Задача з імпульсним впливом для параболічного рівняння з виродженням

Пукальський Іван

i.pukalsky@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Яшан Богдан

b.yashan@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Нехай $\eta, t_0, t_1, \ldots, t_{N+1}$ – фіксовані числа, $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_{N+1}$, $\eta \in (t_0, t_{N+1})$, $\eta \ne t_\lambda$, $\lambda \in \{1, ..., N\}$, Ω – деяка обмежена область $dim\Omega \le n-1$, $D = \{(t,x) | t \in [t_0, t_{N+1}), x \in \overline{\Omega}\} \cup \{(t,x) | t = \eta, x \in R^n\}$.

Розглянемо в області $\Pi = [t_0, t_{N+1}) \times R^n$ задачу знаходження функції $u(t,x)$, яка задовольняє при $(t,x) \in \Pi \setminus D, t \ne t_\lambda$ рівняння

$$[\partial_t - \sum_{|k|=2b} a_k(t,x)\partial_x^k - \sum_{|p|\le 2b-1} a_p(t,x)\partial_x^p]u(t,x) = f(t,x) \tag{1}$$

і умови за змінною t:

$$u(t_0+0,x) = \varphi_0(x), \quad x \in R^n \setminus \overline{\Omega}, \tag{2}$$

$$u(t_\lambda+0,x) - u(t_\lambda-0,x) = b_\lambda(x)u(t_\lambda-0,x) + \varphi_\lambda(x), x \in ((\Pi \setminus D) \cap (t = t_\lambda)), \tag{3}$$

Степеневі особливості коефіцієнтів рівняння (1) у точці $P(t,x) \in \Pi \setminus D$ характеризуватимуть функції $s_1(\beta_i^{(1)}, t)$ і $s_2(\beta_i^{(2)}, x)$: $s_1(\beta_i^{(1)}, t) = |t-\eta|^{\beta_i^{(1)}}$ при $|t-\eta| \le 1$, $s_1(\beta_i^{(1)}, t) = 1$ при $|t-\eta| \ge 1$; $s_2(\beta_i^{(2)}, x) = \rho(x)^{\beta_i^{(2)}}$ при $\rho(x) \le 1$, $s_2(\beta_i^{(2)}, x) = 1$ при $\rho(x) \ge 1$, $\rho(x) = \inf_{z \in \overline{\Omega}} |x - z|$, $i \in \{1, ..., n\}$, $\beta_i^{(\nu)} \in (-\infty, \infty)$, $\nu \in \{1, 2\}$, $\beta^{(\nu)} = (\beta_1^{(\nu)}, \ldots, \beta_n^{(\nu)})$, $\beta = \{\beta^{(1)}, \beta^{(2)}\}$.

Позначимо через $\Pi_r = [t_r, t_{r+1}) \times R^n$, $r \in \{0, 1, \ldots, N\}$, $q^{(\nu)}$, $\gamma^{(\nu)}$, $\mu_{p_i}^{(\nu)}$, $\mu_0^{(\nu)}$ – дійсні невід'ємні числа, $[l]$ – ціла частина числа l, $l > 0$, $\{l\} = l - [l]$, $P_1(t^{(1)}, x^{(1)})$, $P_2(t^{(2)}, x^{(1)})$, $H_i(t^{(1)}, x^{(2)})$ – довільні точки із Π, $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$, $x^{(2)} = (x_1^{(1)}, \ldots, x_{i-1}^{(1)}, x_i^{(2)}, x_{i+1}^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$, Q_r – довільна замкнена область, $\overline{Q}_r \subset \Pi_r$.

Означимо простори, в яких вивчається задача (1) – (3). $C^l(\gamma; \beta; q; \Pi)$ – множина функцій $u : (t,x) \in \Pi$, які мають неперервні частинні похідні в області $Q_r \backslash D$ вигляду $\partial_t^j \partial_x^k u$, $2bj + |k| \le [l]$, для яких скінченна норма

$$\|u; \gamma; \beta; q; \Pi\|_l = \sup_r \sum_{2bj+|k|\le[l]} [\sup_{P \in \overline{Q}_r} S(q; s_1; s_2; 2bj + |k|; t, x)|\partial_t^j \partial_x^k u(P)|] +$$

$$+\sup_r \left\{ \sum_{2bj+|k|=[l]} \left[\sum_{i=1}^{n} \sup_{(P_1,H_i)\in\overline{Q}_r} \Big(S(q;s_1;s_2;|l|;t^{(1)},\widetilde{x}) s_1(\{l\}(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)}),t^{(1)}) \times \right.\right.$$

$$\times s_2(\{l\}(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}),\widetilde{x}) |x_i^{(1)}-x_i^{(2)}|^{-\{l\}} |\partial_t^j \partial_x^k u(P_1)-\partial_t^j\partial_x^k u(H_i)| \Big) +$$

$$+\sup_{(P_1,P_2)\in\overline{Q}_r} \Big(S(q;s_1;s_2;|l|;\widetilde{t},x^{(1)}) s_1(\{l\}\gamma^{(1)},t^{(1)}) s_2(\{l\}\gamma^{(2)},x^{(1)}) \times$$

$$\left.\left. \times |t^{(1)}-t^{(2)}|^{-\{\frac{l}{2b}\}} |\partial_t^j\partial_x^k u\,(P_1)-\partial_t^j\partial_x^k u\,(P_2)| \Big) \right] \right\}.$$

Тут позначено: $s_1(a,\tilde{t})=\min\{s_1(a,t^{(1)}),s_1(a,t^{(2)})\}$,
$s_2(a,\tilde{x})=\min\{s_2(a,x^{(1)}),s_2(a,x^{(2)})\}$,
$S(q;s_1,s_2;[l];t,x)=s_1(q^{(1)}+[l]\gamma^{(1)},t)s_2(q^{(2)}+[l]\gamma^{(2)},x)\times$
$\times\prod_{i=1}^n s_1(-k_i\beta_i^{(1)},t)s_2(-k_i\beta_i^{(2)},x)$.

Щодо задачі (1)-(3), вважаємо виконаними умови:

а) коефіцієнти рівняння (1) $a_k(t,x)\prod\limits_{i=1}^{n} s_1(k_i\beta_i^{(1)},t)s_2(k_i\beta_i^{(2)},x)\in$
$\in C^\alpha(\gamma;\beta;0;\Pi)$, $a_p(t,x)\prod\limits_{i=1}^{n} s_1(p_i\mu_{p_i}^{(1)},t)s_2(p_i\mu_{p_i}^{(2)},x)\in C^\alpha(\gamma;\beta;0;\Pi)$,
$1\le |p|\le 2b-1$, $a_0(t,x)s_1(\mu_0^{(1)},t)\ s_2(\mu_0^{(2)},x)\in C^\alpha(\gamma;\beta;0;\Pi)$, $a_0(t,x)\le K<\infty$ і виконується умова рівномірної параболічності для рівняння

$$[\partial_t-\sum_{|k|=2b} a_k(t,x)\prod_{i=1}^{n} s_1(k_i\beta_i^{(1)},t)s_2(k_i\beta_i^{(2)},x)\partial_x^k]u(t,x)=\tilde{f}(t,x),$$

б) функції $f(t,x)\in C^\alpha(\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi)$, $\varphi_0\in C^{2b+\alpha}(\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;R^n)$, $\widetilde{\gamma}=(0,\gamma^{(2)})$, $\widetilde{\beta}=(0,\beta^{(2)})$, $b_\lambda\in C^{2b+\alpha}(\Pi\cap(t=t_\lambda))$, $\varphi_\lambda\in C^{2b+\alpha}(\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;\Pi\cap\{t=t_\lambda\})$, $\gamma^{(\nu)}=\max\{\max\limits_i \beta_i^{(\nu)},\max\limits_{p_i}\dfrac{p_i(\mu_{p_i}^{(\nu)}-\beta_i^{(\nu)})}{2b-|p|},\dfrac{\mu_0^{(\nu)}}{2b}\}$, $\nu\in\{1,2\}$.

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай для задачі* (1)–(3) *виконані умови а), б). Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (1)–(3) *із простору* $C^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$ *і справджується нерівність*

$$\|u;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2b+\alpha}\le c\left\{\sum_{r=1}^{N}\left[\prod_{\lambda=r}^{N}(\|1+b_\lambda\|_{C^{2b+\alpha}(\Pi\cap(t=t_\lambda))})\times\right.\right.$$
$$\left.\times(\|f;\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi_{r-1}\|_\alpha+\|\varphi_{r-1};\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;\Pi\cap\{t=t_{r-1}\}\|_{2b+\alpha})\right]+ \qquad (4)$$
$$\left.+\|f;\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi_N\|_\alpha+\|\varphi_N;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;\Pi\cap\{t=t_N\}\|_{2b+\alpha}\right\}$$

Для доведення теореми встановлюється розв'язність допоміжних крайових задач з гладкими коефіцієнтами. З множини одержаних розв'язків виділяється збіжна послідовність, граничне значення якої є розв'язком задачі (1)–(3).