральних рівнянь Фредгольма чи Вольтерри. Вони відіграють важливу роль в прикладних задачах техніки, астрономії, біології, тощо [5, 38, 74].

Інтегро-диференціальні рівняння із запізненням виникають при математичному моделюванні поширення епідемій в задачах математичної біології та хімічної кінетики [38, 86, 87].

Крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням є достатньо складним об'єктом дослідження. Відомо, що не існує універсальних методів побудови їх точних розв'язків. Тому основними теоретичними питаннями при дослідженні таких задач є обґрунтування конструктивних підходів доведення існування їх розв'язків та розробка ефективних методів побудови наближених розв'язків. Важливою також є задача одержання оцінок похибок для наближених розв'язків.

На даний час для знаходження розв'язків крайових задач із запізненням використовуються методи послідовних наближень, проекційно-ітераційні методи, методи сплайн-функцій [16], [46]–[48], [51]–[52], [87]–[89].

У даному розділі роботи буде запропоновано новий підхід наближеного розв'язання крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із запі-

зненням, що базується на схемах апроксимації диференціальних рівнянь із запізненням системами звичайних диференціальних рівнянь [90]–[92].

Розглянемо крайову задачу

$$y''(x) = f(x, [y(x)], [y(x)]_1) + \int_a^b g(x, s, [y(s)], [y(s)]_1) ds, \quad (3.1)$$

$$y^{(p)}(x) = \varphi^{(p)}(x), \quad p = 0, 1, \quad x \in [a - \tau, a], \quad y(b) = \gamma, \quad (3.2)$$

де

$$\begin{aligned} [y(x)] &= (y(x), y(x - \tau_1), \dots, y(x - \tau_n)), \\ [y(x)]_1 &= (y'(x), y'(x - \tau_1), \dots, y'(x - \tau_n)), \end{aligned} \quad (3.3)$$

$0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n = \tau$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) \in C^1[a - \tau, a]$ – початкова функція.

Введемо множину точок, що визначається запізненнями τ_i , $i = \overline{1, n}$

$$E = \{x_i \in [a, b] : x_i = a + \tau_i, i = \overline{1, n}\}.$$

Відзначимо, що в точках множини E розв'язок крайової задачі (3.1)–(3.2), взагалі кажучи, має розривну другу похідну.

Введемо позначення

$$\begin{aligned} P &= \sup \left\{ \left| f(x, [y(x)], [y(x)]_1) + \int_a^b g(x, s, [y(s)], [y(s)]_1) ds \right| : |y(x)| < P_1, \right. \\ &\quad \left. |y(x - \tau_i)| < P_1, |y'(x)| < P_2, |y'(x - \tau_i)| < P_2, i = \overline{1, n}, x \in [a, b] \right\}, \\ J &= [a - \tau, a], I = [a, b], I_1 = [a, x_1], I_2 = [x_1, x_2], \dots, I_n = [x_{n-1}, x_n], \\ &\quad I_{n+1} = [x_n, b], \\ B &= \left\{ y(x) : y(x) \in (C(J \cup I) \cap (C^1(J) \cup C^1(I))) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n+1} C^2(I_j) \right), \right. \\ &\quad \left. |y(x)| < P_1, |y'(x)| < P_2 \right\}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

де P_1, P_2 – додатні сталі.

Розв'язком крайової задачі (3.1)–(3.2) будемо вважати функцію $y = y(x)$ із простору B , яка задовольняє рівняння (3.1), за можливим винятком точок множини E та крайові умови (3.2).

3.1.2 Існування та єдиність розв'язку

Введемо в просторі B норму

$$\|y\|_B = \max \left\{ \frac{8}{(b-a)^2} \max_{x \in J \cup I} |y(x)|, \frac{2}{b-a} \max \left(\max_{x \in J} |y'(x)|, \max_{x \in I} |y'(x)| \right) \right\},$$

із цією нормою даний простір є банаховим простором.

Крайова задача (3.1)–(3.2) еквівалентна інтегральному рівнянню [93, 94]

$$y(x) = \int_{a-\tau}^b \left[f(s, [y(s)], [y(s)]_1) + \int_a^b g(s, \xi, [y(\xi)], [y(\xi)]_1) d\xi \right] \bar{G}(x, s) ds + l(x),$$

$$x \in J \cup I, \quad (3.5)$$

$$\bar{G}(x, s) = \begin{cases} G(x, s), & x, s \in I, \\ 0, & \text{в іншому випадку,} \end{cases}$$

$$l(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in J, \\ \frac{\gamma - \varphi(a)}{b-a}(x-a) + \varphi(a), & x \in I, \end{cases}$$

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{(s-a)(x-b)}{b-a}, & a \leq s \leq x \leq b, \\ \frac{(x-a)(s-b)}{b-a}, & a \leq x \leq s \leq b, \end{cases} \quad (3.6)$$

функція Гріна крайової задачі

$$y''(x) = 0, \quad x \in I, \quad y(a) = y(b) = 0.$$

Визначимо оператор T в просторі B

$$(Ty)(x) = \int_{a-\tau}^b \left[f(s, [y(s)], [y(s)]_1) + \int_a^b g(s, \xi, [y(\xi)], [y(\xi)]_1) d\xi \right] \bar{G}(x, s) ds + l(s),$$

$$x \in J \cup I. \quad (3.7)$$

Звідси

$$(Ty)'(x) = \int_{a-\tau}^b \left[f(s, [y(s)], [y(s)]_1) + \int_a^b g(s, \xi, [y(\xi)], [y(\xi)]_1) d\xi \right] \bar{G}'_x(x, s) ds +$$

$$+\frac{\gamma - \varphi(a)}{b - a}, \quad x \in J \cup I. \quad (3.8)$$

Нехай функція $f(x, [y(x)], [y(x)]_1)$ неперервна в області $G[a, b] \times G_1^{m+1} \times G_2^{m+1}$, а функція $g(x, s, [y(s)], [y(s)]_1)$ – неперервна в області $Q = [a, b] \times G$, де $G_1 = \{u \in R : |u| < P_1\}$, $G_2 = \{v \in R : |v| \leq P_2\}$, P_1, P_2 – додатні сталі, що входять в означення простору B та задовольняють за змінними $[y(x)], [y(x)]_1$ умову Ліпшиця зі сталими L_i та L_i^1 , $i = \overline{0, 2n+1}$ відповідно.

Має місце наступна теорема.

Теорема 3.1. *Нехай виконуються умови:*

- 1) $\max \left\{ \max_{x \in J} |\varphi(x)|, \frac{(b-a)^2}{8} P + \max(|\varphi(a)|, |\gamma|) \right\} \leq P_1,$
- 2) $\max \left\{ \max_{x \in J} |\varphi'(x)|, \frac{b-a}{2} P + \left| \frac{\gamma - \varphi(a)}{b-a} \right| \right\} \leq P_2,$
- 3) $\frac{(b-a)^2}{8} \sum_{i=0}^n (L_i + (b-a)L_i^1) + \frac{b-a}{2} \sum_{i=n+1}^{2n+1} (L_i + (b-a)L_i^1) < 1.$

Тоді існує єдиний розв'язок крайової задачі (3.1)–(3.2) в просторі B .

Доведення. Покажемо, що оператор T має єдину нерухому точку в просторі B . Будемо використовувати принцип стислих відображень у формі, що наведений в [95].

Для функції Гріна (3.6) відомі оцінки [95]

$$\int_a^b |G(x, s)| ds \leq \frac{(b-a)^2}{8}, \quad \int_a^b |G'(x, s)| ds \leq \frac{b-a}{2}. \quad (3.9)$$

Якщо виконуються умови 1)–2) теореми та оцінки (3.9), тоді покажемо, що оператор T відображає простір B в себе.

Із рівності (3.7) маємо

$$|(Ty)(x)| \leq \max \left\{ \left| \int_{a-\tau}^b f(s, [y(s)], [y(s)]_1) + \int_a^b g(s, \xi, [y(\xi)], [y(\xi)]_1) d\xi \right| \times \right. \\ \left. \times \bar{G}(x, s) ds + l(x) \right\} \leq \max \left\{ |\varphi(x)|, P \int_a^b G(x, s) ds + |l(x)| \right\} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \max \left\{ \max_{x \in J} |\varphi(x)|, P \frac{(b-a)^2}{8} + \max\{\varphi(a), |\gamma|\} \right\} \leq P_1, \\
|(Ty)'(x)| &\leq \max \left\{ \left| \int_{a-\tau}^b f(s, [y(s)], [y(s)]_1) + \int_a^b g(s, \xi, [y(\xi)], [y(\xi)]_1) d\xi \right| \times \right. \\
&\quad \left. \times \bar{G}'_x(x, s) ds + l'(x) \right\} \leq \max \left\{ |\varphi'(x)|, P \int_a^b G'_x(x, s) ds + |l'(x)| \right\} \leq \\
&\leq \max \left\{ \max_{x \in J} |\varphi'(x)|, P \frac{b-a}{2} + \left| \frac{\gamma - \varphi(a)}{b-a} \right| \right\} \leq P_2.
\end{aligned}$$

Згідно вибору множини E маємо

$$y(x) \in \left(C(J \cup I) \cap (C^1(J) \cup C^1(I)) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k+1} C^2(I_j) \right) \right).$$

Отже, $(Ty)(x) \in B$.

Нехай тепер $y_1, y_2 \in B$. Враховуючи оцінки (3.9) та властивості функцій f та g , маємо

$$\begin{aligned}
&|(Ty_1)(x) - (Ty_2)(x)| = \\
&= \left| \int_{a-\tau}^b \left[f(s, [y_1(s)], [y_1(s)]_1) + \int_a^b g(s, \xi, [y_1(\xi)], [y_1(\xi)]_1) \right] \bar{G}(x, s) ds + l(x) - \right. \\
&\quad \left. - \int_{a-\tau}^b \left[f(s, [y_2(s)], [y_2(s)]_1) + \int_a^b g(s, \xi, [y_2(\xi)], [y_2(\xi)]_1) \right] \bar{G}(x, s) ds - l(x) \right| \leq \\
&\leq \int_{a-\tau}^b \left\{ \sum_{i=0}^n L_i |y_1(s - \tau_i) - y_2(s - \tau_i)| + \sum_{i=n+1}^{2n+1} L_i |y'_1(s - \tau_i) - y'_2(s - \tau_i)| + \right. \\
&\quad \left. + \int_a^b \left[\sum_{i=0}^n L_i^1 |y_1(\xi - \tau_i) - y_2(\xi - \tau_i)| + \sum_{i=n+1}^{2n+1} L_i^1 |y'_1(\xi - \tau_i) - y'_2(\xi - \tau_i)| \right] d\xi \right\} \times \\
&\quad \times |\bar{G}(x, s)| ds \leq \int_{a-\tau}^b \left\{ \sum_{i=0}^n L_i \max_{x \in J \cup I} |y_1 - y_2| + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=n+1}^{2n+1} L_i \max \left\{ \max_{x \in J} |y'_1 - y'_2|, \max_{x \in I} |y'_1 - y'_2| \right\} + (b-a) \left[\sum_{i=0}^n L_i^1 \max_{x \in J \cup I} |y_1 - y_2| + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=n+1}^{2n+1} L_i^1 \max \left\{ \max_{x \in J} |y'_1 - y'_2|, \max_{x \in I} |y'_1 - y'_2| \right\} \Big] \Big\} |G(x, s)| ds \leq \\
& \leq \int_{a-\tau}^b \left[\sum_{i=0}^n (L_i + (b-a)L_i^1) \max_{x \in J \cup I} |y_1 - y_2| + \sum_{i=n+1}^{2n+1} (L_i + (b-a)L_i^1) \times \right. \\
& \quad \left. \times \max \left\{ \max_{x \in J} |y'_1 - y'_2|, \max_{x \in I} |y'_1 - y'_2| \right\} \right] |\bar{G}(x, s)| ds \leq \\
& \leq \left[\sum_{i=0}^n (L_i + (b-a)L_i^1) \|y_1 - y_2\|_B \frac{(b-a)^2}{8} + \sum_{i=n+1}^{2n+1} (L_i + (b-a)L_i^1) \times \right. \\
& \times \|y_1 - y_2\|_B \frac{b-a}{2} \left. \right] \frac{(b-a)^2}{8} = \frac{(b-a)^2}{8} \left[\frac{(b-a)^2}{8} \sum_{i=0}^n (L_i + (b-a)L_i^1) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{b-a}{2} \sum_{i=n+1}^{2n+1} (L_i + (b-a)L_i^1) \right] \|y_1 - y_2\|_B.
\end{aligned}$$

Аналогічно одержуємо

$$\begin{aligned}
|(Ty_1)'(x) - (Ty_2)'(x)| & \leq \frac{b-a}{2} \left[\frac{(b-a)^2}{8} \sum_{i=0}^n (L_i + (b-a)L_i^1) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{b-a}{2} \sum_{i=n+1}^{2n+1} (L_i + (b-a)L_i^1) \right] \|y_1 - y_2\|_B.
\end{aligned}$$

Із одержаних оцінок дістаємо

$$\begin{aligned}
\max_{x \in J \cup I} |(Ty_1)(x) - (Ty_2)(x)| & \leq \frac{(b-a)^2}{8} \left[\frac{(b-a)^2}{8} \sum_{i=0}^n (L_i + (b-a)L_i^1) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{b-a}{2} \sum_{i=n+1}^{2n+1} (L_i + (b-a)L_i^1) \right] \|y_1 - y_2\|_B, \tag{3.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \max \left\{ \max_{x \in J} |(Ty_1)'(x) - (Ty_2)'(x)|, \max_{x \in I} |(Ty_1)'(x) - (Ty_2)'(x)| \right\} \leq \\
& \leq \frac{b-a}{2} \left[\frac{(b-a)^2}{8} \sum_{i=0}^n (L_i + (b-a)L_i^1) + \frac{b-a}{2} \sum_{i=n+1}^{2n+1} (L_i + (b-a)L_i^1) \right] \times \\
& \quad \times \|y_1 - y_2\|_B. \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Домножимо нерівність (3.10) на $\frac{8}{(b-a)^2}$, а нерівність (3.11) – на $\frac{2}{b-a}$.

Одержимо

$$\begin{aligned} \frac{8}{(b-a)^2} \max_{x \in J \cup I} |(Ty_1)(x) - (Ty_2)(x)| &\leq \left[\frac{(b-a)^2}{8} \sum_{i=0}^n (L_i + (b-a)L_i^1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{b-a}{2} \sum_{i=n+1}^{2n+1} (L_i + (b-a)L_i^1) \right] \|y_1 - y_2\|_B, \\ \frac{2}{b-a} \max \left\{ \max_{x \in J} |(Ty_1)'(x) - (Ty_2)'(x)|, \max_{x \in I} |(Ty_1)'(x) - (Ty_2)'(x)| \right\} &\leq \\ &\leq \left[\frac{(b-a)^2}{8} \sum_{i=0}^n (L_i + (b-a)L_i^1) + \frac{b-a}{2} \sum_{i=n+1}^{2n+1} (L_i + (b-a)L_i^1) \right] \times \\ &\quad \times \|y_1 - y_2\|_B. \end{aligned}$$

Враховуючи одержані нерівності, маємо

$$\begin{aligned} \max \left\{ \frac{8}{(b-a)^2} \max_{x \in J \cup I} |(Ty_1)(x) - (Ty_2)(x)|, \right. \\ \left. \frac{2}{b-a} \max \left[\max_{x \in J} |(Ty_1)'(x) - (Ty_2)'(x)|, \max_{x \in I} |(Ty_1)'(x) - (Ty_2)'(x)| \right] \right\} &\leq \\ &\leq \left[\frac{(b-a)^2}{8} \sum_{i=0}^n (L_i + (b-a)L_i^1) + \frac{b-a}{2} \sum_{i=n+1}^{2n+1} (L_i + (b-a)L_i^1) \right] \times \\ &\quad \times \|y_1 - y_2\|_B. \end{aligned}$$

Із означення норми простору B дістаємо

$$\begin{aligned} \|(Ty_1)(x) - (Ty_2)(x)\|_B &\leq \left[\frac{(b-a)^2}{8} \sum_{i=0}^n (L_i + (b-a)L_i^1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{b-a}{2} \sum_{i=n+1}^{2n+1} (L_i + (b-a)L_i^1) \right] \|y_1 - y_2\|_B. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Нерівність (3.12) та умова теореми 3) забезпечують, що оператор T є оператором стиску у просторі B , а значить він має єдину нерухому точку [95]. Отже, крайова задача (3.1)–(3.2) має єдиний розв'язок $y(x) \in B$.

Теорема 3.1 доведена. □

3.2 Схеми апроксимації крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями

3.2.1 Апроксимація простішої крайової задачі для інтегро-диференціального рівняння із запізненням

Розглянемо частинний випадок крайової задачі (3.1)–(3.2) у вигляді

$$y'' = f(x, y(x), y(x - \tau_1), \dots, y(x - \tau_n)) + \int_a^b g(x, s, y(s), y(s - \tau_1), \dots, y(s - \tau_n)) ds, \quad x \in [a, b], \quad (3.13)$$

$$y(x) = \varphi(x), \quad x \in [a - \tau, a], \quad y(b) = \gamma, \quad (3.14)$$

де $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n = \tau$, $\varphi(x) \in C[a - \tau, a]$, $\gamma \in R$.

Нехай $f(x, u_0, u_1, \dots, u_n)$, $g(x, s, u_0, u_1, \dots, u_n)$ неперервні функції в областях: $G_1 = [a, b] \times G^k$, $G_2 = [a, b] \times [a, b] \times G^k$, де $G = \{u \in R, |u| \leq P_1\}$, P_1 – додатня стала.

Відзначимо, що розв'язок крайової задачі (3.13)–(3.14) в точках $x_i = a + \tau_i$, $i = \overline{1, n}$, взагалі кажучи, має розривну другу похідну.

Введемо позначення:

$$P = \sup \left\{ (f(x, y(x), y(x - \tau_1), \dots, y(x - \tau_n)) + \int_a^b g(x, s, y(s), y(s - \tau_1), \dots, y(s - \tau_n)) ds : |y(x)| \leq P_1, |y(x - \tau_i)| \leq P_1, \right. \\ \left. i = \overline{1, n}, x, s \in [a, b] \right\}, \\ J = [a - \tau], \quad I = [a, b], \quad I_1 = [a, x_1], \quad J_2 = [x_1, x_2], \dots, \quad I_{n+1} = [x_n, b]. \quad (3.15)$$

Розглянемо клас функцій

$$B = \left\{ y(x) : y(x) \in \left(C(J \cup I) \cap C^1(I) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} C^2(I_i) \right) \right), |y(x)| < P_1 \right\}.$$

Розв'язком крайової задачі (3.13)–(3.14) будемо вважати функцію $y = y(x)$ із простору B , яка задовольняє рівняння (3.13) (за можливим винятком точок $x_i = a + \tau_i$) та крайові умови (3.14).

Введемо в класі функції B норму

$$\|y\|_B = \frac{9}{(b-a)^2} \max_{t \in J \cup I} |y(x)|. \quad (3.16)$$

Простір B з цією нормою є банаховим простором. Крайова задача (3.13)–(3.14) еквівалентна інтегральному рівнянню [93].

$$y(x) = \int_{a-\tau}^b \left[f(s, y(s), y(s-\tau_1), \dots, y(s-\tau_n)) + \int_a^b g(x, \xi, y(\xi), y(\xi-\tau_1), \dots, y(\xi-\tau_n)) ds \right] \bar{G}(x, s) ds + l(x), \quad (3.17)$$

$$x \in J \cup I,$$

де

$$\bar{G}(x, s) = \begin{cases} G(x, s), & x, s \in I, \\ 0, & \text{в іншому випадку,} \end{cases} \quad l(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in J, \\ \frac{\gamma - \varphi(a)}{b-a}(x-a) + \varphi(a), \end{cases}$$

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{(s-a)(x-b)}{b-a}, & a \leq s \leq x \leq b, \\ \frac{(x-a)(s-b)}{b-a}, & a \leq x \leq s \leq b, \end{cases} \quad \text{— функція Гріна крайової задачі}$$

$$y''(x) = 0, \quad x \in I, \quad y(a) = y(b) = 0.$$

Визначимо оператор T у просторі B наступним чином

$$(Ty)(x) = \int_{a-\tau}^b \left[f(s, y(s), y(s-\tau_1), \dots, y(s-\tau_n)) + \int_a^b g(x, \xi, y(\xi), y(\xi-\tau_1), \dots, y(\xi-\tau_n)) ds \right] \bar{G}(x, s) ds + l(x), \quad x \in J \cup I.$$

Має місце теорема.

Теорема 3.2. *Нехай виконуються умови:*

$$1. \max \left\{ \max_{x \in J} |\varphi(x)|, \frac{(b-a)^2}{2} P + \max\{|\varphi(a)|, |\varphi|\} \right\} \leq P_1;$$

2. Функції $f(x, u_0, u_1, \dots, u_n)$, $g(x, u_0, u_1, \dots, u_n)$ задовольняють умову Ліпшица в області G за змінними u_0, u_1, \dots, u_n зі сталими $L_i, R_i, i = \overline{0, n}$ відповідно;

$$3. \frac{(b-a)^2}{8} \sum_{i=0}^n (L_i + (b-a)R_i) < 1.$$

Тоді існує єдиний роз'язок крайової задачі (3.13)–(3.14) у просторі B .

Доведення теореми 3.2 нескладно провести аналогічно до теореми 3.1.

Одним із методів дослідження диференціальних рівнянь із запізненням є апроксимація елемента запізнення $y(x-\tau)$, що входить в рівняння. Нехай $y(x)$ вхідна функція елемента запізнення, а $v(x)$ – вихідна функція, що зв'язані співвідношенням

$$v(x) = y(x - \tau), \quad a \leq x \leq b.$$

Поставимо елементу запізнення у відповідність аперіодичну ланку, що описується рівнянням [18, 19]

$$\tau z'(x) + z(x) = v(x).$$

Згідно леми 2.1 маємо, що різниця між вихідним станом елемента запізнення $v(x)$ і значенням аперіодичної ланки $z(x)$ буде малою при малому τ . Для покращення точності апроксимації розглядаємо послідовність із m елементів запізнення, що послідовно між собою зв'язані

$$v_1(x) = y\left(x - \frac{\tau}{m}\right), \quad v_2(x) = y_1\left(x - \frac{\tau}{m}\right) = y\left(x - \frac{2\tau}{m}\right), \dots,$$

$$v_m(x) = y_{m-1}\left(x - \frac{\tau}{m}\right) = y(x - \tau).$$

Поставимо їм у відповідність послідовність аперіодичних ланок, що описуються системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{m} z_1'(x) + z_1(x) &= y(x), \\ \frac{\tau}{m} z_i'(x) + z_i(x) &= z_{i-1}(x), \quad i = \overline{2, m}, \quad x \in [a, b], \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$z_i(a) = y\left(a - \frac{i\tau}{m}\right), \quad i = \overline{1, m}, \quad (3.19)$$

де $y(x)$ – вхідна функція першого елемента запізнення.

Зазначимо, що систему (3.18)-(3.19) досліджено в роботах [19, 20]. У випадку, коли функція $y(x)$ задовольняє умову Ліпшиця або має обмежену сталю M похідну на $[a - \tau, b]$, маємо співвідношення

$$|z_i(x) - v_i(x)| \leq \frac{2M\tau}{\sqrt{m}}, \quad x \in [a, b], \quad i = \overline{1, m}. \quad (3.20)$$

Якщо $y(x) \in C[a - \tau, b]$, то в цьому випадку справджуються нерівності

$$|z_i(x) - v_i(x)| \leq 2 \left(\frac{K\tau}{\sqrt{m}} + \omega \left(y, \frac{\tau}{m} \right) \right), \quad x \in [a, b], \quad i = \overline{1, m}, \quad (3.21)$$

де стала $K > 0$ не залежить від m , а

$$\omega \left(y, \frac{\tau}{m} \right) = \max_{|x'-x| < \frac{\tau}{m}, x', x'' \in [a-\tau, b]} |y(x') - y(x'')|$$

модуль неперервності $y(x)$ на $[a - \tau, b]$.

Розглянемо тепер застосування схеми апроксимації диференціальних рівнянь із запізненням [17]–[20] до крайової задачі (3.13)-(3.14). Поставимо у відповідність крайовій задачі (3.13)-(3.14) крайову задачу для системи звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$z_0''(x) = f(x, z_0(x), z_{l_1}(x), \dots, z_{l_n}(x)) + \int_a^b g(x, s, z_0(s), z_{l_i}(s), \dots, z_{l_n}(s)) ds, \quad l_i = \left[\frac{m\tau_i}{\tau} \right], \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} z_j'(x) &= \frac{m}{\tau} (z_{j-1}(x) - z_j(x)), \quad j = \overline{1, m}, \quad m \in N, \quad x \in [a, b], \\ z_j(a) &= \varphi \left(a - \frac{j\tau}{m} \right), \quad j = \overline{0, m}, \quad z_0(b) = \gamma. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Будемо говорити, що крайова задача (3.22)-(3.23) апроксимує крайову задачу (1)-(2), якщо справджуються співвідношення

$$\left| z_j(x) - y \left(x - \frac{j\tau}{m} \right) \right| \rightarrow 0 \quad (3.24)$$

при $m \rightarrow \infty$, $t \in I$, $j = \overline{0, m}$.

Введемо позначення

$$N_j(x) = \max_{a \leq \xi \leq x} \left| z_j(\xi) - y \left(\xi - \frac{j\tau}{m} \right) \right|, \quad x \in I, \quad (3.25)$$

$$z_j(x) = z_j^{(1)}(x) + z_j^{(2)}(x), \quad j = \overline{1, m}, \quad (3.26)$$

де $z_j^{(1)}(x)$ та $z_j^{(2)}(x)$ – розв'язки таких задач

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{m} z_1^{(1)}(x) + z_1^{(1)}(x) &= y(x), \\ \frac{\tau}{m} z_j^{(1)}(x) + z_j^{(1)}(x) &= z_{j-1}^{(1)}, \quad j = \overline{2, m}, \\ z_j(a) &= y \left(a - \frac{j\tau}{m} \right), \quad j = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{m} z_1^{(2)}(x) + z_1^{(2)}(x) &= z_0(x) - y(x), \\ \frac{\tau}{m} z_j^{(2)}(x) + z_j^{(2)}(x) &= z_{j-1}^{(2)}, \quad j = \overline{2, m}, \\ z_j^{(2)}(a) &= 0, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Оцінимо різниці $z_j(x) - y \left(x - \frac{j\tau}{m} \right)$, враховуючи вигляд системи (3.27), (3.28). Згідно представлення (3.26) маємо

$$\left| z_j(x) - y \left(x - \frac{j\tau}{m} \right) \right| \leq \left| z_j^{(1)}(x) - y \left(x - \frac{j\tau}{m} \right) \right| + \left| z_j^{(2)}(x) \right|. \quad (3.29)$$

На підставі нерівностей (3.20) для першого доданку у правій частині (3.29) дістаємо

$$\left| z_j(x) - y \left(x - \frac{j\tau}{m} \right) \right| \leq 2 \left(\frac{K\tau}{\sqrt{m}} + \omega \left(y, \frac{\tau}{m} \right) \right). \quad (3.30)$$

Для другого доданка в правій частині нерівності (3.29), аналогічно як в [90], нескладно одержати оцінку

$$\left| z_j^{(2)}(x) \right| \leq \max_{a \leq \xi \leq x} |z_0(\xi) - y(\xi)| = N_0(x). \quad (3.31)$$

Із оцінок (3.30), (3.31) дістаємо нерівність

$$N_j(x) \leq \beta \left(\frac{\tau}{m} \right) + N_0(x), \quad j = \overline{1, m}, \quad x \in I, \quad (3.32)$$

де $\beta \left(\frac{\tau}{m} \right) = 2 \left(\frac{K\tau}{\sqrt{m}} + \omega \left(y, \frac{\tau}{m} \right) \right)$.

Знайдемо оцінку різниці $|y(x - \tau_j) - z_{l_j}|$:

$$|y(x - \tau_j) - z_{l_j}| \leq \left| y(x - \tau_j) - y\left(x - \frac{\tau l_j}{m}\right) \right| + \left| y\left(x - \frac{\tau l_j}{m}\right) - z_{l_j}(x) \right|.$$

Оскільки індекс l_j однозначно визначається нерівністю

$$\frac{\tau l_j}{m} \leq \tau_j < \frac{\tau l_j t}{m},$$

то $\frac{\tau}{m} > \tau_j - \frac{\tau l_j}{m} > 0$, тому $\left| y(x - \tau_j) - y\left(x - \frac{\tau l_j}{m}\right) \right| \leq \omega\left(y, \frac{\tau}{m}\right)$.

Отже, дістаємо оцінку

$$\begin{aligned} |y(x - \tau_j) - z_{l_j}(x)| &\leq N_{l_j}(x) + \omega\left(y, \frac{\tau}{m}\right) \leq N_0(x) + \beta\left(\frac{\tau}{m}\right) + \omega\left(y, \frac{\tau}{m}\right) \leq \\ &\leq N_0(x) + \beta_1\left(\frac{\tau}{m}\right), \end{aligned} \quad (3.33)$$

де $\beta_1\left(\frac{\tau}{m}\right) = \beta\left(\frac{\tau}{m}\right) + \omega\left(y, \frac{\tau}{m}\right)$.

Крайова задача для функції $z_0(x)$ еквівалентна інтегральному рівнянню

$$\begin{aligned} z_0(x) &= \int_a^b \left[f(s, z_0(s), z_{l_1}(s), \dots, z_{l_n}(s)) ds + \right. \\ &\left. + \int_a^b g(s, \xi, z_0(\xi), z_{l_1}(\xi), \dots, z_{l_n}(\xi)) d\xi \right] G(x, s) ds + \frac{\gamma - \varphi(a)}{b - a} + \varphi(a), \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$x \in I.$$

Використовуючи властивості функції f і g із (3.17) та (3.34) при $x \in I$, дістаємо

$$\begin{aligned} |y(x) - z_0(x)| &\leq \int_a^b \left[\sum_{i=0}^n (L_i + (b - a)R_i) N_0(s) + \right. \\ &\left. + (b - a) \sum_{i=1}^n (L_i + (b - a)R_i) \beta_1\left(\frac{\tau}{m}\right) \right] |G(x, s)| ds. \end{aligned}$$

Враховуючи тепер оцінку $|G(x, s)| \leq \frac{b - a}{4}$ [95] та нерівності (3.23), одержуємо

$$|y(x) - z_0(x)| \leq \frac{b - a}{4} \left[\sum_{i=0}^n (L_i + (b - a)R_i) \int_a^b N_0(s) ds + \right.$$

$$+ \frac{(b-a)^3}{4} \sum_{i=1}^n (L_i + (b-a)R_i) \beta_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) \Big], \quad x \in I. \quad (3.35)$$

Остання нерівність справджується для будь якого $x \in I$, тому, враховуючи позначення (3.25), маємо

$$N_0(b) \leq \frac{b-a}{4} \left[\sum_{i=0}^n (L_i + (b-a)R_i) \int_a^b N_0(s) ds + \frac{(b-a)^3}{4} \sum_{i=1}^n (L_i + (b-a)R_i) \beta_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) \right].$$

Скориставшись тепер нерівністю Гронуолла–Беллмана, дістаємо

$$N_0(b) \leq \frac{(b-a)^2}{4} \left[\sum_{i=1}^n (L_i + (b-a)R_i) e^{\frac{(b-a)^2}{4} \left[\sum_{i=0}^n (L_i + (b-a)R_i) \right]} \beta_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) \right].$$

Нерівності (3.32) в цьому випадку набувають вигляду

$$\begin{aligned} N_0(b) &\leq \beta \left(\frac{\tau}{m} \right) + \frac{(b-a)^3}{4} \left[\sum_{i=1}^n (L_i + (b-a)R_i) e^{\frac{(b-a)^2}{4} \left[\sum_{i=0}^n (L_i + (b-a)R_i) \right]} \beta_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) \right] = \\ &= \beta_2 \left(\frac{\tau}{m} \right), \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Підсумуємо одержаний результат у вигляді теореми

Теорема 3.3. [91] *Нехай функції $f(x, u_0, u_1, \dots, u_n)$, $g(x, t, u_0, u_1, \dots, u_n)$ задовольняють умови теореми 3.2. Тоді крайова задача (3.22)-(3.23) апроксимує крайову задачу (3.13)-(3.14) і справджуються співвідношення*

$$\max_{x \in I} \left| z_j(x) - y \left(x - \frac{j\tau}{m} \right) \right| \leq \beta_2 \left(\frac{\tau}{m} \right),$$

$$\text{де } \lim_{m \rightarrow \infty} \beta_2 \left(\frac{\tau}{m} \right) = 0.$$

3.2.2 Апроксимація загальної крайової задачі для інтегро-диференціального рівняння із запізненням

Розглянемо застосування схеми апроксимації диференціально-різницевих рівнянь до наближення крайової задачі (3.1)-(3.2).

Спочатку проаналізуємо наближення елементів із запізненням, що входять в рівняння (3.3).

Як і в попередньому пункті, будемо розглядати m елементів запізнення, що послідовно між собою зв'язані

$$v_1(x) = y\left(x - \frac{\tau}{m}\right), \quad v_2(x) = y_1\left(x - \frac{\tau}{m}\right) = y\left(x - \frac{2\tau}{m}\right), \dots,$$

$$v_m(x) = y_{m-1}\left(x - \frac{\tau}{m}\right) = y(x - \tau),$$

та послідовність відповідних їм аперіодичних ланок, що описуються системою звичайних диференціальних рівнянь (3.18)-(3.19).

Якщо вхідна функція $y(x)$ першого елемента запізнення в системі (3.18) задовольняє умову $y(x) \in C[a - \tau, b]$, то справджуються нерівності (3.21)

$$\left| z_i(x) - y\left(x - \frac{j\tau}{m}\right) \right| \leq 2 \left(\frac{K\tau}{m} + \omega\left(y, \frac{\tau}{m}\right) \right) = \alpha_1\left(\frac{\tau}{m}\right), \quad (3.37)$$

де $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_1\left(\frac{\tau}{m}\right) = 0$.

Розглянемо тепер випадок, коли $y(x)$ належить простору кусково-неперервних на $[a - \tau, b]$ функцій. Продовжимо функцію $y(x)$ на інтервал $[-h + a - \tau, b + h]$, h, \dots , поклавши $y(x) = 0$, при $x \notin [a - \tau, b]$.

Введемо до розгляду функцію

$$y_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} y(s) ds,$$

яка є неперервною на $[a - \tau, b]$.

Відомо [66], якщо $y(x) \in L_p[a - \tau, b]$, $p \geq 1$, то

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{a-\tau}^b |y_h(x) - y(x)|^p dx = 0. \quad (3.38)$$

Позначимо

$$\beta(h) = \int_{a-\tau}^b |y_h(x) - y(x)| dx. \quad (3.39)$$

Із співвідношення (3.38) дістаємо, що $\beta(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Представимо функцію $y(x)$ у вигляді

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x),$$

де $y_1(x) = y_h(x)$, $y_2(x) = y(x) - y_h(x)$.

Враховуючи лінійність системи рівнянь (3.18)-(3.19), її розв'язок буде сумою функцій, що є розв'язками таких систем

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{m} z_1^{(1)}(x) + z_1^{(1)}(x) &= y_1(x), \\ \frac{\tau}{m} z_j^{(1)}(x) + z_j^{(1)}(x) &= z_{j-1}^{(1)}(x), \quad j = \overline{2, m}, t \in [a, b], \\ z_j^{(1)}(a) &= y\left(a - \frac{j\tau}{m}\right), \quad j = \overline{1, m}, m \in N; \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{m} z_1^{(2)}(x) + z_1^{(2)}(x) &= y_2(x), \\ \frac{\tau}{m} z_j^{(2)}(x) + z_j^{(2)}(x) &= z_{j-1}^{(2)}(x), \quad j = \overline{2, m}, t \in [a, b], \\ z_j^{(2)}(a) &= 0, \quad j = \overline{1, m}, m \in N. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Оцінимо різниці $z_j(x) - y\left(x - \frac{j\tau}{m}\right)$. Маємо нерівність

$$\begin{aligned} &\int_a^b \left| z_j(x) - y\left(x - \frac{j\tau}{m}\right) \right| dx \leq \\ &\leq \int_a^b \left(\left| z_j^{(1)}(x) - y^{(1)}\left(x - \frac{j\tau}{m}\right) \right| + \left| y^{(2)}\left(x - \frac{j\tau}{m}\right) \right| + \left| z_j^{(2)}(x) \right| \right) dx. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Для різниці $\left| z_j^{(1)}(x) - y^{(1)}\left(x - \frac{j\tau}{m}\right) \right|$ можна застосувати рівність (3.37), оскільки функція $y_h(x)$ є неперервною на $[a - \tau, b]$. Згідно позначення (3.39) маємо

$$\int_a^b \left| y^{(2)}\left(x - \frac{j\tau}{m}\right) \right| dx \leq \beta(h). \quad (3.43)$$

Оцінимо третій доданок в правій частині (3.42). Із першого рівняння системи (3.41) знаходимо

$$z_1^{(2)}(x) = \frac{m}{\tau} \int_a^x e^{-\frac{m}{\tau}(x-s)} y_2(s) ds.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \int_a^b |z_1^{(2)}(x)| dx &\leq \frac{m}{\tau} \int_a^b \int_s^b e^{-\frac{m}{\tau}(x-s)} |y_2(s)| dx ds = \\ &= \int_a^b \left(1 - e^{-\frac{m}{\tau}(\tau-s)}\right) |y_2(s)| ds \leq \beta(h). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Аналогічні оцінки справджуються і для $z_j^{(2)}(x)$, $j = \overline{2, m}$.

Підставляючи (3.43), (3.44) та (3.37) у співвідношення (3.42), одержуємо

$$\int_a^b \left| z_j(x) - y \left(x - \frac{j\tau}{m} \right) \right| dx \leq (b-a)\alpha_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) + 2\beta(h).$$

Покладаючи $h = \frac{\tau}{m}$, маємо

$$\int_a^b \left| z_j(x) - y \left(x - \frac{j\tau}{m} \right) \right| dx \leq (b-a)\alpha_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) + 2\beta \left(\frac{\tau}{m} \right) = \alpha_2 \left(\frac{\tau}{m} \right). \quad (3.45)$$

Має місце наступне твердження.

Лема 3.6. *Нехай вхідна функція $y(x)$ в системі (3.18) кусково-неперервна на $[a - \tau, b]$, тоді має місце нерівність*

$$\int_a^b \left| z_j(x) - y \left(x - \frac{j\tau}{m} \right) \right| dx \leq \alpha_2 \left(\frac{\tau}{m} \right),$$

$$\text{де } \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_2 \left(\frac{\tau}{m} \right) = 0.$$

Поставимо у відповідність крайовій задачі (3.1)–(3.2) крайову задачу для системи звичайних інтегро-диференціальних рівнянь вигляду

$$z_0''(x) = f(x, [z(x)], [w(x)]) + \int_a^b g(x, s, [z(s)], [w(s)]) ds, \quad (3.46)$$

$$z_j(x) = \frac{m}{\tau} (z_{j-1}(x) - z_j(x)), \quad j = \overline{1, m},$$

$$z_j(a) = \varphi \left(a - \frac{j\tau}{m} \right), \quad j = \overline{0, m}, \quad z_0(b) = \gamma, \quad (3.47)$$

$$w_0(x) = \int_a^b \left[f(s, [z(s)], [w(s)]) + \int_a^b g(s, \xi, [z(\xi)], [w(\xi)]) d\xi \right] G'_x(x, s) ds + \frac{\gamma - \varphi(a)}{b - a}, \quad (3.48)$$

$$w'_j(x) = \frac{m}{\tau} (w_{j-1}(x) - w_j(x)), \quad j = \overline{1, m},$$

$$w_j(a) = \varphi' \left(a - \frac{j\tau}{m} \right), \quad j = \overline{1, m}, \quad (3.49)$$

де

$$[z(x)] = (z_0(x), z_{l_1}(x), \dots, z_{l_n}(x)),$$

$$[w(x)] = (w_0(x), w_{l_1}(x), \dots, w_{l_n}(x)),$$

а індекси l_j однозначно визначаються нерівностями

$$\frac{\tau l_j}{m} \leq \tau_j < \frac{\tau(l_j + 1)}{m}. \quad (3.50)$$

Введемо позначення

$$N_j(x) = \max_{a \leq \xi \leq x} \left| z_j(\xi) - y \left(\xi - \frac{j\tau}{m} \right) \right|,$$

$$W_j(x) = \max_{a \leq \xi \leq x} \left| w_j(\xi) - y' \left(\xi - \frac{j\tau}{m} \right) \right|, \quad j = \overline{0, m}, \quad x \in I, \quad (3.51)$$

де $z_j(x)$, $w_j(x)$ – розв'язки крайової задачі (3.46)–(3.49), а $y(x)$ – розв'язок крайової задачі (3.1)–(3.2).

Представимо $z_j(x) = z_j^{(1)}(x) + z_j^{(2)}(x)$, де $z_j^{(1)}(x)$ та $z_j^{(2)}(x)$ розв'язки таких задач Коші

$$\frac{\tau}{m} z_1'^{(1)}(x) + z_1^{(1)}(x) = y(x),$$

$$\frac{\tau}{m} z_j'^{(1)}(x) + z_j^{(1)}(x) = z_{j-1}^{(1)}(x), \quad j = \overline{2, m}, \quad t \in I,$$

$$z_j^{(1)}(a) = y \left(a - \frac{j\tau}{m} \right), \quad j = \overline{1, m}, \quad (3.52)$$

$$\frac{\tau}{m} z_1'^{(2)}(x) + z_1^{(2)}(x) = z_0(x) - y(x),$$

$$\frac{\tau}{m} z_j'^{(2)}(x) + z_j^{(2)}(x) = z_{j-1}^{(2)}(x), \quad j = \overline{2, m}, \quad t \in I,$$

$$z_j^{(2)}(a) = 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.53)$$

Оцінимо різниці $\left| z_j(x) - y \left(x - \frac{j\tau}{m} \right) \right|$, $j = \overline{1, m}$, враховуючи структуру систем (3.52)–(3.53)

$$\left| z_j(x) - y \left(x - \frac{j\tau}{m} \right) \right| \leq \left| z_j^{(1)}(x) - y \left(x - \frac{j\tau}{m} \right) \right| + \left| z_j^{(2)}(x) \right|. \quad (3.54)$$

Оскільки $y(x) \in C[a - \tau, b]$, тому згідно нерівності (3.38), маємо

$$\left| z_j^{(1)}(x) - y \left(x - \frac{j\tau}{m} \right) \right| \leq \alpha_1 \left(\frac{\tau}{m} \right).$$

Для другого доданка в правій частині (3.54), аналогічно як в роботі [47] нескладно одержати нерівність

$$\left| z_j^{(2)}(x) \right| \leq \max_{a \leq \xi \leq x} |z_0(\xi) - y(\xi)| = N_0(x). \quad (3.55)$$

Із нерівностей (3.54), (3.55) дістаємо оцінку

$$N_j(x) \leq \alpha_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) + N_0(x), \quad j = \overline{1, m}, x \in I. \quad (3.56)$$

Розглянемо тепер представлення

$$w_j(x) = w_j^{(1)}(x) + w_j^{(2)}(x), \quad j = \overline{1, m},$$

де $w_j^{(1)}(x)$, $w_j^{(2)}(x)$ – розв'язки задач Коші

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{m} w_1^{(1)'}(x) + w_1^{(1)}(x) &= y'(x), \\ \frac{\tau}{m} w_j^{(1)'}(x) + w_j^{(1)}(x) &= w_{j-1}^{(1)}(x), \quad j = \overline{2, m}, \quad x \in I, \\ w_j(a) &= y' \left(a - \frac{j\tau}{m} \right), \quad j = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{m} w_1^{(2)'}(x) + w_1^{(2)}(x) &= w_0(x) - y'(x), \\ \frac{\tau}{m} w_j^{(2)'}(x) + w_j^{(2)}(x) &= w_{j-1}^{(2)}(x), \quad j = \overline{2, m}, \quad x \in I, \\ w_j^{(2)}(a) &= 0, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Оцінимо різниці $\int_a^x \left| w_j(s) - y' \left(s - \frac{j\tau}{m} \right) \right| ds$, $j = \overline{1, m}$, враховуючи вигляд систем (3.57), (3.58):

$$\int_a^x \left| w_j(s) - y' \left(s - \frac{j\tau}{m} \right) \right| ds \leq \int_a^x \left| w_j^{(1)}(s) - y' \left(s - \frac{j\tau}{m} \right) \right| ds + \int_a^x \left| w_j^{(2)}(s) \right| ds,$$

$$j = \overline{1, m}, x \in I. \quad (3.59)$$

Функція $y'(x)$ є кусково-неперервною на $[a - \tau, b]$, тому згідно (3.45)

$$\int_a^x \left| w^{(1)}(s) - y' \left(s - \frac{j\tau}{m} \right) \right| ds \leq \alpha_2 \left(\frac{\tau}{m} \right), j = \overline{1, m}, x \in I.$$

Для оцінки $|w_j^{(2)}(x)|$, аналогічно як в (3.55), маємо

$$\left| w_j^{(2)}(x) \right| \leq \max_{a \leq \xi \leq x} |w_0(\xi) - y'(\xi)| = W_0(x).$$

Враховуючи одержані нерівності, із (3.59) дістаємо

$$\int_a^x w_j(s) ds \leq \alpha_2 \left(\frac{\tau}{m} \right) + \int_a^x w_0(s) ds, j = \overline{1, m}, x \in I. \quad (3.60)$$

Для функції $z_0(x)$ запишемо еквівалентне інтегральне рівняння

$$z_0(x) = \int_a^b \left\{ f(s, [z(s)], [w(s)]) + \int_a^b g(s, \xi, [z(\xi)], [w(\xi)]) d\xi \right\} G(x, s) ds + \\ + \frac{\gamma - \varphi(a)}{b - a}(x - a) + \varphi(a), x \in I. \quad (3.61)$$

Враховуючи позначення (3.51), оцінки (3.45) та (3.60), одержимо допоміжні нерівності

$$\left| y(x - \tau_j) - z_{l_j}(x) \right| \leq \left| y(x - \tau_j) - y \left(x - \frac{l_j\tau}{m} \right) \right| + \left| y \left(x - \frac{l_j\tau}{m} \right) - z_{l_j}(x) \right| \leq \\ \leq N_{l_j}(x) + \omega \left(y, \frac{\tau}{m} \right) \leq \alpha_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) + N_0(x) + \omega \left(y, \frac{\tau}{m} \right) = \\ = \beta_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) + N_0(x), j = \overline{1, m}, x \in I. \quad (3.62)$$

$$\int_a^b \left| y'(s - \tau_j) - w_{l_j}(s) \right| ds \leq \int_a^b \left| y'(s - \tau_j) - y' \left(s - \frac{l_j\tau}{m} \right) \right| ds + \\ + \int_a^b \left| y' \left(s - \frac{l_j\tau}{m} \right) - w_{l_j}(s) \right| ds \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_a^{a+\frac{l_j\tau}{m}} \left| y'(s - \tau_j) - y' \left(s - \frac{l_j\tau}{m} \right) \right| ds + \int_{a+\frac{l_j\tau}{m}}^{a+\tau_j} \left| y'(s - \tau_j) - y' \left(s - \frac{l_j\tau}{m} \right) \right| ds + \\
&\quad + \int_{a+\tau_j}^b \left| y'(s - \tau_j) - y' \left(s - \frac{l_j\tau}{m} \right) \right| ds + \alpha_2 \left(\frac{\tau}{m} \right) + \int_a^b W_0(s) ds \leq \\
&\leq \left(\max_{x \in J} |\varphi'(x)| + P_2 \right) \frac{2\tau}{m} + (b-a)\omega \left(y', \frac{\tau}{m} \right) + \alpha_2 \left(\frac{\tau}{m} \right) + \int_a^b W_0(s) ds = \\
&= \beta_2 \left(\frac{\tau}{m} \right) + \int_a^b W_0(s) ds, \quad j = \overline{1, m}, x \in I, \tag{3.63}
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\beta_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) &= \alpha_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) + \omega \left(y, \frac{\tau}{m} \right), \\
\beta_2 \left(\frac{\tau}{m} \right) &= \left(\max_{x \in J} |\varphi'(x)| + P_2 \right) \frac{2\tau}{m} + (b-a)\omega \left(y', \frac{\tau}{m} \right) + \alpha_2 \left(\frac{\tau}{m} \right), \\
\omega \left(y, \frac{\tau}{m} \right), \omega \left(y', \frac{\tau}{m} \right) &\text{ – модулі неперервності функцій } y(x) \text{ та } y'(x) \text{ відповідно} \\
&\text{на } J \cup I \text{ та } I.
\end{aligned}$$

Враховуючи властивості функцій f та g , оцінки (3.62) та (3.63) та $|G(x, s)| \leq \frac{b-a}{4}$, $x, s \in I$, із співвідношень (3.13) і (3.61) дістанемо нерівності

$$\begin{aligned}
|y(x) - z_0(x)| &\leq \frac{(b-a)^2}{4} \beta_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) \sum_{j=0}^n (L_j + (b-a)L_j^1) + \frac{b-a}{4} \beta_2 \left(\frac{\tau}{m} \right) \times \\
&\times \sum_{j=n+1}^{2n+1} (L_j + (b-a)L_j^1) + \frac{b-a}{4} \sum_{j=0}^n (L_j + (b-a)L_j^1) \int_a^b N_0(s) ds + \\
&\quad + \frac{b-a}{4} \sum_{j=n+1}^{2n+1} (L_j + (b-a)L_j^1) \int_a^b W_0(s) ds. \tag{3.64}
\end{aligned}$$

Позначимо $\max_{0 \leq i \leq 2n+1} (L_i, L_i^1) = Q$, тоді нерівність (3.64) перепишемо у вигляді

$$|y(x) - z_0(x)| \leq \frac{b-a}{4} Q(n+1)(1+b-a) \left[(b-a)\beta_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) + \beta_2 \left(\frac{\tau}{m} \right) \right] +$$

$$+\frac{b-a}{4}Q(n+1)(1+b-a)\int_a^b[N_0(s)+W_0(s)]ds. \quad (3.65)$$

Враховуюючи тепер, що $|G'_x(x, s)| \leq 1$, $t, s \in I$, аналогічно маємо

$$|y'(x) - w_0(x)| \leq Q(n+1)(1+b-a)\left[(b-a)\beta_1\left(\frac{\tau}{m}\right) + \beta_2\left(\frac{\tau}{m}\right)\right] + \\ + Q(n+1)(1+b-a)\int_a^b[N_0(s)+W_0(s)]ds. \quad (3.66)$$

Нерівності (3.65), (3.66) справедливі для всіх $x \in I$, тому дістаємо оцінку

$$N_0(b) + W_0(b) \leq Q_1\left[(b-a)\beta_1\left(\frac{\tau}{m}\right) + \beta_2\left(\frac{\tau}{m}\right)\right] + Q_1\int_a^b[N_0(s)+W_0(s)]ds, \quad (3.67)$$

де $Q_1 = Q(n+1)(1+b-a)\left(1 + \frac{b-a}{4}\right)$.

Застосувавши, тепер нерівність Гронуола, дістаємо

$$N_0(b) + W_0(b) \leq Q_1\left[(b-a)\beta_1\left(\frac{\tau}{m}\right) + \beta_2\left(\frac{\tau}{m}\right)\right]e^{Q_1}.$$

Сформулюємо одержаний результат у вигляді теореми.

Теорема 3.4. [92] *Нехай функції $f(x, [y(x)], [y(x)]_1)$ та $g(x, s, [y(s)], [y(s)]_1)$ задовольняють умови теореми 1. Тоді крайова задача (3.46)–(3.49) апроксимує крайову задачу (3.1)–(3.2) і мають місце співвідношення*

$$\max_{a \leq \xi \leq x} \left| z_j(\xi) - y\left(\xi - \frac{j\tau}{m}\right) \right| + \max_{a \leq \xi \leq x} \left| w_j(\xi) - y'\left(\xi - \frac{j\tau}{m}\right) \right| \leq N\gamma\left(\frac{\tau}{m}\right), \\ j = \overline{0, m}, \quad x \in I.$$

3.3 Приклад

Розглянемо модельний приклад, який ілюструє наведену методику апроксимації крайових задач із запізненням для інтегро-диференціальних рівнянь

$$y''(x) = y(x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\left(s - \frac{\pi}{2}\right) ds, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad (3.68)$$

$$y(x) = \sin x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right], \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4. \quad (3.69)$$

Точний розв'язок крайової задачі знаходимо безпосередньо методом кроків

$$y_t(x) = (3 - \pi) \cos x + (5 - \pi) \sin x + \pi - 1.$$

В цьому прикладі $L_1 = L_1^1 = 1$, $L_2 = L_2^1 = 1$. Сталі P та P_1 , що входять в означення простору B , зв'язані рівністю

$$P = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) P_1.$$

Якщо тепер виберемо $P_1 > \frac{256}{64 - \pi^2(\pi + 2)}$, тоді справджуються умови теорем 3.2 та 3.3. Це означає, що розв'язок крайової задачі (3.68)–(3.69) існує та єдиний і його можна наближати апроксимуючою системою (3.22)–(3.23), яка матиме вигляд

$$z_0''(x) = -z_0(x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} z_m(s) ds, \quad (3.70)$$

$$z_j'(x) = \frac{m}{\tau} (z_{j-1}(x) - z_j(x)), \quad m \in N, j = \overline{1, m}, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$z_j(0) = \sin\left(-\frac{j\tau}{m}\right) + 2, \quad j = \overline{0, m}, \quad z_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4. \quad (3.71)$$

Згідно теореми 3.3 матимемо

$$|z_0(x) - y(x)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Розв'язок крайової задачі (3.70)–(3.71) будемо шукати в два етапи.

1) Спочатку розглядаємо задачу Коші для системи

$$\begin{aligned} z_j'(x) &= \frac{m}{\tau} (z_{j-1}(x) - z_j(x)), \\ z_j(0) &= z_j^0, \quad j = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (3.72)$$

де згідно (3.69) маємо

$$z_j(0) = \sin\left(-\frac{j\pi}{2m}\right) + 2, \quad j = \overline{0, m}.$$

Застосовуючи деяку різницеву схему для знаходження наближеного розв'язку задачі Коші, послідовно для $j = \overline{1, m}$ знаходимо значення

$$z_m^1, z_m^2, \dots, z_m^m. \quad (3.73)$$

Використовуючи значення (3.73), за допомогою квадратурної формули правих прямокутників обчислюємо наближене значення інтеграла в правій частині рівняння (3.70)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} z_m(s) ds = \frac{\pi}{2m} \sum_{j=1}^m z_m^j = A. \quad (3.74)$$

2) Розглядаємо тепер крайову задачу

$$\begin{aligned} z_0''(x) &= -z_0(x) + A, \\ z_0(0) &= 2, \quad z_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4, \end{aligned} \quad (3.75)$$

розв'язок якої знаходимо аналітично

$$z_0(x) = (4 - A) \sin x + (2 - A) \cos x + A. \quad (3.76)$$

У таблиці 3.1 наведено результати числових експериментів апроксимації розвитку крайової задачі (3.69)–(3.70), де $y_t(x)$ – точний розв'язок, $z_0(x)$ – розв'язок апроксимуючої крайової задачі (3.71)–(3.72) при $m = 20$.

Таблиця 3.1

**Результати числових експериментів для крайової задачі
(3.69)–(3.70)**

| x | Точний розв'язок $y_t(x)$ | Наближений розв'язок | Похибка |
|----------|---------------------------|----------------------|----------|
| 0 | 2 | 2 | 0 |
| $\pi/10$ | 2.581209 | 2.570863 | 0.010346 |
| $\pi/5$ | 3.119386 | 3.103599 | 0.015787 |
| $2\pi/5$ | 3.865288 | 3.854941 | 0.010347 |
| $\pi/2$ | 4 | 4 | 0 |

Висновки до розділу 3

У даному розділі для крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням:

- встановлено достатні умови існування розв'язку для крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із багатьма сталими запізненнями;

- побудовано та обґрунтовано схему апроксимації простішої крайової задачі (за відсутності перших похідних у правій частині рівняння);
- встановлено оцінку точності апроксимації елемента запізнення у випадку кусково неперервних вхідних функцій;
- побудовано та обґрунтовано схему апроксимації загальної крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням;
- одержані теоретичні результати проілюстровані на тестовому модельному прикладі.

Основні результати цього розділу опубліковані у працях [85, 91, 92].

РОЗДІЛ 4

МОДЕЛЮВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

4.1 Алгоритми дослідження стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь

Розглянемо застосування схем апроксимації лінійних диференціально-різницевих рівнянь для знаходження неасимптотичних коренів відповідних квазіполіномів та розв'язання важливих для практичних застосувань таких задач:

- аналіз стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь з багатьма запізненнями;
- знаходження верхньої межі запізнення лінійних систем із запізненням, для якої зберігається її стійкість.

Дослідження цих задач зводиться до перевірки умов від'ємності дійсних частин усіх нулів відповідних квазіполіномів. Оскільки безпосередня перевірка на практиці такої умови можлива тільки в найпростіших випадках, ми будемо вивчати експоненціальну стійкість (нестійкість) лінійних систем із багатьма запізненнями, аналізуючи корені характеристичних многочленів відповідних апроксимуючих систем звичайних диференціальних рівнянь.

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь із запізненнями

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + \sum_{i=1}^k B_i x(t - \tau_i), \quad (4.1)$$

де $A, B_i, i = \overline{1, k}$ – сталі $n \times n$ матриці, $0 < \tau_1 < \dots < \tau_k = \tau$.

Поставимо системі (4.1) у відповідність апроксимуючу систему звичайних диференціальних рівнянь, аналогічну (2.24), у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{dz_0(t)}{dt} &= Az_0(t) + \sum_{i=1}^k B_i z_{l_i}(t), \quad l_i = \left[\frac{\tau_i m}{\tau} \right], \\ \frac{dz_j(t)}{dt} &= \mu (z_{j-1}(t) - z_j(t)), \quad j = \overline{1, m}, \quad \mu = \frac{m}{\tau}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Теорема 4.1. [23] Якщо нульовий розв'язок системи із запізненням (4.1) експоненціально стійкий (нестійкий), тоді існує $t_0 > 0$ таке, що при $t \geq t_0$ нульовий розв'язок апроксимуючої системи (4.2) також експоненціально стійкий (нестійкий).

Якщо для всіх $t \geq t_0$ нульовий розв'язок системи (4.2) експоненціально стійкий (нестійкий), тоді нульовий розв'язок системи із запізненням (4.1) експоненціально стійкий (нестійкий).

Зауваження 4.1. Із теореми 4.1 слідує, що існує число t_0 таке, що при $t \geq t_0$ апроксимуюча стійкість (нестійкість) нульового розв'язку системи із запізненням (4.1) еквівалентна асимптотичній стійкості (нестійкості) нульового розв'язку апроксимуючої системи лінійних диференціальних рівнянь (4.2).

Розглянемо рівність

$$\Phi(\lambda) = H_m(\lambda) + R_m(\lambda), \quad (4.3)$$

де $R_m(\lambda) = \Phi(\lambda) - H_m(\lambda)$, $\Phi(\lambda)$ – квазіполіном системи (4.1), $H_m(\lambda)$ – функція визначена співвідношенням (2.108), яка при $t \rightarrow \infty$ збігається до квазіполінома $\Phi(\lambda)$.

Число t_0 потрібно вибирати так, щоб при $t \geq t_0$ виконувалась нерівність

$$\min_{\lambda} |\Phi(\lambda)| > \max_{\lambda} |R_m(\lambda)|. \quad (4.4)$$

Відзначимо, що точне знаходження екстремальних виразів у співвідношенні (4.4) часто є складною задачею. Тому достатньо обмежитись знаходженням нижньої та верхньої оцінок для $\Phi(\lambda)$ та $R_m(\lambda)$.

Теорему 4.1 можна застосувати для дослідження стійкості розв'язків лінійних диференціально-різницевих рівнянь із запізненням. Схему такого дослідження сформулюємо у вигляді алгоритму [96]–[98].

1. Для лінійного диференціального рівняння будемо апроксимуючу систему лінійних диференціальних рівнянь.

2. Знаходимо характеристичний многочлен апроксимуючої системи звичайних диференціальних рівнянь.

3. Приводимо знайдений многочлен до вигляду, зручного для знаходження його коренів на ЕОМ.

4. Застосовуємо спеціалізоване програмне забезпечення і знаходимо корені характеристичного многочлена апроксимуючої системи при достатньо великих m .

5. Аналізуючи розміщення коренів характеристичного многочлена визначаємо стійка чи нестійка апроксимуюча система звичайних диференціальних рівнянь.

6. Застосовуємо теорему 4.1 і робимо висновок про стійкість чи нестійкість вихідного диференціально-різницевого рівняння.

Приклад 4.1. [96]–[98] Розглянемо лінійну систему із запізненням

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bx(t - \tau), \quad (4.5)$$

де $A, B - 2 \times 2$ сталі матриці, $\tau > 0$.

Скористаємось класичною схемою апроксимації коренів квазіполінома для системи (4.5)

$$\begin{aligned} \frac{dz_0(t)}{dt} &= Az_0(t) + Bz_m(t), \\ \frac{dz_i(t)}{dt} &= \mu(z_{i-1}(t) - z_i(t)), \quad i = \overline{1, m}, \mu = \frac{m}{\tau}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Якщо $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, тоді характеристичне рівняння системи (4.6) матиме вигляд

$$\begin{aligned} \Psi_m(\delta) &= \left(\frac{m}{\tau}\right)^2 s^{2m+2} + s^{2m+1} \left(-a_{11} \frac{m}{\tau} - a_{22} \frac{m}{\tau} - 2 \left(\frac{m}{\tau}\right)^2\right) + \\ &+ s^{2m} \left(a_{11}a_{12} + a_{11} \frac{m}{\tau} + a_{22} \frac{m}{\tau} - a_{21}a_{22}\right) + s^{m+1} \left(-b_{22} \frac{m}{\tau} - b_{11} \frac{m}{\tau}\right) + \\ &+ s^m \left(a_{11}b_{22} + b_{21} \frac{m}{\tau} + b_{11}a_{22} + b_{11} \frac{m}{\tau} - a_{21}b_{12} - a_{12}b_{21}\right) + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Корені многочлена (4.7) можна знаходити, використовуючи стандартні процедури обчислення коренів многочлена, які наявні в ППП Matlab, Mathematica, Maple, бібліотеці NumPy.

У нашій роботі використовується функція `roots` із бібліотеки `NumPy`, яка знаходить корені многочлена за його коефіцієнтами.

У випадку, коли

$$A = \begin{pmatrix} -0.9 & -6.5 \\ 4.8 & -0.9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1.39 & -0.65 \\ 0.48 & -1.39 \end{pmatrix}$$

знаходимо корені характеристичного рівняння для різних значень τ та знаходимо, що нульовий розв'язок системи (4.5) є експоненціально стійким при

$$\tau \in (0, \tau_1) \cup (\tau_2, \tau_3).$$

Значення величин τ_1, τ_2, τ_3 для різних m наведені в таблиці 4.1

Таблиця 4.1

Області стійкості рівняння (4.5)

| Розмірність апроксимуючої системи m | Умови стійкості |
|---------------------------------------|--|
| $m = 100$ | $\tau \in (0; 0.2740) \cup (0.8035; 1.3580)$ |
| $m = 400$ | $\tau \in (0; 0.2720) \cup (0.8310; 1.2299)$ |
| $m = 500$ | $\tau \in (0; 0.2718) \cup (0.8330; 1.2299)$ |

Для наглядності нижче наведено графік залежності від τ значення найбільшої дійсної частини серед коренів апроксимуючого многочлена.

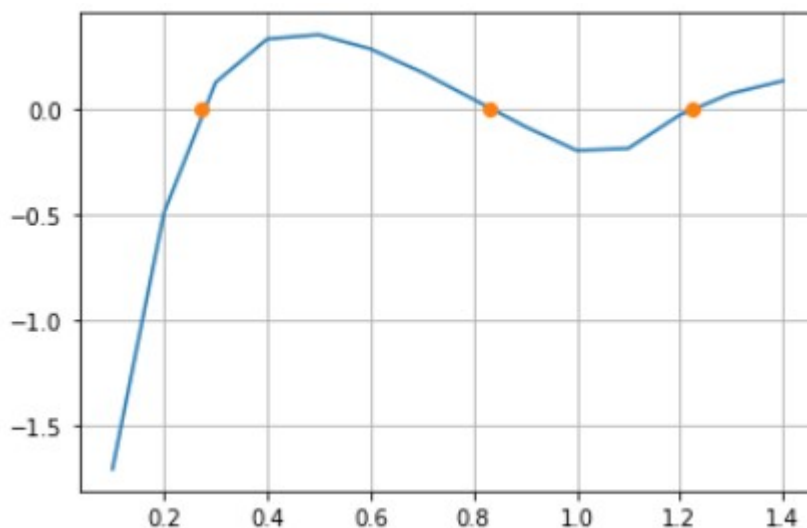


Рис. 4.1 Графік залежності від τ значення найбільшої дійсної частини коренів характеристичного рівняння (4.5)

Розглянемо систему диференціальних рівнянь із запізненнями

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bx(t - \tau), \quad (4.8)$$

де запізнення $\tau > 0$, сталі $n \times n$ матриці A, B такі, що система без запізнення

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A + B)x(t) \quad (4.9)$$

є асимптотично стійкою.

Згідно теореми 2.6 існує стала $\Delta > 0$ така, що при $0 < \tau < \Delta$ нульовий розв'язок системи (4.8) також є асимптотично стійким.

Розглянемо алгоритм застосування схеми апроксимації диференціально-різницевих рівнянь системою звичайних диференціальних рівнянь для знаходження верхньої межі запізнення у системі (4.8), для якої зберігається стійкість [20, 32, 84, 85], [98]–[101].

1. Системі із запізненням (4.8) поставимо у відповідність апроксимуючу систему (2.105), характеристичний многочлен якої має вигляд (2.107) (у випадку систем другого порядку характеристичний многочлен має вигляд (4.7), а у випадку скалярного рівняння (2.72) характеристичний многочлен зводиться до рівняння (2.76)).

2. Задаємо деяке $\Delta = \Delta_0$ (наприклад, $\Delta_0 = 1$) та уточнюючий крок $h_0 = \Delta$.

3. Наближаємо квазіполіном (2.101) системи із запізненням характеристичним рівнянням апроксимуючої системи (2.107) і знаходимо наближений корінь квазіполінома з найбільшою дійсною частиною α при $\tau = \Delta_0$.

4. Якщо $\alpha < 0$, то для заданого Δ_0 нульовий розв'язок системи із запізненням є асимптотично стійким. Покладаємо $\Delta_0 = \Delta_0 + h_0$ та переходимо на п.3.

5. Якщо $\alpha > 0$, то для даної верхньої межі Δ_0 нульовий розв'язок системи із запізненням не є асимптотично стійким. Тоді покладаємо $\Delta_0 = \Delta_0 - h_i$, де $h_i = \frac{h_{i-1}}{2}$, $i = 1, 2, \dots$, та переходимо на п.3 до того часу, поки $h_i > \varepsilon$, де ε – задана точність.

6. Якщо $h_i < \varepsilon$, де ε – задана точність, то верхня межа запізнення Δ_0 , для якої зберігається асимптотична стійкість системи із запізненням, знайдено із заданою точністю.

Приклад 4.2. Знайти максимальне значення запізнення τ , при якому нульовий розв’язок диференціально-різницевого рівняння із запізненням

$$\frac{dx(t)}{dt} = 0.25x(t) - 0.5x(t - \tau) \quad (4.10)$$

буде експоненціально стійким.

При $\tau = 0$ дістаємо лінійне диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = -0.25x(t),$$

яке очевидно експоненціально стійке.

Згідно оцінки (2.120) дістаємо

$$\Delta_1^* = \frac{1}{10 \max(0.25, 0.5)} = 0.2.$$

Оцінка (2.123) у випадку, коли $A, B \in R$, має вид

$$\Delta = (2(|A| + |B|) |HB|)^{-1},$$

де $H = -(2(A + B))^{-1}$. Тоді отримуємо

$$\Delta_2 = \frac{8}{9}.$$

Використовуючи для рівняння (4.10) класичну схему апроксимації (2.74) та схему підвищеної точності (2.77), будемо апроксимувати квазіноліном (2.73) для рівняння (4.10) характеристичними многочленами відповідних апроксимуючих систем (2.76) та (2.83).

Точне значення величини Δ , при якій зберігається експоненціальна стійкість, згідно (2.113) дорівнює

$$\Delta^* = 2.4184.$$

В таблиці 4.2 наведено наближені значення величини Δ , обчислені згідно запропонованого вище алгоритму при різних значеннях m з використанням класичної схеми апроксимації та схеми підвищеної точності

Наближені значення величини запізнення рівняння (4.10), для якого зберігається стійкість розв'язків

| m | $\Delta_{\text{кл.сх.}}$ | $\Delta_{\text{п.т.}}$ |
|----|--------------------------|------------------------|
| 10 | 2.5264 | 2.4142 |
| 20 | 2.4713 | 2.4173 |
| 50 | 2.4393 | 2.4182 |
| 70 | 2.4332 | 2.4183 |

Наведений приклад показує, що застосування схем апроксимації диференціально-різницевих рівнянь дозволяє більш точно знайти верхню межу запізнення, для якої зберігається експоненціальна стійкість.

4.2 Опис використаних інформаційних технологій

4.2.1 Середовище розробки

Для автоматизації моделювання стійкості систем із запізненням за допомогою наведених в роботі числових алгоритмів розроблено прикладне програмне забезпечення. Для його розробки використано мову програмування Python та фреймворк Python Flask Framework.

Python – популярна мова програмування з відкритим кодом, яка застосовується для написання автономних програм і сценарних додатків для різних предметних областей. Вона є переносимим, потужним, а також відносно легким і ефективним у використанні інструментом. Зроблений вибір на користь Python з його бібліотеками в силу того що Mathematica, Matlab, Maple, Mathcad є платними продуктами і доволі дорогими, а Python можна використовувати безкоштовно і він практично не поступається цим пакетам прикладних програм [102, 103].

Python Flask Framework – це легкий мікрофреймворк, заснований на Werkzeug, Jinja2 [104]. Його називають мікрофреймворком, оскільки він прагне зберегти свою основну функціональність невеликою, але зазвичай розширюваною для охоплення низки малих і великих програм. Flask Framework за-

лежить від двох зовнішніх бібліотек: шаблону Jinja2, інструментарію Werkzeug WSGI. Flask, як правило, краще підходить для використання через:

- наявного вбудованого сервера розробки та швидкий налагоджувач;
- інтегровану підтримку модульного тестування;
- підтримку безпечних файлів cookie;
- легку і модульну конструкцію, що дозволяє створити гнучкий каркас прикладної програми.

У різних пакетах прикладних програм розроблено ряд стандартних процедур для обчислення коренів многочленів, які відіграють важливу роль для аналізу стійкості систем із запізненням. Мова програмування Python має потужний набір бібліотек для наукових цілей. Зокрема в даній роботі використовуються бібліотеки NumPy та SciPy.

NumPy – це проект з відкритим кодом, що має на меті забезпечити числові обчислення за допомогою Python [102]. SciPy – відкрита бібліотека високоякісних наукових інструментів для мови програмування Python, яка містить модулі для оптимізації, інтегрування, обчислення спеціальних функцій, обробки зображень, реалізації генетичних алгоритмів та інших задач, які розв’язуються при інженерній розробці.

З бібліотеки NumPy ми використовуємо функція `roots`, яка обчислює корені многочлена за заданими його коефіцієнтами. Задаючи $n + 1$ вимірний вектор w , складений з коефіцієнтів многочлена ступеня n , можна знайти його корені. Значення елементів вектора w повинні бути дійсними числами. В результаті застосування функції `roots` отримуємо вектор r , який складається з n коренів многочлена, що розглядається. При цьому задавати початкове наближення для коренів не потрібно, алгоритм закладений у функції `roots` працює без задавання початкових наближень, що є досить зручно.

Для стійкості нульового розв’язку рівняння (4.1) необхідно і досить, щоб усі корені його характеристичного рівняння (4.2) лежали у півплощині $Re\lambda < 0$.

Позначимо $\lambda_\tau = (Re\lambda_1, Re\lambda_2, \dots, Re\lambda_{2m+1})$, вектор дійсних частин коре-

нів характеристичного многочлена апроксимуючої системи (4.2), що знайдені для фіксованого запізнення τ . Введемо функцію $v(\tau) = \max \lambda_\tau$, яка визначає найбільшу дійсну частину знайдених коренів. Тепер для стійкості нульового розв'язку рівняння (4.1) необхідно і досить згідно Теорема 4.1 є виконання умови $v(\tau) < 0$.

Зафіксуємо дійсне число $A > 0$ та обчислимо значення функції $v(\tau)$ на проміжку $(0, A]$ з деяким кроком h . В результаті отримаємо набір точок вигляду $(\tau, v(\tau))$. Побудуємо графік функції $v(\tau)$, де по осі абсцис покладемо значення τ , а по осі ординат значення функції $v(\tau)$ в точці τ , тобто значення найбільшої дійсної частини серед обчислених коренів многочлена, які наближають корені квазіполінома.

Аналізуючи графік функції $v(\tau)$ можна визначити для яких значень запізнення τ зберігається стійкість для заданого рівняння із запізненням.

4.2.2 Структура прикладної програми

Розроблений додаток представляє собою набір структурованих сторінок для знаходження наближених коренів квазіполіномів диференціально-різницевих рівнянь з одним або декількома запізненнями та нейтрального типу, використовуючи класичну схему апроксимації або схему апроксимації підвищеної точності.

Для керування додатком розроблено інтерактивне меню, що забезпечує можливість вибору задачі, яку користувач бажає розв'язати. Меню з'являється на сторінці при наведенні на кнопку "Меню" у верхньому лівому куті, та зникає при наведенні миші на основну частину сторінки або при виборі одного з пунктів меню.

Кожен пункт меню – це посилання, що забезпечує перехід на відповідну сторінку для розв'язку потрібної задачі. Кожна сторінка має однакову структуру, проте відрізняється алгоритмом розв'язку. На сторінці представлено рівняння, яке буде досліджуватися та форма для введення необхідних параметрів. Кожне з полів для вводу параметрів називається так, як і відповідні параметри у рівнянні для зручнішого користування. Вхідними даними

служать сталі коефіцієнти або сталі матриці та значення запізнень. Користувач має зручний та зрозумілий інтерфейс, де окрім коефіцієнтів та значень запізнень потрібно ввести m – розмірність апроксимуючої системи.

Зважаючи на те, що додаток є веб-застосунком, також використані наступні технології: HTML, CSS, JavaScript.

Головна сторінка веб-додатку (рис. 4.2) містить список посилань на відповідні сторінки, на яких можна знайти неасимптотичні корені квазіполінома ДРР або дослідити на стійкість ДРР.

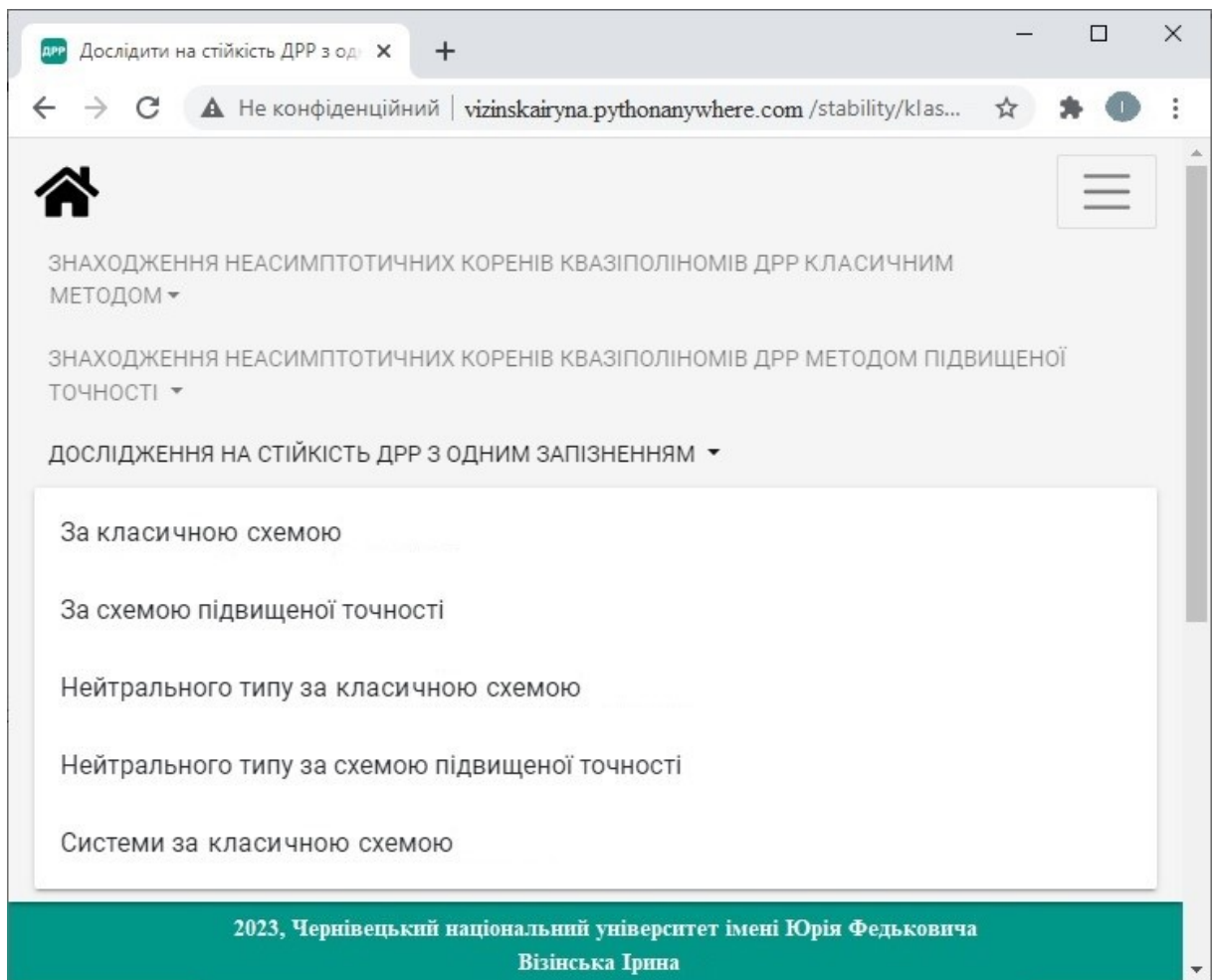


Рис. 4.2 Головна сторінка прикладної програми

В залежності від того яке рівняння потрібно дослідити, користувач вибирає відповідне посилання. Якщо буде вибрано ”Знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів ДРР із одним запізненням за схемою підвищеної точності”, то відкриється сторінка зображена на рис. 4.3. На даній сторінці

потрібно ввести коефіцієнти ДРР, запізнення та розмірність апроксимуючої системи. Результат з'явиться на тій самій сторінці.

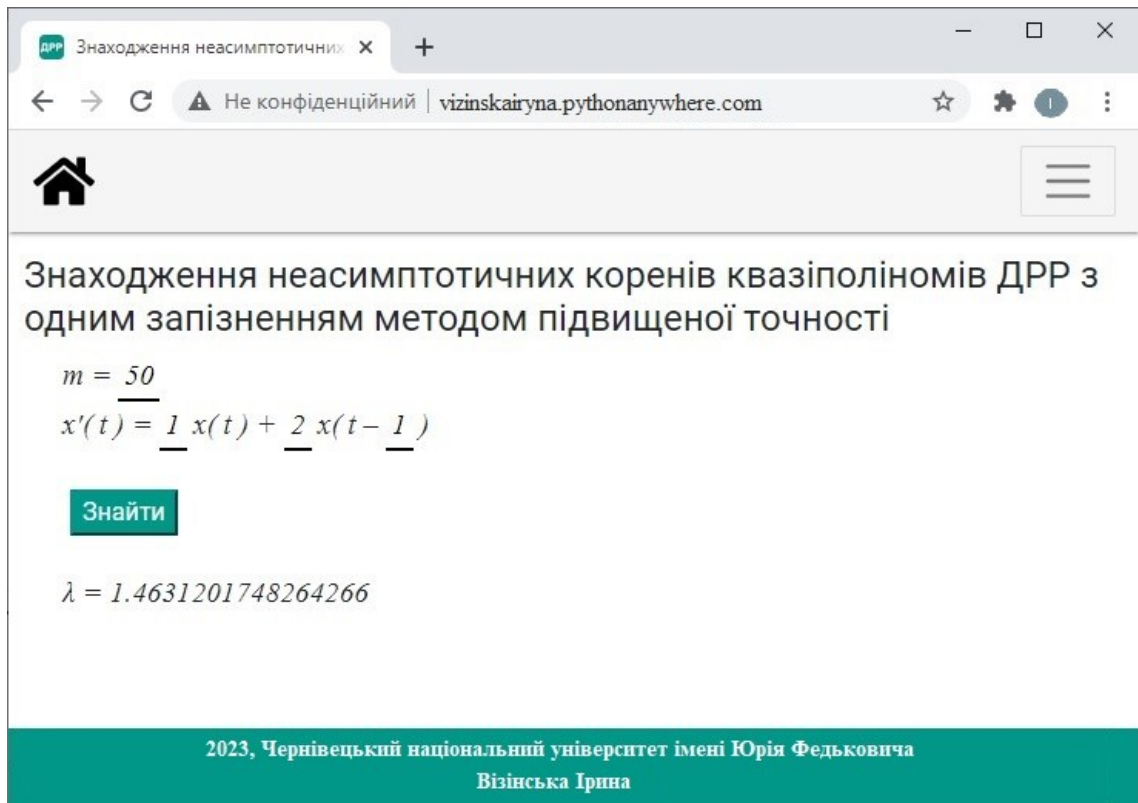


Рис. 4.3 Знаходження неасимптотичних коренів квазіполінома для рівняння з одним запізненням за схемою підвищеної точності

Якщо вибрати пункт "Дослідження ДРР на стійкість із одним запізненням за класичною схемою", то відкриється сторінка зображена на рис. 4.4. На даній сторінці потрібно ввести коефіцієнти ДРР, праву границю відрізка, на якому досліджується рівняння, та розмірність апроксимуючої системи. Результат з'явиться на тій самій сторінці.



Рис. 4.4 Дослідження на стійкість рівняння з одним запізненням за класичною схемою

Висновки до розділу 4

У даному розділі здійснюється аналіз та моделюванню на ЕОМ задачі про стійкість для різних класів диференціально-різницевих рівнянь за допомогою схем апроксимації таких рівнянь спеціальними системами звичайних диференціальних рівнянь. За результатами досліджень у 4 розділі роботи можна зробити такі висновки.

1. Для лінійних диференціально-різницевих рівнянь достатньо просто одержати аналоги розроблених схем апроксимації системами звичайних диференціальних рівнянь.

2. За побудованими схемами апроксимації можна одержати відповідні многочлени (характеристичні рівняння), корені яких апроксимують неасимптотичні корені відповідних квазіполіномів.

3. Розрахункові формули, зручні для застосування на ЕОМ одержано для скалярних диференціально-різницевих рівнянь з одним та кількома запізненнями, а також для систем диференціально-різницевих рівнянь другого порядку.

4. Розроблено програмний веб-додаток, в якому реалізовані описані в даній дисертаційній роботі алгоритми для дослідження стійкості диференціально-різницевих рівнянь.

5. Проведені числові експерименти для модельних тестових прикладів підтверджують переваги схеми підвищеної точності перед класичною схемою апроксимації.

Основні результати цього розділу опубліковано в [90], [97]–[99], [101].

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена розробці і обґрунтуванню схем апроксимації початкових задач для систем лінійних диференціально-різницевих рівнянь запізнюючого й нейтрального типів з багатьма запізненнями послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь та їх застосуванню для аналізу стійкості лінійних систем із запізненням і наближення розв'язків крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням.

У дисертаційній роботі отримано такі нові результати:

1) встановлено точність апроксимації векторного елемента запізнення в просторі кусково неперервних функцій;

2) досліджено схеми апроксимації початкових задач для систем лінійних диференціально-різницевих рівнянь запізнюючого й нейтрального типів з багатьма запізненнями послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь;

3) запропоновано алгоритми дослідження на стійкість систем лінійних диференціально-різницевих рівнянь з багатьма запізненнями та знаходження верхньої межі запізнення для якої зберігається стійкість системи із запізненням;

4) отримано достатні умови існування та єдиності розв'язку крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь із багатьма сталими запізненнями;

5) досліджено схему апроксимації крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням.

Побудовані та обґрунтовані схеми апроксимації початкових задач та крайових задач для диференціально-функціональних рівнянь можуть бути використані при вивченні прикладних задач механіки, оптимального керування, процесів екології, імунології, економіки та інших областей, математичними моделями яких є розглянуті в роботі диференціально-функціональні рівняння.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Corduneanu C., Li Y., Mahdavi M. Functional Differential Equations: Advances and Applications. New Jersey : John Wiley & Sons, 2016. 368 p.
- [2] Schiesser W.E. Time Delay ODE/PDE Models. Applications in Biomedical Science and Engineering. Boca Raton : CRC Press, 2019. 250 p.
- [3] Fathalla A. Rihan. Delay Differential Equations and Applications to Biology. Singapore : Springer Verlag, 2021. 303 p.
- [4] Gopalsamy K. Stability and Oscillation in Delay Differential Equations of Population Dynamics. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1992. Vol. 74. 501 p.
- [5] Forrest-Owen O. Mathematical Modelling and it's Applications in Biology, Ecology and Population Study. Master's Thesis. Chester, 2016. 124 p.
- [6] Halanay A. Differential equations. Stability. Oscillations. Time Lags. New York; London : Acad. Press, 1968. 528 p.
- [7] Jack K. Hale. Theory of Functional Differential Equations. Springer New York, 1977. 366 p.
- [8] Jack K. Hale, Sjoerd M. Verduyn Lunel. Introduction to functional differential equations. Springer New York, 1993. 458 p.
- [9] Krasovskii N. N. Stability of Motion. Applications of Lyapunov's Second Method to Differential Systems and Equations with Delay. Stanford University Press, Stanford, 1963. 188 p.
- [10] Bellman, R., Cooke K. Differential Difference Equations, Academic Press, New York, 1963. 474 p.
- [11] Kolmanovskii V.B., Myshkis A.D. Introduction to the theory and applications of functional differential equations, Kluwer Acad. Publ. 1999. 664 p.
- [12] El'sgol'ts L.E., Norkin S.B. Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments. New York and London : Academic Press, 1973. 356 p.

- [13] Слюсарчук В. Ю. Абсолютна стійкість динамічних систем із післядією. Рівне, УДУВГ, 2003. 288 с.
- [14] Регулярно і сингулярно збурені диференціально- функціональні рівняння / В. І. Фодчук та ін. Київ : Ін-т математики НАН України, 1996. 210 с.
- [15] Митропольський Ю. А., Мартинюк Д. И. Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием. Київ : Вища шк., 1979. 309 с.
- [16] Ronto M., Samoilenko A. M. Numerical-analytic Methods In Theory Of Boundary- Value Problems. World Scientific, 2000. 468 p.
- [17] Krasovskii N. N. The approximation of a problem of analytic design of controls in a system with time-lag. *J. Appl. Math. Mech.* 1964. Vol. 28, No. 4, P. 876-885.
- [18] Halanay A. Approximations of delays by ordinary differential equations. Recent advances in differential equations. New York : Academic Press, 1981. P. 155 - 197.
- [19] Repin Yu. M. On the approximate replacement of systems with lag by ordinary dynamical systems. *J. Appl. Math. Mech.* 1965. Vol. 29, No. 2, P. 254-264 .
- [20] Cherevko I.M., Piddubna L. A. On the approximate solutions of differential-difference 121 equation. *Математичні студії.* 1998. Vol. 9, №2. С. 187-192.
- [21] Piddubna L. A., Cherevko I. M. Approximations of differential-difference equations and calculations of nonasymptotic roots of quasipolynomials. *Revue d'analyse numerique et de theorie de l'approximations.* 1999. Vol. 28, №1. P. 15-21.
- [22] Піддубна Л. А., Черевко І. М. Апроксимація систем диференціально-різницевих рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь. *Нелінійні коливання.* 1999. Т. 2, №1. С. 42-49.

- [23] Матвій О.В., Черевко І.М. Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість. *Нелінійні коливання*. 2004. Т. 7, №2. С. 208-216.
- [24] Матвій О.В., Черевко І.М. Про наближення систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу системами звичайних диференціальних рівнянь. *Нелінійні коливання*. 2007. Т. 10, №3. С. 329-335.
- [25] Іліка С.А., Черевко І.М. Апроксимація нелінійних диференціально функціональних рівнянь. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2012. Т.55, №1. С. 39-48.
- [26] Клевчук І. І., Пернай С. А., Черевко І. М. Побудова областей стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь. *Доповіді НАН України*. 2012. №7. С. 28-34.
- [27] Rubanik V.V. Oscillations of quasilinear systems with delay. Nauka, 1969. 287 p.
- [28] Tsarkov E.F., Yasinsky V.K. Quasilinear stochastic differential functional equations. Riga: Orientir, 1990. 301 p
- [29] Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В. Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. Киев : Изд-во Киевского ун-та, 1987. 236 с.
- [30] Іліка С.А., Тузик І.І., Піддубна Л.А. Черевко І.М. Апроксимація лінійних диференціально-різницевих рівнянь та їх застосування. *Буковинський математичний журнал*. 2018. Т. 6, №3-4. С.80-83.
- [31] Іліка С.А., Тузик І.І., Черевко І.М. Апроксимація неасимптотичних коренів квазіполіномів диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу. *Буковинський математичний журнал*. 2020. Т. 8, № 1. С. 110-117.
- [32] Cherevko I., Tuzyk I., Ilika S., Pertsov A. Approximation of Systems with Delay and Algorithms for Modeling Their Stability. *11th International Conference on Advanced Computer Information Technologies ACIT'2021*. Deggendorf, Germany, 15-17 September 2021. P. 49-52.

- [33] Kamont Z., Kwapisz M. On the Koushy problem for differential-delay equations in Baanach space. *Math. Nachr.* 1976. Vol.74, № 1. P. 173-190.
- [34] Kato J. Remarrks on linear functional-differential equations. *Funkcsalaj Ekracioj.* 1969. Vol. 12, №1. P. 89-98.
- [35] Rezvan V. Absolute Stability Automatic System with Delay. Nauka, 1983. 360 p.
- [36] Hale J. K., Meyer K. R. A class of functional equations of neutral type. *Memoirs of the American Mathematical Society.* No.6. Providence: Rhode Island, 1967. 65 p.
- [37] Cruz M. A., Hale J. K. Stability of Functional Differential Equations of Neutral Type. *Journal Of Differential Equations.* 1970. Vol. 7. P. 334-355.
- [38] Cushing J. M. Integrodifferential equations and delay models in population dynamics. Berlin-Heidelberg-New York : Springer Verlag. 1977. 198 p.
- [39] Черевко І. М., Матвій О. В., Стельмащук Л. В. Про апроксимацію системи різницевих рівнянь. *Науковий вісник Чернівецького університету : Зб. наук. праць.* Чернівці : Рута, 2007. Вип. 349 : Математика. С. 88-94.
- [40] Матвій О. В., Піддубна Л. А., Черевко І. М. Про апроксимацію системи різницевих та диференціально-різницевих рівнянь. *Науковий вісник Чернівецького університету : Зб. наук. праць.* Чернівці : Рута, 2011. Т. 1, № 4. С. 107-112.
- [41] Іліка С. А., Черевко І.М. Апроксимація нелінійних диференціально-функціональних рівнянь. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2012. Т. 55, № 1. С. 39-48.
- [42] Іліка С.А., Матвій О.В., Л.А. Піддубна, Черевко І.М. Схеми апроксимації диференціально-функціональних рівнянь та їх застосування. *Буковинський математичний журнал.* Т. 2, № 2-3. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2014. С. 92-96.

- [43] Banks H. T., Burns I. A. Hereditary control problems: numerical methods based on averaging approximation. *SIAM J. Control Optim.* 1978. Vol. 11, № 2. P. 169-208.
- [44] Banks H.T. Approximation of Non Linear Functional differential equation Control Systems. *Journal of optimization theory and application.* 1979. Vol. 29, № 3. P. 383-408.
- [45] Kunish K. Approximation Schemes for Nonlinear neutral Optimal Control Systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 1981. Vol. 82. P. 112-143.
- [46] Henderson Johnny L. Boundary Value Problems For Functional Differential Equations. *World Scientific Publishing Company.* 1995. 306 p.
- [47] Лучка А. Ю., Ферук В. А. Проекційно-ітеративний метод для систем диференціальних рівнянь із загалюванням та обмеженнями. *Нелінійні коливання.* 2003. Т. 6, № 2. С. 206-232.
- [48] Korol I. I. Numerical-analytic method for investigating boundary value problems for impulsive differential equations. *Miskolc Mathematical Notes.* 2008. Vol. 9, № 2. P. 99-110.
- [49] Banks H. T., Kappel F. Spline approximations for functional differential equations. *J. Diff. Eqs.* 1979. Vol. 34, №3. P. 496-522.
- [50] Nikolova T. S., Bainov D. D. Application of spline-functions for the construction of an approximate solution of boundary value problems for a class of functional-differential equations. *Yokohama Math. J.* 1981. Vol. 29, №1. P. 108-122.
- [51] Dorosh A., Cherevko I. Boundary Value Problem Solution Existence For Linear Integro-Dierential Equations With Many Delays. *Carpathian Mathematical Publications.* 2018. Vol. 10, № 1. P. 65-70.
- [52] Cherevko I., Dorosh A. Existence and Approximation of a Solution of Boundary Value Problems for Delay Integro-Differential Equations. *J. Numer. Anal. Approx. Theory.* 2015. Vol. 44, №2. P. 154-165.

- [53] Матвій О. В., Черевко І. М. Апроксимація крайових задач для диференціальних рівнянь із запізненням. *Науковий вісник Чернівецького університету : Збірник наук. праць. Вип. 111. Математика*. Чернівці : Рута, 2001. С. 85-89.
- [54] Матвій О. В., Черевко І. М. Апроксимація крайових задач із запізненням системами звичайних диференціальних рівнянь. *Вісник Київського університету. Серія : Фіз.-мат. науки*. 2003. №3. С. 129-137.
- [55] Pinney E. Ordinary Difference-differential Equations, University of California Press. Berkeley, Los Angeles. 1958. 262 p.
- [56] Dickson D. G. Asymptotic distribution of zeros of exponential sums. *Publ. Math. Debrecen*, 1964. №11. P. 297-300.
- [57] Siewert C. E., Burniston E. E. Exact analytical solutions of $z\dot{z} = a$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1973. №43. P. 626-631.
- [58] Бернік В.О., Піддубна Л.А., Черевко І.М. Алгоритм знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів. *Дослідження математичних моделей : Зб. наук. праць*. Київ : Ін-т математики НАН України, 1997. С. 30-35.
- [59] Піддубна Л.А. Апроксимація коренів квазіполіномів диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу. *Крайові задачі для диференціальних рівнянь : Зб. наук. праць*. Київ : Ін-т математики НАН України, 1998. С. 121-125.
- [60] Qin Yuan-Xun, Liou Iong-Qing, Uang Lian Effect of time-lags on stability of dynamical systems. *1st International IFAC Congress on automation and Remote Control*. 1960. Vol. 1, № 1. P. 79-94.
- [61] Qin Yuan-xun, Lion-quinq, Wang Lian. Eect of time lags on stability of dynamical system. *Scientica sinica*. 1960. Vol. 10, №6. P.26-42.
- [62] Хусаинов Д. Я., Юнькова Е. А. Оценка величины запаздывания в линейных дифференциальных системах с отклоняющимся аргументом. *Украинский математический журнал*. 1983. Т. 35, №2. С. 261-264.

- [63] Матвій О. В., Пернай С. А., Черевко І. М. Про стійкість лінійних систем із запізненням. *Науковий вісник Чернівецького університету : зб. наук. праць*. Чернівці : Рута, 2008. Вип. 421 : Математика. С. 66-70.
- [64] Клевчук І.І., Гритчук М.В. Побудова областей стійкості лінійних автономних диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями. *Буковинський математичний журнал*. 2022. 10, № 1. С. 61-70.
- [65] El'sgol'ts L.E. Approximate methods of integration differential-difference equations. *Uspekhi matematicheskikh nauk*. 1953. Vol. 8, № 4. P. 81-93.
- [66] Natanson I. P. Theory of functions of a real variable. Nauka, 1974. 480 p.
- [67] Оболенский А. Ю., Чернецкая Л.Н. Об одном способе исследования функционально-дифференциальных моделей в задачах электродинамики. *Электронное моделирование*, 1993. Т. 15, №4. С. 8-13.
- [68] Піддубна Л.А. Наближене знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів диференціально-різницевих рівнянь з багатьма запізненнями. *Системи еволюційних рівнянь з післядією*. Київ : Ін-т математики НАН України, 1994. С. 89-97.
- [69] Черевко І. М. Апроксимація диференціально-різницевих рівнянь і наближення неасимптотичних коренів квазіполіномів. *Нелінійні диференціальні рівняння та їх застосування*. Київ : Ін-т математики АН України, 1993. С. 74-84.
- [70] Матвій О.В., Пернай (Іліка) С.А., Черевко І.М. Апроксимація неасимптотичних коренів квазіполіномів лінійних диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями. *Наук. вісник Чернівецького. ун-ту : Зб. наук. праць*. Вип. 501. Математика. 2010. С. 69-73.
- [71] Піддубна Л.А. Апроксимація коренів квазіполіномів диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу. *Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. праць*. Київ : Ін-т математики НАН України, 1998. С. 121-125.

- [72] Ihor Cherevko, Iryna Tuzyk. Approximation schemes of differential functional equations and their application. *The 27th Conference On Applied and Industrial Mathematics*, Targoviste, Romania, September 19-22, 2019: Proceedings CAIM 2019. Targoviste : "Valahia" University, 2019. P. 20-21.
- [73] Berezansky I., Braverman E. On stability of some linear and nonlinear delay differential equations. *J. Math. Anal. Appl.* 2006. V. 314, № 2. P. 391-411.
- [74] Yang Kuang. Delay differential equations: with applications in population dynamics. New York : Academic Press, 1993. 398 p.
- [75] Мартынюк Д. И. Лекции по теории устойчивости систем с последействием. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1971. 177 с.
- [76] Domoshnitsky A., Gitman M., Shklyar R. Stability and estimate of solution to uncertain neutral delay systems. *Boundary Value Problems*. 2014, Vol. 55. P. 1-14.
- [77] Fan K. F. Asymptotic Stability for a class of Neutral Systems with discrete and Distributed time delays. *Journal of optimization theory and applications*. 2002. 114, №3. P. 705-716.
- [78] Niculescu S. Stability results for a class of neutral Functional differential equations. *A Liapunov like analysis. Rev. Roumaine math. pures et. appl.* 2006. 51, №2. P. 239-256.
- [79] Berezansky I., Braverman E. On exponential stability of linear differential equations with several delays. *J. Math. Anal. Appl.* 2006. V. 324. P. 1336-1355.
- [80] Mahaffy J. M., Busken T. C. Regions of stability for a linear differential equation with two rationally dependent delays. *Discrete and continuous dynamical systems*. 2015. Vol. 35. №10. P. 4955-4986.
- [81] Sakata S. Asymptotic stability for a linear system of differential-difference equations. *Funkcialaj Ekvacioj. Serio Internacia*. 1998. № 41. P 435-449.

- [82] Berezansky L., Diblík J., Svoboda Z., Šmarda Z. Exponential stability criteria for linear neutral systems with applications to neural networks of neutral type. *Journal of the Franklin Institute*. 2023. Vol. 360. P. 301-326.
- [83] Tsai Sin-Lin. The formula of Liapounoff function of system of linear differential equations with constant coefficients. *Acta Mathematica Sinica*. 1959. Vol. 9, 4. P. 465-467.
- [84] Матвій О., Тузик І., Черевко І. Схеми апроксимації лінійних диференціально-різницевих рівнянь та їх застосування. *Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування : Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 100-річчю від дня народження професора С.Д. Ейдельмана*, 16-19 вересня 2020 р. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2020. С. 159-160.
- [85] Cherevko I., Tuzyk I. Approximation of systems with delay their stability. *Book of abstracts of EQUADIFF*. Brno, Czech Republic, 11-15 July 2022, Masaryk University. No 15. P. 225
- [86] Tunc C. Properties of Solutions to Volterra Integro-Differential Equations with Delay. *Appl. Math. Inf. Sci.* 2016. Vol. 10, № 5. P. 1775-1780.
- [87] Bellour A., Bousselsal M. Numerical Solution of Delay Integro-Differential Equations by Using Taylor Collocation Method. *Mathematical Methods in Applied Science*. 2013. Vol. 37. P. 1491-1506.
- [88] Brunner H. Recent advances in the numerical analysis of Volterra functional differential equations with variable delays. *J. Comput. Appl. Math.* 2009. V. 228, №2. P. 524-537.
- [89] Brunner H. Stability of solutions of delay functional integro-differential equations and their discretizations. *Computing*. 2003. Vol. 71, №3. P. 229-245.
- [90] Тузик І., Матвій О. Схеми апроксимації диференціально-різницевих рівнянь та їх застосування. *Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2020"* (26-28 травня 2020 р., Львів). 2 с.

- [91] Тузик І.І., Черевко І.М. Апроксимація крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням. *Буковинський математичний журнал*. 2022. Т. 10, № 1. С. 120-128.
- [92] Дорош А.Б., Тузик І.І., Черевко І.М. Схеми апроксимації крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням. *Нелінійні коливання*. 2023. Т. 26, №1. С. 33-41.
- [93] Grim L. J. Boundary value problems for delay-differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1968. Vol. 74, №5. P. 997-1000.
- [94] Grim L. J. Boundary value problems for differential equations with deviating arguments. *Aequationes Math.* 1970. Vol. 4, №1. P. 176-190.
- [95] Hartman P. Ordinary Differential Equations. Philadelphia : Society for Industrial, Applied Mathematics, 2002. 612 p.
- [96] Черевко І.М., Тузик І.І., Іліка С.А. Алгоритм дослідження стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь. *Матеріали XXVI Міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики"*, Львів, 27-28 вересня 2021. С. 173-177.
- [97] Tuzyk I., Cherevko I. Algorithms for studying the stability of linear systems with many delay. *12th International Conference on Advanced Computer Information Technologies*, 26-28 September 2022, Spišská Kapitula, Slovakia. P. 164-167.
- [98] Іліка С.А., Тузик І.І., Черевко І.М. Апроксимація лінійних диференціально-функціональних рівнянь та неасимптотичних коренів їх квазіполіномів запізненням. *Тези доповідей IX міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації"*. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. 2020. С. 49-50.

- [99] Візінська І.І. Моделювання стійкості диференціально-різницевих рівнянь із запізненням. *Буковинський математичний журнал*. 2023. Т.11, № 1. С. 71-79.
- [100] Тузик І.І. Про апроксимацію диференціально-різницевих рівнянь та їх стійкість. *Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2019"* (Львів, 27–29 травня 2019 р.). Матеріали конференції. Львів, 2019.
- [101] Ihor Cherevko, Iryna Tuzyk, Larissa Piddybna. On the approximation of linear systems with delay and their stability type. *The 28th Conference On Applied and Industrial Mathematics*. Romania. September 17-18, 2021 : Proceedings CAIM 2021. P. 16-17.
- [102] NumPy [Електронний ресурс]. NumPy – Режим доступу : <http://www.numpy.org/>
- [103] Extensions – Flask Documentation (1.1.x) [Електронний ресурс] . Flask – Режим доступу : <https://flask.palletsprojects.com/en/1.1.x/extensions/>
- [104] Flask [Електронний ресурс]. Режим доступу : <https://uk.wikipedia.org/wiki/Flask>

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

Список публікацій здобувача за темою дисертації

Наукові праці у періодичних наукових фахових виданнях України:

1. Іліка С.А., Тузик І.І., Піддубна Л.А. Черевко І.М. Апроксимація лінійних диференціально-різницевих рівнянь та їх застосування. *Буковинський математичний журнал*. 2018. Т. 6, № 3-4. С. 80-83.

2. Іліка С.А., Тузик І.І., Черевко І.М. Апроксимація неасимптотичних коренів квазіполіномів диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу. *Буковинський математичний журнал*. 2020. Т. 8, № 1. С. 110-117.

3. Тузик І.І., Черевко І.М. Апроксимація крайових задач для інтегродиференціальних рівнянь із запізненням. *Буковинський математичний журнал*. 2022. Т. 10, № 1. С. 120-128.

4. Дорош А.Б., Тузик І.І., Черевко І.М. Схеми апроксимації крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням. *Нелінійні коливання*. 2023. 26, № 1. С. 33-41.

5. Візінська І.І. Моделювання стійкості диференціально-різницевих рівнянь із запізненням. *Буковинський математичний журнал*. 2023. Т. 11, № 1. С. 71-79.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

6. Cherevko I., Tuzyk I., Ilika S., Pertsov A. Approximation of Systems with Delay and Algorithms for Modeling Their Stability. *11th International Conference on Advanced Computer Information Technologies ACIT'2021*, 15-17 September 2021, Deggendorf, Germany. P. 49-52.

7. Tuzyk I., Cherevko I. Algorithms for studying the stability of linear systems with many delay. *12th International Conference on Advanced Computer Information Technologies*, 26-28 September 2022, Spišská Kapitula, Slovakia. P. 164-167.

8. Піддубна Л.А., Тузик І.І., Черевко І.М. Схеми апроксимації диференціально-різницевих рівнянь та їх застосування. *Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій"* : Матеріали конференції, 2-4 березня 2018 р. Рівне. С. 80-81.

9. Тузик І.І. Про апроксимацію диференціально-різницевих рівнянь та їх стійкість. *Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2019"*, Львів, 27-29 травня 2019 р.

10. Cherevko I., Tuzyk I. Approximation schemes of differentialfunctional equations and theirs application. *The 27th Conference On Applied and Industrial Mathematics* : Proceedings CAIM 2019, Targoviste, Romania, 19-22 September 2019. Targoviste : "Valahia" University. P. 20-21.

11. Матвій О., Тузик І., Черевко І. Схеми апроксимації лінійних диференціально-різницевих рівнянь та їх застосування. *Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування : Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 100-річчю від дня народження професора С.Д. Ейдельмана*, 16-19 вересня 2020 р. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2020. С. 159-160.

12. Іліка С.А., Тузик І.І., Черевко І.М. Апроксимація лінійних диференціально-функціональних рівнянь та неасимптотичних коренів їх квазіполіномів. *Тези доповідей ІХ міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації"*. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2020. С. 49-50.

13. Тузик І.І., Матвій О.В. Схеми апроксимації диференціально-різницевих рівнянь та їх застосування. *Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2020"*, Львів, 26-28 травня 2020 р.

14. Черевко І.М., Тузик І.І., Іліка С.А. Алгоритм дослідження стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь. *Матеріали XXVI Міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та*

інформатики”, Львів, 27-28 вересня 2021. С. 173-177.

15. Cherevko I., Tuzyk I., Pidlybna L. On the approximation of linear systems with delay and their stability type. *The 28th Conference On Applied and Industrial Mathematics* : Proceedings CAIM 2021, Romania, 17-18 September 2021. P. 16-17.

16. Cherevko I., Tuzyk I. Approximation of systems with delay their stability. *Book of abstracts of EQUADIFF* Brno, Czech Republic, 11-15 July 2022, Masaryk University. No 15. P. 225.

ДОДАТОК Б

Моделювання стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь. Числові експерименти

Розглянемо застосування розробленого додатку, що описаний в п. 4.2 для дослідження стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь на модельних тестових прикладах.

Приклад Б1. Розглянемо лінійне диференціально-різницеве рівняння із двома запізненнями

$$x'(t) = 2x(t) + x(t - 0.5) + x(t - 1).$$

Його характеристичний квазіполіном має вигляд

$$\lambda = 2 + e^{-0.5\lambda} + e^{-\lambda}.$$

Знайдений корінь квазіполінома з найбільшою дійсною частиною методом поділу відрізка навпіл $\lambda = 2.393487$ вважатимемо як його точне значення.

Скористаємось класичною схемою апроксимації (КС) коренів квазіполінома та схемою підвищеної точності (ПТ). В таблиці Б1 наведено результати числових експериментів наближення кореня квазіполінома з найбільшою дійсною частиною для різних значень m .

Таблиця Б1

Апроксимація коренів квазіполінома рівняння з двома запізненнями

| M | λ точне | $\lambda_{КС}$ | $\lambda_{ПТ}$ |
|-----|-----------------|----------------|----------------|
| 20 | 2.393487315 | 2.45210699 | 2.39450916 |
| 30 | 2.393487315 | 2.43221515 | 2.39395453 |
| 40 | 2.393487315 | 2.42240213 | 2.3937539 |
| 50 | 2.393487315 | 2.41655648 | 2.39365944 |
| 70 | 2.393487315 | 2.40991426 | 2.39357601 |

Із таблиці Б1 видно, що точність знаходження неасимптотичних коренів покращується із збільшенням розмірності m , при цьому схема підвищеної точності забезпечує точність наближення при значно менших m .

Приклад Б2. Розглянемо ДРР нейтрального типу із одним запізненням

$$x'(t) = x(t) - 2(t - \tau) - 0,5x'(t - \tau).$$

Його характеристичний квазіполіном має вигляд

$$\lambda = 2 + e^{-\lambda\tau} + \lambda e^{-\lambda\tau}.$$

Скористаємось класичною схемою апроксимації (кс) коренів квазіполінома та схемою апроксимації підвищеної точності (пт) для дослідження верхньої межі запізнення, для якої зберігається стійкість розв'язків вихідного рівняння для різних значень m розмірності апроксимуючої системи.

Таблиця Б2

Наближені значення величини запізнення рівняння нейтрального типу, для якого зберігається стійкість розв'язків

| M | $\Delta_{кс}$ | $\Delta_{пт}$ |
|-----|---------------|---------------|
| 10 | 0.8565 | 0.7828 |
| 20 | 0.8224 | 0.7848 |
| 50 | 0.8008 | 0.7854 |
| 70 | 0.7965 | 0.7868 |

Для наглядності побудуємо графік залежності від τ величини дійсної частини кореня з найбільшою дійсною частиною серед коренів апроксимуючого многочлена при заданому τ .

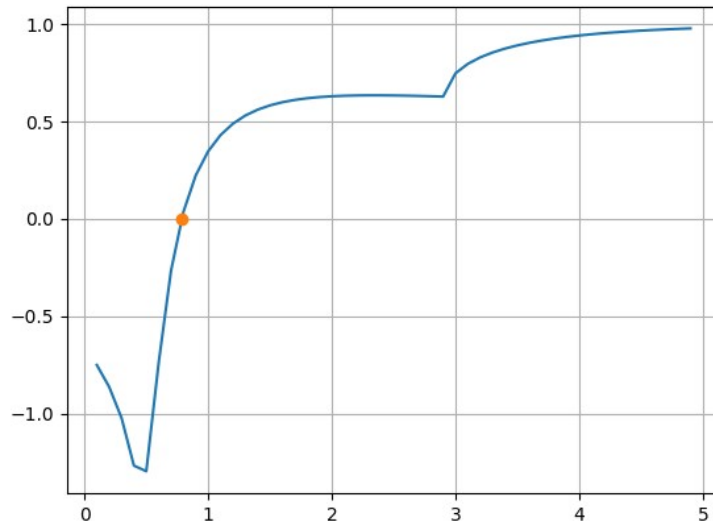


Рис. Б1 Графік залежності від τ найбільшої дійсної частини коренів характеристичного рівняння

Приклад Б3. Розглянемо систему диференціально-різницевого рівнянь із запізненням, яка розглядалася в п. 4.2

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bx(t - \tau),$$

$$A = \begin{pmatrix} -0.9 & -6.5 \\ 4.8 & -0.9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1.39 & -0.65 \\ 0.48 & -1.39 \end{pmatrix}$$

Скористаємось класичною схемою апроксимації для знаходження неасимптотичних коренів квазіполінома та аналізу стійкості вихідної системи із запізненням при збільшенні розмірності апроксимуючої системи. У результаті проведених числових експериментів дістаємо, що система буде асимптотично стійкою:

- 1) при $m = 10$, коли $\tau < 0.3156$;
- 2) при $m = 20$, коли $\tau < 0.2865$;
- 3) при $m = 50$, коли $\tau < 0.2768$;
- 4) при $m = 100$, коли $\tau \in (0, \tau_1) \cup (\tau_2, \tau_3)$, де $\tau_1 = 0.2740$, $\tau_2 = 0.8035$, $\tau_3 = 1.3580$;
- 5) при $m = 400$, коли $\tau \in (0, \tau_1) \cup (\tau_2, \tau_3)$, де $\tau_1 = 0.2720$, $\tau_2 = 0.8310$, $\tau_3 = 1.2299$;

б) при $m = 500$, коли $\tau \in (0, \tau_1) \cup (\tau_2, \tau_3)$, де $\tau_1 = 0.2718$, $\tau_2 = 0.8330$, $\tau_3 = 1.2290$;

Для наглядності побудуємо графік, на якому в залежності від τ розставимо значення дійсної частини кореня, який є коренем з найбільшою дійсною частиною серед коренів апроксимуючого многочлена при заданому τ .

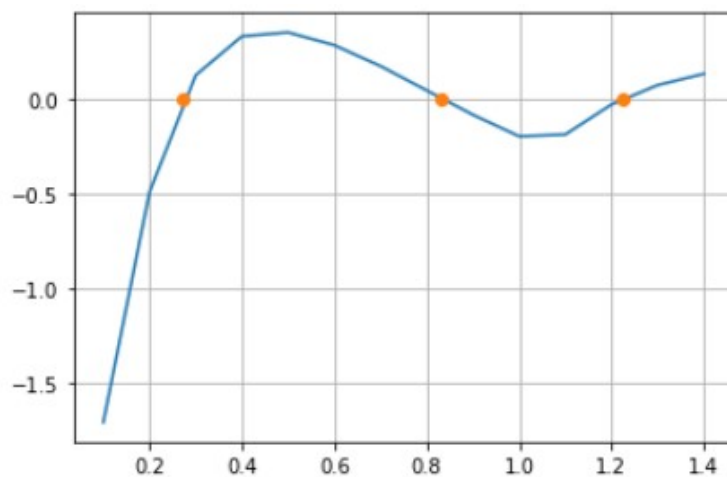


Рис. Б2 Графік залежності від τ найбільшої дійсної частини коренів характеристичного рівняння

ДОДАТОК В

Моделювання крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням

Для реалізації розглянутого в 3 розділі роботи алгоритму апроксимації крайової задачі для інтегро – диференціальних рівнянь із запізненням була розроблено прикладна програма із використанням мови програмування JavaScript, бібліотеки jQuery для зручного зчитування значень із полів вводу, а також CSS-фреймворка Bootstrap для оформлення користувацького інтерфейсу.

Програмне забезпечення створене у вигляді вебзастосунку, у верхній частині якого задаються параметри крайової задачі, а саме початок та кінець відрізка, запізнення, початкова функція, кількість точок розбиття відрізка, спосіб обчислення інтеграла, а також точний розв'язок, якщо він відомий. Якщо точний розв'язок невідомий, користувач може прибрати галочку "Точний розв'язок відомий", і тоді відповідне текстове поле приховується.

Важливо зазначити, що всі текстові поля (окрім кількості точок розбиття) можуть містити не лише числа, а й функції чи математичні константи, які підтримуються мовою JavaScript. Наприклад, Math.PI (число π), $\text{Math.sin}(x)$, $\text{Math.cos}(x)$, $\text{Math.tan}(x)$, $\text{Math.sqrt}(x)$ (корінь квадратний) тощо. Для обчислення таких значень чи функцій JavaScript використовує зручну функцію `eval`.

Початок відрізка (a)
0

Кінець відрізка (b)
Math.PI / 2

Запізнення (τ)
Math.PI / 2

Початкова функція
Math.sin(x) + 2

Кількість точок розбиття (m)
20

Спосіб обчислення інтеграла:
 Формула лівих прямокутників
 Формула правих прямокутників

Точний розв'язок відомий

(3-Math.PI)*Math.cos(x)+(5-Math.PI)*Math.sin(x)+Math.PI-1

Обчислити

Рис. В1 Головна сторінка прикладної програми

Після вводу потрібних даних користувач повинен натиснути кнопку "Обчислити", щоб програма знайшла наближений розв'язок, який з'явиться у вигляді таблиці в нижній частині вікна. Якщо задано точний розв'язок, то він теж буде обчислений у відповідних точках, а також виведуться абсолютна та відносна похибки. Нижче наведено результати числових експериментів для прикладу 3.4. Розглядається розмірність апроксимуючої системи при $m = 20$ та використання квадратурної формули лівих прямокутників.

Таблиця В1

Результати числових експериментів при $m = 20$ і використання формули лівих прямокутників для прикладу 3.4

| № | x | Наближений розв'язок | Точний розв'язок | Абсолютна похибка | Відносна похибка |
|----|---------------------|----------------------|--------------------|----------------------|------------------|
| 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 0.00% |
| 1 | 0.07853981633974483 | 2.149166717626522 | 2.1462454427901867 | 0.002921274836335197 | 0.14% |
| 2 | 0.15707963267948966 | 2.2980477961522854 | 2.292462199587744 | 0.005585596564541273 | 0.24% |
| 3 | 0.23561944901923448 | 2.4457253342201963 | 2.4377487954650086 | 0.007976538755187779 | 0.33% |
| 4 | 0.3141592653589793 | 2.591288850700302 | 2.581209490245702 | 0.010079360454599673 | 0.39% |
| 5 | 0.39269908169872414 | 2.7338408981087206 | 2.721959801040979 | 0.011881097067741653 | 0.44% |
| 6 | 0.47123889803846897 | 2.872502595669814 | 2.8591319553805588 | 0.013370640289255054 | 0.47% |
| 7 | 0.5497787143782138 | 3.006419047908424 | 2.991880241318568 | 0.014538806589856179 | 0.49% |
| 8 | 0.6283185307179586 | 3.134764615364761 | 3.1193862215289148 | 0.015378393835846271 | 0.49% |
| 9 | 0.7068583470577035 | 3.256748004936224 | 3.2408637792435604 | 0.015884225692663456 | 0.49% |
| 10 | 0.7853981633974483 | 3.3716171484625117 | 3.3555639649238067 | 0.016053183538704996 | 0.48% |
| 11 | 0.8639379797371931 | 3.4786638394759186 | 3.4627796137832547 | 0.0158842256926639 | 0.46% |
| 12 | 0.9424777960769379 | 3.5772280995297097 | 3.561849705693863 | 0.015378393835846715 | 0.43% |
| 13 | 1.0210176124166828 | 3.666702247184711 | 3.6521634405948546 | 0.014538806589856179 | 0.40% |
| 14 | 1.0995574287564276 | 3.746534644567456 | 3.7331640042782004 | 0.013370640289255498 | 0.36% |
| 15 | 1.1780972450961724 | 3.8162330984011144 | 3.804352001333373 | 0.011881097067741209 | 0.31% |
| 16 | 1.2566370614359172 | 3.875367894540714 | 3.8652885340861136 | 0.010079360454600561 | 0.26% |
| 17 | 1.335176877775662 | 3.9235744473037384 | 3.915597908548551 | 0.007976538755187335 | 0.20% |
| 18 | 1.413716694115407 | 3.960555547262099 | 3.954969950697558 | 0.005585596564540829 | 0.14% |
| 19 | 1.4922565104551517 | 3.986083193637088 | 3.9831619188007528 | 0.002921274836335197 | 0.07% |
| 20 | 1.5707963267948966 | 4 | 4 | 0 | 0.00% |

Як видно із результатів обчислень, у цьому випадку абсолютна похибка наближення точного розв'язку крайової задачі (3.68)–(3.69) не перевищує 0.017, а відносна – 0,49%.

Таблиця В2

Результати числових експериментів при $m = 20$ і використання формули лівих прямокутників для прикладу 3.4

| № | x | Наближений розв'язок | Точний розв'язок | Абсолютна похибка | Відносна похибка |
|----|---------------------|----------------------|--------------------|-----------------------|------------------|
| 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 0.00% |
| 1 | 0.07853981633974483 | 2.1432466667003114 | 2.1462454427901867 | 0.00299877608987531 | 0.14% |
| 2 | 0.15707963267948966 | 2.2867284174673146 | 2.292462199587744 | 0.00573378212042952 | 0.25% |
| 3 | 0.23561944901923448 | 2.4295606395950076 | 2.4377487954650086 | 0.00818815587000099 | 0.34% |
| 4 | 0.3141592653589793 | 2.5708627249374394 | 2.581209490245702 | 0.010346765308262729 | 0.40% |
| 5 | 0.39269908169872414 | 2.7097634991507626 | 2.721959801040979 | 0.012196301890216255 | 0.45% |
| 6 | 0.47123889803846897 | 2.845406592772757 | 2.8591319553805588 | 0.01372536260780155 | 0.48% |
| 7 | 0.5497787143782138 | 2.976955721025338 | 2.991880241318568 | 0.014924520293229993 | 0.50% |
| 8 | 0.6283185307179586 | 3.103599839788304 | 3.1193862215289148 | 0.015786381740610977 | 0.51% |
| 9 | 0.7068583470577035 | 3.2245581459560375 | 3.2408637792435604 | 0.01630563328752288 | 0.50% |
| 10 | 0.7853981633974483 | 3.3390848913482976 | 3.3555639649238067 | 0.01647907357550915 | 0.49% |
| 11 | 0.8639379797371931 | 3.4464739804957323 | 3.4627796137832547 | 0.016305633287522436 | 0.47% |
| 12 | 0.9424777960769379 | 3.5460633239532524 | 3.561849705693863 | 0.015786381740610533 | 0.44% |
| 13 | 1.0210176124166828 | 3.6372389203016247 | 3.6521634405948546 | 0.014924520293229993 | 0.41% |
| 14 | 1.0995574287564276 | 3.719438641670399 | 3.7331640042782004 | 0.01372536260780155 | 0.37% |
| 15 | 1.1780972450961724 | 3.7921556994431564 | 3.804352001333373 | 0.012196301890216699 | 0.32% |
| 16 | 1.2566370614359172 | 3.8549417687778518 | 3.8652885340861136 | 0.01034676530826184 | 0.27% |
| 17 | 1.33517687775662 | 3.90740975267855 | 3.915597908548551 | 0.00818815587000099 | 0.21% |
| 18 | 1.413716694115407 | 3.9492361685771287 | 3.954969950697558 | 0.00573378212042952 | 0.14% |
| 19 | 1.4922565104551517 | 3.980163142710877 | 3.9831619188007528 | 0.0029987760898757543 | 0.08% |
| 20 | 1.5707963267948966 | 4 | 4 | 0 | 0.00% |

Якщо ж використовувати формулу правих прямокутників, абсолютна похибка наближення точного розв'язку крайової задачі (3.68)–(3.69) не перевищує 0.017, а відносна – 0,51% при $m = 20$.

При зменшенні кількості точок розбиття відрізка, де знаходиться розв'язок крайової задачі, точність наближення зменшується.

Таблиця В3

Результати числових експериментів при $m = 10$ і використання формули правих прямокутників для прикладу 3.4

| № | x | Наближений розв'язок | Точний розв'язок | Абсолютна похибка | Відносна похибка |
|----|---------------------|----------------------|--------------------|----------------------|------------------|
| 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 0.00% |
| 1 | 0.15707963267948966 | 2.3034851156948744 | 2.292462199587744 | 0.011022916107130243 | 0.48% |
| 2 | 0.3141592653589793 | 2.6011006412482454 | 2.581209490245702 | 0.01989115100254324 | 0.77% |
| 3 | 0.47123889803846897 | 2.88551829469169 | 2.8591319553805588 | 0.026386339311131213 | 0.92% |
| 4 | 0.6283185307179586 | 3.1497347694693554 | 3.1193862215289148 | 0.030348547940440618 | 0.97% |
| 5 | 0.7853981633974483 | 3.3872441790880097 | 3.3555639649238067 | 0.03168021416420297 | 0.94% |
| 6 | 0.9424777960769379 | 3.5921982536343036 | 3.561849705693863 | 0.030348547940440618 | 0.85% |
| 7 | 1.0995574287564276 | 3.759550343589332 | 3.7331640042782004 | 0.026386339311131657 | 0.71% |
| 8 | 1.2566370614359172 | 3.8851796850886577 | 3.8652885340861136 | 0.019891151002544127 | 0.51% |
| 9 | 1.413716694115407 | 3.965992866804688 | 3.954969950697558 | 0.011022916107129799 | 0.28% |
| 10 | 1.5707963267948966 | 4 | 4 | 0 | 0.00% |

Отриману таблицю можна легко скопіювати для подальшого аналізу, наприклад, у текстовий редактор Microsoft Word чи табличний редактор Microsoft Excel.

Код програми:

Файл index.html

```
<!DOCTYPE html>
<html lang="en" dir="ltr">
  <head>
    <meta charset="utf-8">
    <title>Крайова задача</title>
    <script src="https://code.jquery.com/jquery-1.12.4.min.js"
integrity="sha256-ZosEbRLbNQzLpnKIkEdrPv7lOy9C27hHQ+Xp8a4MxAQ="
crossorigin="anonymous"></script>
    <link
href="https://cdn.jsdelivr.net/npm/bootstrap@5.3.1/dist/css/bootst
rap.min.css" rel="stylesheet">
    <script
src="https://cdn.jsdelivr.net/npm/bootstrap@5.3.1/dist/js/bootstra
p.bundle.min.js"></script>
    <script src="index.js" charset="utf-8"></script>
    <style media="screen">
      .form-group {
        padding-top: 5px;
        padding-bottom: 5px;
      }
    </style>
  </head>
  <body>
    <div class="container mt-5">
      <div class="row">
        <div class="col-md-6">
          <div class="form-group">
            <label for="a">Початок відрізка (a)</label>
            <input type="text" class="form-control" id="a"
value="0">
          </div>
          <div class="form-group">
            <label for="tau">Запізнення (&tau;)</label>
            <input type="text" class="form-control" id="tau"
value="Math.PI / 2">
          </div>
          <div class="form-group">
            <label for="m">Кількість точок розбиття (m)</label>
            <input type="number" class="form-control" id="m"
value="20">
          </div>
          <div class="form-group">
            <input type="checkbox" class="form-check-input" id="is-
precise-solution-given" checked="checked">
            <label class="form-check-label" for="is-precise-
solution-given">Точний розв'язок відомий</label>
          </div>
          <div class="form-group" id="precise-solution-container">
```

```

        <input type="text" class="form-control" id="precise-
solution" value="(3-Math.PI)*Math.cos(x)+(5-
Math.PI)*Math.sin(x)+Math.PI-1">
    </div>
    <div class="form-group">
        <button class="btn btn-primary"
id="calculate">Обчислити</button>
    </div>
</div>
<div class="col-md-6">
    <div class="form-group">
        <label for="b">Кінець відрізка (b)</label>
        <input type="text" class="form-control" id="b"
value="Math.PI / 2">
    </div>
    <div class="form-group">
        <label for="initialFunction">Початкова функція</label>
        <input type="text" class="form-control"
id="initialFunction" value="Math.sin(x) + 2">
    </div>
    <div class="form-group">
        <div>Спосіб обчислення інтеграла:</div>
        <div class="form-check">
            <input class="form-check-input" type="radio"
name="integral-algorithm" id="integral-algorithm1" value="left-
rectangle-rule" checked="checked">
            <label class="form-check-label" for="integral-
algorithm1">
                Формула лівих прямокутників
            </label>
        </div>
        <div class="form-check">
            <input class="form-check-input" type="radio"
name="integral-algorithm" id="integral-algorithm2" value="right-
rectangle-rule">
            <label class="form-check-label" for="integral-
algorithm2">
                Формула правих прямокутників
            </label>
        </div>
    </div>
</div>
</div>
</div>
<div class="container mt-5">
    <table class="table table-striped table-hover"
id="calc_result">
        <thead>
            <tr>
                <th>№</th>
                <th>x</th>
                <th>Наближений розв'язок</th>
                <th>Точний розв'язок</th>

```

```

        <th>Абсолютна похибка</th>
        <th>Відносна похибка</th>
    </tr>
</thead>
<tbody>
</tbody>
</table>
</div>
</body>
</html>

```

Файл index.js

```

$(document).ready(function() {

var isPreciseSolutionGiven = true;

function preciseSolution(x)
{
    return (3 - Math.PI) * Math.cos(x) + (5 - Math.PI) * Math.sin(x)
+ Math.PI - 1;
}

function initialFunction(x)
{
    return Math.sin(x) + 2;
}

function z0(j,tau,m)
{
    return Math.sin(-j*tau/m) + 2;
}

function findApproximateSolution()
{
    // кількість точок розбиття відрізка
    var m = parseInt($('input#m').val());
    var a = eval($('input#a').val());
    var b = eval($('input#b').val());
    var h = (b-a) / m;
    var tau = eval($('input#tau').val());
    z_current = [];
    z_prev = [];
    z_result_vector = [];

    z_result_vector[0] = z0(m,tau,m);
    for(i=1,x=a;i<=m;i++,x+=h)
    {
        for(j=0;j<=m;j++)
        {
            z_prev[j] = (i==1) ? z0(j,tau,m) : z_current[j];
        }
    }
}

```

```

    for(j=i;j<=m;j++)
    {
        z_current[j] = z_prev[j] + h*m/tau*(z_prev[j-1] -
z_prev[j]);
    }
    z_result_vector[i] = z_current[m];
}

var integral = 0;

if($('input[name="integral-algorithm"]:checked').val() == 'left-
rectangle-rule')
{
    // формула лівих прямокутників
    for(j=0;j<=m-1;j++)
    {
        integral += h * z_result_vector[j];
    }
}
else if($('input[name="integral-algorithm"]:checked').val() ==
'right-rectangle-rule')
{
    // формула правих прямокутників
    for(j=1;j<=m;j++)
    {
        integral += h * z_result_vector[j];
    }
}

var c1 = 4 - integral;
var c2 = 2 - integral;

$("table#calc_result tbody").empty();

// обчислення наближених значень у точках та вивід результатів
for(j=0,x=a;j<=m;j++,x+=h)
{
    var precise = preciseSolution(x);
    var z_approx = c1 * Math.sin(x) + c2 * Math.cos(x) + integral;
    var absolute_error = Math.abs(precise - z_approx);
    var relative_error = ((precise == 0) || (z_approx == 0)) ? 0 :
(Math.abs(absolute_error / precise) * 100).toFixed(2);
    var newTableRow = "<tr><td>" + j + "</td><td>" + x +
"</td><td>" + z_approx + "</td>";
    if(isPreciseSolutionGiven)
    {
        newTableRow += "<td>" + precise + "</td><td>" +
absolute_error + "</td><td>" + relative_error + "%</td>";
    }
    newTableRow += "</tr>";
    $("table#calc_result tbody").append(newTableRow);
}

```

```
}

// Кнопка "Обчислити"
$('.btn#calculate').click(function() {
    findApproximateSolution();
});

// Чи заданий точний розв'язок
$('input#is-precise-solution-given').change(function() {
    isPreciseSolutionGiven = $(this).is(':checked');
    $('input#precise-solution').toggle(isPreciseSolutionGiven);
    findApproximateSolution();
});

findApproximateSolution();

});
```