Пукальський І.Д., Яшан Б.О.

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ В ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

Досліджується задача оптимального керування системою, що описується задачею Діріхле для еліптичного рівняння другого порядку. Розглянуто випадок внутрішнього керування. Критерій якості задається об'ємним інтегралом. Коефіцієнти рівняння допускають степеневі особливості довільного порядку за будь-якими змінними на деякій множині точок. Встановлено необхідні і достатні умови існування оптимального розв'язку системи, що описується крайовою задачею для еліптичного рівняння з виродженням.

Ключові слова і фрази: задача Діріхле, степеневі особливості, інтерполяційні нерівності, апріорні оцінки, гельдерові простори, теорема Арчела.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: *i.pukalsky@chnu.edu.ua (Пукальський І.Д.), b.yashan@chnu.edu.ua (Яшан Б.О.)*

Вступ

Теорія оптимального керування системами, що описується рівняннями у частинних похідних, багата результатами і активно розвивається в наш час. Популярність такого роду досліджень пов'язана із активним використанням при вирішенні проблем природознавства, зокрема гідро-і газодинаміки, фізики тепла, дифузії, теорії біологічних популяцій.

Основи теорії оптимального керування детермінованими системами, що описуються рівняннями з частинними похідними вперше систематично описано в монографії [1]. Задачам вибору оптимального керування системами, що описуються параболічними крайовими задачами з обмеженим внутрішнім, стартовим та межовим керуванням присв'ячено праці [2, 3, 4, 5]. Задачі для вироджених еліптичних рівнянь високого порядку у півпросторі досліджуються в статті [10]. Розглядаються питання чисельного розв'язання методом скінченних елементів (МСЕ) першої крайової задачі для еліптичного рівняння з виродженням на частині границі в [11]. У роботі [12] розглядається клас вироджених еліптичних рівнянь з довільним степеневим виродженням. У роботі [13]

УДК 517.956
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35k20, 35J25.

показано єдину розв'язність класичної задачі Діріхле в циліндричній області для тривимірних еліптичних рівнянь з виродженням типу та порядку. У статті [14] розглядається задача Діріхле для класу вироджених анізотропних еліптичних рівнянь другого порядку.

У цій статті розглядається крайова задача Діріхле для еліптичного рівняння зі степеневими особливостями довільного порядку в коефіцієнтах рівняння за будь-якими змінними на деякій множині точок. За допомогою апріорних оцінок і принципу максимума доведено існування єдиного розв'язку поставленої задачі та встановлено оцінки його похідних у гельдерових просторах зі степеневою вагою. Одержаний результат використано для встановлення необхідних та достатніх умов існування оптимального керування системи, що описується крайовою задачею з внутрішнім керуванням. Критерії якості задаються об'ємним інтегралом.

1 Постановка задачі та основні обмеження

D обмежена область в R^n з межею ∂D, $\dim D = n$, Ω – деяка обмежена область, $\overline{\Omega} \subset \overline{D}$, $\dim \Omega \leq n-1$.

Розглянемо в області D задачу знаходження функцій $(u(x, q(x)); q(x))$ на яких функціонал

$$I(q) = \int_D F(x; u(x, q(x)); q(x)) dx \qquad (1)$$

досягає мінімуму в класі функцій $q \in V = \{q | q \in C^{\alpha}(D),\ \nu_1(x) \leq q(x) \leq \nu_2(x)\}$ із яких $u(x, q(x))$ задовольняє при $x \in D \backslash \overline{\Omega}$ рівняння з параметром λ

$$\Big[\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_i(x)\partial_{x_i} + A_0(x) - \lambda\Big] u(x, q(x)) = f(x, q(x)), \qquad (2)$$

і на межі області ∂D крайову умову

$$\lim_{x \longrightarrow z \in \partial D} \Big[u(x, q(x)) - \varphi(x)\Big] = 0. \qquad (3)$$

Порядок особливостей коефіцієнтів рівняння (2) і крайової умови (3) у точці $P(t, x) \in D \backslash \overline{\Omega}$ характеризуватимуть функції $s(a, x)$: $s(a, x) = \rho^a(x)$ при $\rho(x) \leq 1$, $s(a, x) = 1$ при $\rho(x) \geq 1$, $a \in (-\infty, \infty)$, $\rho(x) = \inf\limits_{z \in \overline{\Omega}} |x - z|$.

Позначимо через γ, l, β_i, μ_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, μ_0, δ_0 – дійсні числа, $\beta_i \in (-\infty, \infty)$, $\mu_i \geq 0$, $\mu_0 \geq 0$, $l \geq 0$, $\delta_0 \geq 0$, $\gamma \geq 0$, $[l]$ – ціла частина числа l, $\{l\} = l - [l]$, $P_1(x^{(1)})$, $H_r(x^{(2)})$ – довільні точки із $\overline{D}$, $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \ldots, x_r^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$, $x^{(2)} = (x_1^{(1)}, \ldots, x_{r-1}^{(1)}, x_r^{(2)}, x_{r+1}^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

Означимо простори, в яких вивчається задача (1)–(3).

$C^l(\gamma; \beta; a; D)$ – множина функцій $u : x \in \overline{D}$, які мають неперервні частинні похідні в області $D \setminus \overline{\Omega}$ вигляду ∂_x^k, $|k| \leq [l]$, для яких скінченна норма

$$||u; \gamma; \beta; a; D||_l = \sum_{|k| \leq [l]} ||u; \gamma; \beta; a; D||_{|k|} + \langle u; \gamma; \beta; a; D \rangle_l,$$

де

$$||u;\gamma;\beta;0;D||_0 = \{\sup_{\overline{P\in\overline{D}}} |u(P)|\} \equiv ||u;D||_0,$$

$$||u;\gamma;\beta;a;D||_k = \sup_{P\in\overline{D}} s(a+|k|\gamma,x)|\partial_x^k u(P)| \prod_{i=1}^n s(-k_j\beta_j,x),$$

$$\langle u;\gamma;\beta;a;D\rangle_l \equiv \sum_{|k|=[l]} \sum_{r=1}^n \sup_{(P_1H_r)\subset D} s(a+[l]\gamma,\widetilde{x})s(\{l\}(\gamma-\beta_r),\widetilde{x})\times$$

$$\times|x_r^{(1)}-x_r^{(2)}|^{-\{l\}}|\partial_x^k u(P_1)-\partial_x^k u(H_r)| \prod_{i=1}^n s(-k_i\beta_i,x),$$

$s(a,\widetilde{x}) = \min(s(a,x^{(1)}), s(a,x^{(2)}))$, $\partial_x^k = \partial_{x_1}^{k_1},\dots,\partial_{x_n}^{k_n}$, $|k| = k_1+\dots+k_n$.

Щодо задачі (1)–(3) вважаємо виконаними умови:

а) для довільного вектора $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$ виконується нерівність

$$\pi_1|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(t,x)s(\beta_i,x)s(\beta_j,x)\xi_i\xi_j \le \pi_2|\xi|^2,$$

π_1,π_2 – фіксовані додатні сталі, $s(\beta_i,x)s(\beta_j,x)A_{i,j}(x) \in C^\alpha(\gamma;\beta;0;D)$, $\beta_i \in (-\infty,\infty)$, $s(\mu_i,x)A_i(x) \in C^\alpha(\gamma;\beta;0;D)$, $\mu_i \ge 0$, $s(\mu_0,x)A_0(x) \in C^\alpha(\gamma;\beta;0;D)$, $\mu_0 \ge 0$, $A_0(x) < \lambda$, $0<\lambda<\infty$, $\partial D \in C^{2+\alpha}$, $\alpha \in (0;1)$;

б) $f(x,q(x)) \equiv F(x) \in C^\alpha(\gamma;\beta;\mu_0;D)$, $\varphi(x) \in C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$, $\gamma = \max\{\max_i \beta_i, \max_i(\mu_i-\beta_i), \frac{\mu_0}{2}\}$;

в) функції $F(x;u;q)$, $f(x,q)$ мають похідні другого порядку за змінними $(u;q)$, які належать як функції змінних x простору $C^\alpha(D)$, $\nu_1 \in C^\alpha(D)$, $\nu_2 \in C^\alpha(D)$.

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай для задачі* (2), (3) *виконані умови а), б). Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (2), (3) *із простору* $C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$ *і справджується нерівність*

$$||u;\gamma;\beta;0;D||_{2+\alpha} \le c(||f;\gamma;\beta;\mu_0;D||_\alpha + ||\varphi;\gamma;\beta;0;D||_{2+\alpha}). \tag{4}$$

Для доведення теореми 1 встановимо спочатку коректну розв'язність крайових задач з гладкими коефіцієнтами. З множини одержаних розв'язків виділимо збіжну послідовність, граничне значення якої буде розв'язком задачі (2), (3).

Оцінка розв'язків крайових задач з гладкими коефіцієнтами.

Нехай $D_m = D \cap \{x \in D \mid s(1,x) \ge m^{-1}\}$, $m \ge 1$ – послідовність областей, яка при $m \longrightarrow \infty$ збігається до D.

Розглянемо в області D задачу знаходження функцій $u_m(x)$, які задовольняють рівняння

$$(Lu_m)(x) \equiv \Big[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x)\partial_{x_i} + a_0(x) - \lambda\Big]u_m(x) = f_m(x,q(x)), \tag{5}$$

і на межі області ∂D крайову умову

$$\lim_{x\longrightarrow z\in\partial D}\Big[u_m(x,q(x))-\varphi_m(x)\Big]=0. \qquad (6)$$

Тут коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0, функції f_m, φ_m в областях D_m співпадають з A_{ij}, A_i, A_0, f, φ відповідно, а в областях $D\backslash D_m$ є неперервним продовженням коефіцієнтів A_{ij}, A_i, A_0, і функцій f, φ із D_m в області $D\backslash D_m$ із збереженням гладкості і норми [6, с. 82].

Позначимо через $H^l(\gamma;\beta;a;D)$ сукупність функцій простору $C^l(D)$ з нормою $\|u_m;\gamma;\beta;a;D\|_l$ еквівалентну при кожному m гельдеровій нормі, яка визначається так само, як і $\|u;\gamma;\beta;a;D\|_l$, тільки замість функції $s(a,x)$ беремо $d(a,x)=\min(s(a,x),m^{-a})$ при $a\leq 0$, $d(a,x)=max(s(a,x),m^{-a})$ при $a\geq 0$.

Для норми $\|u_m;\gamma;\beta;a;D\|_l$ правильні інтерполяційні нерівності.

Лема. *Нехай* $u_m\in H^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$. *Тоді для довільного* ε, $0<\varepsilon<1$, *існує стала* $c(\varepsilon)$, *що виконуються нерівності*

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;D\|_2\leq\varepsilon^\alpha\langle u_m;\gamma;\beta;0;D\rangle_{2+\alpha}+c(\varepsilon)\|u_m;D\|_0,$$

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;D\|_1\leq\varepsilon\|u_m;\gamma;\beta;0;D\|_2+\frac{c}{\varepsilon}\|u_m;D\|_0. \qquad (7)$$

Нерівність (7) одержується за схемою доведення леми із [7].

В задачі (5), (6) зробимо заміну $u_m(x)=v_m(x)+\varphi_m(x)$, тоді $v_m(x)$ буде розв'язком задачі

$$(Lv_m)(x)=f_m(x,q(x))-(L\varphi_m)(x)\equiv F_m(x;q(x)), \qquad (8)$$

$$\lim_{x\longrightarrow z\in\partial D}v_m(x)=0. \qquad (9)$$

При виконанні умов а), б) існує єдиний розв'язок задачі (8), (9) в просторі $H^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$ ([8], теорема 2.20, ст. 233). Встановимо оцінку норми $\|v_m;\gamma;\beta;0;D\|_{2+\alpha}$.

Правильна така теорема.

Теорема 2. *Якщо виконані умови а)–в), то для розв'язку задачі* (5), (6) *правильна оцінка*

$$||v_m;\gamma;\beta;0;D||_{2+\alpha}\leq c(\|F_m;\gamma;\beta;2\gamma;D\|_\alpha+\|v_m;D\|_0). \qquad (10)$$

Стала c не залежить від m.

Доведення. Використовуючи означення норми та нерівності (7), маємо

$$||v_m;\gamma;\beta;0;D||_{2+\alpha}\leq(1+\varepsilon^\alpha)\langle v_m;\gamma;\beta;0;D\rangle_{2+\alpha}+(\varepsilon)||v_m;D||_0,$$

де ε – довільне дійсне число із (0,1). Тому досить оцінити півнорму $\langle u_m;\gamma;\beta;0;D\rangle_{2+\alpha}$. Із визначення півнорми випливає існування в $\overline{D}$ точок $P_1(x^{(1)})$ та $H_r(x^{(2)})$, для яких правильна нерівність

$$\frac{1}{2}||v_m;\gamma;\beta;0;D||_{2+\alpha}\leq E(v_m), \qquad (11)$$

$$E(v_m)=\sum_{|k|=2}\Big[\sum_{r=1}^{n}d(2\gamma,\widetilde{x})d(\alpha(\gamma-\beta_r),\widetilde{x})|x_r^{(1)}-x_r^{(2)}|^{-\alpha}\times$$
$$\times|\partial_x^k v_m(P_1)-\partial_x^k v_m(H_r)|\prod_{i=1}^{n}d(-k_i\beta_i,\widetilde{x})\Big].$$

Якщо $|x_r^{(1)}-x_r^{(2)}|\geq\frac{\varepsilon_1 n^{-1}}{4}d(\gamma-\beta_r,\widetilde{x})\equiv N$, ε_1 – довільне дійсне число, $\varepsilon\in(0,1)$, то

$$E(v_m)\leq 2\varepsilon_1^{-\alpha}\|v_m;\gamma;\beta;0;D\|_2.$$

Застосовуючи інтерполяційні нерівності (7), знаходимо

$$E(v_m)\leq\varepsilon^{\alpha}\langle v_m;\gamma;\beta;0;D\rangle_{2+\alpha}+c(\varepsilon)\|v_m;D\|_0. \tag{12}$$

Нехай $|x_r^{(1)}-x_r^{(2)}|\leq N$. Будемо вважати, що $d(\gamma,\widetilde{x})\equiv d(\gamma,x^{(1)})$. Нехай $|x_n-\xi_n|\leq 2N$, $\xi\in\partial D$ або $|x-\xi|\leq 2Nn$. Розглянемо кулю $K(a,P)$ радіуса a, $a>4Nn$, що містить точки P_1, H_r з центром у деякій точці $P\in\partial D$. Використовуючи обмеження на гладкість межі ∂D, можна розпрямити $\partial D\cap K(a,P)$ за допомогою взаємно однозначного перетворення $x=\psi(y)$ [6, с. 155], в результаті якого область $\Pi=D\cap K(a,P)$ переходить у область Π_1, для точок якої $y_n\geq 0$.

Покладемо $v_m(x)=V_m(y)$. Вважатимемо, що P_1, H_r, E, $d(\gamma,x^{(1)})$ переходять при цьому перетворенні в R_1, M_r, E_1, $d_1(\gamma,y^{(1)})$.

Позначимо коефіцієнти рівняння (8) в області Π_1 через $r_{ij}(y)$, $r_i(y)$, $r_0(y)$. Тоді V_m буде розв'язком задачі

$$\Big[\sum_{ij=1}^{n}r_{ij}(R_1)\partial_{y_i}\partial_{y_j}-\lambda\Big]V_m(y)=\sum_{ij=1}^{n}\Big[r_{ij}(R_1)-r_{ij}(y)\Big]\partial_{y_i}\partial_{y_j}V_m-\sum_{i=1}^{n}r_i(t,y)\partial_{y_i}V_m-$$
$$-r_0(y)V_m+F_m(\psi(y),q_1(\psi(y)))\equiv F_m^{(1)}(y), \tag{13}$$

$$V_m(y)|_{y_n=0}=0. \tag{14}$$

У задачі (13), (14) зробимо заміну $V_m(y)=\omega_m(z)$, $z_i=d_1(\beta_i,y^{(1)})y_i$, $i\in\{1,\ldots,n\}$. Тоді функція $W_m(z)=\eta(z)\omega_m(z)$ буде розв'язком задачі

$$\Big[\sum_{ij=1}^{n}r_{ij}(R_1)d_1(\beta_i,y^{(1)})d_1(\beta_j,y^{(1)})\partial_{z_i}\partial_{z_j}-\lambda\Big]W_m=$$
$$=\sum_{ij=1}^{n}r_{ij}(R_1)d_1(\beta_i,y^{(1)})d_1(\beta_j,y^{(1)})[\partial_{z_i}\omega_m\partial_{z_j}\eta+\partial_{z_j}\omega_m\partial_{z_i}\eta]+$$
$$+\omega_m\sum_{ij=1}^{n}r_{ij}(R_1)d_1(\beta_i,y^{(1)})d_1(\beta_j,y^{(1)})\partial_{z_i}\partial_{z_j}\eta+\eta F_m^{(1)}(\widetilde{z})\equiv F_m^{(2)}(z), \tag{15}$$

$$W_m(z)\,|_{z_n=0}=0, \tag{16}$$

де

$$\eta(z) = \begin{cases} 1, & z \in H^{(1)}_{1/2}, 0 \le \eta(z) \le 1; \\ 0, & z \notin H^{(1)}_{3/4}, |\partial^k_z \eta| \le c_k d_1^{-1}(|k|\gamma, y^{(1)}), \end{cases}$$

$H^{(1)}_\delta = \{z||z_i - z^{(1)}_i| \le 4\delta n^{-1} d_1(\gamma, y^{(1)}),\ \ i \in \{1,\dots,n\}\}$, $z^{(1)}_i = d_1(\beta_i, y^{(1)}) y^{(1)}_i$, $\widetilde{z} = (d_1^{-1}(\beta_1, y^{(1)}) z_1, \dots, d_1^{-1}(\beta_n, y^{(1)}) z_n)$.

Коефіцієнти рівняння (15) обмежені сталими, не залежними від $R_1(y^{(1)})$. Тому, використовуючи теорему 7.3 із [9, с. 77], для довільних точок $S_1(\xi^{(1)}) \in H^{(1)}_{1/2}$, $S_2(\xi^{(2)}) \in H^{(1)}_{1/2}$ правильна нерівність

$$|\xi^{(1)} - \xi^{(2)}|^{-\alpha} |\partial^2_z \omega_m(S_1) - \partial^2_z \omega_m(S_2)| \le c(\|F^{(2)}_m\|_{C^\alpha(H^{(1)}_{3/4})} + \|\omega_n; H^{(1)}_{3/4}\|). \tag{17}$$

Враховуючи властивості функції $\eta(z)$ нерівності (7), одержимо

$$\|F^{(2)}_m\|_{C^\alpha(H^{(1)}_{3/4})} \le c d_1^{-1}((2+\alpha)\gamma, y^{(1)})(\|\omega_m; \gamma; 0; 0; H^{(1)}_{3/4}\|_2 + \|\omega_m; H^{(1)}_{3/4}\|_0 +$$
$$+ \|F^{(1)}_m; \gamma; 0; 2\gamma; H^{(1)}_{3/4}\|_\alpha). \tag{18}$$

Із визначення простору $H^{2+\alpha}(\gamma, \beta; 0; D)$ випливає справедливість нерівностей

$$c_2 \|\omega_m; \gamma, 0; 0; H^{(1)}_{3/4}\|_l \le \|u_m; \gamma, \beta; 0; T_{3/4}\|_l \le c_3 \|\omega_m; \gamma, 0; 0; H^{(1)}_{3/4}\|_l,$$

$T_\delta = \{x \in \Pi, |x_i - x^{(1)}_i| \le 4\delta n^{-1} d(\gamma - \beta_i, x^{(1)}),\ \ i \in \{1,\dots,n\}\}$.

Підставимо (18) у (17) і повернемось до змінної x, дістанемо

$$E(v_m) \le c(\|F^{(1)}_m; \gamma, \beta; 2\gamma; T_{3/4}\|_\alpha + \|v_m; \gamma, \beta; 0; T_{3/4}\|_2 + \|v_m; T_{3/4}\|_0). \tag{19}$$

Для знаходження норми $\|F^{(1)}_m; \gamma, \beta; 2\gamma; T_{3/4}\|_\alpha$ досить оцінити півнорми кожного доданка виразу $F^{(1)}_m$. Скориставшись нерівностями (7), одержимо

$$\|F^{(1)}_m; \gamma, \beta; 2\gamma; T_{3/4}\|_\alpha \le c_4(\|f_m; \gamma, \beta; 2\gamma; T_{3/4}\|_\alpha + \|v_m; T_{3/4}\|_0) +$$
$$+ \varepsilon_2 \|v_m; \gamma, \beta; 0; T_{3/4}\|_{2+\alpha}. \tag{20}$$

Підставляючи (20) у (19) знаходимо

$$E(v_m) \le c_6(\|F_m; \gamma, \beta; 2\gamma; T_{3/4}\|_\alpha + \|v_m; T_{3/4}\|_0) + \varepsilon_2 \|v_m; \gamma, \beta; 0; T_{3/4}\|_{2+\alpha}. \tag{21}$$

Розглянемо випадок $|x_n - \xi_n| \ge 2N$ або $|x - \xi| \ge 2Nn$, $\xi \in \partial D$. Нехай $T^{(1)}_\delta = \{x \in D||x_i - x^{(1)}_i| \le 4\delta N\}$. В задачі (5), (6) зробимо заміну $v_m(x) = V_m(t)$, $t_i = d(\beta_i, x^{(1)}) x_i$, $i \in \{1,\dots,n\}$. Тоді функція $W^{(1)}_m(t) = V_m(t)\eta_1(t)$ буде розв'язком задачі

$$\sum_{ij=1}^n a_{ij}(P_1) d(\beta_i, x^{(1)}) d(\beta_j, x^{(1)}) \partial_{t_i} \partial_{t_j} W^{(1)}_m - \lambda W^{(1)}_m =$$
$$= \sum_{ij=1}^n a_{ij}(P_1) d(\beta_i, x^{(1)}) d(\beta_j, x^{(1)}) [\partial_{t_i} V_m \partial_{t_j} \eta_1 + \partial_{t_j} V_m \partial_{t_i} \eta_1] +$$

$$+V_m\sum_{ij=1}^{n}a_{ij}(P_1)d(\beta_i,x^{(1)})d(\beta_j,x^{(1)})\partial_{t_i}\partial_{t_j}\eta_1+\eta_1F_m^{(3)}(\widetilde{t})\equiv F_m^{(4)}(t), \tag{22}$$

$$W_m|_{\partial D}=0,$$

де

$$F_m^{(3)}(x)=\sum_{ij=1}^{n}[a_{ij}(P_1)-a_{ij}(x)]\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_m-\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\partial_{x_i}u_m-a_0(x)u_m+F_m(x,q(x)),$$

$$\eta_1(t)=\begin{cases}1, & t\in H_{1/2}^{(2)}, 0\le\eta_1(t)\le 1,\\ 0, & t\notin H_{3/4}^{(2)}, |\partial_t^k\eta_1|\le c_kd^{-1}(|k|\gamma,x^{(1)}),\end{cases}$$

$$H_\delta^{(2)}=\{t||t_i-x_i^{(1)}|\le 4\delta n^{(-1)}d(\gamma,x^{(1)}), i\in\{1,\dots,n\}\},$$

$$\widetilde{t}=(d^{-1}(\beta_1,x^{(1)})t_1,\dots,d^{-1}(\beta_n,x^{(1)})t_n),\quad t_i^{(1)}=d(\beta_i,x^{(1)})x_i^{(1)}.$$

Коефіцієнти рівняння (22) обмежені сталими, не залежними від $P_1(x^{(1)})$. Тому використовуючи теорему 7.3 із [9, с. 77] та оцінки (7.8) із [9, с. 77], для довільних точок $S_1(\tau^{(1)})$ і $S_2(\tau^{(2)})\in H_{1/2}^{(2)}$ справедлива нерівність

$$|\tau^{(1)}-\tau^{(2)}|^{-\alpha}|\partial_t^2V_m(\tau^{(1)})-\partial_t^2V_m(\tau^{(2)})|\le c(\|F_m^{(3)}(x)\|_{C^\alpha(H_{3/4}^{(2)})}+$$

$$+\|V_m;H_{3/4}^{(2)}\|_0).$$

Враховуючи властивості функції $\eta_1(t)$, означення простору $H^{2+\alpha}(\gamma;\beta;a;D)$ і повторюючи міркування при одержанні нерівності (21), знаходимо

$$E(v_m)\le c_7(\|F_m;\gamma,\beta;2\gamma;T_{3/4}^{(1)}\|_\alpha+\|v_m;T_{3/4}^{(1)}\|_0)+\varepsilon_3\|v_m;\gamma,\beta;0;T_{3/4}^{(1)}\|_{2+\alpha}. \tag{23}$$

Враховуючи нерівності (11), (12), (21), (23) і вибираючи ε, ε_2, ε_5 достатньо малими, дістанемо оцінку (10).

□

Знайдемо оцінку норми $\|u_m;D\|_0$. Правильна така теорема.

Теорема 3. *Якщо u_m – класичний розв'язок задачі* (5), (6) *в області D і виконані умови а),б), то для $u_m(x)$ правильна нерівність*

$$\|u_m;D\|_0\le\max\{\|f_m(a_0-\lambda)^{-1};D\|_0,\|\varphi_m;D\|_0\}. \tag{24}$$

Правильність оцінки (24) встановлюється за допомогою аналізу всіх можливих розміщень додатного максимуму і від'ємного мінімуму функції $u_m(x)$.

Доведення теореми 1. Оскільки

$$\|F_m;\gamma;\beta;2\gamma;D\|_\alpha\le c(\|f;\gamma;\beta;\mu_0;D\|_\alpha+\|\varphi;\gamma;\beta;0;D\|_{2+\alpha}),$$

то використовуючи оцінки (8), (24), одержимо

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;D\|_{2+\alpha}\le c(\|f;\gamma;\beta;\mu_0;D\|_\alpha+\|\varphi;\gamma;\beta;0;D\|_{2+\alpha}). \tag{25}$$

Права частина нерівності (25) не залежить від m, а послідовності $\{W_m^{(k)}\} = \{d(|k|\gamma; x)\prod_{i=1}^{n} d(-k_i\beta_i, x)\partial_x^k u_m(x)\}$, $|k| \leq 2$ рівномірно обмежені і рівностепенно неперервні. За теоремою Арцела існують підпослідовності $\{W_{m(j)}^{(k)}\}$, рівномірно збіжні при $m(j) \longrightarrow \infty$ до $W^{(k)}$. Переходячи до границі при $m(j) \longrightarrow \infty$ в задачах (5), (6), одержимо, що $u = W^{(0)}$ – єдиний розв'язок задачі (2), (3), $u \in C^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; D)$ і правильна оцінка (4).

Задача оптимального керування. Для розв'язності задачі (1) – (3) побудуємо послідовність розв'язків задач, граничне значення якої буде розв'язком задачі (1) – (3).

Розглянемо в області D задачу знаходження функцій $(u_m(x, q(x)); q(x))$, на яких функціонал

$$I(q) = \int_D F_1(x; u_m(x, q(x)); q(x))dx \tag{26}$$

досягає мінімального значення в класі функцій $q \in V$, де $u_m(x, q(x))$ задовольняє рівняння (5) і крайову умову (6).

Будемо вважати, що виконуються умови а) – в), при виконанні яких для будь-якого $q \in V$ існує єдиний розв'язок задачі (5), (6) із простору $H^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; D)$ і для нього правильна оцінка (4).

Позначимо через:

$G_m(x, \xi)$ із [8, с. 234] функція Гріна задачі (8), (9);

$$\mu(\xi) = \int_D \frac{\partial F_1(x; u_m; q)}{\partial u_m} G_m(x, \xi)dx;$$

$$H(\xi; u_m, \mu, q) \equiv \mu(\xi)f_m(\xi, q(\xi)) + F(\xi; u_m; q);$$

$q^{(0)}$ – оптимальне керування;

$u_m(x, q^{(0)})$ – оптимальний розв'язок задачі (5), (6), (26).

Правильна така теорема.

Теорема 4. *Нехай виконані умови а) – в). Тоді:*
1) якщо $\partial_q H_k(\xi; u_m, \mu; q) > 0$, то оптимальне керування $q^{(0)} = \nu_1(x)$;
2) якщо $\partial_q H(\xi; u_m, \mu; q) < 0$, то оптимальне керування $q^{(0)} = \nu_2(x)$.

Доведення. Нехай $\triangle q$ – довільний приріст керування q. Через $\triangle_q u_m$ позначимо приріст функції $u_m(x, q(x))$. Тоді $\triangle_q u_m$ в області D буде розв'язком крайової задачі

$$\Big[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\partial_{x_i} + a_0(x) - \lambda\Big]\triangle_q u_m = \triangle_q f_m(x, q_1(x)),$$

$$\triangle_q u_m|_{\partial D} = 0. \tag{27}$$

За теоремою 2.20 із [8, с. 233] існує функція Гріна задачі (27) і приріст $\triangle_q u_m$ зображається формулою

$$\triangle_q u_m = \int\limits_D G_m(x,\xi)\triangle_q f_m(\xi; q(\xi))d\xi. \tag{28}$$

За допомогою формулию Тейлора знаходимо приріст функціонала $I(q)$:

$$\triangle_q I = \int\limits_D \Big[\frac{\partial F}{\partial u_m}\triangle_q u_m + O(|\triangle_q u_m|^2) + \frac{\partial F}{\partial q}\triangle q + O(|\triangle q|^2)\Big]dx. \tag{29}$$

Підставивши (28) у (29) і, змінюючи при цьому порядок інтегрування, знаходимо

$$\triangle_q I(q) = \int\limits_D [\partial_q H(\xi; u_m; \mu; q)\triangle q + O(|\triangle q|^2)]dx.$$

Якщо $q_k = \nu_1(x)$ і $\partial_q H > 0$, то при досить малих $\triangle q$ маємо $\triangle I(q) > 0$.

Нехай $q^{(0)}$ – оптимальне керування, тобто $\triangle_q I > 0$. Перевіримо виконання умови 1) теореми 4. Якщо $\partial_q H$ – знакозмінні величини, тобто $\partial_q H > 0$ в D^+, $\Gamma \subset \partial D$ і $\partial_q H < 0$ в $D \setminus D^+$, то використовуючи теорему про "середнє" значення, маємо

$$\triangle_q I(q) = \partial_q H(x^+; u_m^+, \mu^+, q^+) \int\limits_{D^+} \triangle q dx -$$

$$-|\partial_q H(x^-; u_m^-, \mu^-, q^-)| \int\limits_{D\setminus D^+} \triangle q dx + \int\limits_D O(|\triangle q|^2)dx.$$

При досить малому $\triangle q$ знак $\triangle_q I$ визначається першими двома доданками суми. Різниця перших двох доданків змінює знак $\triangle_q I$ в залежності від величин $mesD^+$, $\triangle q$. При досить малих величинах $mesD^+$ і $\triangle q > 0$ маємо $\triangle_q I < 0$ і навпаки $\triangle_q I > 0$, якщо малі величини $mes(D \setminus D^+)$ і $\triangle q > 0$. Отже, функціонал $I(q)$ не досягає мінімуму.

□

Нехай умови теореми 4 не виконані. Тоді правильна така теорема.

Теорема 5. *Нехай виконані умови а) – в). Для того, щоб керування $q^{(0)}$ було оптимальним, необхідно та достатньо, щоб виконувались умови:*
1) функція $H(\xi; u_m, \mu, q)$ за аргументом q має в точці $q^{(0)}$ мінімальне значення;
2) для довільного вектора $(e_1, e_2) \neq 0$ виконується нерівність

$$\partial^2_{u_m} F(x; u_m; q)(e_1)^2 + 2\partial_q \partial_{u_m} F(x; u_m; q)e_1 e_2 + \partial^2_q F(x; u_m; q)(e_2)^2 > 0.$$

Доведення теореми 5 проводиться за допомогою методики праці [4]. Переходячи до границі в задачі (5), (6), (26) при $m(j) \longrightarrow \infty$ одержимо оптимальний розв'язок задачі (1) – (3).

Список літератури

[1] Lions J.-L. Optimal control of systems governed by partial differential equations. Mir, Moscow, 1972. 416 p. (in Russian)

[2] Pukalskyi I. D. *A parabolic boundary-value problem and a problem of optimal control.* Journal of mathematical sciences 2011, **174**, 2, 159–168. doi: 10.1007/s10958-011-0287-9

[3] Pukalskyi I. D. *The Green's function of a parabolic boundary value problem and an optimization problem.* Ukrainian Mathematical Journal, Kyiv, 2000, **52**, 4, 567-571.

[4] Pukalskyi I. D., Matiychuk M. I. *On applications of the Green's functions of parabolic boundary value problems to optimal equation problems.* Ukrainian Mathematical Journal, 1985, **37**, 6, 738-744.

[5] Pukal'skii I.D., Yashan B.O. *Multipoint boundary value problem of optimal control for parabolic equations with degeneration* Mathematical methods and physicomechanical fields, 2020, **63**, 4, 17-33.

[6] Friedman A. Partial differential equations of parabolic type. – M.:World, 1968. – 427p.

[7] Pukal'skii I.D. *The Cauchy problem for non-uniformly parabolic equations with power singularities.* Mathematical methods and physicomechanical fields, 2021, **64**, 2, 31-41.

[8] Matiychuk M. I. Parabolic and elliptic problems in Dini spaces: – Chernivtsi, 2010 – 248 p.

[9] Agmon S., Douglas A., Nirenberg L. Estimates near the boundary of solutions of elliptic equations in partial derivatives under common boundary conditions. M. : IL, 1962. 205 p.

[10] Baev A., Kovalevskii R., Kobylinskii P. *On degenerate elliptic equations of high order and pseudodifferential operators with degeneration.* Doklady Mathematics, 2016, **93**, 659-662. doi: 10.1134/S1064562416060168

[11] Urev M. *Convergence of the finite element method for an elliptic equation with strong degeneration.* Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2014, **8**, 411-421. doi: 10.1134/S1990478914030144

[12] Muratbekov M., Igissinov S. *Estimates of Eigenvalues of a Semiperiodic Dirichlet Problem for a Class of Degenerate Elliptic Equations.* Symmetry, 2022, **14**, 8 pages. doi: https://doi.org/10.3390/sym14040692

[13] Aldashev S., Kitaibekov E. *Well-Posedness of the Dirichlet Problem in a Cylindrical Domain for Three-Dimensional Elliptic Equations with Degeneration of Type and Order.* Ukrainian Mathematical Journal, 2018, **69**, 1473-1478 doi: 10.1007/s11253-018-1446-7

[14] Gorban Y. *Existence of entropy solutions for nonlinear elliptic degenerate anisotropic equations.* Open Mathematics, 2017, **15**, 768-786 doi: 10.1515/math-2017-0064

Надійшло 10.04.2023

Pukalskyy I.D., Yashan B.O. *Optimal control in the Dirichlet problem for elliptic equations with degeneration*, Bukovinian Math. Journal. **11**, 1 (2023), 115–125.

The theory of optimal control of systems, which is described by partial differential equations, is rich in results and is actively developing nowadays. The popularity of this kind of research is connected with its active use in solving problems of natural science, in particular hydro and gas dynamics, heat physics, diffusion, and the theory of biological populations.

The problem of optimal control of the system described by the Dirichlet problem for the elliptic equation of the second order is studied. Cases of internal control are considered. The quality criterion is given by the volumetric integral. The coefficients of the equation admit power singularities of arbitrary order in any variables at some set of points. Solutions of auxiliary problems with smooth coefficients are studied to solve the given problem. Using a priori estimates, inequalities are established for solving problems and their derivatives in special Hölder spaces. Using the theorems of Archel and Riess, a convergent sequence is distinguished from a compact sequence of solutions to auxiliary problems, the limiting value of which will be the solution to the given problem.

The necessary and sufficient conditions for the existence of the optimal solution of the system described by the Dirichlet problem for the elliptic equation with degeneracy have been established.