Усереднення для стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з врахуванням зовнішніх збурень типу випадкових величин

Дорошенко Ірина

i.doroshenko@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

В роботі отримані достатні умови усереднення для СДФР зі скінченною післядією під дією зовнішніх збурень типу випадкових величин. Результати носять теоретичний характер.

Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}?, t \geq 0\}, \boldsymbol{P})$ задано СДФР при випадкових зовнішніх збуреннях

$$dx(t,\omega) = \varepsilon \left[\varphi(\omega) a\left(t, x_t\right) dt + \psi(\omega) b\left(t, x_t\right) dw(t,\omega)\right] \tag{1}$$

за початковою умовою

$$x(t+\theta) = \beta(\theta)\mid_{t=0} \text{ при } \theta \in [-r;0]. \tag{2}$$

Тут $x_t \equiv \{x(t+\theta)\}$ при $\theta \in [-r;0]$; $a(\cdot,\cdot)$, $b(\cdot,\cdot)$ – вимірні відображення $R_+ \times D \to R^n$, що задовільняють глобальну модифіковану умову Ліпшиця та умову рівномірної обмеженості.

Будемо використовувати рівномірну метрику

$$\|\alpha\| = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\alpha(\theta)|. \tag{3}$$

Для $\alpha \in D([-r;0])$ позначимо на функцію $\hat{\alpha} \equiv \alpha(0)$.

$\hat{x}_t = x(t)$ для всіх $\theta \in [-r;0]$.

Поряд з СДФР (1) розглянемо рівняння

$$dy(t,\omega) = \varepsilon[\varphi(\omega)\hat{a}(t, y(t,\omega)dt + \psi(\omega)\hat{b}(t, y(t,\omega)dw(t,\omega)] \tag{4}$$

за початковими умовами (2).

Тут $\hat{a}(t,y(t)) \equiv a\left(t,\hat{y}_t\right)$; $\hat{b}(t,y(t)) \equiv b\left(t,\hat{y}_t\right)$; $\varphi(\omega)$, $\psi(\omega)$ – попарно незалежні випадкові величини від вінеревського процесу $w(t,\omega)$ на $t \in [0,\infty)$.

Нехай виконуються умови I-VII [3] та існує

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{s}^{s+T} K_1 \hat{a}(t,x)dt = \check{a}(x). \tag{5}$$

Поряд з СДФР (4) розглянемо рівняння усередненого руху

$$\frac{d\bar{x}(t,\omega)}{dt} = \varphi(\omega)\check{a}(\bar{x}(t,\omega)) \tag{6}$$

або
$$d\bar{x}(t) = K_1 \check{a}(\bar{x}(t)), \tag{7}$$
де $K_1 \equiv \sup\limits_{\omega\in\Omega} |\varphi(\omega)|$.

Перш ніж оцінити нормовану різницю
$$\eta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[x\left(\frac{t}{\varepsilon}, 0, \alpha\right) - x\left(t, 0, \alpha(0)\right)\right], \tag{8}$$
доведемо допоміжне твердження.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови глобальної модифікованої умови Ліпшиця та умови рівномірної обмеженості для функцій $a(t,x)$, $b(t,x)$, то для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\alpha \in D[-r; 0]$, K_1, $K_2 > 0$ та $T > 0$, то має місце нерівність*
$$E\left\{ \sup_{0\le s\le T} K^* \left| x(t,0,\alpha) - y(t,0,\alpha(0))\right|^2 \right\} \le g\left(\varepsilon, T, K^*\right) \varepsilon^2 \left(\|\alpha\| + \beta^2\right), \tag{9}$$
де $g\left(\varepsilon, T, K^*\right)$ задовольняє умову $\lim\limits_{\varepsilon\to\infty} g\left(\varepsilon, T/\varepsilon, K^*\right) = c(T) < \infty$.

Теорема 2. *Нехай виконані умови теореми 1 та крім того: A) відображення $a(t,\beta)$ двічі неперевно диференційоване за Фреше за другим аргументом, причому друга похідна задовольняє умову Ліпшиця рівномірно по t*
$$\left| \frac{\partial^2 a\left(t, \beta_1\right)}{\partial \beta_1^*} - \frac{\partial^2 a\left(t, \beta_2\right)}{\partial \beta_2^*} \right| \le L_1 \left\|\beta_2 - \beta_1\right\|,$$

B) для довільного розв'язку (9) при всіх $t \in [0, T]$ виконується співвідношення:
$$\lim_{\varepsilon\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int\limits_0^t K_1 \left[a\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \hat{\bar{x}}_\tau\right) - \check{a}(\bar{x}(\tau))\right] = 0;$$
$$\lim_{\varepsilon\to\infty} K_1 \int\limits_0^t \nabla \hat{a}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \hat{\bar{x}}(\tau)\right) d\tau = \int\limits_0^t g(\tau) d\tau;$$
$$\lim_{\varepsilon\to\infty} \int\limits_0^T K_2^2 \left[b\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \hat{\bar{x}}_\tau\right) b^T\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \hat{\bar{x}}_\tau\right) = \int\limits_0^t f(\tau) f^T(\tau) d\tau,\right.$$
де $g(t)$ та $f(t)$ – неперевні матричні функції, $\hat{a}(t,x) \equiv a(t,\hat{\beta}) \mid_{\beta(0)=x}$.

Тоді при $\varepsilon \to 0$ нормована різниця слабо збігається до розв'язку неоднорідного стохастичного рівняння
$$d\eta(t,\omega) = \varphi(\omega) g(t) \eta(t,\omega) + \psi(\omega) f(t) dw(t,\omega).$$

1. Королюк В.С., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. В 3-х томах. Т.3 : Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. – Чернівці : Золоті литаври, 2009. – 782 с.
2. Скороход А.В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. – Киев : Наук. думка, 1987. – 328 с.
3. Yasinsky V.K., Doroshenko I.V. Asymptotics of solutions of diffusion stochastic differential-functional systems with a small parameter under the action of external random variables // Sworld Jornal, Issue No11, Part 2, January, 2022. – P. 62-71.